UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Quanti di campo scalare generati da curvatura spazio-temporale

Relatore:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Emanuele Binetti
Matr. $N85001072$

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

La teoria quantistica dei campi e la relatività generale di Einstein sono le attuali teorie fisiche che meglio descrivono la realtà al livello fondamentale. Ciascuna però, è limitata al proprio dominio di validità, e un'unificazione tra le due, ammesso sia possibile, non è ancora stata compiuta. In questa tesi se ne mostra un tentativo primitivo, basato sulla semplice idea di considerare i campi quantistici come definiti su varietà curvate dalla gravitazione, e non sullo spaziotempo piatto. Ogni effetto di gravità quantistica è dunque ignorato. La trattazione si concentra quindi, su una delle conseguenze di tale operazione, ovvero sui concetti di vuoto e di particella, e di come questi, quando le ipotesi restrittive della relatività speciale vengono abbandonate, perdano la validità universale di cui godevano in precedenza.
Questo lavoro di tesi è diviso in tre capitoli:

- Capitolo 1: è studiata la dinamica classica di campi scalari liberi, definiti sullo spaziotempo di Minkowski, sfruttando il principio variazionale di minima azione. Successivamente sono presentati il formalismo della seconda quantizzazione e l'interpretazione, data ai quanti di eccitazione del campo, secondo la quale, essi sarebbero particelle relativistiche.

- Capitolo 2: i risultati ottenuti nel capitolo precedente vengono generalizzati al caso di spaziotempi curvi, mediante un approccio semiclassico. Lo studio delle soluzioni della nuova equazione di campo così ottenuta, rivela la possibilità che non esista più un unico stato di vuoto per tutti gli osservatori, ma che anzi, la curvatura spaziotemporale introduca un'intrinseca ambiguità nel concetto di particella.

- Capitolo 3: vincolati all'ipotesi semplificativa di asintotica piattezza e omogeneità spaziale dello spaziotempo, si calcola il numero di quanti di campo generati dalla curvatura, grazie all'ausilio delle trasformazioni di Bogolubov introdotte nel capitolo precedente.

Convenzioni e notazioni

Eccetto quando espilicitamente indicato, verranno utilizzate unità naturali, in cui:

$$c = \hbar = G = 1$$

Gli indici greci possono assumere i valori $\mu = 0, 1, 2, 3$, quelli latini $i = 1, 2, 3$.
Quando due indici si ripetono è sottointesa la somma.
Lo spaziotempo è una varità pseudo-Riemanniana di dimensione $n = 4$ su cui è definita la metrica di Mikowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un generico punto dello spaziotempo è abbreviato in:

$$x = (x^\mu) = (t, \mathbf{x}) = (x^0, x^i)$$

Il quadrivettore impulso è rappresentato secondo la convenzione:

$$k = k^\mu = (\omega, \mathbf{k}) = (k^0, k^i)$$

Il tensore metrico può essere usato per innalzare o abbassare gli indici e compiere prodotti scalari:

$$k_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu \qquad k \cdot x = k_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} k^\mu x^\mu$$

Il determinante del tensore metrico è:

$$\det(g^{\mu\nu}(x)) = g(x)$$

Le derivate parziali vengono indicate con i seguenti simboli:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

mentre le derivate covarianti con:

$$\nabla_\mu$$

L'operatore di D'Alembert è:

$$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$$

Lavoreremo nella rappresentazione di Heisenberg, in cui gli operatori dipendono dal tempo e gli stati non evolvono.
L'asterisco $*$ è utilizzato per indicare il complesso coniugato di un numero, mentre la daga $\dagger$ per l'aggiunto di un operatore.

Capitolo 1

Campi scalari in spaziotempi piatti

1.1 Equazioni di campo scalare in assenza di curvatura

In questa sezione si introducono i concetti preliminari della teoria di campi classici definiti su spaziotempi piatti, i quali saranno necessari nella discussione seguente. Vogliamo studiare la dinamica del campo scalare libero $\phi(x)$, governata dalla densità Lagrangiana:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) - m^2\phi^2(x)) \tag{1.1}$$

Il principio di minima azione impone che ogni campo ϕ evolva nel tempo seguendo la traiettoria nello spazio delle configurazioni $\{(\phi, \partial_\mu\phi)\}$ che minimizza l'integrale di azione:

$$S = \int \mathscr{L}(x) d^4x \tag{1.2}$$

Si consideri dunque $\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ come un funzionale dipendente dal campo ϕ e dalle sue derivate $\partial_\mu\phi$, e si imponga la condizione $\delta S(\phi, \partial_\mu\phi) = 0$ per variazioni rispetto al campo ϕ. Sfruttano la commutatività della variazione δ con il segno di integrale e con la derivata ∂_μ rispetto alle coordinate x^μ e, la regola del prodotto di Leibniz di cui quest'ultima gode, si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S(\phi, \partial_\mu\phi) \\
&= \delta\left(\int \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x\right) \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right\} \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)\right\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Si noti che l'ultimo termine è una divergenza e può dunque essere convertito in un integrale di superficie lungo il bordo della regione quadridimensionale su cui è estesa l'integrazione. Poiché le configurazioni iniziali e finali del campo sono assegnate, la variazione $\delta\phi$ è nulla sull'inizio e la fine temporale di tale regione. Se restringiamo la nostra trattazione a variazioni che svaniscono anche sul bordo spaziale della regione quadridimensionale di integrazione, allora tutto il termine di superficie si annulla. Fattorizzando il termine $\delta\phi$ è possibile notare che, affinché sia nullo l'integrale in (2.8) per una variazione arbitraria, deve svanire in ogni punto della regione spaziotemporale di integrazione il termine che moltiplica $\delta\phi$.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{1.4}$$

Le (1.4) sono le equazioni del moto di Eulero-Lagrange per il campo ϕ, ottenute sfruttando il principio variazionale. Utilizzando l'espressione (1.1) per la densità Lagrangiana e sostituendola nelle (1.4), si ricava l'equazione classica di campo di Klein-Gordon:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi(x) = 0 \iff (\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1.5}$$

1.2 Decomposizione in onde piane delle soluzioni dell'equazione di campo

La ricerca delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon può cominciare richiedendo che i campi soluzione siano fattorizzabili in quattro autostati delle derivate parziali $i(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu) = i\partial^\mu$, ciascuno dipendente esclusivamente da una delle quattro coordinate spaziotemporali, ed imporre poi delle opportune condizioni sugli autovalori k^ν. É facile verificare che un tale insieme di soluzioni di (1.5) è dato dalle onde piane:

$$u_k(x) \propto e^{-ix^\mu k_\mu} = e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \tag{1.6}$$

identificate dai vettori d'onda $k = k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, i quali devono verificare la seguente relazione di dispersione, affinché le (1.6) siano soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon:

$$k^\mu k_\mu = \omega^2 - |\mathbf{k}|^2 = m^2 \tag{1.7}$$

Si noti come l'equazione appena scritta sia simile alla relazione relativistica che energia ed impulso di una particella di massa m rispettano. In seguito alla quantizzazione del campo infatti, m potrà essere interpretata come la massa dei quanti del campo stesso. Sulle onde (1.6) e sul quadrivettore k si può imporre l'ulteriore condizione:

$$k^0 = \omega \geq 0$$

per selezionare esclusivamente le frequenze ω positive. Le frequenze negative possono quindi essere ritrovate considerando il complesso coniugato delle onde piane:

$$u_k^*(x) \propto e^{ix^\mu k_\mu} = e^{i(\omega t - \mathbf{kx})} \iff u_k^*(x) = u_{-k}(x) \tag{1.8}$$

Il seguente integrale, esteso ad un'ipersuperficie $t = const$, definisce il prodotto scalare tra due generici campi ϕ e ψ:

$$\begin{aligned}(\phi, \psi) &= -i \int \Big(\phi(x)\big[\partial_t \psi^*(x)\big] - \big[\partial_t \phi(x)\big]\psi^*(x)\Big) d^3x \\ &= -i \int \phi(x) \overleftrightarrow{\partial_t} \psi^*(x) d^3x\end{aligned} \tag{1.9}$$

É ora possibile determinare il coefficiente che normalizza, rispetto a tale prodotto scalare, le onde piane $u_k(x)$:

$$u_k(x) = \frac{e^{-ix^\mu k_\mu}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} = \frac{e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \tag{1.10}$$

le quali, insieme ai loro complessi coniugati, rispettano adesso le relazioni di completezza:

$$\begin{aligned}(u_k, u_{k'}) &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ (u_k^*, u_{k'}^*) &= -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ (u_k^*, u_{k'}) &= \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\end{aligned} \tag{1.11}$$

Ottenuta la base ortonormale completa (1.10) dello spazio dei campi scalari, la più generica soluzione dell'equazione di Klein-Gordon (1.5) è espandibile lungo le onde piane:

$$\phi(x) = \int \big[a_k u_k(x) + a_k^* u_k^*(x)\big] d^3k \tag{1.12}$$

dove l'integrale è ovviamente compiuto sulle frequenze positive $k = (\sqrt{|\mathbf{k}|}, \mathbf{k})$, e gli a_k sono i coefficienti di Fourier del campo ϕ.
La somma continua in (1.12) può essere discretizzata come fatto di consueto in meccanica quantistica, ovvero restringendo il dominio spaziale della soluzione ad un cubo di lato L ed imponendo adeguate condizioni al contorno. Si ottiene così:

$$u_k(x) = \frac{e^{-ix^\mu k_\mu}}{\sqrt{2L^3 k^0}} = \frac{e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})}}{\sqrt{2L^3 \omega}}\;; \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{m} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3 \tag{1.13}$$

Le relazioni di completezza diventano:

$$\begin{aligned}(u_k, u_{k'}) &= \delta_{kk'} \\ (u_k^*, u_{k'}^*) &= -\delta_{kk'} \\ (u_k^*, u_{k'}) &= \delta_{k-k'}\end{aligned} \tag{1.14}$$

ed infine:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a_k u_k(x) + a_k^* u_k^*(x)\right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2L^3\omega}} \left[a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} + a_k^* e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}\right]\end{aligned} \tag{1.15}$$

1.3 Quantizzazione di campi scalari: costruzione dello spazio di Fock

Introdotta la densità di momento $\pi(x)$ coniugata a $\phi(x)$

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \eta^{0\nu}\partial_\nu \phi = \partial^t \phi = \partial_t \phi \tag{1.16}$$

e ricavata la sua espansione lungo le onde piane discretizzate (1.13)

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \partial_t \phi(x) \\ &= \partial_t \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2L^3\omega}} \left[a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} + a_k^* e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}\right] \\ &= -i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega}{2L^3}} \left[a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} - a_k^* e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}\right]\end{aligned} \tag{1.17}$$

la teoria sin ora costruita è quantizzata nel modo canonico, considerando i campi ϕ e π come operatori che rispettano le regole di commutazione, valide quando valutate allo stesso istante:

$$\begin{aligned}\left[\phi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')\right] &= 0 \\ \left[\pi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')\right] &= 0 \\ \left[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')\right] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\end{aligned} \tag{1.18}$$

Conseguentemente, i coefficienti di Fourier a_k introdotti nella sezione precedente diventano anch'essi operatori. Le espansioni (1.15) e (1.17) dei campi $\phi(x)$ e $\pi(x)$ vengono dunque modificate nel seguente modo:

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2L^3\omega}} \left[a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} + a_k^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}\right] \tag{1.19}$$

$$\pi(x) = -i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega}{2L^3}} \left[a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} - a_k^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}\right] \tag{1.20}$$

Le ultime espressioni possono quindi essere inserite nelle relazioni di commutazione (1.18), per ricavare nuove relazioni, equivalenti a quelle precedenti, ma valide per a_k e $a_k^\dagger$:

$$\begin{aligned} \left[a_k, a_{k'}\right] &= 0 \\ \left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right] &= 0 \\ \left[a_k, a_{k'}^\dagger\right] &= \delta_{kk'} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Si noti adesso come, per ogni quadrivettore k fissato, le (1.21) siano identiche alle relazioni di commutazione rispettate dagli operatori annichilazione e creazione di un oscillatore armonico quantistico, di cui una discussione completa è affrontata in [2]. Continuiamo dunque l'analogia con l'oscillatore armonico, sfruttandone alcuni risultati, di cui non ricaviamo la derivazione.

Le formule (1.19) e (1.20) possono guidarci per ottenere un'interpretazione degli operatori a_k e $a_k^\dagger$. Queste sono infatti scritte nell'usuale forma in cui si esprimono posizione e momento, in funzione degli operatori creazione e annichilazione. Nel caso in esame ci sono un numero infinito di oscillatori armonici, tutti indipendenti tra loro, indicizzati dai vettori k. Ciascuno di questi oscillatori è caratterizzato dalla propria frequenza $\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$.

A questo punto è possibile individuare una base dello spazio di Hilbert, detta base di Fock, a cui appartengono gli stati quantistici su cui i campi agiscono, cominciando il processo di costruzione degli stati della base in completa analogia al caso dell'oscillatore armonico, ovvero partendo dallo stato fondamentale $|0\rangle$. Lo stato fondamentale, anche detto stato di vuoto, è caratterizzato dal fatto che quando vi si agisce con uno qualsiasi degli operatori a_k, questi si annichilisce, restituendo il vettore nullo:

$$a_k|0\rangle = 0 \quad \forall\, k \tag{1.22}$$

Agendo invece sul vuoto con uno degli operatori di creazione $a_k^\dagger$, si genera un quanto di eccitazione caratterizzato dalla frequenza di oscillazione $\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. É ottenuto in questo modo, il cosiddetto stato di singola particella:

$$a_k^\dagger|0\rangle = |1_k\rangle \tag{1.23}$$

Si può ovviamente agire con ciascuno degli operatori $a^\dagger_{({}^ik)}$ un numero ${}^in$ di volte, ed ottenere così il più generico stato possibile della base dello spazio di Hilbert, lo stato di più particelle:

$$|{}^1n_{({}^1k)}, {}^2n_{({}^2k)}, ..., {}^in_{({}^ik)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}^1n!{}^2n!...{}^in!}} (a^\dagger_{({}^1k)})^{{}^1n} (a^\dagger_{({}^2k)})^{{}^2n} ... (a^\dagger_{({}^ik)})^{{}^in} |0\rangle \tag{1.24}$$

Il coefficiente moltiplicativo è necessario per ottenere stati normalizzati, essendo in generale l'azione degli operatori creazione e distruzione, come nel caso dell'oscillatore armonico, la seguente:

$$a_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n+1}|(n+1)_k\rangle \tag{1.25}$$

$$a_k|n_k\rangle = \sqrt{n}|(n-1)_k\rangle \tag{1.26}$$

1.4 Interpretazione dei quanti di campo come particelle

Vogliamo dare un'interpretazione fisica agli stati appena costruiti e, in particolare, ai quanti di eccitazione del campo. Si considerino quindi le espressioni dell'Hamiltoniana totale e del momento totale del campo di Klein-Gordon, ricavati nel secondo capitolo di [3]:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\pi^2(x) + \sum_{i=1}^{3}(\partial_i\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x)\right] \tag{1.27}$$

$$P_i = \int \pi(x)\partial_i\phi(x)d^3x \tag{1.28}$$

Quando nelle equazioni appena scritte, si sostituiscono ai campi $\phi(x)$ e $\pi(x)$ le espansioni in funzione degli operatori a gradino (1.19) e (1.20), si ottengono, come era intuibile, le familiari espressioni di Hamiltoniana e momento di un oscillatore armonico.

$$H = \sum_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right)\omega = \sum_k \left(N_k + \frac{1}{2}\right)\omega \tag{1.29}$$

$$P_i = \sum_k a_k^\dagger a_k k_i = \sum_k N_k k_i \tag{1.30}$$

Nello scrivere le ultime due equazioni, si è introdotto l'operatore numero N_k per l'impulso k e, allo stesso modo, si può definire anche l'operatore numero totale N:

$$N_k = a_k^\dagger a_k \qquad N = \sum_k N_k \tag{1.31}$$

Il nome di questi due operatori trova giustificazione studiandone il valore di aspettazione sul generico stato di Fock:

$$\langle {}^1n_{({}^1k)}, {}^2n_{({}^2k)}, ..., {}^jn_{({}^jk)}|N_{({}^ik)}|{}^1n_{({}^1k)}, {}^2n_{({}^2k)}, ..., {}^jn_{({}^jk)}\rangle = {}^in \tag{1.32}$$

$$\langle {}^1n_{({}^1k)}, {}^2n_{({}^2k)}, ..., {}^jn_{({}^jk)}|N|{}^1n_{({}^1k)}, {}^2n_{({}^2k)}, ..., {}^jn_{({}^jk)}\rangle = \sum_{i=1}^{j}({}^in) = n \tag{1.33}$$

Il valore di aspettazione di N_k è dunque, come già noto dall'oscillatore armonico, il numero di quanti n_k di eccitazione di frequenza k, mentre quello di N è il numero di quanti n totali.

La scrittura dell'Hamiltoniana (1.29) e del momento (1.30) in funzione degli operatori numero, mostra eplicitamente che agire con l'operatore creazione sullo stato $\phi(x)$, equivale a creare un quanto che modifica i valori di aspettazione di H e di P_i, valutati sul nuovo stato, di un termine di energia ω e di momento k_i aggiuntivi. Ricordando inoltre che ω e $\mathbf{k}$ rispettano la relazione relativistica di energia-momento $\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ di una particella di massa m, è possibile interpretare ogni quanto di eccitazione del campo come una particella dotata di impulso definito k, ovvero in un autostato del momento. Il generico stato di Fock (1.24) contiene quindi ${}^1n$ particelle con momento ${}^1k$, ${}^2n$ particelle con momento ${}^2k$, e così via.

Capitolo 2

Campi scalari in spaziotempi curvi

2.1 Considerazioni preliminari

In assenza di una teoria quantistica della gravità, è possibile studiare l'interazione di campi gravitazionali con la materia quantizzata attraverso un approccio semiclassico, in modo analogo a quanto fatto con il campo elettromagnetico agli albori della meccanica quantistica, prima che esso venisse quantizzato. Tale approssimazione consiste nel considerare il campo in questione come classico, ovvero non quantizzato, presente in sottofondo ed in interazione con il sistema quantistico considerato. Poiché un simile approccio, quando applicato al campo elettromagnetico, si è storicamente rivelato essere molto fruttuoso, permettendo di ottenere risultati in accordo con gli esperimenti e con la teoria più generale, è dunque possibile sperare, nel fare lo stesso con il campo gravitazionale, di riuscire con successo a sviluppare una teoria valida fino a che gli effetti di gravitazione quantistica non debbano più essere considerati trascurabili.

La costante di gravitazione universale G permette, quando opportunamente combinata con la velocità della luce c e la costante di Planck $\hbar$, di ottenere nuove unità fondamentali di lunghezza, la lunghezza di Planck $\sqrt{G\hbar/c^3} \simeq 1.616 \times 10^{-35} m$, e di tempo, il tempo di Planck $\sqrt{G\hbar/c^5} \simeq 5.3912 \times 10^{-44} s$. Quando si tenta di quantizzare il campo gravitazionale in modo analogo a quanto fatto in elettrodinamica quantistica, la lunghezza di Planck al quadrato compare come costante di accoppiamento. È quindi ragionevole pensare che, finché le lunghezze ed i tempi caratteristici dei processi considerati dovessero essere grandi in confronto ai valori di Planck, gli effetti quantistici della gravitazione possano essere trascurati, e che sia giustificato l'utilizzo dell'approccio semiclassico prima descritto. I valori così piccoli della lunghezza e del tempo di Planck rendono dunque una tale teoria applicabile entro un ampio intervallo di validità.

2.2 Nozioni di relatività generale

Un'esaustiva trattazione della gravitazione è possibile solo all'interno della teoria della relatività generale di Einstein, in questa sezione ne riportiamo dunque alcuni utili risultati, la cui derivazione è compiuta in [5], oppure in [7]. L'effetto dei campi gravitazionali è schematizzabile attraverso l'introduzione del campo tensoriale di ordine due $g^{\mu\nu}$, il quale rappresenta il potenziale gravitazionale presente. Tale tensore sostituisce il tensore di Minkowski $\eta^{\mu\nu}$, utilizzato per alzare gli indici e dunque compiere contrazioni e prodotti scalari tra vettori in spaziotempi piatti, ovvero in assenza di gravità. Pertanto $g^{\mu\nu}$ modifica il modo in cui vengono misurate le distanze e, più in generale, le lunghezze di vettori tangenti lo spaziotempo, per questo motivo viene chiamato tensore metrico.
Imponendo inoltre la condizione di isometria della metrica

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

è possibile, partendo dalle derivate del tensore metrico, definire un'univoca connessione lineare a torsione nulla, la connessione di Levi Civita:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \tag{2.2}$$

che permette di effettuare la derivata covariante di campi tensoriali, diversa rispetto al caso di spaziotempo piatto, per la presenza di termini aggiuntivi che possono essere pensati come causati da curvatura spaziotemporale.
Nonostante i simboli di Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ non formino un tensore, da questi si può costruire il tensore di Riemann:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \tag{2.3}$$

e per contrazione *il tensore di Ricci*:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \tag{2.4}$$

e lo *scalare di Ricci*:

$$R = R^\alpha_\alpha \tag{2.5}$$

I tensori ora introdotti compaiono nelle equazioni di campo di Einstein e sono legati al tensore metrico tramite le proprie derivate seconde. Tali campi tensoriali sono i campi classici, ovvero non quantistici, che descrivono l'interazione gravitazionale e che utilizzeremo nel nostro approccio semiclassico come campi presenti in sottofondo, accoppiati al campo da quantizzare.

É infine importante notare che il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, permette di studiare anche sistemi di riferimento non inerziali. Che l'accelerazione sia generata da campi gravitazionali reali o da forze esterne è ininfluente: in entrambi i casi il tensore metrico nel sistema di riferimento non inerziale assumerà la stessa forma.

2.3 Equazioni di campo scalare in presenza di curvatura

Cominciamo adesso la ricerca di equazioni di campo scalare seguendo quanto fatto nella sezione 3.8 di [4] e, in analogia al caso di spaziotempi piatti, consideriamo l'equazione (1.1) della densità Lagrangiana, invariante per trasformazioni di Lorentz. Ottenuta un'adeguata densità Lagrangiana che tenga anche conto dell'interazione tra campo scalare e campo gravitazionale, potremmo nuovamente ricavare le equazioni di campo sfruttando il principio variazionale, ovvero richiedendo che sia nulla la variazione del funzionale di azione valutato sulla soluzione.

Nel caso più generale di spaziotempi curvi, dobbiamo cercare una densità Lagrangiana definita da un'equazione tensoriale, che sia quindi invariante per diffeomorfismi. Tale richiesta può essere verificata sostituendo nella (1.1) le derivate parziali del campo $\partial_\mu\phi(x)$ con le rispettive derivate covarianti $\nabla_\mu\phi(x)$. Il prodotto scalare tra queste due derivate deve ovviamente essere effettuato utilizzando il tensore metrico $g^{\mu\nu}(x)$ al posto di $\eta^{\mu\nu}$.

$$\eta^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) \to g^{\mu\nu}(x)\nabla_\mu\phi(x)\nabla_\nu\phi(x)$$

Il termine di massa $m^2\phi^2(x)$ rimane invariato, ma si deve adesso includere un termine aggiuntivo, che rappresenti l'interazione tra il campo scalare $\phi(x)$ ed il campo gravitazionale. Un tale accoppiamento scalare locale può essere solo del tipo: $\xi R(x)\phi^2(x)$, con ξ costante di accoppiamento e $R(x)$ scalare di Ricci. Si noti che, avendo $R(x)$ le dimensioni del quadrato di una massa, la costante ξ deve essere adimensionale.

$$(m^2)\phi^2(x) \to (m^2 + \xi R(x))\phi^2(x)$$

Infine, essendo $\mathscr{L}(x)$ <u>densità</u> di una quantità scalare, essa deve soddisfare un ultimo requisito: quando moltiplicata per l'elemento di volume infinitesimo d^4x, deve restituire uno scalare. L'elemento di volume d^4x non è in generale invariante per diffeomorfismi, ma si trasforma moltiplicando il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. In [7] è mostrato come, per ottenere l'elemento di volume invariante, sia necessario moltiplicare a d^4x il fattore $\sqrt{-g(x)}$, assorbito nella nuova definizione di desità Lagrangiana:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g(x)}\{g^{\mu\nu}(x)\nabla_\mu\phi(x)\nabla_\nu\phi(x) - [m^2 + \xi R(x)]\phi^2(x)\} \tag{2.6}$$

É quindi presto definita l'azione:

$$S = \int \mathscr{L}(x)\, d^4x \tag{2.7}$$

Per ottenere le equazioni di campo di Eulero-Lagrange si procede in modo analogo rispetto a quanto fatto nel capitolo precedente, guidati dal principio di minima azione. Tutte le considerazioni allora compiute sono infatti ancora valide per il nuovo funzionale $\mathscr{L}(\phi, \nabla_\mu \phi)$, quando si sostituiscano le derivate covarianti alle derivate parziali. Ripetiamo dunque, nello stesso modo, la derivazione delle equazioni del moto a partire dalla condizione di stazionarietà del funzionale di azione $\delta S(\nabla_\mu \phi) = 0$ per variazioni rispetto al campo ϕ:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S(\phi, \nabla_\mu \phi) \\ &= \delta \left(\int \mathscr{L}(\phi, \nabla_\mu \phi) d^4 x \right) \\ &= \int d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \delta (\nabla_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il termine contenente la divergenza può essere ancora considerato nullo per le stesse ragioni già fornite nel capitolo precedente e, imponendo che l'integrale sia nullo per variazioni $\delta\phi$ arbitrarie, ricaviamo le equazioni di Eulero-Lagrange valide anche in presenza di curvatura spaziotemporale:

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{2.9}$$

Si noti come le (2.9) siano formalmente simili alle (1.4), alle quali si riducono nel caso in cui la metrica dovesse essere quella piatta di Minkowski. Un'ulteriore differenza rispetto al caso precedente è la presenza, nella densità Lagrangiana, del termine di accoppiamento con il campo gravitazionale, il quale compare dunque anche nelle nuove equazioni per il campo scalare ϕ, ottenute sostituendo nelle (2.9) l'espressione (2.6) ricavata in precedenza:

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + m^2 + \xi R(x)) \phi(x) = 0 \iff (\Box + m^2 + \xi R(x)) \phi(x) = 0 \tag{2.10}$$

2.4 Soluzione dell'equazione di campo: ambiguità nella decomposizione

Per cercare soluzioni generali dell'equazione (2.10), possiamo tentare di estendere quanto già fatto nella sezione (1.2). Definiremo un prodotto scalare, rispetto al quale esista un sistema ortonormale completo di campi che soddisfano l'equazione (2.10). Trovato poi tale sistema, la soluzione generale potrà essere espressa come combinazione lineare dei suoi elementi.

Per generalizzare il prodotto scalare (1.9) è necessario, come già notato in precedenza, moltiplicare l'integrando per il fattore $\sqrt{-g(x)}$. In [6] si utilizza il teorema di Gauss per mostrare come, quando si modifichi il dominio di integrazione all'ipersuperficie orientata di tipo spazio Σ, il cui elemento di volume è $n^\mu d\Sigma$, l'integrale risulti indipendente dall'ipersuperficie scelta.

$$\begin{aligned}(\phi,\psi) &= -i\int\sqrt{-g(x)}\phi(x)\overleftrightarrow{\nabla}_\mu\psi^*(x)n^\mu d\Sigma \\ &= -i\int\sqrt{-g(x)}\phi(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^*(x)n^\mu d\Sigma\end{aligned} \tag{2.11}$$

La seconda uguaglianza è valida solo per campi scalari, per i quali la derivata parziale ∂_μ coincide con quella covariante ∇_μ, come mostrato in [1].

Quando si voglia, a questo punto, cercare autofunzioni delle derivate $i\partial^\mu$ con cui costruire le soluzioni generali di (2.10), in analogia a quanto fatto nel caso di spaziotempi piatti, si riscontra un'ambiguità. Nel caso precedente, infatti, erano definiti sistemi di coordinate globali che godevano di simmetria rispetto al gruppo di trasformazioni di Poincaré. Su tali sistemi, era possibile individuare senza ambiguità le onde piane lungo cui espandere i campi, e da cui partire per costruire la teoria quantistica. Di conseguenza, anche il vuoto e i sistemi di molte particelle risultavano invarianti rispetto a cambiamenti di sistemi di riferimento inerziali, ovvero uguali per ogni osservatore inerziale.

Su spaziotempi curvi invece, non esistono sistemi di coordinate privilegiati, né decomposizioni in frequenze naturali per le soluzioni dell'equazione (2.10). Accade dunque, che esistano diversi sistemi completi, ortonormali nel prodotto (2.11), soluzioni dell'equazione di campo. Consideriamo, ad esempio, due sistemi formati dai campi $u_i(x)$ e $\overline{u}_j(x)$, i cui elementi sono etichettati schematicamente dai soli indici i e j. Valgono le relazioni di completezza rispetto al prodotto scalare (2.11):

$$\begin{aligned}(u_i,u_{i'}) &= \delta_{ii'} & (\overline{u}_j,\overline{u}_{j'}) &= \delta_{jj'} \\ (u_i^*,u_{i'}^*) &= -\delta_{ii'} & (\overline{u}_j^*,\overline{u}_{j'}^*) &= -\delta_{jj'} \\ (u_i^*,u_{i'}) &= 0 & (\overline{u}_j^*,\overline{u}_{j'}) &= 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

Risulta quindi possibile espandere le soluzioni dell'equazione (2.10) nei diversi modi, entrambi validi:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_i\left[a_iu_i(x)+a_i^*u_i^*(x)\right] \\ \phi(x) &= \sum_j\left[\overline{a}_j\,\overline{u}_j(x)+\overline{a}_j^*\,\overline{u}_j^*(x)\right]\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.5 Quantizzazione di campi scalari e trasformazioni di Bogolubov

Per procedere alla quantizzazione della teoria, bisogna ripetere gli stessi passi già compiuti nella sezione (1.3). I coefficienti di Fourier a_i appena introdotti vengono promossi ad operatori, richiedendo che rispettino le relazioni di commutazione degli operatori a gradino.

$$\begin{aligned} \left[a_i, a_{i'}\right] &= 0 \\ \left[a_i^\dagger, a_{i'}^\dagger\right] &= 0 \\ \left[a_i, a_{i'}^\dagger\right] &= \delta_{ii'} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le decomposizioni (2.13) vengono modificate di conseguenza:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_i \left[a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)\right] \\ \phi(x) &= \sum_j \left[\overline{a}_j\, \overline{u}_j(x) + \overline{a}_j^\dagger\, \overline{u}_j^*(x)\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ed infine si costruisce un nuovo spazio di Fock, partendo dallo stato di vuoto, per cui vale:

$$a_i|0\rangle = 0 \quad \forall\, i \tag{2.16}$$

In base a quanto detto nella sezione precedente, è possibile compiere lo stesso procedimento, in modo altrettanto valido, per gli operatori $\overline{a}_j$, associati ad una diversa decomposizione dei campi. Si ottengono così, delle relazioni simili alle (2.14), rispettate da $\overline{a}_j\ \overline{a}_j^\dagger$, ed uno stato di vuoto diverso, da cui è quindi possibile costruire stati di più particelle, diversi da quelli di prima.

$$\overline{a}_j|\overline{0}\rangle = 0 \quad \forall\, j \tag{2.17}$$

Quando si ricordi l'interpretazione, data nel capitolo precedente, degli stati dello spazio di Fock, per cui a ogni quanto di eccitazione corrisponde una particella del campo scalare, allora, le conseguenze della covarianza relativistica si manifestano in modo sorprendente: su spaziotempi curvi non esiste più un unico spazio di Fock comune a tutti i sistemi di riferimento, ma anzi, è possibile che due osservatori diversi, compiendo misure sullo stesso campo ϕ, non osservino, in generale, le stesse particelle.

É interessante a questo punto, ricercare le relazioni che legano gli operatori a gradino e gli stati di Fock basati sulle onde $u_i(x)$ a quelli basati sulle onde $\overline{u}_j(x)$. Essendo entrambi i sistemi completi, esistono opportuni coefficienti α_{ji} e β_{ji}, detti di Bogolubov, con cui è possibile espandere i campi di uno, in funzione di quelli dell'altro:

$$\overline{u}_j = \sum_i \left[\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*\right] \tag{2.18}$$

Moltiplicare scalarmente a sinistra l'equazione appena scritta e la sua complessa coniugata per l'onda u_i, congiuntamente all'utilizzo delle relazioni di completezza (2.12), permette di ricavare la relazione inversa:

$$u_i = \sum_j \left[\alpha_{ji}^* \overline{u}_j - \beta_{ji}^* \overline{u}_j^*\right] \tag{2.19}$$

Eguagliando le due equazioni in (2.15) e sfruttando le trasformazioni di Bogolubov appena scritte, si ottengono le trasformazioni degli operatori a gradino:

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left[a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*\right] = \sum_j \left[\overline{a}_j \overline{u}_j + \overline{a}_j^\dagger \overline{u}_j^*\right] \implies \\
&\implies a_i = \sum_j \left[\overline{a}_j (\overline{u}_j, u_i) + \overline{a}_j^\dagger (\overline{u}_j^*, u_i)\right] \qquad \implies \\
&\implies a_i = \sum_j \left[\alpha_{ji} \overline{a}_j + \beta_{ji}^* \overline{a}_j^\dagger\right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ripetendo il procedimento appena compiuto in modo analogo, si perviene alla trasformazione inversa:

$$\overline{a}_j = \sum_j \left[\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^\dagger\right] \tag{2.21}$$

Ricavate le espressioni degli operatori a gradino a_i basati sulla scelta delle onde u_i, possiamo fare agire questi ultimi sullo stato del vuoto $|\overline{0}\rangle$ relativo all'altra scelta, per verificare se i due stati di vuoto coincidono o meno.

$$a_i|\overline{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* |\overline{1}_j\rangle \tag{2.22}$$

Come si può vedere, l'operatore distruzione a_i annichilisce il vuoto $|\overline{0}\rangle$ solamente quando tutti i coefficienti β_{ji} si annullano, ovvero quando le onde dotate di frequenza positiva u_i sono combinazioni lineari delle sole frequenze positive $\overline{u}_j$, e non delle frequenze negative $\overline{u}_j^*$.

I due stati di vuoto $|0\rangle$ e $|\overline{0}\rangle$, in generale, non coincidono e, di conseguenza, lo stesso accade per gli stati di più particelle da questi costruiti attraverso l'azione ripetuta degli operatori di creazione a_i e $\overline{a}_i$.

Si valuti infine, il valore di aspettazione dell'operatore numero $N_i = a_i^\dagger a_i$ sul vuoto $|\overline{0}\rangle$.

$$\langle\overline{0}|N_i|\overline{0}\rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 \tag{2.23}$$

Ciò equivale a dire che il vuoto relativo alle onde $\overline{u}_j$ contiene $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ particelle dotate di frequenza definita u_i.

Sfruttando le relazioni di completezza delle due basi di Fock, è inoltre possibile scrivere lo stato di più particelle di una base, come combinazione lineare degli stati di più particelle dell'altra, sempre in funzione dei coefficienti di Bogolubov.

Capitolo 3

Creazione di particelle in spaziotempi curvi

3.1 Significato di particella in relatività generale

Avendo introdotto la possibilità che non ci sia un solo ed unico stato di vuoto, è lecito chiedersi se una decomposizione in onde u_i capace di descrivere l'assenza di particelle, ovvero il vuoto fisico, esista o meno e, in caso affermativo, quale sia. Posta in questa forma, tale domanda non può ancora trovare risposta, è necessario infatti, che sia specificato anche il moto dell'osservatore che compie la misura dello stato in cui il campo è configurato.

Quanto appena osservato non è valido solamente in presenza di curvatura spaziotemporale, ma anche nello spazio piatto di Minkowski. La caratteristica speciale degli spaziotempi piatti, non è infatti l'esistenza di un unico stato di vuoto, ma che quello costruito scegliendo la decomposizione in onde piane (1.10) sia lo stesso per tutti gli osservatori inerziali, ovunque siano nello spaziotempo. Ciò è conseguenza del fatto che tale insieme di sistemi di riferimento e le onde (1.10) siano invarianti per trasformazioni di Poincaré.

D'altro canto, un osservatore accelerato potrebbe registrare la presenza di particelle diverse da quelle che registra un osservatore inerziale. Che l'accelerazione sia generata da reale attrazione gravitazionale o da una forza fittizia, si può sempre pensare di porsi nel sistema di riferimento in cui l'osservatore accelerato è fermo, nel quale, il tensore metrico non è più quello di Minkowski $\eta^{\mu\nu}$, ma un più generale $g^{\mu\nu}$, interpretabile come generato dalla presenza di curvatura, e determinato dal tipo di moto che l'osservatore compie. Pertanto, anche per gli osservatori non inerziali nello spazio di Minkowski, si applicano gli stessi ragionamenti compiuti nel capitolo precedente riguardo l'ambiguità nella definizione di un unico stato di vuoto.

Per esempio, si consideri un rilevatore capace di contare il numero di particelle del campo scalare $\phi(x)$, grazie alla sua interazione, di tipo monopolare, con il campo stesso. Sia lo spaziotempo piatto e, lo stato del campo, il vuoto $|0\rangle$ dell'equazione (1.22), ben definito per tutti gli osservatori inerziali. Nella sezione 3.3 di [4], è mostrato che, quando confinato su una traiettoria inerziale, il rilevatore non segnala la presenza di alcuna particella, proprio come ci si aspetterebbe. Nel caso in cui invece, si muova di moto iperbolico nel piano (t, x)

$$x(\tau) = (\alpha \sinh(\alpha\tau), \alpha \cosh(\alpha\tau), 0, 0)\,, \tag{3.1}$$

dove τ rappresenta il tempo proprio e α l'accelerazione propria costante, il rilevatore registra, nel vuoto, le stesse particelle che registrerebbe se fosse rimasto fermo, ma immerso in un bagno di radiazione termica di temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi k_B} \tag{3.2}$$

Una derivazione dell'espressione (3.1) per il moto uniformemente accelerato è data in [5].

Risulta dunque evidente, che sia necessario abbandonare il concetto universale di particella, il quale, perde il significato che aveva in relatività ristretta. In relatività generale, infatti, ad avere senso fisico sono solamente le quantità definite localmente, invece il numero di particelle dotate di un certo impulso, ha di per sé natura globale. Ricontrollando l'espressione (1.15), si può notare come i coefficienti di Fourier a_k e a_k^*, i quali, una volta quantizzati, diventano gli operatori creazione e distruzione, non siano campi scalari definiti localmente sullo spaziotempo, ma coefficienti che moltiplicano i campi u_k nell'espansione di ϕ. Dobbiamo quindi aspettarci, che nemmeno l'operatore numero $N_i = a_i^\dagger a_i$ e il suo valore di aspettazione, siano campi invarianti per cambiamenti di sistemi di riferimento generali. Quando si vogliano determinare informazioni sul campo $\phi(x)$, bisogna dunque valutare il valore di aspettazione di tensori definiti localmente, come per esempio del tensore energia impulso $T_{\mu\nu}(x)$, di cui una definizione è data in [3]. Le misure così ottenute da osservatori diversi, saranno legate tra loro dalle usuali leggi di trasformazione tensoriali.

3.2 Spaziotempi asintoticamente piatti

Per continuare la trattazione, limitiamo le considerazioni seguenti ad una situazione semplice, ma comunque ricorrente in molti problemi: quella di spaziotempi asintoticamente Minkowsiani nel passato e nel futuro remoti. Si richiede quindi che, nella regione (detta "in ingresso") che comprende tempi negativi arbitrariamente grandi, esista un sistema di riferimento in cui valga:

$$\lim_{t \to -\infty} g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \ , \tag{3.3}$$

per ogni x appartenete a tale regione, e che, equivalentemente, nella regione (detta "in uscita") che comprende tempi positivi arbitrariamente grandi, ne esista un altro, non necessariamente lo stesso, in cui valga:

$$\lim_{t \to \infty} g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \ , \tag{3.4}$$

per ogni x appartenente alla regione di uscita.

Una simile richiesta sembra ragionevole in quanto, similmente a quanto accade per le altre forze fondamentali, si assume che ogni interazione svanisca nei limiti $t \to \pm\infty$. Nel caso della gravità, c'è assenza di interazione quando lo spaziotempo torna ad essere uniformemente piatto, ovvero quando le condizioni (3.3) e (3.4) sono soddisfatte.

In questa circostanza, è possibile risolvere l'equazione di campo di Klein-Gordon nelle regioni asintotiche dello spazio individuando, in ciascuna di esse, il sistema ortonormale completo formato dalle onde piane (1.10), ed esprimendo la soluzione generale $\phi(x)$ come loro combinazione lineare. Quantizzati poi i campi, si definisce nuovamente il naturale stato di vuoto (1.22), attribuendo ad esso il suo classico significato: l'assenza di particelle per ogni osservatore che, nella regione asintotica, si muova di moto inerziale.

Si noti che, poiché stiamo lavorando nella rappresentazione di Heisenberg, sono gli operatori ad evolvere nel tempo, non gli stati quantistici, e dunque, quando si consideri che lo stato assunto dal campo sia il vuoto definito nella regione in ingresso $|0^{\mathrm{in}}\rangle$, questo rimarrà invariato per tutti i tempi successivi, anche nella regione in uscita. É già stato osservato che, in generale, potrebbe non essere possibile individuare un unico sistema di riferimento in cui le condizioni di asintotica piattezza (3.3) e (3.4) siano verificate contemporaneamente. In questo caso quindi, un osservatore inerziale nella regione in uscita, potrebbe comunque registrare la presenza di particelle per questo stato di vuoto, poiché egli non sarebbe legato agli osservatori inerziali nella regione in ingresso tramite una semplice trasformazione di Poincaré. Si deve dunque ammettere la possibilità che nemmeno i due stati di vuoto, in ingresso $|0^{\mathrm{in}}\rangle$ ed in uscita $|0^{\mathrm{out}}\rangle$, coincidano e che, la dipendenza temporale del campo gravitazionale, sia responsabile della creazione di quanti di campo.

3.3 Valore di apettazione del numero di particelle nella regione asintotica

Vogliamo infine ricavare il valore di aspettazione $\langle N_i \rangle$ del numero di particelle, generate dalla curvatura spaziotemporale, di cui si è discusso nella sezione precedente. Per riuscire in ciò, introduciamo alcune ipotesi semplificative: restringiamci al caso in cui lo spaziotempo sia spazialmente omogeneo ed asintoticamente piatto nel passato e nel futuro remoti.

Essendo la regione in ingresso piatta, si può ripetere lo stesso procedimento descritto nel capitolo 1, e decomporre le soluzioni generali dell'equazione di campo lungo le onde piane $u_k^{\text{in}}(x)$, le quali sono, per semplicità, discretizzate come nell'equazione (1.13). I campi vengono quindi quantizzati, imponendo ai coefficienti di Fourier a_k^{in} e $a_k^{\text{in}\dagger}$ le relazioni di commutazione (1.21), e costruendo la base di Fock a partire dallo stato di vuoto $|0^{\text{in}}\rangle$, per cui vale:

$$a_k^{\text{in}}|0^{\text{in}}\rangle = 0 \quad \forall\, k \tag{3.5}$$

Nella regione in uscita, sono definite analogamente le onde piane $u_k^{\text{out}}(x)$, gli operatori creazione a_k^{out} e distruzione $a_k^{\text{out}\dagger}$, e lo stato di vuoto $|0^{\text{out}}\rangle$, in modo che valga:

$$a_k^{\text{out}}|0^{\text{out}}\rangle = 0 \quad \forall\, k \tag{3.6}$$

Un osservatore che si muove di moto inerziale nella regione in uscita, potrebbe, in generale, registrare la presenza di quanti anche se il campo è nello stato $|0^{\text{in}}\rangle$. Ovviamente ciò non accade quando lo stato del campo è il vuoto $|0^{\text{out}}\rangle$.

Per ottenere il numero di tali particelle, possiamo a questo punto, avvalerci delle trasformazioni di Bogolubov introdotte nel capitolo precedente. La completezza del sistema di onde $u_k^{\text{out}}(x)$, rende possibile la seguente espansione, analoga a quella scritta in (2.18):

$$u_k^{\text{in}} = \sum_{k'} \left[\alpha_{kk'} u_{k'}^{\text{out}} + \beta_{kk'} u_{k'}^{\text{out}*}\right] \tag{3.7}$$

Per determinare i coefficienti $\alpha_{kk'}$ e $\beta_{kk'}$, bisogna moltiplicare scalarmente l'equazione appena scritta per $u_{k'}^{\text{out}}(x)$ e $u_{k'}^{\text{out}*}(x)$ e sfruttare le relazioni di completezza (1.14) rispetto al prodotto scalare (1.9).

$$\begin{aligned} (u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}}) &= \alpha_{kk'}(u_{k'}^{\text{out}}, u_{k'}^{\text{out}}) = \alpha_{kk'} \\ (u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}*}) &= \beta_{kk'}(u_{k'}^{\text{out}*}, u_{k'}^{\text{out}*}) = -\beta_{kk'} \end{aligned} \tag{3.8}$$

I prodotti scalari del membro sinistro possono essere valutati compiendo la seguente considerazione. La presenza di un campo gravitazionale dipendente dal tempo modifica le onde $u_k^{\text{in}}(x)$, le quali, quando valutate nella regione in uscita, non saranno più onde piane di frequenza determinata. Tuttavia, grazie alla condizione di omogeneità spaziale, è possibile affermare che la dipendenza spaziale delle $u_k^{\text{in}}(x)$, al contrario di quella temporale, non verrà alterata. Poiché il prodotto scalare (1.9) richiede un'integrazione sulle sole variabili spaziali, la dipendenza temporale, unica differenza tra le onde $u_k^{\text{in}}(x)$ e $u_{k'}^{\text{out}}(x)$ ($u_{k'}^{\text{out}*}(x)$), influisce sul risultato dei prodotti scalari solamente per la presenza di un coefficiente moltiplicativo α_k (β_k), determinato dalla normalizzazione e dalla dipendenza temporale delle onde. Riprendendo le equazioni (3.8), possiamo finalmente determinare i coefficienti di Bogolubov.

$$\begin{aligned} \alpha_{kk'} &= (u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}}) = \alpha_k \delta_{kk'} \\ \beta_{kk'} &= -(u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}*}) = \beta_k \delta_{kk'} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Per scrivere l'operatore creazione a_k^{out} in funzione di a_k^{in} e $a_k^{\text{in}\dagger}$, basta utilizzare l'equazione (2.20), in cui la sommatoria viene semplificata dalla presenza delle $\delta_{kk'}$.

$$\begin{aligned} a_k^{\text{out}} &= \sum_{k'} \left[\alpha_{kk'} a_{k'}^{\text{in}} + \beta_{kk'}^* a_{k'}^{\text{in}\dagger}\right] \\ &= \sum_{k'} \left[\alpha_{k'} \delta_{kk'} a_{k'}^{\text{in}} + \beta_{k'}^* \delta_{kk'} a_{k'}^{\text{in}\dagger}\right] \\ &= \alpha_k a_k^{\text{in}} + \beta_k^* a_k^{\text{in}\dagger} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Considerare l'equazione hermitiana coniugata, invece, restituisce la formula per l'operatore distruzione $a_k^{\text{out}\dagger}$.

$$a_k^{\text{out}\dagger} = \beta_k a_k^{\text{in}} + \alpha_k^* a_k^{\text{in}\dagger} \tag{3.11}$$

Utilizziamo ora le ultime due formule per scrivere l'operatore numero della regione in uscita $N_k^{\text{out}} = a_k^{\text{out}\dagger} a_k^{\text{out}}$.

$$N_k^{\text{out}} = \alpha_k \beta_k (a_k^{\text{in}})^2 + |\alpha_k|^2 a_k^{\text{in}\dagger} a_k^{\text{in}} + |\beta_k|^2 a_k^{\text{in}} a_k^{\text{in}\dagger} + \alpha_k^* \beta_k^* (a_k^{\text{in}\dagger})^2 \tag{3.12}$$

Per ottenere il valore di aspettazione del numero di particelle che l'osservatore inerziale nella regione di uscita misura, rimane solamente da mediare N_k^{out} sullo stato di vuoto $|0^{\text{in}}\rangle$ della regione in entrata. Come si può notare da (3.12), l'operatore numero N_k^{out} è somma di quattro termini. Sfruttando l'algebra dell'oscillatore armonico quantistico, in particolare le formule (1.25) e (1.25), è possibile dedurre che, quando ciascuno di questi termini viene fatto agire sullo stato $|0^{\text{in}}\rangle$, solamente il terzo restituisce un contributo non nullo.

$$\langle 0^{\text{in}} | N_k^{\text{out}} | 0^{\text{in}} \rangle = |\beta_k|^2 \tag{3.13}$$

L'interpretazione di questo risultato è evidente: ogni osservatore inerziale nella regione in uscita, percepisce lo stato di vuoto della regione in ingresso come un bagno isotropico di quanti, con $|\beta_k|^2$ particelle dotate di impulso definito k. Il numero di particelle totali è:

$$\langle 0^{\text{in}}|N^{\text{out}}|0^{\text{in}}\rangle = \sum_k |\beta_k|^2 \tag{3.14}$$

Tale numero dipende dalle caratteristiche del campo gravitazionale, e da come questo modifichi le onde $u_k^{\text{in}}(x)$ nella regione in uscita. In ogni caso, dobbiamo necessariamente pensare che queste particelle siano state create dalla curvatura spaziotemporale.

Conclusioni

In questa tesi si sono studiati campi scalari quantistici definiti su varietà curve, abbandonano le ipotesi restrittive della relatività speciale. A causa di ciò, si è mostrato come il vuoto e gli stati di più particelle, invarianti per trasformazioni di Poincaré, non siano più definiti univocamente per tutti i sistemi di riferimento. É stato dunque possibile, per spaziotempi asintoticamente piatti, calcolare il numero di particelle presenti in una delle due regioni asintotiche, quando nell'altra ci sia il vuoto. La creazione di tali particelle è imputabile alla presenza di campi gravitazionali dipendenti dal tempo. Nel tentativo di estendere la trattazione compiuta, in questa tesi limitata a campi scalari liberi, si può pensare di ripetere ogni passaggio e generalizzare il procedimento a campi spinoriali e tensoriali di ordine superiore, anche in interazione reciproca. Una trattazione completa necessita, tuttavia, di una teoria quantistica della gravità, che spieghi l'interazione dei campi quantistici con quello gravitazionale e giustifichi i risultati ottenuti.

Bibliografia

[1] John M. Lee. *Riemann Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.

[2] Albert Messiah. *Quantum Mechanics. Volume I*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.

[3] Daniel V. Schroeder Michael E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[4] P. C. W. Davies N. D. Birrel. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.

[5] Wolfgang Rindler. *Relativity. Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2006.

[6] G. F. R. Ellis S. W. Hawking. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.

[7] Maria Funaro Salvatore Capozziello. *Introduzione alla Relatività Generale. con applicazioni all'Astrofisica Relativistica e alla Cosmologia*. Liguori editore, 2005.