UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Una discussione qualitativa dei Difetti Topologici in Cosmologia

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello

Salvatore Capozziello

Candidato:
Riccardo Maria Bozza
Matr. $N85001013$

Anno Accademico 2018/2019

A mio fratello.

Indice

Introduzione **3**

1 Come si formano **4**
1.1 Rotture Spontanee di Simmetria 4
1.2 Il Meccanismo di Higgs-Kibble 7
1.2.1 Cenni di Teoria dei Campi a temperatura finita 7
1.2.2 Transizioni di Fase 7
1.3 Il punto di vista della Teoria dei Gruppi 10

2 Condizioni di esistenza e classificazione **12**
2.1 Cenni di Teoria dell'Omotopia 12
2.2 Criteri Topologici 14
2.3 Descrizione dei difetti 15
2.3.1 I Domain Walls 15
2.3.2 Le Stringhe Cosmiche 15
2.3.3 I Monopoli 16
2.3.4 I Textures 16

3 Rilevazioni sperimentali ed inflazione **17**
3.1 La Radiazione Cosmica di Fondo 17
3.1.1 L'anisotropia 18
3.2 Le segnature dei difetti topologici nella Radiazione Cosmica di Fondo 20
3.3 L'Inflazione 21

Conclusioni **22**

Ringraziamenti **23**

Bibliografia **25**

Introduzione

In Cosmologia col termine *Difetti topologici* si intendono una serie di aberrazioni spazio-temporali dal punto di vista della struttura topologica, descrivibili con concetti di simmetria propri della topologia matematica. Come ad esempio uno stagno in un giorno freddo ghiaccia in più parti diverse che si incontreranno formando dei bordi di discontinuità, così potrebbe aver fatto l'universo primordiale raffreddandosi, con le interazioni tra particelle elementari che avrebbero portato alla formazione di fasi distinte.

Se infatti le condizioni permettono la formazione di una nuova fase, allora questa avviene generalmente in più parti contemporaneamente: quando le regioni separate di questa nuova fase si incontrano si formano i difetti topologici. La rilevazione di queste "cicatrici" dell'universo è di grande importanza perché ci darebbe informazioni sui primi istanti dopo il Big Bang; del resto un'assenza di queste sarebbe altrettanto rilevante perché ci costringerebbe a rivedere le attuali teorie a riguardo. Sebbene siano diffusi nella materia condensata, i difetti topologici sono solo ipotizzati per ciò che riguarda l'universo. Del resto, non si hanno prove certe della loro reale presenza, e tutto ruota intorno ai modelli teorici al momento.

Nel primo capitolo di questo lavoro si discuterà del processo che porta alle transizioni di fase ed alla formazione dei difetti, le *Rotture Spontanee di Simmetria*, attraverso l'introduzione di un campo di forze, arrivando a specificare delle condizioni sul campo stesso, tra le varie zone di rottura, per la formazione dei difetti. Nel successivo si spiegherà la connessione tra la presenza di un determinato difetto e la *Varietà del Vuoto*, una varietà che si può definire a partire dalle simmetrie del modello di rottura: grazie alla Topologia matematica ed alla Teoria delle Omotopie, si potranno formulare dei criteri topologici per distinguere i vari difetti. Infine, nell'ultimo capitolo, si tratteranno le segnature dei difetti nella Radiazione Cosmica di Fondo, come possibile indizio della loro esistenza, ed il concetto di Inflazione cosmologica, che spiegherebbe invece una loro assenza.

Capitolo 1

Come si formano

Le GUT della fisica particellare hanno al centro un concetto cardine: rotture di simmetria. Secondo i modelli più affermati, le varie interazioni si sono differenziate con il raffreddarsi dell'universo e quindi con la sua espansione. Questa separazione è spiegata in analogia ad una transizione di fase nell'universo primordiale, tramite cui sono avvenute le rotture di simmetrie. Ma in che modo sono avvenute queste transizioni e che conseguenze hanno avuto per la Cosmologia?

Il modello teorico prende in considerazione la seguente idea: ciò che guida il processo è un ipotetico campo di forze, il *Campo di Higgs*, che pervade lo spazio. Le transizioni vengono "direzionate" lungo l'orientazione del suddetto campo, che porta il sistema da uno stato di simmetria maggiore ad uno minore. Matematicamente questo si traduce dicendo che il gruppo delle simmetrie iniziale viene decomposto in sottogruppi di simmetria che limitano le proprietà di invarianza del sistema.

In generale zone diverse dello spazio-tempo avranno orientamenti diversi del suddetto campo, che in questo caso si diranno non essere *coerenti*. All'equilibrio, ogni zona avrà effettuato la rottura di simmetria in maniera diversa: i confini di questi domini con campi di Higgs incoerenti andranno a formare i difetti topologici.

1.1 Rotture Spontanee di Simmetria

Vogliamo ora dare uno sguardo al processo principale che domina la formazione dei difetti e non solo.

Una *Rottura Spontanea di Simmetria* (SSB)[1] è un fenomeno fisico in cui la perdita naturale di simmetria di un sistema non avviene a livello fondamentale, rimanendo valida nelle equazioni che lo governano. Questo fenomeno è presente sia in fisica classica che quantistica. Nella Meccanica classica rappresenta la perdita

[1] Dall'inglese "Spontaneous Simmetry Breaking".

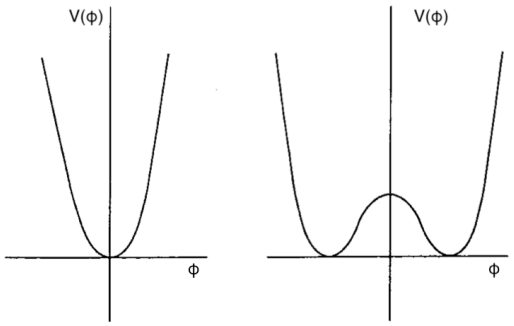

Figura 1.1: *Il primo potenziale corrisponde ad uno stato di massima simmetria con un unico vuoto. Il secondo descrive una situazione di rottura di simmetria con valore nullo del potenziale non allo zero del campo.*

di simmetria delle soluzioni delle equazioni del moto di un sistema, nonostante permanga l'invarianza della Lagrangiana o dell'Hamiltoniana rispetto ad una trasformazione gruppale (e quindi di simmetria). Nella Teoria Quantistica dei Campi è invece la perdita di simmetria dell'Hamiltoniana (o Lagrangiana) di un sistema rispetto ad una trasformazione gruppale nello stato fondamentale di vuoto degenere, nonostante permanga la simmetria globale del sistema [6].

Ovvero col meccanismo di rottura di simmetria spontanea si intende una situazione per cui l'Hamiltoniana di un sistema è invariante sotto qualche simmetria, ma questa è rotta poiché lo stato di vuoto della Hamiltoniana non è invariante sotto la stessa.

Si pensa che questo fenomeno sia alla base della formazione dell'universo. Il processo, guidato da un campo di forze , avrebbe portato alla scissione delle forze fondamentali. Si ritiene infatti che negli attimi della singolarità di un Big Bang caldo, dove le energie erano massime, le forze fondamentali fossero unificate. Col raffreddarsi dell'universo e con la sua espansione, dapprima la gravità, poi la forte e in seguito le altre, si sarebbero separate ed avrebbero assunto una propria forma, tramite successive rotture di simmetria. Queste sono modellizzabili, lo abbiamo accennato, tramite l'introduzione del Campo di Higgs: la sua "forma" è infatti fondamentale per l'esito della rottura.

Difatti non è detto che questo sia sempre dello stesso tipo: può assumere infatti diversi stati fondamentali, dovuti ad un differente stato di vuoto della teoria, ed è proprio ciò che controlla la rottura. Se lo stato fondamentale del vuoto è simmetrico, il campo è nullo dappertutto, e non vi è stata al cuna rottura. La simmetria si rompe nel momento in cui il Campo di Higgs assume un valore finito non nullo nello stato di vuoto.

Thomas Kibble fu il primo, nel 1976, a teorizzare una *Formazione dei difetti topologici* ipotizzando che un universo in espansione raffreddata le transizioni di

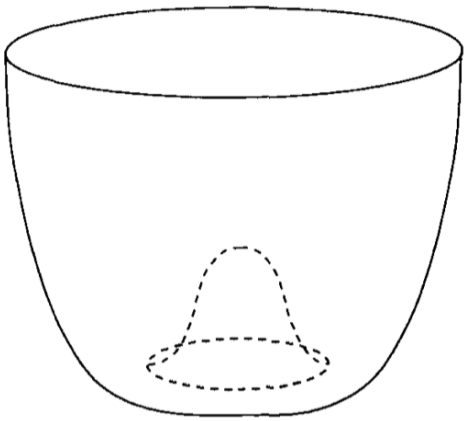

Figura 1.2: *Il seguente potenziale è chiamato* a Cappello Messicano *o* Mexican Hat*. Non è altro che il corrispettivo tridimensionale del secondo grafico in figura 1.1.*

fase avvenissero per zone separate che successivamente si sarebbero incontrante creando delle "cicatrici". Questo perché, in un universo in espansione, le regioni troppo lontane fra loro non hanno abbastanza tempo per comunicare, per interagire, e sono dunque scorrelate causalmente. È naturale pensare dunque che queste regioni finiranno con l'avere orientazioni diverse, in genere, del Campo di Higgs: una volta che si fondono assieme diventa estremamente difficile, per regioni con direzioni privilegiate del campo molto differenti tra loro, ordinarsi tra loro ed unirsi in maniera liscia. Su tali zone di confine si formerebbero perciò dei difetti dal punto di vista topologico, ovvero che variano la topologia dell'insieme in considerazione.

Nell'atto di formulare i modelli per spiegare ciò «piuttosto che scrivere esplicitamente a mano i termini di rottura di simmetria nell'Hamiltoniana, vorremmo rompere queste simmetrie in maniera tale che le equazioni conservino la loro invarianza»(Kaku, 1993). Il punto di partenza per il nostro modello sarà la lagrangiana di un campo scalare con un interazione quartica ($\lambda\phi^4$), che rappresenta un termine di auto-interazione, che possieda una simmetria di parità rispetto all'interazione ($\phi \mapsto -\phi$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{1.1}$$

Il fattore m^2 è un forte discriminante perché in base al suo segno cambia il grafico del potenziale. Nella figura 1.1 sono messi a confronto il potenziali descritti da $m^2\phi/2 + \lambda\phi^4/4!$, uno con $m^2 > 0$, l'altro con $m^2 < 0$. Nel primo abbiamo un unico stato di vuoto, che corrisponde allo stato con più bassa energia; nel secondo, cosiddetto *Mexican Hat* (si veda la figura 1.2), lo stato di vuoto usuale $\phi = 0$ non è quello ad energia più bassa: una particella sopra la curva tenderà a "cadere" verso gli stati di minore energia. Ci sarà allora un minimo per $\phi = v$. Notiamo che nel

primo caso il potenziale è ancora simmetrico per $\phi \mapsto -\phi$. Per il secondo invece, il valore atteso del vuoto di ϕ non è 0.

1.2 Il Meccanismo di Higgs-Kibble

In questo paragrafo vogliamo analizzare come fisicamente la rottura di simmetria provochi i nostri Difetti Topologici. Per fare ciò dobbiamo ricordare che l'evoluzione dello spazio-tempo del nostro universo è conseguenza del Big Bang, che costituisce una fonte di alta energia e calore: deve perciò essere influenzata dalla temperatura.

1.2.1 Cenni di Teoria dei Campi a temperatura finita

L'evoluzione delle particelle nel vuoto è ovviamente differente rispetto a quella in un bagno termico. Allo stesso modo muta l'evoluzione dei campi. Data la teoria di un Big Bang caldo, dobbiamo necessariamente tenere in conto questa dipendenza dalla temperatura. Sotto opportune condizioni la dinamica può essere rappresentata da un potenziale dipendente dalla temperatura, il cosiddetto *Potenziale Effettivo a Temperatura Finita*.

Dato infatti un campo scalare ϕ accoppiato ad un bagno termico rappresentato da campo scalare ψ, la densità di lagrangiana che descriverà il sistema sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{2}\lambda\phi^2\psi^2 \tag{1.2}$$

dove λ è una costante di accoppiamento. Si può dimostrare euristicamente [3] che

$$V_T(\phi) = V(\phi) + \frac{1}{2}\lambda T^2\phi^2 \tag{1.3}$$

costituisce il suddetto Potenziale Effettivo. Nel nostro caso, il potenziale $V(\phi)$ sarà quello di interazione quartica citato nel paragrafo precedente.

1.2.2 Transizioni di Fase

Abbiamo detto che ciò che guida la rottura spontanea è un ipotetico campo di forze, il *Campo di Higgs*, con una direzione privilegiata. Infatti questi può assumere differenti stati fondamentali, da riferirsi ad uno diverso stato di vuoto della teoria. Abbiamo già accennato che in un stato fondamentale simmetrico il campo assume valore 0 dappertutto. Solo se esso assume un valore finito si rompe la simmetria. Inoltre abbiamo notato come sia fondamentale tener conto della dipendenza dalla temperatura nel caso dell'Universo e come si possa schematizzare ciò attraverso

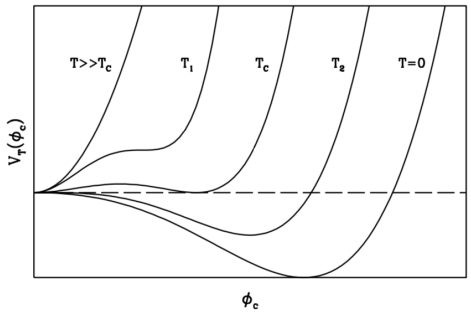

Figura 1.3: *La figura mostra il grafico del Potenziale Effettivo in funzione del campo per una transizione di 1° specie. Ad alte temperature si ha un solo minimo in $\phi = 0$. Diminuendo la stessa si formano dei nuovi minimi locali che diventano assoluti, degeneri col vecchio vuoto, quando $T = T_C$: si può notare la barriera di potenziale tra i due stati di vuoto. Sotto T_C il valore $\phi = 0$ non è più minimo globale e il sistema si porta spontaneamente in uno stato di vero vuoto, più basso del precedente, con ad esmpio $\phi = \eta \exp\{i\theta\}$. Questa scelta segna la rottura di simmetria e la formazione casuale di regioni con orientazioni del Campo di Higgs θ non correlate: questa discrepanza porta alla formazione dei difetti.*

l'introduzione di un potenziale, da essa dipendente, che guida la dinamica del sistema. Questa dipendenza dalla temperatura di V_T, nella Teoria Quantistica dei Campi, porta a transizioni di fase in un universo primordiale. Analizziamo la cosa per modellizzare qualitativamente la formazione dei difetti.

Avendo il potenziale una dipendenza dalla temperatura possiamo definire *Temperatura Critica* T_C il valore per cui il potenziale V_T smette di avere un minimo assoluto in $\phi = 0$ per averlo in $\phi \neq 0$, non per forza unico. Le transizioni di fase che possono avvenire si possono perciò classificare in due categorie:

- *Transizioni del 2° Ordine*. Per $T >> T_C$ il valore di aspettazione del campo $\langle\phi\rangle = 0$, ed il potenziale V_T ha un solo minimo in $\phi = 0$ (figura). Al diminuire della temperatura si sviluppano nuovi minimi relativi, dove il potenziale cambia in maniera liscia, e $\langle\phi\rangle$ inizia a discostarsi dallo zero.. Quando $T < T_C$ il valore di $\langle\phi\rangle$ diventa instabile ed evolve nel tempo ad un nuovo valore $\pm v$. La direzione di questa transizione è determinata dalle fluttuazioni termiche e quantistiche e sarà pertanto non uniforme nello spazio. Ci saranno domini di raggio medio $\xi(t)$ nei quali $\langle\phi\rangle$ è coerente: per la causalità essa sarà limitata superiormente dall'orizzonte.

- *Transizioni del 1° Ordine*. Queste transizioni, per $T > T_C$, hanno $\langle\phi\rangle$ approssimativamente 0, il minimo del Potenziale Effettivo ad alta temperatura: questo costituisce l'unico stato di vuoto.

Al diminuire di T si formano un set di minimi locali (il numero e la discretizzazione dipende dalla simmetria), che diventano degeneri al precedente quando $T = T_C$. Ora i minimi sono separati da delle barriere di potenziale, e queste potrebbero continuare ad esistere anche se $T < T_C$, dove diminuendo la temperatura, si forma un nuovo stato di vuoto vero (minimo assoluto) diverso dal primo: in questa situazione potrebbe conservarsi o no la barriera di potenziale tra il vecchio vuoto (falso) ed il nuovo (vero). Se continua ad esistere, per $T \leq T_C$ il discorso classicamente si chiuderebbe dicendo che il sistema non ha energia (termica) sufficiente nel vero stato di vuoto.
Dal punto di vista quantistico, invece, l'effetto tunnel può liberare il campo dal vecchio stato, almeno in qualche regione dello spazio: esisterà una probabilità per unità di tempo non nulla che in un punto $\vec{x}$ enuclei una bolla di vero vuoto $\phi = A$. Il risultato, in generale, sarà la formazione di diverse bolle con valori del Campo di Higgs indipendenti. Ne conseguirà che, essendo il processo random, si formeranno zone dove i campi sono correlati e potranno cosi fondersi in un unico dominio, e altre dove invece non lo sono. Le bolle si espanderanno alla velocità della luce, circondate da un "mare" di regioni di falso vuoto caratterizzato da $\phi = 0$. A differenza di quelle di 2° Ordine, le Transizioni del 1° Ordine sono estremamente non omogenee e $\langle\phi(\vec{x})\rangle$ non è una funzione continua del tempo. Perciò anche queste transizioni porteranno alla generazioni di regioni, di raggio medio $\xi(t)$, dove ϕ è coerente.

Per entrambe vale dunque che

$$\begin{cases} \langle|\phi|\rangle = 0 & \forall\, \vec{r} \quad \text{per } T >> T_C \\ \langle|\phi|\rangle \neq 0 & \quad\quad\;\; \text{per } T < T_C \end{cases} \tag{1.4}$$

e le transizioni hanno in comune il seguente comportamento:

- ad alte energie, molto al di sopra di T_C, il potenziale ha un solo minimo in $\phi = 0$;
- col diminuire della temperatura si forma uno o più minimi locali;
- per per $T \leq T_C$ si ha che $\phi = 0$ smette di essere il minimo assoluto e il sistema si pone in un nuovo minimo fra quelli disponibili. Il vecchio (falso) vuoto tende ad essere un punto di massimo locale o di flesso.

Diamo ora uno sguardo alle lunghezze di correlazione che si hanno nella formazione di difetti topologici. Una caratteristica importante nel determinare la grandezza della regione dove $\langle|\phi(\vec{x})|\rangle$ è coerente, e quindi dove non siano presenti difetti, è data dalla correlazione spaziale del campo ϕ.

Tramite considerazioni di natura teorica in Teoria dei Campi [1] si può dimostrare che per grandi lunghezze d'onda di fluttuazioni di ϕ si ha un comportamento diverso della *Funzione di correlazione* definita da $G(r) \equiv \langle\phi(r_1)\phi(r_2)\rangle$, dove $r = |r_1 - r_2|$. Il comportamento dipende infatti tra quali punti dello spazio si calcola la correlazione, se la distanza r è maggiore o minore di una lunghezza caratteristica $\xi \propto (\sqrt{\lambda}|\langle\phi\rangle|)^{-1}$, chiamata *Lunghezza di Correlazione*, e dipende esponenzialmente dalla distanza r. Si ha infatti

$$G(r) = \begin{cases} \frac{T_C}{4\pi r} e^{-\frac{r}{\xi}} & r >> \xi \\ \\ \frac{T^2}{2\pi^2} & r << \xi \end{cases} \tag{1.5}$$

Dunque si avranno domini di larghezza $\xi \simeq (\sqrt{\lambda}|\langle\phi\rangle|)^{-1}$ laddove ϕ è correlato; per distanze molto più grandi di ξ invece non c'è correlazione tra i campi adiacenti e di conseguenza i punti separati da $r >> \xi$ apparterranno a domini topologicamente sconnessi, cioè con orientazioni del Campo di Higgs differenti. Laddove i campi non si connettono in maniera liscia si hanno i difetti.

Questo processo qui descritto per la formazione di regioni scorrelate topologicamente va sotto il nome di *Meccanismo di Higgs-Kibble*.

1.3 Il punto di vista della Teoria dei Gruppi

Quando si parla di simmetrie non si può fare a meno di analizzare la situazione nell'ambito della *Teoria dei Gruppi*. È chiaro che una rottura di simmetria porta automaticamente il sistema da uno stato di simmetria maggiore ad uno minore. Ma in che modo?

Riprendendo l'obbiettivo delle GUT, volendo descrivere il processo della formazione delle interazioni fondamentali a partire dalla nascita dell'universo, e dunque ad alte temperature, si può schematizzare questo stato iniziale di massima simmetria con un gruppo che chiameremo **G**: di conseguenza la Lagrangiana associata a tutte le particelle ed interazioni del sistema dovrà essere invariante sotto l'azione degli elementi di **G**. Come detto prima, la forma del potenziale effettivo (a temperatura finita) del sistema sarà soggetta a variazioni durante il raffreddamento e l'espansione dell'universo. Ciò scatenerà una catena di transizioni di fase a causa delle quali si perderanno alcune simmetrie presenti inizialmente. La prima di queste può ad esempio essere scritta come **G**$\rightarrow$**H**, ovvero tramite il passaggio da un gruppo iniziale di massima simmetria, ad un nuovo gruppo **H**, più piccolo, delle restanti simmetrie non rotte del sistema. Il processo all'equilibrio deve concludersi con il *Gruppo Prodotto* SU(3)$\times$SU(2)$\times$U(1), che è il gruppo di simmetria che descrive il Modello Standard della Fisica delle Particelle.

Un sistema con una rottura di simmetria potrebbe avere diversi minimi degeneri (con la stessa energia), collegati da delle simmetrie. Il passaggio da un minimo all'altro è un processo incluso in una delle simmetrie del gruppo originale **G**, e il sistema non cambierà a causa di questa trasformazione. Se invece una particolare configurazione del campo favorisce un certo stato del sistema con una più bassa energia, allora trasformazioni analoghe alle precedenti attraverso elementi del gruppo di simmetria ci faranno sempre restare nello stato di energia più bassa. Ad esempio se un sistema a simmetria sferica ha un certo valore minimo di energia, esso non cambierà sotto rotazione [5].

Il sistema cercherà di minimizzar la sua energia e sceglierà spontaneamente uno dei minimi disponibili. Una volta che questo processo si è concluso, e dunque sia avvenuta la transizione di fase, le simmetrie del sistema saranno dettate da **H** e non più da **G**. Dunque se accade che **G**$\rightarrow$**H**, ed il sistema si trova in uno stato di minima energia, chiamiamolo S_1, tallora trasformazioni da S_1 in S_2 attraverso **G** lasceranno l'energia invariata; trasformazioni attraveerso **H** lasceranno S_1 stesso invariato, e non solo l'energia. Tutti gli stati di minima energia S_i che il sistema presenta possono essere ottenuti tramite tutte le "azioni" del gruppo di simmetria iniziale **G** che non sono ricollegabili ad elementi di **H**. Lo spazio di tutti gli stati fondamentali distinti forma una varietà chiamata *Varietà del Vuoto* $\mathcal{M}$. Più in particolare, $\mathcal{M}$ è lo spazio degli elementi di **G** in cui gli elementi che sono in relazione tra loro tramite le trasformazioni di **H**: ovvero non è altro che lo *Spazio Quoziente*

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{H}} \tag{1.6}$$

L'importanza di questa varietà è presto detta: è la topologia di $\mathcal{M}$ a determinare il tipo di difetto che si formerà. Nel prossimo capitolo vedremo come stabilire dei criteri topologici per classificare i difetti e come questi si distinguano dal punto di vista fisico.

Capitolo 2

Condizioni di esistenza e classificazione

Nel capitolo precedente abbiamo definito la *Varietà del Vuoto* $\mathcal{M}$ e sottolineato l'importanza del suo ruolo per comprendere il difetto topologico che si svilupperà sulla nostra varietà, in base alla topologia della stessa. È infatti possibile caratterizzare un legame tra la suddetta topologia ed i difetti che si svilupperanno nello spazio, in modo da poter dare una descrizione degli stessi e classificarli attraverso dei criteri topologici.

La *Teoria delle Omotopia*, di cui daremo qualche cenno a breve, permette questo studio. L'identificazione tra topologia di $\mathcal{M}$ e difetto topologico è resa possibile attraverso i *Gruppi di Omotopia n-esimi* $\pi_n(\mathcal{M})$. Questi classificano qualitativamente le mappe dalla sfera n-dimensionale S^n in $\mathcal{M}$. Attraverso la non trivialità di questi gruppi si possono ottenere dei criteri di classificazione.

2.1 Cenni di Teoria dell'Omotopia

In topologia due funzioni, continue da uno spazio topologico X ad un altro Y, si dicono *omotope* se è possibile deformare con continuità l'una nell'altra. Tale trasformazione è detta *Omotopia* tra le due funzioni. Da essa discende una notevole relazione di equivalenza.

Definizione. *Si definisce* Omotopia *tra due funzioni f e g, continue da uno spazio topologico X ad un altro Y, la famiglia di funzioni, $H(s,t) : [0,1] \times X \to Y$, continua in s e in t, tale che*

$$H(0,t) = f(t) \quad e \quad H(1,t) = g(t) \quad \forall t \in X \tag{2.1}$$

L'essere omotopi definisce una relazione di equivalenza[1] sull'insieme delle funzioni continue da X in Y.

Consideriamo però sulla nostra varietà $\mathcal{M}$ dei cammini chiusi f_i, passanti in un punto x della varietà: ciò può essere parametrizzato chiedendo che le funzioni $f(t)$ siano tali che $f(0) = f(1) = x$, con $0 \leq t \leq 1$ in $\mathcal{M}$. Una funzione del genere è chiamata[2] *laccio* o *cappio*. Anche per queste funzioni si può dare la stessa definizione di Omotopia, a patto che si imponga il passaggio per x. Dati due lacci f e g in x, le condizioni saranno allora

$$\begin{aligned} &H(0,t) = f(t) \\ &H(1,t) = g(t) \\ &H(s,0) = H(s,1) = x \qquad 0 \leq s,t \leq 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le funzioni verranno dette *omotopiche in x*: lo saranno se possono essere deformate tra loro con continuità senza perdere contatto in x. Lo spazio di suddetti lacci può essere dotato di un prodotto definito da

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Questo prodotto corrisponde fisicamente a percorrere prima il laccio f e poi g. Si può definire l'inverso nel seguente modo

$$f^{-1} = f(1-t) \tag{2.4}$$

che corrisponde a percorrere $f(t)$ in verso opposto.

Si possono suddividere tutti i possibili lacci in x in *Classi di Omotopia*: ogni laccio omotopico a g apparterrà alla classe $[g]$. Se definiamo il prodotto

$$[f]\,[g] = [f \cdot g] \tag{2.5}$$

allora le Classi di Omotopia formano un gruppo: l'elemento neutro $[I]$ sarà la classe della mappa costante $I(t) = x$, che rappresenta dunque tutti i lacci contraibili in x; l'inverso sarà $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.

Questo gruppo, $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, si chiama *Gruppo Fondamentale* della varietà $\mathcal{M}$ in x. Si può in realtà omettere il punto di base x perché, essendo lo spazio connesso, esiste un isomorfismo[3] da $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ in $\pi_1(\mathcal{M}, y)$, $\forall y \in \mathcal{M}$. Si potrà perciò scrivere semplicemente $\pi_1(\mathcal{M})$.

[1] Questa relazione è compatibile anche con le composizioni di funzioni. Se f_1 e g_1 da X in Y sono omotope tra loro, ed anche f_2 e g_2 da Y in Z sono anch'esse omotope, allora $f_2 \circ f_1$ e $g_2 \circ g_1$ da X in Z saranno omotope.

[2] *Loop* in inglese.

[3] Ovvero un omomorfismo biunivoco che conserva la struttura di gruppo.

Similmente si possono costruire i gruppi $\pi_n(\mathcal{M})$ con $n \neq 1$. Prendiamo il caso di due superfici fissate in un punto base x in $\mathcal{M}$. Se possono esssre ristrette a un punto, risultano omotopiche alla mappa costante; si può dotare questo insieme della struttura di gruppo in maniera simile a come fatto con π_1. Anche per π_2 si può omettere il punto base secondo le stesse considerazioni fatte in precedenza. A differenza del primo, il *Secondo Gruppo Fondamentale* è sempre abeliano[4].

Possediamo ora gli strumenti matematici per comprendere i criteri formulati in Topologia e che ben si adattano al nostro caso, per caratterizzare il tipo di difetto direttamente dalla topologia di $\mathcal{M}$.

2.2 Criteri Topologici

Attraverso i gruppi fondamentali della varietà $\mathcal{M}$ si possono dimostrare le seguenti proprietà:

- se $\pi_0(\mathcal{M})$ non è il *Gruppo Triviale*, ovvero non è costituito semplicemente dall'elemento neutro, allora $\mathcal{M}$ sarà non connesso e i *Domain Walls* saranno i tipi di difetti che emergeranno;
- se $\pi_1(\mathcal{M})$ non è triviale, ci saranno lacci non contraibili ad un punto in $\mathcal{M}$ e *Stringhe Cosmiche* caratterizzeranno le discontinuità dello spazio;
- se $\pi_2(\mathcal{M})$ non è triviale, la varietà avrà 2-sfere non contraibili e lo spazio possederà dei *Monopoli*;
- se $\pi_3(\mathcal{M})$ non è triviale vi saranno dei difetti di tipo *Textures* a causa di 3-sfere non contraibili.

Questi risultati sono riassunti nella tabella di seguito, dove si è indicato con **1** il Gruppo Triviale.

Gruppo Fondamentale	Topologia di $\mathcal{M}$	Difetto
$\pi_0(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$	Disconnesso	Domain Walls
$\pi_1(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$	Lacci non contraibili	Stringhe Cosmiche
$\pi_2(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$	2-sfere non contraibili	Monopoli
$\pi_3(\mathcal{M}) \neq \mathbf{1}$	3-sfere non contraibili	Textures

E' importante sottolineare che il tipo di difetto che si formerà dipende dal modello teorico della rottura di simmetria.

[4]Si veda a tal proposito [12].

2.3 Descrizione dei difetti

Differenti modelli per il Campo di Higgs portano alla formazione di diversi difetti con differenti caratteristiche e dimensioni. Vogliamo ora descrivere brevemente le caratteristiche di questi, magari anche in funzione del modello teorico. In base alla configurazione della rottura di simmetria si avranno esiti differenti.

2.3.1 I Domain Walls

La formazione dei Muri di Frontiera è generalmente associata alla rottura di una simmetria discreta. La Varietà del Vuoto si comporrà di diverse componenti connesse ed i Muri si troveranno ai bordi di queste, tra regioni di spazio con differenti ϕ: il campo interpola i valori attraverso il muro. Rappresentano superfici di piccolissimo spessore che intrappolano grandi concentrazioni di energia, che separano regioni incoerenti del campo. In base all'espressione del campo nel modello utilizzato, è possibili caratterizzare lo spessore e la densità di energia. Il perché debbano intrappolare alte energie, così come gli altri difetti, è presto detto: il campo ϕ deve passare da due valori differenti con continuità, e per fare questo ha bisogno di un picco di energia e localmente si avrà che la simmetria non è rotta.

2.3.2 Le Stringhe Cosmiche

Le stringhe sono il difetto topologico più studiato: se il modello descrive il campo cosmologico distribuito in maniera tale che la vecchia fase simmetrica sia racchiusa in una regione finita di spazio circondata da nuova fase non simmetrica, vi saranno lì delle Stringhe Cosmiche o dei Monopoli. Studi avanzati nel settore suggeriscono che le stringhe non abbiano estremità, in modo che le due fasi non si mischino, sicché le uniche soluzioni accettabili sarebbero solo stringhe (cosmiche) infinite e loop. Essendo non semplicemente connessa, la varietà possederà dei buchi attorno ai quali possono essere intrappolati dei lacci.

Questi difetti provengono generalmente da una rottura con un campo del tipo $\phi \sim \exp\{i\theta\}$, dove θ è una direzione nello spazio. Un caso è quello del Mexican Hat: il campo assumerà valori diversi in base alla direzione in maniera casuale, in zone diverse. Una volta che la transizione è avvenuta e le zone si sono unite potrebbe verificarsi la seguente condizione. Immaginiamo di disegnare un immaginario laccio intorno al bordo di confine: se l'angolo θ varia da 0 a 2π allora si formeranno delle stringhe, altrimenti il campo ϕ avrà avuto la possibilità di cambiare nello spazio per connettere punti diversi.

2.3.3 I Monopoli

Allo stesso modo delle Stringhe Cosmiche si formano i Monopoli. Sono caratteristici di modelli di rottura con un Campo di Higgs che assume una simmetria sferica lontano dalla zona di *core*, cioè la zona dove è concentrato il difetto, e rappresentano un esempio di difetto stabile. Una particolarità interessante che possiedono, insieme con le Stringhe (che non discuteremo) è la presenza di un flusso di campo magnetico. Mentre però per queste ultime il campo è confinato solo alla zona di *core*, per i Monopoli si parla di un campo magnetico al lungo raggio: dunque sono, per la precisione, dei *Monopoli magnetici*, gli stessi che teorizzò Paul A. M. Dirac nel 1931 [4].

2.3.4 I Textures

Altri modelli inducono la formazione di (semi) difetti chiamati *Textures*. Questi oggetti, difficili da immaginare a causa della dimensione in cui vivono, sono concettualmente facili da identificare, rappresentano un analogo dei difetti in dimensione quattro. Ma dato che la quarta dimensione che consideriamo non è spaziale ma temporale, corrispondono ad una configurazione di difetti, e più in generale ad una configurazione del campo globale, variabile col tempo: la sua evoluzione perturberà tutto lo spazio-tempo.

Neil Turok [11] fu il primo a realizzare che diversi modelli di teoria unificata prevedessero l'esistenza di particolari configurazioni del Campo di Higgs chiamati *Nodi* (Textures). La nota importante sta nel fatto che questi ultimi, a differenza degli altri difetti, non hanno una zona di *core*, dove si concentra il difetto, e dunque l'energia è più distribuita nello spazio. Inoltre sono molto instabili e tendono a collassare in nodi di dimensione microscopica rilasciando energia: così facendo genererebbero un campo gravitazionale che perturberebbe la materia circostante tale da permettere la formazione di strutture, come ad esempio galassie.

Capitolo 3

Rilevazioni sperimentali ed inflazione

Nel precedente capitolo abbiamo detto che i Textures tendono a collassare e rilasciare energia. Questo collasso perturba lo spazio-tempo che a sua volta influenza le geodetiche dei fotoni portando a delle anisotropie della *Radiazione Cosmica di Fondo* o *CMB*: queste rappresentano la più chiara delle varie possibili tracce che proverebbe l'esistenza di questi oggetti esotici.

3.1 La Radiazione Cosmica di Fondo

La *Radiazione Cosmica di Fondo*, o *CMB*, è la radiazione elettromagnetica che permea l'universo. È definibile come la radiazione residua proveniente dalle fasi iniziali della nascita dell'universo, in accordo con il modello del Big Bang, di cui è considerata una prova.

Nelle fasi iniziali dell'universo questi avrebbe avuto infatti dimensioni molto più contenute di quelle attuali, ma temperature più alte ed una radiazione uniforme proveniente dal plasma di idrogeno primordiale. L'elevata energia dei fotoni impediva agli elettroni di legarsi ai protoni, impedendo la formazione degli atomi. Con l'espansione dell'universo, sia il plasma sia la radiazione iniziarono a raffreddarsi, fino a raggiungere una temperatura per cui la minor energia dei fotoni non era più ostacolo alla formazione dei primi atomi stabili. Questi non poterono più assorbire la radiazione termica, cosicché l'universo, che fino a quel momento si era comportato da nebbia opaca, diventò trasparente alla radiazione. I fotoni che esistevano in quel momento iniziarono a propagarsi, divenendo meno energetici, poiché si distribuivano su uno spazio più ampio.

George Gamow fu il primo a predire un Big Bang caldo per l'inizio dell'universo, descritto come sopra e, contemporaneamente, che tutto lo spazio fosse all'inizio

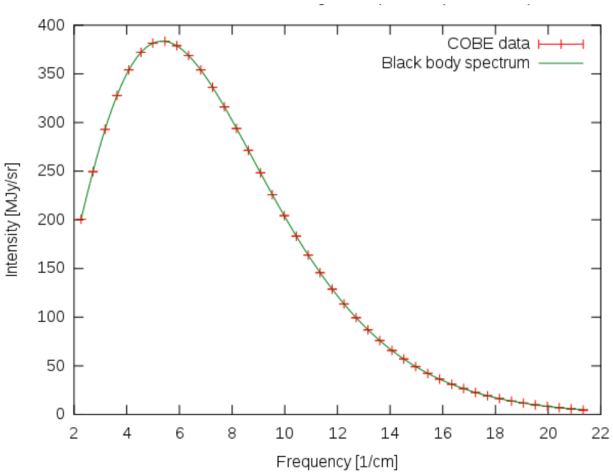

Figura 3.1: *Lo spettro della radiazione di fondo misurato dal COBE è la misurazione più precisa di corpo nero in natura* [13].

occupato da plasma. Questa affermazione è verificabile sperimentalmente poiché mentre l'idrogeno gassoso freddo è trasparente e invisibile, il suo plasma caldo è opaco ed emette una luce brillante [9]. Dunque, in universo in espansione, quando guardiamo lo spazio lontano, stiamo guardando nel passato, a causa della velocità limitata della luce. Dovremmo allora essere in grado di osservare, come orizzonte ultimo, un muro brillante di plasma di idrogeno: più in particolare, una sfera di plasma che ci circonda oltre la quale, a causa della sua opacità, non possiamo osservare quello che è accaduto prima del Big Bang.

I primi modelli più dettagliati coinvolsero anche due suoi studenti, Ralph Halpher e Robert Herman: stimarono uno spettro di corpo nero (figura 3.1) ad una temperatura della radiazione intorno ai $5\,\mathrm{K}$, con un picco di emissione nel micro-onde. Col tempo si fecero stime più accurate e misure sempre più precise, arrivando a misurare una temperatura di circa $2.7\,\mathrm{K}$.

3.1.1 L'anisotropia

La radiazione cosmica di fondo presenta un'alta isotropia, indice di una notevole omogeneità del plasma primordiale. Tale omogeneità non può però essere la causa della creazione di strutture come ad esempio galassie e ammassi. La presenza di questi oggetti implica piuttosto delle anisotropie del plasma.

La *CMB* presenta due tipologie di anisotropie, che ora discuteremo.

Le anisotropie primarie

Le anisotropie primarie derivano dagli effetti che si verificano sulla superficie di ultimo scattering e prima. La struttura di queste è determinata principalmente da due effetti: oscillazioni acustiche e smorzamento della diffusione. Le oscillazioni acustiche sorgono a causa della competizione tra fotoni e barioni nel plasma dell'universo primordiale. La pressione dei fotoni tende a cancellare le anisotropie, mentre l'attrazione gravitazionale dei barioni, in movimento a velocità molto più basse della luce, li porta a collassare formando così densi aloni. Questi due effetti sono in competizione tra loro, creando le oscillazioni acustiche che danno al fondo a microonde una caratteristica struttura a picchi. I picchi corrispondono, grosso modo, alle risonanze alle quali i fotoni si dissociano quando un particolare modo di oscillazione è al suo picco di ampiezza.

I picchi contengono interessanti impronte fisiche per ricavare informazioni sulla curvatura dell'universo, densità barionica, densità di materia oscura, etc.

Lo smorzamento senza collisioni, invece, è causato da due effetti, che emergono quando il modello di fluido per trattare il plasma primordiale inizia a non è essere più adatto:

- l'aumento del cammino libero medio dei fotoni mentre il plasma primordiale diventa sempre più rarefatto nell'universo in espansione;
- a profondità finita della superficie di ultimo scattering, che fa sì che il cammino libero medio cresca rapidamente durante il disaccoppiamento, anche se qualche scattering Compton è ancora in corso.

Le anisotropie secondarie

Le anisotropia secondarie o successive derivano da effetti quali le interazioni con il gas caldo o il potenziale gravitazionale, tra la superficie di ultimo scattering e l'osservatore. Da quando si è formata, la radiazione è stata modificata da diversi processi fisici successivi, che sono i responsabili di questo tipo di anisotropie.

Finché i fotoni del fondo a micro-onde non erano ostacolati nel loro viaggio, la materia ordinaria dell'universo consisteva per lo più di atomi di idrogeno e di elio neutri. Tuttavia, le osservazioni odierne delle galassie sembrano indicare che la maggior parte del volume dello spazio intergalattico è costituito da materiale ionizzato (in quanto ci sono poche linee di assorbimento derivanti da atomi di idrogeno). Questo implica un periodo di reionizzazione durante il quale una parte del materiale dell'universo venne frammentata in ioni di idrogeno.

I fotoni della radiazione dispersero le cariche libere, come gli elettroni non legati ad atomi. In un universo ionizzato, queste particelle cariche sono state liberate dagli atomi neutri dalle radiazioni ionizzanti come i raggi ultravioletti.

Oggi queste cariche libere hanno una densità sufficientemente bassa nella maggior parte del volume dell'Universo, da non incidere apprezzabilmente sulla *CMB*.

3.2 Le segnature dei difetti topologici nella Radiazione Cosmica di Fondo

Se i difetti si sono davvero formati nell'universo primordiale e se qualcuno di questi è ancora presente nel nostro orizzonte, le anisotropie della Radiazione Cosmica di Fondo produrrebbero delle tracce peculiari. Le Stringhe Cosmiche, ad esempio, avrebbero come risultato quello di influenzare la radiazione in maniera molto caratteristica dovuta all'effetto Doppler che essa subisce quando interseca la Stringa stessa. Le anisotropie della *CMB* sono direttamente collegate alla formazione delle strutture dell'universo. Ci sono due grandi classi di modelli per la formazione delle strutture: modelli *passivi* e *attivi*. Nei modelli passivi le disomogeneità nello spazio sono poste come condizioni iniziali in un tempo iniziale, e la loro evoluzione attraverso le equazioni di Einstein, descriverebbe la formazione delle strutture. I modelli attivi le sorgenti delle perturbazioni, che non sono necessari in quelli attivi, sono dipendenti dal tempo.

I modelli passivi sono basati sul concetto di inflazione. L'idea di base è che esista un campo che si accoppia debolmente, chiamato *inflatone*, che guida l'espansione quasi esponenziale dell'universo. A seguito dell'inflazione avverrebbe una termalizzazione, durante la quale si formerebbe la materia. A causa delle fluttuazioni quantistiche dell'inflatone, esso varierebbe spazialmente, inducendo la termalizzazione ad avvenire a tempi diversi in zone diverse.

I modelli attivi sono motivati dai difetti topologici, in particolare dalle stringhe. Come detto nei capitoli precedenti, si pensa che l'universo abbia attraversato una serie di transizioni di fase durante l'espansione. Una volta formate, le Stringhe Cosmiche potrebbero essere sopravvissute abbastanza da perturbare la densità di materia. I modelli derivanti da difetti hanno la peculiarità di non avere parametri liberi, poiché tutte le informazioni necessarie sono contenute nel modello fisico di particella, almeno in linea teorica.

Sono stati studiati diversi modelli numerici, tra cui citiamo quello di Pogosian e Vachaspati, 1999, [8] per cercare di spiegare i picchi di anisotropia della radiazione a partire dalle stringhe. L'accordo con i dati sperimentali è purtroppo tutt'altro che soddisfacente [5].

3.3 L'Inflazione

Secondo i modelli inflazionari invece, i difetti sarebbero stati scaraventati via in un periodo iniziale della formazione dell'universo.

Dalla Cosmologia sappiamo che c'è stata un era di *Inflazione* agli inizi dell'universo che avrebbe potuto liberarci dei difetti. Le teorie inflazionarie infatti ipotizzano una rapida espansione dell'universo nei primi istanti di vita di questo. Si stima che l'inflazione sia avvenuta intorno a $10^{-35}\ s$ dal Big Bang, sia durata intorno a $10^{-30}\ s$ e abbia aumentato il raggio dell'universo di un fattore enorme, tra le 10^{25} e 10^{30} volte. L'ipotesi prevalente è che sia stata generata da un campo di energia chiamato inflatone, forse originato da uno stato instabile dovuto alla non immediata rottura spontanea di simmetria delle forze fondamentali dopo una transizione di fase quantistica; tale campo avrebbe provocato l'espansione quasi esponenziale dell'universo. Al termine della breve fase inflazionaria l'espansione sarebbe ripresa al ritmo precedente secondo la cosmologia standard.

Secondo varie ipotesi, i difetti sarebbero così stati scaraventati oltre l'orizzonte di osservazione dall'inflazione. Ci si potrebbe domandare se il Campo di Higgs, responsabile della rottura di simmetria, non sia responsabile anche dell'era inflazionaria, diminuendo così la densità dei difetti. Questo porterebbe ad una assenza di tutti i difetti e spiegherebbe la mancanza di osservazioni attualmente. In realtà ciò non accade perchè, come si può approfondire in [2], una soluzione inflazionaria che identifica il Campo di Higgs con l'inflatone non porterebbe ad un era inflazionaria abbastanza lunga per poterci sbarazzare di tutti i difetti.

Altre teorie in realtà, corredate da simulazioni (si vedano [10] [7]) deriverebbero i difetti da un periodo post-inflazionario di pre-riscaldamento: l'inflatone oscillerebbe attorno al minimo del suo potenziale trasferendo una grande quantità di energia ai Campi di Higgs provocando ulteriori transizioni di fase non-termali sicché, proprio come le fluttuazioni termiche possono ripristinare le simmetrie rotte, queste larghe fluttuazioni porterebbero di nuovo alla formazione dei difetti. Dunque, seppure tutti i difetti primordiali fossero scaraventati via con l'era inflazionaria, l'inflazione stessa sarebbe la causa di ulteriori difetti che non potrebbero essere inflazionati più, a meno di una nuova inflazione.

Conclusioni

I *Difetti Topologici* costituiscono un campo di ricerca vasto e trasversale in fisica, che attraversa principalmente la Cosmologia, nella Fisica della Materia Condensatta e nella Fisica delle Alte Energie, ed hanno un ruolo rilevante nelle GUT, in quanto previsti da numerosi modelli. La loro presenza può essere teoricamente prevista a partire dalla Varietà del Vuoto $\mathcal{M}$, la cui topologia è profondamente collegata ai gruppi di simmetria prima e dopo la rottura spontanea. Il Meccanismo di Kibble fornisce un valido modello per la formazione dei difetti, corredato da una antologia vastissima di simulazioni numeriche che forniscono un supporto al modello teorico per ricavare stime di abbondanza e grandezza degli stessi difetti.

La loro esistenza potrebbe essere confermata dalle anisotropie della radiazione di fondo, dalle quali per ora vi sono risultati poco soddisfacenti e non sufficienti: infatti la loro assenza non è esclusa. Ciò sarebbe dovuto o ad una costruzione sbagliata del modello, oppure, secondo teorie più esotiche, all'inflazione che ha subito l'universo primordiale. Le stesse teorie, del resto, cercherebbero di salvare i difetti considerando una nuova genesi post-inflazionaria.

Si capisce bene che costituiscono allora un tema caldo, per ora non suscettibile di una risposta assoluta. Quello che si può dire è che ci sono diversi modelli abbastanza coerenti con le simulazioni e che sembrerebbero essere giustificati dalle radiazione del fondo a micro-onde.

Ringraziamenti

Per la stesura di questo lavoro ringrazio il Prof. Salvatore Capozziello per la piena disponibilità che avuto nell'aiutarmi a comprendere ed elaborare gli argomenti sopra descritti.

Ringrazio poi i miei genitori e mio fratello, che hanno sempre sostenuto ed stimato me ed il mi percorso di studi finora compiuto.

Vorrei poi ringraziare gli amici che mi hanno accompagnato in questo percorso già prima dell'università, Alessandro ed Ivan.

Infine ringrazio gli amici che ho conosciuto durante i miei studi universitari, che mi hanno aiutato con sincerità: ringrazio Marco A., Giuseppe, Meri, Vigilante, Antimo, Antonio, e tutti gli altri amici e parenti che mi hanno aiutato in questi studi.

Bibliografia

[1] John D Barrow, Alfredo B Henriques, Maria TVT Lago, and Malcom S Longair. The physical universe: The interface between cosmology, astrophysics and particle physics. In *The Physical Universe: The Interface Between Cosmology, Astrophysics and Particle Physics*, volume 383, 1991.

[2] Robert H Brandenberger. Topological defects and structure formation. *International Journal of Modern Physics*, A 9(13):2117–2189, 1994.

[3] Salvatore Capozziello and Maria Funaro. *Introduzione alla relatività generale: con applicazioni all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*. Liguori, 2006.

[4] P.A.M Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. In *Proc. Roy. Soc.*, volume A 133, page 60, 1931.

[5] Alejandro Gangui. Topological defects in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/0110285v1*, 2001.

[6] Michio Kaku. *Quantum field theory: a modern introduction*. Oxford Univ. Press, 1993.

[7] S Kasuya and M Kawasaki. Topological defect formation after inflation on lattice simulation. *Physical Review D*, 58(8):083516, 1998.

[8] Levon Pogosian and Tanmay Vachaspati. Cosmic microwave background anisotropy from wiggly strings. *Physical Review*, D 60(8):083504, 1999.

[9] Max Tegmark. *L'universo matematico. La ricerca della natura ultima della realtà*. Bollati Boringhieri, Torino, 2014.

[10] I Tkachev, S Khlebnikov, L Kofman, and A Linde. Cosmic strings from preheating. *Physics Letters B*, 440(3-4):262–268, 1998.

[11] Neil Turok. Global texture as the origin of cosmic structure. *Physical Review Letters*, 63(24):2625, 1989.

[12] Alexander Vilenkin and S. Shellard, E. Paul. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 2000.

[13] Martin White. Anisotropies in the CMB. *arXiv preprint astro-ph/9903232*, 1999.