

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Non esistenza di armoniche sferiche di ordine
semintero**

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Candidato:
Gianluca Esposito
Matr. N85000996

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	3
1 Armoniche Sferiche	4
1.1 Lo spettro degli operatori di momento angolare	4
1.2 Autofunzioni	6
1.3 " $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ "	8
2 Spin	11
2.1 $S = \frac{1}{2}$	12
3 Rotazioni e operatori di rotazione	14
3.1 Rotazioni nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$	14
3.2 Rotazioni di Eulero	16
3.3 Rotazioni in meccanica quantistica	17
3.4 Rotazioni di armoniche sferiche	21
3.5 Rotazioni di sistemi a spin $\frac{1}{2}$	22
3.5.1 Rotazioni nel formalismo a due componenti	22
3.6 $SU(2)$ vs $SO(3)$	24
Conclusioni	25
A Cenni di teoria dei gruppi	26
A.1 Alcune definizioni generali	26
A.2 Gruppi e algebre di Lie	27
A.2.1 Rappresentazioni di un gruppo	29
A.2.2 Rappresentazione dell'algebra di Lie associata al gruppo	29
A.3 $SO(3)$	30
A.4 $SU(2)$	30

<i>INDICE</i>	2
Bibliografia	31

Introduzione

In meccanica quantistica sono di particolare rilevanza i problemi a simmetria sferica, in quanto numerosi sistemi fisici presenti in natura manifestano tale caratteristica; tali problemi possono essere risolti mediante l'introduzione degli operatori di momento angolare orbitale.

In questo lavoro di tesi si analizzeranno le proprietà dello spettro degli operatori di momento angolare in maniera algebrica, e successivamente verranno attualizzate nell'ambito degli operatori di momento angolare orbitale e delle sue autofunzioni, le armoniche sferiche. Dalle problematiche di tali funzioni per valori seminteri dello spettro, si mostrerà la necessità di postulare un'altra grandezza riferita ad un altro operatore di momento angolare, lo spin. Si farà uso della teoria dei gruppi per costruire rappresentazioni delle rotazioni sugli spazi di Hilbert associati allo spin e al momento angolare orbitale, e dallo studio dei gruppi e delle algebre di Lie associate sarà possibile affermare che lo spin non può essere ricondotto ad un grado di libertà spaziale. Questo risultato farà luce sulla natura intrinsecamente quantistica di tale grandezza.

Capitolo 1

Armoniche Sferiche

1.1 Lo spettro degli operatori di momento angolare

Un operatore vettoriale hermitiano $\mathbf{J}$ è detto *momento angolare* se rispetta le seguenti regole di commutazione:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k ; \quad (1.1)$$

queste regole di commutazione rendono perciò impossibile diagonalizzare contemporaneamente le tre componenti di questo operatore, in quanto è ben noto che un set di operatori lineari ha una base comune di autovettori se e solo se tali operatori commutano. Si può però introdurre l'operatore *momento angolare totale*

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 , \quad (1.2)$$

che commuta con ognuna delle componenti di $\mathbf{J}$; sarà quindi possibile scegliere una componente, che sarà J_z , da diagonalizzare simultaneamente a J^2 . Obiettivo di questa sezione sarà cercare di definire la forma dello spettro relativo agli autovettori comuni a questi due operatori senza introdurre la loro tradizionale formulazione differenziale in termini degli operatori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$, ma utilizzando solamente le regole di commutazione (1.1) e proprietà fondamentali degli spazi di Hilbert. Si può innanzitutto notare che J^2 è un operatore definito positivo e che quindi i suoi autovalori sono positivi: sono quindi esprimibili nella forma $j(j+1)$ con $j \in \mathbb{R}$ e $j \geq 0$. D'ora in avanti verranno indicati con $|j, m\rangle$ gli autovettori comuni a J^2 e J_z tali che:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle . \quad (1.3)$$

Si introducono i seguenti operatori:

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_x - iJ_y \quad (1.4)$$

che sono uno l'aggiunto dell'altro e di cui si possono dimostrare le seguenti regole di commutazione:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \quad [J_+, J_-] = 2J_z \text{ e ovviamente } [J^2, J_\pm] = 0. \quad (1.5)$$

Vale quindi

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \quad (1.6)$$

da cui si ricavano

$$J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z + 1) \quad J_+J_- = J^2 - J_z(J_z - 1). \quad (1.7)$$

Si considerino ora i vettori $J_\pm |j, m\rangle$: poiché vale $[J^2, J_\pm] = 0$, tale vettore rimane autovettore di J^2 di autovalore $j(j+1)$; invece, stanti le formule (1.5), si verifica che:

$$J_z(J_\pm |j, m\rangle) = (m \pm 1)J_\pm |j, m\rangle. \quad (1.8)$$

Gli operatori J_+ e J_- permettono, a partire da autovettori di J_z di autovalore m , di ottenere autovettori di J_z di autovalori rispettivamente maggiori e minori di un'unità. Le formule (1.7) permettono di scrivere le seguenti relazioni:

$$J_-J_+ |j, m\rangle = [j(j+1) - m(m+1)] |j, m\rangle \quad (1.9)$$

$$J_+J_- |j, m\rangle = [j(j+1) - m(m-1)] |j, m\rangle \quad (1.10)$$

da cui

$$\langle j, m | J_+J_- | j, m \rangle = \|J_- |j, m\rangle\|^2 = (j+m)(j-m+1) \quad (1.11)$$

e

$$\langle j, m | J_-J_+ | j, m \rangle = \|J_+ |j, m\rangle\|^2 = (j+m)(j+m+1). \quad (1.12)$$

Dalla condizione fondamentale sugli spazi di Hilbert per cui la norma di un qualsiasi suo elemento debba essere maggiore o uguale a zero, si ottiene:

$$-j \leq m \leq j; \quad (1.13)$$

ciò significa che $J_+ |j, j\rangle$ e $J_- |j, -j\rangle$ non possono essere autovettori di J_z , e questo si verifica solo se sono vettori nulli.

Appurato che $|j, j\rangle$ è autovettore di J_z , è possibile applicare ripetutamente J_- per percorrere la scala degli autovettori, fino ad arrivare a $|j, -j\rangle$. Poiché l'incremento di m ad ogni passaggio è di una sola unità, ed è stato verificato che la scala che inizia con $-j$ e finisce con j è l'unica possibile per gli autovalori di J_z , si deduce che $2j$ è necessariamente un numero intero oppure 0, e questo implica che j può assumere i valori interi e seminteri non negativi. Riassumendo, le prescrizioni sullo spettro degli operatori J^2 e J_z sono le seguenti:

1. Gli autovalori di J^2 sono della forma $j(j+1)$, con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$;
2. Gli autovalori m di J_z sono compresi tra $-j$ e j .

Si tenga conto che i risultati ottenuti non fanno in nessun modo riferimento alla formulazione esplicita degli operatori, ma solo alle loro regole di commutazione, per cui hanno valenza del tutto generale.

1.2 Autofunzioni

Quanto detto finora è pura teoria matematica degli operatori: per poter parlare di meccanica quantistica bisogna calare i risultati ottenuti nel contesto dello spazio degli stati quantistici, ovvero le funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R}^3)$. Per poter ottenere le autofunzioni del momento angolare sarà necessario riferirsi a una precisa espressione di questi operatori, che agiscono sugli elementi di $L^2(\mathbb{R}^3)$, perdendo di generalità; tale espressione è quella differenziale, ottenuta dalle regole di corrispondenza

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla. \quad (1.14)$$

In genere si è soliti indicare questa espressione del momento angolare con $\mathbf{L}$ invece di $\mathbf{J}$, e d'ora in avanti la trattazione si uniformerà a tale convenzione. Tenendo presente dell'espressione classica di $\mathbf{L}$, ovvero $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, si ottengono le seguenti espressioni, in forma adimensionale:

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right); \\ L_y &= zp_x - xp_z = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right); \\ L_z &= xp_y - yp_x = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

L^2 , espresso in coordinate sferiche, assume la forma

$$L^2 = - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) . \quad (1.16)$$

È importante notare che questa è anche l'espressione della parte angolare dell'operatore Laplaciano espresso in coordinate sferiche, quindi trovare le autofunzioni di L^2 corrisponde a risolvere il problema della dipendenza angolare delle autofunzioni del Laplaciano sulla sfera. Scegliendo l'asse z come asse polare si ottiene che

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (1.17)$$

Ci si riferirà al set di operatori sopracitati come *momento angolare orbitale*. Sarà utile esprimere in coordinate sferiche gli operatori a scala $L_{\pm}$

$$L_{\pm} = e^{\pm i\phi} \left[\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] . \quad (1.18)$$

Le funzioni che si otterranno diagonalizzando gli operatori L^2 e L_z in questa forma sono note in letteratura come *armoniche sferiche*, indicate con Y_{lm} ; esse descrivono la dipendenza angolare della funzione d'onda di una singola particella in un potenziale centrale. La dipendenza da ϕ è abbastanza semplice da ricavare, in quanto l'equazione differenziale da risolvere è:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} = m Y_{lm} , \quad (1.19)$$

per cui

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = y_{lm}(\theta) e^{im\phi} . \quad (1.20)$$

La dipendenza da θ si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$L_{\pm} y_{l,\pm l} = 0 , \quad (1.21)$$

da si cui segue

$$y_{l,\pm l}(\theta) = c_l^{\pm} \sin^l(\theta) \quad (1.22)$$

con $c_l^{\pm}$ coefficiente di normalizzazione; è quindi possibile scrivere le prime due armoniche sferiche complete $Y_{l,\pm l}$, a meno della normalizzazione che verrà calcolata tra poco:

$$Y_{l,\pm l} = c_l^{\pm} \sin^l \theta e^{\pm il\phi} . \quad (1.23)$$

Utilizzando le relazioni (1.11) e (1.12) si ottiene la seguente:

$$L_{\pm} Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1} , \quad (1.24)$$

e applicando ripetutamente la relazione appena ottenuta a Y_{ll} si trova

$$Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} L_-^{l-m} Y_{ll} . \quad (1.25)$$

È notevole l'identità

$$L_-^k e^{im\phi} f(\theta) = e^{i(m-k)\phi} \sin^{k-m}(\theta) \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^k (\sin^m \theta f(\theta)) \quad (1.26)$$

che, applicata a Y_{ll} permette di ricavare la costante di normalizzazione c_l :

$$c_l = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} . \quad (1.27)$$

Si possono finalmente scrivere le armoniche sferiche:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{e^{im\phi}}{\sin^m \theta} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{l-m} \sin^{2l} \theta ; \quad (1.28)$$

le funzioni (1.28), per l interi costituiscono un sistema ortonormale completo per le funzioni sulla sfera unitaria.

1.3 "Y_{1/2, 1/2}"

Si consideri l'espressione (1.22) delle armoniche sferiche $Y_{l, \pm l}$: tale formula esprime l'armonica sferica come un funzione trigonometrica di θ . A partire da questa, con gli operatori a scala, come si è detto, si possono calcolare tutte le altre armoniche sferiche, fino ad arrivare alla $Y_{l, -l}$, che è possibile ricavare indipendentemente. Dal momento che i valori seminteri di l sono perfettamente compatibili con l'essere vettori di uno spazio di Hilbert, si potrebbe pensare di usare la (1.22) per valori seminteri. Un'argomentazione frequentemente mossa contro questo tipo di funzioni è che porterebbe a funzioni d'onda che non sono monodrome: infatti la dipendenza dall'angolo ϕ

è del tipo $e^{\pm i \frac{k}{2}}$ con k intero. A seguito di una rotazione di 2π dell'angolo ϕ l'armonica sferica assumerebbe un segno meno, ovvero:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = -Y_{lm}(\theta, \phi + 2\pi), \quad (1.29)$$

mentre una rotazione di 2π dovrebbe restituire la funzione stessa.

In realtà questa argomentazione non esclude in maniera davvero stringente l'esistenza di tali funzioni, in quanto si richiede che la distribuzione di probabilità sia una funzione ad un valore, mentre non è necessario lo stesso requisito per la funzione d'onda in sé. Imponendo la suddetta condizione sulla distribuzione si perviene alla seguente espressione:

$$\begin{aligned} |aY_{lm} + bY_{l'm'}|^2 &= |a|^2 |y_{lm}(\theta)|^2 + |b|^2 |y_{l'm'}(\theta)|^2 + \\ &+ 2\operatorname{Re}(ab^* y_{lm}(\theta) y_{l'm'}^*(\theta) e^{i(m-m')\phi}), \end{aligned} \quad (1.30)$$

che è ad un sol valore se $m - m'$ è un numero intero. Una combinazione lineare di armoniche sferiche che contenga funzioni relative l solo interi o solo seminteri genererebbe una distribuzione di probabilità monodroma, quindi accettabile.

Le funzioni ottenute inserendo valori seminteri di l nella (1.28) presentano tuttavia altre problematicità, che ora verranno illustrate in dettaglio. Prendendo ad esempio il valore semintero più basso possibile per l , scrivendo quella che dovrebbe essere l'armonica sferica " $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ ", si ottiene la seguente funzione:

$$Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = c_{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\phi}{2}} \sqrt{\sin \theta}. \quad (1.31)$$

Si nota immediatamente che l'espressione (1.27) per il coefficiente di normalizzazione non è applicabile in quanto il termine $l!$ perde di senso per valori di l seminteri, ma il coefficiente risulta comunque calcolabile in maniera diretta ed è pari a $\frac{1}{\pi}$; inoltre, applicando L_- alla funzione, si ottiene:

$$L_- Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -c_{\frac{1}{2}} e^{\frac{-i\phi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad (1.32)$$

che non è proporzionale a $Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$; infatti, in base alla (1.22), $Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ dovrebbe essere:

$$Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = c_{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\phi}{2}} \sqrt{\sin \theta}. \quad (1.33)$$

Una proprietà notevole delle armoniche sferiche riguarda le rotazioni: infatti il risultato di una rotazione arbitraria di assi, applicata ad una generica armonica sferica Y_{lm} , può essere espresso come combinazione lineare di armoniche

sferiche appartenenti al sottospazio corrispondente allo stesso autovalore l , in quanto l'operatore L^2 commuta con gli operatori di rotazione, come verrà specificato più avanti; ancor di più perché L^2 corrisponde alla parte angolare del Laplaciano, che è invariante per rotazioni.

Questa proprietà non è soddisfatta dalle ipotetiche armoniche sferiche con l semintero. Se si prende di nuovo $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ e si effettua la rotazione $\phi \rightarrow \phi - 2\pi, \theta \rightarrow \theta - \frac{\pi}{2}$, la funzione $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ diventa

$$Y'_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = c_l e^{-i\pi} e^{\frac{i\phi}{2}} \sqrt{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = -c_l e^{\frac{i\phi}{2}} \sqrt{\cos\theta} \quad (1.34)$$

che chiaramente non è combinazione lineare di $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ e $Y_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$. Si può dedurre che tutti i sistemi fisici il cui momento angolare possa essere descritto da funzioni dei tre gradi di libertà spaziali debbano necessariamente assumere valori del momento angolare che siano multipli interi di $\hbar$. Ci si aspetta, in conclusione, che gli esperimenti confermino la presenza dei soli valori interi del momento angolare; questa assunzione è stata tuttavia smentita dall'esperimento di Stern-Gerlach, i cui risultati sono spiegabili solo ammettendo l'esistenza di sistemi fisici con valori seminteri del momento angolare in unità di $\hbar$.

Capitolo 2

Spin

Per ovviare all'incongruenza, inspiegabile con la teoria riportata finora, della presenza di sistemi fisici di momento angolare semintero, si introduce un grado di libertà aggiuntivo, detto *spin*, che rappresenta un momento angolare intrinseco del sistema, presente anche quando il sistema è in quiete. Tale momento angolare sarà rappresentato dall'operatore vettoriale $\mathbf{S}$ e si dimostrerà essere totalmente indipendente dai gradi di libertà spaziali, quindi oltre alle usuali regole di commutazione (1.1) delle sue componenti, soddisfa le seguenti:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}, \mathbf{x}] &= 0 \\ [\mathbf{S}, \mathbf{p}] &= 0 . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lo spettro degli operatori S^2 e S_z assume la stessa forma trovata in precedenza:

$$\begin{aligned} S^2 |s, m_s\rangle &= s(s+1) |s, m_s\rangle \\ S_z |s, m_s\rangle &= s_z |s, m_s\rangle \text{ con} \\ s &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \\ -s &< m_s < s . \end{aligned} \tag{2.2}$$

A differenza del momento angolare orbitale, non essendo associati ad armoniche sferiche, gli autovalori s e s_z possono assumere anche valori seminteri. Gli operatori di spin agiscono su uno spazio diverso da quello di azione degli operatori spaziali. Lo spazio di Hilbert associato al sistema fisico sarà quindi il prodotto tensoriale

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \Sigma$$

dove Σ è lo spazio degli spin la cui dimensione è $2s + 1$. Ogni particella ha un valore di s specifico ed è immutabile per definizione, e il valore preso in esame in questa trattazione è $s = \frac{1}{2}$.

2.1 $S = \frac{1}{2}$

È il caso più comune: esempi di sistemi a spin $\frac{1}{2}$ sono gli elettroni e i nucleoni. La dimensione di questo spazio è 2: esistono solo due autovettori comuni a S^2 e S_z , denominati $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ e $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Su questa base, lo stato di un sistema a spin $\frac{1}{2}$ si può esprimere come vettore colonna a due componenti:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + b \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

con

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_+ \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi_- . \end{aligned} \quad (2.3)$$

La condizione di normalizzazione impone che le componenti del vettore colonna soddisfino

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.4)$$

L'azione degli operatori S^2 e delle componenti di $\mathbf{S}$ può essere scritta sotto forma delle seguenti matrici 2×2 agenti sui vettori colonna χ :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_x \\ S_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_y \\ S_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z \end{aligned}$$

dove σ_x , σ_y e σ_z sono le matrici di Pauli. Tali matrici soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= 1 \\ \text{Tr}(\sigma_i) &= 0 \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \det(\sigma_i) &= -1.\end{aligned}$$

Sarebbe naturale pensare allo spin di un elettrone come un corrispondente quantistico della rotazione di quest'ultimo intorno al proprio asse, in analogia a come è possibile associare alla Terra un momento angolare orbitale attribuibile alla sua rivoluzione intorno al Sole e un momento angolare intrinseco dovuto alla rotazione intorno al suo asse. Tuttavia, la stessa analogia non è applicabile per le particelle con spin, e sarà di aiuto la teoria dei gruppi associata alle rotazioni per spiegarne il motivo in maniera esaustiva. In particolare, gli elementi dello spazio degli spin non sono assimilabili a vettori euclidei: per questo motivo, che verrà affrontato in seguito, tali elementi saranno d'ora in avanti chiamati *spinori*.

Capitolo 3

Rotazioni e operatori di rotazione

In questa sezione si analizzeranno le proprietà del gruppo delle trasformazioni di rotazione nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, e i suoi generatori. Si dedurranno le regole di commutazione dei momenti angolari puramente dalle proprietà delle rotazioni dello spazio, e si esplicherà come tali rotazioni agiscono sullo spazio degli stati quantistici.

3.1 Rotazioni nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$

È facile intuire che rotazioni di vettori rispetto ad assi diversi, effettuate consecutivamente, portino a risultati diversi a seconda dell'ordine in cui vengono effettuate. Nella seguente sezione si cercherà di dare un senso più quantitativo alla precedente affermazione. Si consideri un vettore $\mathbf{r}$ con componenti (x, y, z) : dopo averlo ruotato, esso sarà caratterizzato da nuove componenti (x', y', z') , che possono essere legate alle vecchie tramite una matrice ortogonale 3×3 denominata R .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$

$$R^T R = R R^T = \mathbb{1} \tag{3.3}$$

Una proprietà delle matrici ortogonali è quella di conservare il prodotto scalare tra vettori, e quindi anche il modulo:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{r}'\|^2. \quad (3.4)$$

Tale proprietà rende ovvia la scelta della rappresentazione delle rotazioni euclidee, definite come le trasformazioni, a meno di riflessioni e traslazioni, che conservano il prodotto scalare, tramite matrici ortogonali.

Prendendo in esame una rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse z , considerando come positivo il verso antiorario, la matrice di rotazione assume la seguente forma:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Analogamente, si possono ottenere le matrici di rotazione rispetto agli assi x e y :

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che R_x, R_y, R_z sono matrici ortogonali e che il loro determinante è 1 per ogni ϕ , semplicemente applicando il teorema di Laplace alla riga (o colonna) che contiene il numero 1. Una qualsiasi rotazione nello spazio $\mathbb{R}^3$ caratterizzata dagli angoli (α, β, γ) è esprimibile come una composizione opportuna di R_x, R_y, R_z , quindi si può dire che il gruppo delle matrici ortogonali 3×3 è una rappresentazione fedele di $SO(3)$ sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

È di particolare interesse la forma infinitesimale delle matrici di rotazione:

$$\begin{aligned}
 R_x(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix} \\
 R_y(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix} \\
 R_z(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

dove sono stati trascurati i termini di ordine ϵ^3 o superiore.

Un primo risultato importante ottenibile dall'espressione (3.7) è che trascurando anche i termini in ϵ^2 le matrici commutano, mentre se tali termini sono tenuti in considerazione, esse non commutano:

$$\begin{aligned}
 R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Questa relazione verrà utilizzata per ricavare le relazioni di commutazione del momento angolare, ovvero le costanti di struttura dell'algebra di Lie associata a $SO(3)$.

3.2 Rotazioni di Eulero

Si possono caratterizzare le rotazioni in tre dimensioni in un ulteriore modo, ovvero tramite gli angoli di Eulero. Una rotazione di Eulero di un vettore può essere ottenuta in tre tempi: si immagini che ci siano due assi y' e z' rigidamente connessi al vettore, tali che prima della rotazione essi coincidano con l'usuale asse y e z . Si ruoti il vettore in maniera antioraria rispetto all'asse z di un angolo α , si ruoti il vettore di un angolo β intorno all'asse

y' appena descritto, si operi una terza e ultima rotazione di un angolo γ intorno all'asse z' in termini di matrici ortogonali 3×3 , il prodotto delle tre operazioni diventa:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) . \quad (3.9)$$

Ad un primo sguardo questa notazione per le rotazioni sembra poco adatta a rappresentare le rotazioni in meccanica quantistica, in quanto compaiono rotazioni intorno ad assi solidali al vettore, mentre si hanno espressioni abbastanza semplici per gli operatori $\mathbf{J}$ rispetto ad assi fissi nello spazio. Sarà perciò utile esprimere le rotazioni intorno agli assi solidali al vettore in termini di rotazioni intorno ad assi fissi nello spazio, e fortunatamente la relazione è abbastanza semplice:

$$\begin{aligned} R_{y'}(\beta) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \\ R_{z'}(\gamma) &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta) . \end{aligned}$$

Riscrivendo ora la (3.9) alla luce delle ultime relazioni, si ha:

$$\begin{aligned} R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \\ &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

In sintesi, possiamo scrivere una rotazione di Eulero come

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) , \quad (3.11)$$

espressione in cui compaiono solo rotazioni intorno ad assi fissi.

3.3 Rotazioni in meccanica quantistica

In questa sezione si cercherà una rappresentazione del gruppo delle rotazioni sullo spazio degli stati quantistici e verranno mostrate le loro proprietà. Sia F un sistema di riferimento inerziale e F' un sistema ottenuto da F tramite rotazione degli assi di riferimento. Si supponga di avere un sistema quantistico S preparato in arbitrari stati $(|a\rangle, |b\rangle, \dots)$, tali da soddisfare determinate

condizioni rispetto al sistema F e di avere una grandezza osservabile A con il suo operatore hermitiano associato i cui autostati siano $(|a\rangle, |b\rangle, \dots)$. Supponendo che invece il sistema S soddisfi le stesse condizioni ma rispetto al sistema F' , e che quindi sia negli stati $(|a'\rangle, |b'\rangle, \dots)$, allora alla stessa grandezza osservabile ruotata A' si associa un nuovo operatore hermitiano. Poiché la fisica del sistema deve essere invariante rispetto al sistema di riferimento scelto, si suppone che nella trasformazione $F \rightarrow F'$ si verifichino le seguenti:

$$\begin{aligned} |\langle a|b\rangle|^2 &= |\langle a'|b'\rangle|^2 \\ A|a\rangle &= a|a\rangle \longrightarrow A'|a'\rangle = a|a'\rangle \end{aligned}$$

in quanto gli esiti delle misure devono rendere indistinguibili i due sistemi di riferimento. Esisterà quindi, per ogni rotazione dello spazio R caratterizzata da una matrice 3×3 , un operatore $D(R)$ che ad un $|a\rangle$ corrispondente allo stato S rispetto al sistema F associi il ket $|a_R\rangle$ che corrisponde allo stesso stato S rispetto a F' :

$$D(R)|a\rangle = |a_R\rangle. \quad (3.12)$$

Il ket $D(R)|a\rangle$ rappresenta uno stato con coordinate $\mathbf{r}$ rispetto a F' , quindi rispetto a F avrà coordinate $R^{-1}(\mathbf{r})$. La forma matriciale di $D(R)$ dipende dallo spazio dei ket in esame. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \langle a_R|A'|a_R\rangle &= \langle a|A|a\rangle = a \\ \Rightarrow \langle a|D(R)^\dagger A D(R)|a\rangle &= a \end{aligned} \quad (3.13)$$

La condizione (3.13) impone che l'operatore $D(R)$ sia unitario o antiunitario:

$$\begin{aligned} |\langle a_R|b_R\rangle|^2 &= |\langle a|b\rangle|^2 \\ \Rightarrow \left| \langle a|D(R)D(R)^\dagger|b\rangle \right|^2 &= |\langle a|b\rangle|^2 \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \\ \Leftrightarrow D(R)D(R)^\dagger &= \pm \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Poiché si vuole che la rotazione si riconduca all'identità per $\phi \rightarrow 0$, l'operatore $D(R)$ dev'essere unitario. È sempre possibile scrivere una trasformazione infinitesima S nella forma:

$$S = \mathbb{1} - i\epsilon G \quad (3.15)$$

con G operatore hermitiano detto *generatore* della trasformazione. Si definisce l'operatore *momento angolare* J_k tale che l'operatore di rotazione infinitesima G intorno a un asse k di un angolo $d\phi$ si possa ottenere tramite la sostituzione

$$G \rightarrow J_k, \quad \epsilon \rightarrow d\phi \quad (3.16)$$

e in generale per una rotazione infinitesima intorno ad un generico versore $\hat{n}$ si abbia:

$$D(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{1} - i(\mathbf{J} \cdot \hat{n})d\phi .$$

Una rotazione finita intorno a un'asse può essere ottenuta tramite applicazione ripetuta di rotazioni infinitesime intorno allo stesso asse. Si ottiene quindi la seguente espressione:

$$D_k(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - iJ_k \frac{\phi}{n} \right)^n = e^{iJ_k \phi} = \mathbb{1} - iJ_k \phi - \frac{J_k^2 \phi^2}{2} + \dots . \quad (3.17)$$

Gli operatori $D(R)$, ereditano anche le proprietà gruppali delle rotazioni:

- esistenza dell'elemento neutro: $R \circ \mathbb{1} = R \Rightarrow D(R) \circ \mathbb{1} = D(R)$
- chiusura: $R_1 \circ R_2 = R_3 \Rightarrow D(R_1) \circ D(R_2) = D(R_3)$
- esistenza dell'elemento inverso: $R \circ R^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow D(R) \circ D^{-1}(R) = \mathbb{1}$
- associatività: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \Rightarrow$
 $D(R_1) \circ [D(R_2) \circ D(R_3)] = [D(R_1) \circ D(R_2)] \circ D(R_3).$

In particolare, le regole di commutazione (3.8), scritte in termini di $D(R)$ assumeranno la seguente forma:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{1} - iJ_x \epsilon - \frac{J_x^2 \epsilon^2}{2} \right) \left(\mathbb{1} - iJ_y \epsilon - \frac{J_y^2 \epsilon^2}{2} \right) \\ & - \left(\mathbb{1} - iJ_y \epsilon - \frac{J_y^2 \epsilon^2}{2} \right) \left(\mathbb{1} - iJ_x \epsilon - \frac{J_x^2 \epsilon^2}{2} \right) = -iJ_z \epsilon^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

in cui sono stati ignorati i termini in ϵ^3 . Uguagliando i termini in ϵ^2 , si ottengono le cosiddette *regole fondamentali di commutazione dei momenti angolari*:

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad (3.19)$$

e permutando ciclicamente

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (3.20)$$

Sostanzialmente quanto finora esposto è consistito nel passaggio all'algebra di Lie associata alle rotazioni dello spazio degli stati (per questo sono state

analizzate le rotazioni infinitesime ovvero elementi di un intorno dell'elemento neutro del gruppo delle rotazioni), per poter dedurre la forma degli elementi del gruppo di Lie, ovvero gli operatori di rotazione veri e propri. Le costanti di struttura dell'algebra sono state ottenute utilizzando esclusivamente le proprietà delle rotazioni, e come visto nel capitolo 2, hanno come diretta conseguenza la forma dello spettro di questi operatori.

3.4 Rotazioni di armoniche sferiche

È ragionevole pensare che gli operatori di momento angolare orbitale $\mathbf{L}$ siano i migliori candidati a formare una rappresentazione delle rotazioni su $L^2(\mathbb{R}^3)$. Specificato un asse di rotazione $\hat{n}$ e un angolo ϕ intorno a tale asse, l'operatore unitario di rotazione sarà

$$D(\hat{n}, \phi) = e^{-i(\mathbf{L} \cdot \hat{n})\phi} . \quad (3.21)$$

Si porrà l'accento sugli elementi di matrice dell'operatore $D(R)$ sugli autostati di L^2 e L_z , ovvero le armoniche sferiche Y_{lm} (che, per comodità di notazione, saranno identificate con il ket $|l, m\rangle$):

$$D_{m'm}^{(l)}(\phi) = \langle l, m' | e^{-i(\mathbf{L} \cdot \hat{n})\phi} | l, m \rangle \quad (3.22)$$

dove si è indicato l'indice alto l in quanto si può preventivamente affermare che $D(R)$ connette necessariamente stati con lo stesso valore di l , poiché

$$[L^2, e^{-i(\mathbf{L} \cdot \hat{n})\phi}] = 0 .$$

La matrice $D_{m'm}^{(l)}(R)$, a l fissato ha dimensione $(2l+1) \times (2l+1)$ e per l interi costituisce una *rappresentazione irriducibile* del gruppo di $SO(3)$ sullo spazio degli stati $L^2(\mathbb{R}^3)$. Questo significa che un operatore di rotazione arbitrario agente su uno spazio di ket non necessariamente caratterizzati da un solo valore di l può, con un'opportuna scelta della base, essere portato in una forma di blocchi diagonali di dimensioni $(2l+1) \times (2l+1)$ che sono le matrici espresse nella formula (3.22). Inoltre ogni blocco non può essere ulteriormente scomposto in blocchi di dimensione inferiore (da qui la denominazione di "irriducibile"). A l fissato le matrici (3.22) formano un gruppo, e inoltre sono anche unitarie in quanto l'operatore di rotazione corrispondente è unitario. Fisicamente, il modulo al quadrato dell'elemento di matrice $D_{m'm}^{(l)}(R)$ rappresenta la probabilità di trovare uno stato $|l, m\rangle$, nello stato $|l, m'\rangle$, a seguito di una rotazione R del sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} D(R) |l, m\rangle &= \sum_{m'=-l}^l |l, m'\rangle \langle l, m' | D(R) |l, m\rangle \\ &= \sum_{m'=-l}^l |l, m'\rangle D_{m'm}^{(l)}(R) . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si osservi la forma della matrice $D_{m'm}^{(l)}(R)$ quando R è caratterizzata dagli angoli di Eulero:

$$\begin{aligned} D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle l, m' | \exp(-iJ_z\alpha) \exp(-iJ_y\beta) \exp(-iJ_z\gamma) | l, m \rangle \\ &= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \langle l, m' | \exp(-iJ_z\gamma) | l, m \rangle . \end{aligned} \quad (3.24)$$

L'unica espressione non banale è quella della rotazione intorno all'asse y , ed è quindi conveniente introdurre un nuovo elemento di matrice ridotto $d_{m'm}^{(l)}(\beta)$:

$$d_{m'm}^{(l)}(\beta) = \langle l, m' | \exp(-iL_y\beta) | l, m \rangle . \quad (3.25)$$

La determinazione esplicita dell'elemento di matrice $d_{m'm}^{(l)}(\beta)$ per l generico non è affatto un problema di semplice soluzione. Si riporterà pertanto solo il risultato del calcolo:

$$\begin{aligned} d_{m'm}^{(l)}(\beta) &= \sum_k (-1)^{k-m-m'} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-k)!k!(l-k-m')!(k-m+m')!} \times \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2l-2k+m-m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2k-m+m'} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.5 Rotazioni di sistemi a spin $\frac{1}{2}$

La dimensione minima per cui è possibile implementare le regole di commutazione (3.19) in maniera non banale è 2. Gli operatori di spin espressi alla (2.5) rispettano le relazioni di commutazione e quindi sono i migliori candidati a essere i generatori delle rotazioni di sistemi a spin $\frac{1}{2}$. Per verificarlo, si esaminerà come varia un ket $|a\rangle$ dopo aver subito una rotazione intorno all'asse z di un angolo ϕ , ad esempio. Esso sarà:

$$|a_R\rangle = D_z(\phi) |a\rangle . \quad (3.27)$$

3.5.1 Rotazioni nel formalismo a due componenti

Si esplicherà ora l'operatore $e^{iS_k\phi}$ utilizzando la formulazione delle matrici di Pauli incontrate nel capitolo 2. Ricordando che per una generica direzione

$\hat{n}$, $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$ può essere scritto come $\frac{\sigma \cdot \hat{n}}{2}$, l'espressione a inizio paragrafo diventa:

$$\begin{aligned} D(\hat{n}, \phi) &= \exp\left(\frac{-i\sigma \cdot \hat{n}}{2}\phi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\phi}{2}\right)^n \frac{(\sigma \cdot \hat{n})^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\phi}{2}\right)^{2n} \frac{(\sigma \cdot \hat{n})^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\phi}{2}\right)^{2n+1} \frac{(\sigma \cdot \hat{n})^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Notando, attraverso le (2.5), che:

$$(\sigma \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{per } n \text{ pari} \\ \sigma \cdot \hat{n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (3.29)$$

si può riscrivere la (3.28) come

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-i\sigma \cdot \hat{n}}{2}\phi\right) &= \mathbb{1} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n}}_{\cos \frac{\phi}{2}} - i(\sigma \cdot \hat{n}) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n+1}}_{\sin \frac{\phi}{2}} = \\ &= \mathbb{1} \cos \frac{\phi}{2} - (\sigma \cdot \hat{n}) \sin \frac{\phi}{2} \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esplicitando $\sigma \cdot \hat{n}$ in forma 2×2 , si ottiene

$$\exp\left(\frac{-i\sigma \cdot \hat{n}}{2}\phi\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} - in_z \sin \frac{\phi}{2} & (-in_x - n_y) \sin \frac{\phi}{2} \\ (-in_x + n_y) \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} + in_z \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

che è la matrice complessa che ruota i vettori colonna di un sistema a spin $\frac{1}{2}$.

È di particolare importanza notare che le matrici in (3.31), per ogni valore di ϕ sono unitarie e hanno determinante pari a 1: sono quindi elementi di $SU(2)$; infatti esse sono facilmente esprimibili nella forma $U(a, b)$ identificando i parametri di Cayley-Klein come

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\phi}{2} - in_z \sin \frac{\phi}{2} \\ b &= -n_y \sin \frac{\phi}{2} - in_x \sin \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Analogamente è possibile interpretare la più generale matrice appartenente a $SU(2)$ come rotazione di uno spinore. Si nota infine che dopo una rotazione

di 2π lungo una qualsiasi direzione $\hat{n}$, la matrice $\exp\left(\frac{-i\sigma\cdot\hat{n}}{2}\phi\right)$

$$\exp\left(\frac{-i\sigma\cdot\hat{n}}{2}\phi\right)\Big|_{\phi=2\pi} = -\mathbb{1}, \quad (3.33)$$

ovvero una rotazione di 2π di un qualsiasi spinore χ lungo una qualsiasi direzione restituisce $-\chi$. Questo non è il comportamento che ci si aspetta da un vettore euclideo sotto rotazioni ed esclude definitivamente la possibilità che gli spinori lo siano.

3.6 $SU(2)$ vs $SO(3)$

Si è mostrato che dall'esponenziazione degli elementi dell'algebra di Lie degli operatori di spin, espressi con le matrici di Pauli è stata ottenuta una rappresentazione del gruppo $SU(2)$, mentre tramite l'esponenziazione degli operatori di momento angolare orbitale si è ottenuto un set di operatori che sono una rappresentazione irriducibile di $SO(3)$.

Considerato che le algebre di Lie associate ai due gruppi sono isomorfe in quanto aventi le medesime costanti di struttura, sarebbe intuitivo pensare che anche i due gruppi lo siano, ma tale assunzione sarebbe falsa. Prendendo ad esempio una rotazione di 2π e una di 4π , in $SO(3)$ sono entrambe rappresentate da una sola matrice, $\mathbb{1}$, mentre in $SU(2)$ le matrici corrispondenti sono rispettivamente $-\mathbb{1}$ e $\mathbb{1}$ richiamando la (3.33). Più in generale sia $U(a, b)$ che $U(-a, -b) \in SU(2)$ corrispondono alla stessa matrice in $SO(3)$, quindi ad una rotazione R assegnata, ci sono due matrici in $SU(2)$ associate ad essa. La corrispondenza tra elementi di $SU(2)$ e $SO(3)$ è di due a uno, quindi i gruppi non sono isomorfi. Tuttavia, poiché i due gruppi hanno la stessa algebra di Lie, si può dire che sono *localmente isomorfi*, ovvero solo gli elementi dei due gruppi corrispondenti a una trasformazione infinitesima sono in corrispondenza 1:1.

Conclusioni

Nella presente trattazione sono state analizzate le proprietà dello spettro degli operatori di momento angolare, si è ricavata un'espressione delle autofunzioni del momento angolare orbitale e sono state mostrate le criticità di tali autofunzioni per valori seminteri dello spettro, teoricamente permessi in base a quanto noto dal calcolo puramente algebrico, ma non ammissibili analiticamente.

Si è quindi introdotto lo spin, necessario per spiegare la presenza del momento angolare semintero nei sistemi fisici. È poi stata avanzata l'ipotesi che lo spazio di Hilbert associato a tale grandezza fosse in qualche modo riconducibile a uno spazio euclideo e quindi a qualche grado di libertà spaziale, ed è stato fatto uso della teoria dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie associate per costruire una rappresentazione delle rotazioni che agisse rispettivamente su $L^2(\mathbb{R}^3)$ e nello spazio degli spin. L'ipotesi è stata definitivamente smentita dal fatto che i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ non sono isomorfi e questo esclude automaticamente la possibilità che lo spin possa effettivamente essere funzione dei gradi di libertà spaziale.

Appendice A

Cenni di teoria dei gruppi

In questa appendice saranno esaminate le proprietà fondamentali dei gruppi e in particolare dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie associate, ponendo l'accento sui gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$.

A.1 Alcune definizioni generali

Definizione 1 (Gruppo). Un insieme G corredato di un'operazione binaria $\circ : G \times G \rightarrow G$ è detto *gruppo* se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in G, \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (proprietà associativa);
- esiste un *elemento neutro* $e \in G$, tale che

$$\forall a \in G, \quad a \circ e = e \circ a = a; \quad (\text{A.1})$$

- per ogni elemento a dell'insieme G , esiste un elemento indicato come *inverso* a^{-1} tale che:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e; \quad (\text{A.2})$$

Definizione 2 (Gruppo abeliano). Un gruppo è detto *abeliano* se soddisfa la proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in G, \quad a \circ b = b \circ a. \quad (\text{A.3})$$

Definizione 3 (Sottogruppo). Un sottoinsieme H di G è detto *sottogruppo* di G se verifica le seguenti proprietà:

- chiusura: se $ab \in H$, allora $a \circ b \in H$;
- l'elemento neutro e appartiene a H ;
- se $a \in H$, allora anche l'inverso $a^{-1} \in H$.

È facile verificare che l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ reali, indicato con $M_n(\mathbb{R})$, con l'operazione di prodotto righe per colonne, forma una struttura di gruppo.

Definizione 4 (Omomorfismo tra gruppi). Siano G e G' due gruppi con le operazioni $\circ$ e $\circ'$. L'applicazione $f : G \rightarrow G'$ è detta *omomorfismo tra i gruppi* G e G' se conserva le operazioni, ovvero

$$\forall a, b \in G, f(a \circ b) = f(a) \circ' f(b). \quad (\text{A.4})$$

Se tale omomorfismo è biiettivo allora è detto *isomorfismo* tra i due gruppi.

A.2 Gruppi e algebre di Lie

Definizione 5 (Gruppo di Lie). Un gruppo che presenta una struttura di varietà differenziabile, compatibile con la struttura di gruppo, è detto *gruppo di Lie*.

Ai fini della presente trattazione è sufficiente una definizione più larga di gruppo di Lie, ovvero quella di un gruppo i cui elementi sono definiti da un set continuo di parametri. L'insieme delle rotazioni dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parametrizzato rispetto agli angoli di Eulero, e fornito dell'operazione di composizione, è un esempio di gruppo di Lie. Poiché il set di parametri che definisce gli elementi del gruppo è un insieme compatto, il gruppo è anche detto *compatto*.

Definizione 6 (Algebra di Lie). Sia A uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Sia A dotato di un'applicazione $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ che soddisfa le seguenti proprietà $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in A, a, b \in \mathbb{K}$:

- Linearità: $[a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u}] = a[\mathbf{v}, \mathbf{u}] + b[\mathbf{w}, \mathbf{u}]$;
- Antisimmetria: $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$;
- Identità di Jacobi: $[[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] = 0$

allora A forma un'algebra di Lie. L'operazione $[\cdot, \cdot]$ prende il nome di *parentesi di Lie*.

Ad ogni gruppo di Lie G è possibile associare un'algebra di Lie sullo spazio tangente all'elemento neutro e del gruppo. Si consideri la base canonica di tale spazio data dalle derivate parziali $\left\{\partial_i\big|_e\right\}_{i=1}^n$: presi due vettori tangenti $\mathbf{v}(e) = v^i(e)\partial_i\big|_e$ e $\mathbf{w}(e) = w^j(e)\partial_j\big|_e$, si definiscono le parentesi di Lie come

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}(\mathbf{w}(e)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(e)) \quad (\text{A.5})$$

che assume la seguente espressione in forma locale:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = v^i(e)(\partial_i w^j\big|_e)\partial_j\big|_e - w^j(e)(\partial_j v^i\big|_e)\partial_i\big|_e; \quad (\text{A.6})$$

tale struttura è detta *algebra di Lie associata al gruppo*, indicata con $\mathfrak{g}$, ed è completamente determinata dalle *costanti di struttura*, definite come le parentesi di Lie dei vettori di base:

$$[\partial_i, \partial_j]\big|_e = c_{ij}^k \partial_k\big|_e. \quad (\text{A.7})$$

In termini delle costanti di struttura, le parentesi di Lie tra due elementi qualsiasi dell'algebra si scrivono

$$[\mathbf{v}(e), \mathbf{w}(e)] = v^i(e)w^j(e)c_{ij}^k \partial_k\big|_e. \quad (\text{A.8})$$

Definizione 7 (Mappa esponenziale). Dato un gruppo di Lie G con la sua algebra associata $\mathfrak{g}$, allora la mappa esponenziale collega i due:

$$e : \mathfrak{g} \longrightarrow G. \quad (\text{A.9})$$

Se G è un gruppo di matrici, come nel caso di questa trattazione, tale esponenziazione è calcolabile tramite la usuale serie di potenze di e^x .

Definizione 8 (Gruppo generale lineare $GL(n, \mathbb{R})$). È l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ invertibili, che equivale a dire che il loro determinante sia diverso da 0. Per quanto affermato finora, $GL(n, \mathbb{R})$ risulta essere un sottogruppo di $M_n(\mathbb{R})$ ed è anche un gruppo di Lie.

A.2.1 Rappresentazioni di un gruppo

Definizione 9 (Rappresentazione di un gruppo). Dato uno spazio vettoriale V e un gruppo G , una *rappresentazione lineare* del gruppo è un omomorfismo

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) . \quad (\text{A.10})$$

Una rappresentazione è detta *fedele* se l'omomorfismo ρ è iniettivo.

Definizione 10. Dati due spazi vettoriali V e W , due rappresentazioni

$$\begin{aligned} \rho_1 : G &\longrightarrow GL(V) \\ \rho_2 : G &\longrightarrow GL(W) \end{aligned}$$

Sono dette *equivalenti* o *isomorfe* se e solo se esiste un isomorfismo α tra gli spazi vettoriali tale che:

$$\forall g \in G, \alpha \circ \rho_1(g) \circ \alpha^{-1} = \rho_2(g) . \quad (\text{A.11})$$

La definizione di rappresentazione di un gruppo si estende naturalmente ai gruppi di Lie se si richiede che l'omomorfismo ρ sia un'applicazione differenziabile.

A.2.2 Rappresentazione dell'algebra di Lie associata al gruppo

Definizione 11 (Rappresentazione di un'algebra di Lie). Sia data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e uno spazio vettoriale V . Indicato con $\mathfrak{gl}(V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari invertibili da V in V , esso, fornito con le parentesi di commutazione, forma un'algebra di Lie. Allora si definisce *rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su V* un omomorfismo $\Pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Dalla rappresentazione di un gruppo di Lie G è possibile ottenere una rappresentazione della sua algebra di Lie associata $\mathfrak{g}$. Data una rappresentazione ρ del gruppo G su uno spazio V , allora il differenziale globale dell'applicazione differenziabile ρ , valutato nell'identità, è di fatto una rappresentazione dell'algebra di Lie associata. Tale rappresentazione sarà indicata con $\Pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Lin}(V, V)$ e può essere calcolata esplicitamente nel caso di gruppi di matrici:

$$\Pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \rho(e^{tX}) \right|_{t=0} , \quad X \in \mathfrak{g} . \quad (\text{A.12})$$

A.3 $SO(3)$

È definito come il sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici 3×3 ortogonali e il cui determinante sia 1:

$$\forall A \in SO(3), AA^T = \mathbb{1}. \quad (\text{A.13})$$

La condizione di ortogonalità fornisce 6 equazioni che vincolano gli elementi di tali matrici; ne risulta che ci sono 3 parametri indipendenti che identificano una matrice ortogonale. Il gruppo $SO(3)$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con il gruppo delle rotazioni dello spazio.

A.4 $SU(2)$

È definito come il gruppo delle matrici complesse 2×2 unimodulari, che siano anche unitarie, ovvero che soddisfino

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (\text{A.14})$$

dove con il simbolo $\dagger$ si indica la trasposta coniugata di U . La più generale matrice 2×2 unimodulare si può scrivere nel seguente modo:

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

con a e b parametri complessi (detti di Cayley-Klein) che soddisfano la condizione di unimodularità:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (\text{A.16})$$

Anche in questo caso, il numero di parametri necessari a identificare una matrice di $SU(2)$ è 3, ed è possibile rappresentare le rotazioni anche con matrici di $SU(2)$, con la differenza che la rappresentazione delle rotazioni sullo spazio euclideo tramite matrici di $SU(2)$ non è fedele, ma è in rapporto $2 : 1$ con le rotazioni spaziali.

Bibliografia

- [1] Piero Caldirola, Renzo Cirelli e Giovanni M Prosperi. *Introduzione alla fisica teorica*. Utet, 1982.
- [2] Kurt Gottfried. *Quantum mechanics: fundamentals*. CRC Press, 2018.
- [3] Albert Messiah. *Quantum Mechanics, two volumes*. Dover Publications, New York, 1999.
- [4] Jun John Sakurai e Eugene D Commins. *Modern quantum mechanics, revised edition*. AAPT, 1995.
- [5] Jakob Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Springer, 2018.