UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Equazioni differenziali alle derivate parziali: formulazione debole di alcuni problemi della fisica

Relatore:
Vincenzo Ferone

Candidato:
Dario Sangiovanni
Matr. $N85000977$

Anno Accademico 2018/2019

Equazioni differenziali alle derivate parziali: formulazione debole di alcuni problemi della fisica

Dario Sangiovanni

Indice

Introduzione **2**

1 Spazi di Sobolev **4**
1.1 Derivata debole 4
1.2 Definizione e proprietà degli spazi di Sobolev 5
1.3 Risultati di approssimazione 8
1.4 Traccia 9

2 Equazione di Laplace **10**
2.1 Soluzione classica 11
2.2 Formulazione Debole 12
2.2.1 Soluzione debole 13
2.2.2 Esistenza della soluzione debole 14
2.2.3 Regolarità della soluzione 17
2.2.4 Principio del massimo 19
2.2.5 Problema agli autovalori 21

3 Problemi di interesse fisico **23**
3.1 Problema fondametale dell'elettrostatica 23
3.2 Equazione di Schrödinger 25
3.3 Equazione del calore 26
3.3.1 Proprietà della soluzione 27
3.3.2 Derivazione dell'equazione del calore 28

Introduzione

Le equazioni differenziali alle derivate parziali(o PDE) ricorrono molto spesso nella fisica, quindi è di grande interesse studiarne le soluzioni e relative proprietà. In generale, denotate con $D^n u$ le derivate di orgine n della funzione u, una PDE è un'equazione nella forma:

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \quad (x \in U)$$

con k *ordine* dell'equazione. Nel nostro studio ci focalizzeremo soprattutto nello studio delle PDE lineari e del second'ordine, ovvero un'equazione che si scriva nella forma:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad (\text{con } \alpha \leq 2).$$

In contesti applicativi e non, si cercano soluzioni di un'equazione alle derivate parziali imponendo condizioni al contorno. Tali problemi si dicono ben posti se è possibile provare che valgano le seguenti proprietà:

1) Il problema ammette effettivamente una soluzione;

2) la soluzione è unica;

3) la soluzione dipende in modo continuo dai dati imposti.

Una volta provato che il problema è ben posto, risulta naturale chedersi se, nel caso di dati regolari, anche la soluzione lo è. Quest'ultima questione è di cruciale importanza nello sviluppo di una teoria che cerchi soluzioni alle PDE, infatti, essendo queste utili nello studio di sistemi fisici, sarebbe di grand'utilità trovare delle soluzioni u abbastanza regolari. Tale richiesta risulta però troppo forte, in quanto limita la quantità di strumenti a nostra disposizione per la ricerca di soluzioni.

Di conseguenza sacrifichiamo tale richiesta, almeno inizialmente, e cerchiamo una funzione u che abbia lo stesso ruolo della soluzione classica, ovvero una *soluzione debole*. Questa in linea di principio sarà una funzione non differenziabile e nemmeno continua, quindi una volta dimostrata la sua esistenza, ne indagheremo la regolarità.

Tale approccio, detto *formulazione debole*, è preferito rispetto a quello di tipo classico perchè rappresenta un problema piu facile da affrontare rispetto alla ricerca delle soluzioni alle singole equazioni.

L'obiettivo di tale lavoro è dunque quello di utilizzare gli strumenti forniti da tale teoria per vedere come problemi di interesse fisico possano essere formulati con il formalismo debole, e come tale approccio consenta di ottenere soluzione in senso classico.

Per fare ciò il il percorso logico seguito è il seguente:

- Nel primo capitolo sono illustrate definizione e proprietà degli spazi di Sobolev, ovvero, gli spazi di funzioni in cui saranno ricercate le soluzioni deboli al problema differenziale;

- il secondo capitolo invece è dedicato allo studio di criteri per provare dapprima l'esistenza e successivamente la regolarità della soluzione debole al problema per un operatore di differenziazione parziale del second'ordine. Questa scelta è motivata dal fatto che tale famiglia di operatori, per un'adeguata scelta dei coefficienti, comprende l'operatore *Laplaciano*, la cui importanza in fisica è ben nota. Successivamente, subordinati allo studio della regolarità della soluzioni, sono forniti risultati anche sul principio di massimo e sul problema agli autovalori;

- nel terzo capitolo si prendono in considerazione alcuni esempi di problemi di interesse fisico che possono essere affrontati con i metodi introdotti in precedenza, come ad esempio, il *problema generale dell'elettrostatica*, l'*equazione di Schrodinger* (sotto alcune condizioni particolari) e l'*equazione del calore*.

Capitolo 1

Spazi di Sobolev

Al fine di affrontare la formulazione debole dei problemi differenziali è necessario fissare alcuni strumenti e definizioni senza le quali tutto il lavoro successivo non è di immediata comprensione. Introduciamo dunque un particolare spazio di funzioni che risulterà essere lo spazio nel quale ricercare le soluzioni deboli, infatti vedremo che tale costruzione ci permetterà di generalizzare l'insieme delle funzioni assolutamente continue in più variabili. Contrariamente al caso unidimensionale, avere funzioni assolutamente continue non garantisce che queste siano derivabili(infatti generalmente saranno soltanto q.o. derivabili), di conseguenza si farà uso di una definizione di derivata nel senso delle distribuzioni e non di una puntuale.

1.1 Derivata debole

Prima di dare la definizione di uno spazio di Sobolev, introduciamo la nozione di *Derivata debole*, che servirà a comprendere al meglio quanto seguirà.
Sia $u \in C^1(U)$ e $\phi \in C_c^\infty(U)$,ovvero lo spazio delle funzioni infinitamente sommabili a supporto compatto(che chiameremo funzioni test) su U, con $U \subset \mathbb{R}^n$. Allora integrando per parti varrà che:

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\phi dx \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.1}$$

Potremmo pensare di estendere ad una $u \in C^k(U)$ la definizione ed in tal modo ottenere che:

$$\int_U uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u\phi dx \tag{1.2}$$

dove $|\alpha| \leq k$.

Tale espressione va però maneggiata con cura, infatti vi sono 2 problemi:

- Il lato sinistro dell'uguaglianza ha senso se e solo se u è localmente sommabile;
- il lato destro, e in particolare $D^\alpha u$, perde significato se $u \notin C^k(U)$

Queste problematiche nascono dal fatto che si sta ancora ragionando, rispetto alla derivata, in senso classico.

Definizione 1.1. Siano u e v due funzioni appartenenti a ${L_{loc}}^1(U)$, v si dirà *Derivata Debole* di ordine $|\alpha|$ di u e si scriverà: $D^\alpha u = v$, se vale che :

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^\alpha \int_U v\phi \, dx \tag{1.3}$$

Per ogni funzione test $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Lemma 1. *Se esiste, allora la derivata nel senso debole è unicamente definita q.o.*

Dimostrazione. Siano per assurdo v e $\tilde{v} \in {L_{loc}}^1(U)$ due funzioni che soddisfano la relazione:

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^\alpha \int_U v\phi \, dx = (-1)^\alpha \int_U \tilde{v}\phi \, dx$$

Per ogni funzione test ϕ. Allora varrà che:

$$\int_U (v - \tilde{v})\phi \, dx = 0$$

Per ogni $\phi \in C^\infty(U)$ e di conseguenza che $(v - \tilde{v}) = 0$ q.o. □

1.2 Definizione e proprietà degli spazi di Sobolev

Possiamo ora dare la definizione degli spazi di Sobolev, infatti questi saranno gli spazi delle funzioni che, scelto un $1 \leq p \leq \infty$ e un intero k, hanno derivata nel senso debole nello spazio $\mathrm{L^p}$.

Definizione 1.2. Lo spazio di Sobolev

$$W^{k,p}(U) \tag{1.4}$$

è composto di tutte le funzioni $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per le quali, scelto un multindice α, con $|\alpha| = k$, esiste $v \in L^p(U)$, derivata di ordine $|\alpha|$ nel senso debole di u e si indicherà con $v = D^\alpha u$. Si noti che se $p = 2$, allora $W^{k,2}(U) \equiv H^k(U)$ dove la lettera H sta ad indicare che tale spazio è di Hilbert $\forall k$ (si noti che se $k = 0$, allora $H^{\mathrm{k}}(U) = H^0(U) \equiv L^2(U)$).

Definizione 1.3. Definiamo dunque la norma in $W^{\mathrm{k,p}}(U)$ come segue:

$$||u||_{W^{\mathrm{k,p}}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|<k} \int_U |D^\alpha u|^{\mathrm{p}}\, dx\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\alpha|<k} (ess\, \sup_U |D^\alpha u|) & \text{se } p = \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

Definizione 1.4. Indicheremo con $W_0^{k,p}(U)$ la chiusura di $C_c^\infty(U)$ in $W^{k,p}(U)$ (si noti che $C_c^\infty(U)$ non è altro che lo spazio delle funzioni test), ovvero, lo spazio delle funzioni tali che esista una successione $u_m \in C_c^\infty(U)$ tale che $u_m \to u$ in $W^{k,p}(U)$.

Questo vuol dire che, se $u \in W_0^{k,p}(U)$, allora $\begin{cases} u \in W^{k,p}(U) \\ D^\alpha u = 0 \quad su\ \partial U\ \forall |\alpha| \leq k-1 \end{cases}$

Diamo ora due teoremi, di cui non forniremo prova, riguardo le proprietà delle derivate deboli e degli spazi di Sobolev:

Teorema 1.1 (Proprietà della derivata debole)**.** *Siano u e $v \in W_{k,p}(U)$, con $|\alpha| \leq k$, varrà che:*

i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ *e* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u\ \forall \alpha, \beta : |\alpha| + |\beta| \leq k$*;*

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *vale che* $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ *(ovvero che* $W^{k,p}(U)$ *è chiuso per la somma e il prodotto per uno scalare) e che* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$*;*

iii) se V *è un insieme aperto tale che* $V \subset U$*, allora* $u, v \in W^{k,p}(V)$*;*

iv) se $\xi \in C_c^\infty(U)$*, allora* $\xi u \in W^{k,p}(U)$*.*

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\xi) D^{\alpha-\beta}(u) \tag{1.6}$$

Dove $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *e* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$

Teorema 1.2. *Per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *e* $p \in \mathbb{R}$*, lo spazio di Sobolev* $W^{k,p}(U)$ *è uno Spazio di Banach.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $W^{k,p}(U)$ sia uno spazio di Banach dobbiamo dimostrare:

- Che la norma definita nella costruzione precedente sia effettivamente una norma;

- che sia completo rispetto a tale norma.

1) Dimostriamo che $||u||_{W^{k,p}(U)}$ sia una norma:
   Per la definizione di $||u||_{W^{k,p}(U)}$ sarà chiaro che:
   $$||\lambda u||_{W^{k,p}(U)} = \lambda ||u||_{W^{k,p}(U)}$$
   E che:
   $$||u||_{W^{k,p}(U)} = 0 \text{ se e solo se } u = 0 \text{ q.o.}$$
   Per dimostrare invece che $||u+v||_{W^{k,p}(U)} \leq ||u||_{W^{k,p}(U)+||v||_{W^{k,p}(U)}}$ ci avvaliamo della diseguaglianza di Minkovski, e dunque:
   $$||u+v||_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u + D^\alpha v||^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}$$
   $$\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (||D^\alpha u||_{L^p(U)} + ||D^\alpha v||_{L^p(U)})^p \right)^{1/p}$$
   $$\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha v||^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} = \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

2) Mostriamo adesso che $W^{k,p}(U)$ è anche completo. Assumiamo dunque che $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$sia una sequenza di Cauchy in $W^{k,p}(U)$, allora per ogni$|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^{\infty}$sarà a sua volta una successione di Cauchy in $L^p(U)$. Dal momento che $L^p(U)$ è completo. esiste una funzione $u_\alpha \in L^p(U)$ tale che:
   $$D^\alpha u_m \to u_\alpha \quad \text{in } L^p(U)$$
   Per ogni $|\alpha| \leq k$. In particolare, se l'ordine di derivazione $k = 0$ otteniamo che
   $$u_m \to u_{(0,\ldots,0)} =: u \in L^p(U)$$
   Data quindi la definizione della funzione u, vogliamo dimostrare che $u \in W^{k,p}(U)$ e che la derivata nel senso debole di u è proprio u_α, di conseguenza prendiamo una funzione test e facciamo:
   $$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = \lim_{m \to \infty} \int_U u_m D^\alpha \phi \, dx$$
   Adesso integriamo prima per parti e poi facciamo il limite su m, quindi, sfruttando la compattezza del supporto di ϕ otteniamo:
   $$\lim_{m \to \infty} (-1)^\alpha \int_U D^\alpha u_m \phi \, dx$$

$$= (-1)^\alpha \int_U u_\alpha \phi \, dx$$

Notiamo che dunque $D^\alpha u = u_\alpha$, e allora $u \in W^{k,p}$. Dal momento che $u \in W^{k,p}$, $u_m \to u$ non solo in $L^p(U)$ ma anche in $W^{k,p}(U)$.

□

1.3 Risultati di approssimazione

Le funzioni che stiamo trattando, spesso e volentieri non solo non sono derivabili, ma anche discontinue, quindi risulta utile avere risultati che consentano di approssimarle con funzioni regolare.

Definizione 1.5. Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per cui valga che:

i) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$;

iii) $lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x) = lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)) = \delta(x)$ (nel senso delle distribuzioni).

è detta *Mollificatore*.

Definizione 1.6. Data una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ non localmente integrabile, il prodotto di convoluzione fra f e un mollificatore è detto *Mollificazione* ed è integrabile in $U_\varepsilon := \{x \in U | dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Teorema 1.3 (Approssimazione locale)**.** *Fissato k, $\forall p : 1 \leq p < \infty$ la funzione*

$$u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u \textit{ in } U_\varepsilon \tag{1.7}$$

avrà le seguenti proprietà:

i) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$

ii) $u^\varepsilon \to u$ *in* $W^{k,p}_{loc}(U)$ *per* $\varepsilon \to 0$

Così facendo però troviamo delle approssimazioni lisce per u soltanto in $W^{k,p}_{loc}(U)$ quindi vogliamo estendere i risultati del teorema appena enunciato:

Teorema 1.4 (Approssimazione globale)**.** *Sia U limitato e $u \in W^{k,p}_{loc}(U)$, allora eiste una successione $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}_{loc}(U)$ tale che*

$$u_m \to u \textit{ in } W^{k,p}_{loc}(U) \tag{1.8}$$

Abbiamo ora un modo per approssimare le funzioni in modo globale su tutto U, anche se non abbiamo parlato della frontiera, su questa infatti, si hanno in generale problemi nel definirci le funzioni degli spazi di Sobolev.

Possiamo però recuperare qualcosa nel caso ∂U abbia delle proprietà particolari:

Teorema 1.5. *Sia U limitato e ∂U di classe C^1 allora se $u \in W^{k,p}_{loc}(U)$ esiste una successione $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in C^\infty(\bar{U})$ tale che:*

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(U) \tag{1.9}$$

1.4 Traccia

Nella sezione precedente abbiamo parlato di approssimazioni di una funzione u fino alla frontiera di U, ma mentre in genere è facile definire il valore di una funzione sulla frontiera di un insieme, per quelle che stiamo trattando tale operazione non è banale, infatti le $u \in W^{k,p}$ non sono necessariamente continue e sono definite soltanto q.o. Altri problemi inoltre li dà il fatto che ∂U è un insieme che ha misura n-dimensionale di Lebesgue nulla, quindi non ha senso parlare di u ristretta a ∂U.

Supponiamo dunque che $u \in W^{1,p}$ con $p : 1 \leq p < \infty$, allora

Teorema 1.6. *Sia U limitato e ∂U di classe C^1, esiste allora un operatore limitato $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ tale che:*

i) $Tu = u|_{(\partial U)}$ *se* $u \in W^{1,p} \cap C(\bar{U})$

ii) $||Tu||_{L^p(\partial U)} \leq C||u||_{W^{1,p}(U)}$

Per ogni $u \in W^{1,p}(U)$, dove la costante C dipende soltanto da U e p.

Definizione 1.7. Dato il teorema precedente che definisce l'operatore di traccia T chiamiamo Tu la *Traccia di u* su ∂U.

Possiamo adesso vedere che vuol dire avere un funzione $u \in W^{1,p}_0$:

Teorema 1.7 (Funzioni a traccia nulla)**.** *Sia U un insieme limitato la cui frontiera è di classe C^1, e sia inoltre $u \in W^{1,p}$, allora.*

$$u \in W^{1,p}_0 \text{ se e solo se } Tu = 0|_{(\partial U)} \tag{1.10}$$

Capitolo 2

Equazione di Laplace

Una delle più importanti PDE è sicuramente l'equazione di Laplace(di Poisson se non omogenea), infatti a seconda del significato di u possono essere descritti vari sistemi fisici molto importanti, tra i quali ad esempio il problema fondamentale dell'elettrostatica.

Definizione 2.1. Un'equazione del tipo

$$\Delta u = 0 \tag{2.1}$$

è detta *Equazione di Laplace*, mentre se non è omogenea, ovvero se:

$$-\Delta u = f \tag{2.2}$$

è detta *Equazione di Poisson*.

Dove in entrambi i casi

- $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, $u := u(x)$;
- $x \in U \subset \mathbb{R}^n$;
- $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione data;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$.

Per questa equazione esistono studi che la risolvono in modo classico, di conseguenza la soluzione è ben nota nella sua forma e nelle sue proprietà.

Sfruttando proprio tale conoscenza useremo tale equazione per mostrare come viene impostato il problema della ricerca di una soluzione debole delle PDE.

2.1 Soluzione classica

Forniamo in questo paragrafo una breve dissertazione sulla derivazione di una soluzione nel senso classico.

Sappiamo che l'equazione di Laplace è invariante sotto rotazioni, cerchiamo dunque soluzioni *radiali*, ovvero funzioni di $r = |x|$ e non di x, ovvero $u(x) \equiv v(r)$, con $r = |x| = (x_1^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$. Notato che:

$$\partial_{x_i}(r) = \frac{1}{2}(x_1^2, \dots, x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \; (x \neq 0) \tag{2.3}$$

Possiamo facilmente calcolare le derivate di u in funzione di v, infatti, $u_{x_i} = \partial_{x_i}[v(r)] = \partial_r(v)\partial_{x_i}(r)$, dunque:

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r} \quad \text{dove } v'(r) = \partial_r(v) \tag{2.4}$$

e quindi:

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \tag{2.5}$$

Sommando su tutti i valori di i la (2.5) si ottiene:

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \tag{2.6}$$

Abbiamo dunque una semplice equazione differenziale e una soluzione può essere scritta nel modo che segue:

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c \; (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c \quad (n \geq 3) \end{cases} \tag{2.7}$$

Con b e c costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

Definizione 2.2. La funzione $\Phi(x)$ è detta *Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace* ed è definita come segue:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| \qquad (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \; (n \geq 3) \end{cases} \tag{2.8}$$

Per $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ e $\alpha(n) =$Volume della n-palla unitaria.

La scelta dei coefficienti b e c nella definizione appena data è importante ai fini della risoluzione dell'equazione di Poisson, infatti, possiamo notare che la funzione Φ è armonica ovunque tranne che nell'origine $x = 0$. Se spostiamo l'origine da 0 a y, otteniamo che $\Phi(x - y)$ è armonica ovunque tranne che in y.

Se adesso prendiamo una $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, varrà che $\Phi(x-t)f(y)$ è ancora una funzione armonica per $x \neq y$. Questo può farci pensare che il prodotto di convoluzione fra Φ e f sia una soluzione per l'equazione di Poisson con f funzione nota.

In linea di principio non possiamo affermare una cosa del genere, infatti, la funzione $D^\alpha\Phi(x-y)$ non è integrabile intorno alla singolarità $x = y$.

Teorema 2.1. *Il prodotto di convoluzione u fra Φ e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è tale che:*

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$*;*

ii) $-\Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n$*.*

Questo teorema, in accordo con la scrittura: $-\Delta\Phi = \delta_0$ in $\mathbb{R}^n$, ci garantisce che davvero valga:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\Phi(x-y)f(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x f(y)\,dy = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2 Formulazione Debole

Conosciamo adesso la soluzione in senso classico di tali equazioni, quindi procediamo alla formulazione debole e a vedere come ci si può muovere in tale contesto.

L'equazione di Laplace, nel contesto della teoria moderna per lo studio delle PDE, fa parte di una famiglia di equazioni più grande:

Definizione 2.3. Si definisce *PDE lineare del second'ordine* una PDE nella forma:

$$Lu = f \quad inU \tag{2.10}$$

dove:

- U è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$;
- $u : U \to \mathbb{R}$ è l'incognita del problema;
- $f : U \to \mathbb{R}$ è un funzione nota.

L è l'operatore di *differenziazione parziale del secondo ordine*, ovvero:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad \textit{(in forma di divergenza)} \tag{2.11}$$

oppure,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad \textit{(non in forma di divergenza)} \tag{2.12}$$

Se i coefficienti a^{ij} sono di classe C^1, le due scritture coincidono.

Definizione 2.4. Se i coefficienti a^{ij} rispettano le seguenti proprietà:

i) $a^{ij} = a^{ji}$, ovvero sono simmetrici;

ii) $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ per $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\theta = cost > 0$.

allora l'equazione è detta *Ellittica*.

L'ultima condizione, detta prorpio *condizione di ellitticità*, ci garantisce che la matrice $A(x) = a^{ij}(x)\forall i, j = 1, \ldots, n$ è definita positiva con autovalore minimo maggiore o uguale a θ.

Se per esempio poniamo $a^{ij} = \delta_{ij}, b^i = 0, c = 0$ otteniamo che L non è altro che $-\Delta$ e quindi l'equazione $Lu = f$ è l'equazione di Poisson.

Sappiamo però che un problema differenziale deve essere ben posto, di conseguenza l'equazione da sola non basta, vanno date delle condizioni. Imporremo le *Condizioni di bordo di Dirichlet*, ovvero $u = 0$ su ∂U, infatti si puo dimostrare che anche se $\partial U = g$ ci si può sempre riportare nel caso precedente sfruttando la linearità di L.

2.2.1 Soluzione debole

Consideriamo dunque il problema con le condizioni di bordo di Drichelet e cerchiamo una soluzione nel caso in cui L sia in forma di divergenza. A tal scopo cerchiamo una $u \in W^{k,p}(U)$ che sia soluzione. Assumeremo inoltre, nel perseguire l'obiettivo che:

- a^{ij},b^i,$c \in L^\infty(U)\ \ \forall i, j = 1, \ldots, n$;
- $f \in L^2(U)$.

Per definre una soluzione debole, prendiamo una funzione test e moltiplichiamo l'equazione da ambo i lati per essa.

Sia dunque $v \in C_0^\infty(U)$, integrando su tutto U otteniamo:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv \, dx = \int_U fv \, dx \tag{2.13}$$

Il primo termine di sinistra è stato riscritto integrando per parti $u_{x_i} u_{x_j} v$ e sfruttando che v è a supporto compatto.

Dalla sezione sui metodi di approssimazone, sappiamo che tale uguaglianza vale anche se v non è cosi tanto regolare ma appartiene a $H_0^1(U)$, di conseguenza anche u deve appartenere a tale spazio per dare senso all'espressione scritta.

Definizione 2.5. Possiamo dunque definire la forma bilineare su $H_0^1(U)$, $B[\cdot,\cdot]$ tale che:

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv \, dx \tag{2.14}$$

per $u, v \in H_0^1(U)$.

Definizione 2.6. Una funzione $u \in H_0^1(U)$ tale che:

$$B[u,v] = (f,v) \tag{2.15}$$

$\forall v \in H_0^1(U)$, dove $(\cdot,\cdot)$ è il prodotto interno in $L^2(U)$ sarà la *Soluzione Debole* che stiamo ricercando.

2.2.2 Esistenza della soluzione debole

Di grande interesse è lo studio di criteri che possano garantirci che la soluzione u esista effettivamente e che questa sia unica. A tal proposito ci viene in aiuto il teorema seguente:

Teorema 2.2 (Lax-Milgram)**.** *Assumiamo che:*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

con H spazio di Hilbert, sia una forma bilineare tale che, esistono costanti $\alpha, \beta > 0$ tali che

i) $|B[u,v]| \leq \alpha ||u|| ||v||$ *per* $(u, v \in H)$*;*

ii) $\beta ||u||^2 \leq B[u,u]$ *per* $(u \in H)$*.*

Allora se, $f : H \to \mathbb{R}$ *è un funzionale lineare su* H*, esiste ed è unica* $u \in H$ *tale che:*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \tag{2.16}$$

$\forall v \in H.$

Dimostrazione. Per ogni elemento $u \in H$, l'applicazione $v \to B[u, v]$ è un funzionale lineare su H e utilizzando il teorema di Riesz sappiamo che esiste ed è unico $\omega \in H$ tale che:

$$B[u, v] = (\omega, v) \quad (v \in H)$$

e possiamo vedere ω come $\omega = Au$ con A operatore lineare e limitato, infatti varrà che:

$$B[u, v] = (Au, v) \quad (v, u \in H)$$

e che

$$||Au||^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha||U||\ ||Au|| \text{e dunque che} ||Au|| \leq \alpha||u||$$

Quindi, dal momento che $||Au|| \leq \alpha||u||$, A è limitato.

Resta da dimostrare che: A è biunivoco e che il suo range è chiuso in H. A tal proposito guardiamo la quantità $\beta||u||^2$, questa tramite le definizioni dell'enunciato sarà:

$$\beta||u||^2 \leq B[u, u] = (Au, u) \leq ||Au||\ ||u||$$

Di conseguenza $\beta||u|| \leq ||Au||$ e dunque ciò che volevamo. Inoltre si ha anche che $R(A) = H$, infatti vediamo che se così non fosse, dal momento che il range è chiuso, esisterebbe un elemento $\omega \in H \neq 0$ tale che $\omega \in R(A)^{\perp}$ e quindi tale che $\beta||\omega||^2 \leq B[\omega, \omega] = (A\omega, \omega) = 0$. Questo è chiaramente un assurdo.

Si può infine vedere che u è unica, infatti se per assurdo esistesse una $\tilde{u}$ tale che $B[u, v] = \langle f, v \rangle = B[\tilde{u}, v]$ allora data la linearià di B si ha: $B[u - \tilde{u}, v] = 0$. Se $v = u - \tilde{u}$(tale assunzione è lecita in quanto v è un generico elemento di H), allora varrà che:$B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0 \geq \beta||u - \tilde{u}||^2$, e dunque che $u = \tilde{u}$. □

Enunciato tale teorema sembrerebbe che le fatiche siano finite, in reatà, nell'enunciato abbiamo fatto delle assunzioni non banali.

Ciò che resta da fare adesso è dunque dimostrare che tali assunzioni siano vere nel caso delle PDE ellittiche.

Teorema 2.3. *Vogliamo dimostrare che esistono* $\alpha, \beta > 0$ *e* $\gamma \geq 0$ *tali che :*

$$|B[u, v]| \leq \alpha||u||_{H_0^1(U)}||v||_{H_0^1(U)} \tag{2.17}$$

e che:

$$\beta||u||^2_{H_0^1(U)} \leq B[u, u] + \gamma||u||^2_{L^2(U)} \tag{2.18}$$

$\forall u, v \in H_0^1(U).$

Dimostrazione. La prima relazione è abbastanza immediata, infatti:

$$|B[u,v]| \leq \sum_{i,j=1}^{n} ||a^{ij}||_{L^\infty} \int_U |Du||Dv|\,dx$$

$$+\sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty} \int_U |Du||v|\,dx + ||c||_{L^\infty} \int_U |u||v|\,dx$$

$$\leq \alpha ||u||_{H_0^1(U)} ||v||_{H_0^1(U)}$$

Per un α appropriato.

Per dimostrare la seconda relazione utilizziamo la condizione di ellitticità, ovvero:

$$\theta \int_U |Du|^2\,dx \leq \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}\,dx$$

$$= B[u,u] - \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu^2\,dx$$

$$\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty} \int_U |Du||u|\,dx + ||c||_{L^\infty} \int_U u^2\,dx$$

Utilizzando adesso la diseguaglianza di Cauchy, sappiamo che esiste $\varepsilon > 0$, se per esempio

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}$$

Allora:

$$\frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2\,dx \leq B[u,u] + C \int_U u^2\,dx$$

Per C appropriata.

Allora, siccome vale che:

$$||u||_{L^2(U)} \leq C||Du||_{L^2(U)}$$

esistono costanti $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tali che :

$$\beta ||u||^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u[+\gamma ||u||^2_{L^2(U)}$$

□

Se però $\gamma > 0$ usciamo fuori dalle condizioni in cui vale il teorema di Lax-Milgram, per cui c'e bisogno del seguente:

Teorema 2.4. *Sia $\gamma \geq 0$ tale che $\mu \geq \gamma$ e data $f \in L^2(U)$, allora esiste ed è unica la soluzione $u \in H_0^1(U)$ al problema:*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \textit{in } U \\ u = 0 & \textit{su } \partial U \end{cases} \tag{2.19}$$

Dimostrazione. Sia γ la stessa del teorema precedente, allora, presa $\mu \geq \gamma$, definiamo la forma bilneare:

$$B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v) \quad u, v \in H_0^1(U)$$

corrispondente all'operatore $L_\mu u := Lu + \mu u$.

A questo punto B_μ soddisfa le condizioni di Lax-Milgram, quindi varrà che:

$$B_\mu[u, v] = \langle f, v \rangle$$

$\forall v \in H_0^1(U)$ e u è l'unica soluzione del problema assegnato. □

2.2.3 Regolarità della soluzione

Visto cosa vuol dire trovare una soluzione nel senso debole, vediamo adesso cosa si puo dire sulla sua regolarità.

Data $Lu = f$ studiamo il *Problema della regolarità*. Ovvero vediamo quanto regolare può essere una soluzione debole.

Per capire ciò, consideriamo l'equazione di Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.20}$$

e assumiamo che u sia abbastanza regolare e che vada a 0 per $|x| \to \infty$ nei prossimi calcoli.

Osserviamo allora la quantità:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} \, dx \tag{2.21}$$

Dunque, integrando per parti rispetto a x_j otteniamo che :

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} \, dx \tag{2.22}$$

Stavolta integnramo per parti rispetto a x_i e dunque:

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_j x_i} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 \, dx \tag{2.23}$$

Vediamo allora che la norma L^2 della derivata di second'ordine di u, può essere trovata calcolando la norma L^2 di f, possiamo quindi fare:

$$-\Delta\tilde{u} = \tilde{f} \tag{2.24}$$

con $\tilde{u} = u_k$ e $\tilde{f} = f_k$, in questo modo si trova che quanto detto prima vale anche per la derivata del terz'ordine di u e così via fino all'ordine $m + 2$ dove con m si indica l'intero tale che $f \in H^m$.

In particolare per $m \to \infty$ si ha una soluzione $u \in C^\infty$.

Capiamo che poter fare calcoli del genere è molto utile al fine di studiare la regolarità di una soluzione debole, a tal scopo però necessitiamo in generale di alcuni teoremi; infatti, i calcoli fatti in precedenza prevedono forti assunzioni sulla regolarità sia della soluzione u che delle sue derivate.

Regolarità interna

Studiamo innanzitutto criteri che possano garantirci regolarità dell'equazione con L non in forma di divergenza e con i coefficienti a^{ij}, b^i, c regolari quanto serve in $U \subset \mathbb{R}^n$, con U limitato e aperto:

Teorema 2.5 (Regolarita interna di H^2)**.** *Assumiamo che:*

$$a^{ij} \in C^1(U), b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

$$f \in L^2(U) \quad \textit{in } U$$

Se u è una soluzione debole di $Lu = f$ in U, allora vale che:

$$u \in H^2_{loc}(U)$$

e che $\forall V \subset\subset U$ aperto,

$$||u||_{\mathrm{H^2(V)}} \leq C(||f||_{L^2(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \tag{2.25}$$

con $C \equiv C(V, U)$

Si può estendere questo teorema a qualunque ordine si voglia, purchè siano rispettate delle condizioni.

Teorema 2.6. *Sia m un intero non negativo, allora se vale che:*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$$

e che

$$f \in H^m(U)$$

allora, u soluzione della PDE ellittica sarà tale che:

$$u \in H^{m+2}_{loc}$$

e per $V \subset\subset U$ vale che:

$$||u||_{H^{m+2}(V)} \leq C(||f||_{H^m(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \tag{2.26}$$

con $C \equiv C(m, U, V)$

Si può notare che, per $m = 0$ l'enunciato coincide con quello precedente, invece per $m \to \infty$ abbiamo una soluzione che è infinitamente differenziabile.

Regolarità sulla frontiera

Sappiamo ora che condizioni deve rispettare una soluzione per essere regolare fino all'ordine $m + 2$ ma soltanto sull'interno di U, non sappiamo nulla di u su ∂U.

Enunciamo adesso un teorema che ci permette di conoscere che condizioni devono essere rispettate affinche si abbia regolarità anche sulla frontiera.

Come nel caso precedente se ne potrebbero enunciare due, uno per la regolarità in H^2 e uno per quella ad ordini maggiori, ma, siccome per $m = 0$ l'uno si riduce nell'altro, forniamo solo il seguente:

Teorema 2.7. *Si assuma che:*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U}) \quad (i, j = 1, \ldots, n) \quad , f \in H^m(U)$$

allora, supposto inoltre $u \in H^1_0(U)$, sia soluzione del problema con condizioni al bordo nulle e che $\partial U \in C^{m+2}$, si ha:

$$u \in H^{m+2}(U)$$

$$||u||_{H^{m+2}(U)} \leq C(||f||_{H^{m+2}(U)} + ||u||_{L^2(U)}) \tag{2.27}$$

con $C \equiv C(m, U)$.

Nel caso in cui $m = 0$ otteniamo il caso H^2, mentre analogamente a prima, per $m \to \infty$, si ha infinita differenziabilità anche su ∂U

2.2.4 Principio del massimo

Sappiamo che, per l'equazione di Laplace, esiste un principio di massimo, molto utile nelle applicazione fisiche, come ad esempio il principio della trappola elettrostatica.

Dal momento che abbiamo visto tale equazione appartenere ad una famiglia ben più grande, vorremmo sapere se tale principio può essere esteso alle equazioni ellittiche in generale.

Definiamo quindi cosa intendiamo per *punto di massimo*:

Definizione 2.7. Sia u una funzione di classe C^2 su un aperto U, allora $x_0 \in U$ sarà un punto di massimo se vale che:

$$Du(x_0) = 0, \quad D^2u(x_0) \leq 0 \tag{2.28}$$

Da tale definizione notiamo due cose, la prima è che la matrice D^2u è definita non positiva in x_0 e la seconda è che tale definizione implica una descrizione puntuale e non più nel senso delle distribuzioni come fin ora. Quest'ultima condizione implica che, per far si che la definizione di massimo abbia un senso, la funzione u sia almeno di classe C^2. Questo ci obbliga a subordinare il problema della ricerca dei punti del massimo a quello dello studio della regolarità.

Possono essere date nell'ambito della formulazione debole delle PDE due principi del massimo:

- Il primo, detto "*debole*", dimostra che una funzione di classe C^2 ha valori massimi(o minimi) sulla frontiera dell'insieme sul quale è definita;
- il secondo, detto "*forte*", dimostra la non esistenza di punti di massimo di una funzione di classe C^2 in un insieme aperto U.

Teorema 2.8 (Principio debole del massimo)**.** *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e si assuma che $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ e $c \geq 0$, allora vale che:*

i) Se $Lu \leq 0$ in U, allora:

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+;$$

ii) se $Lu \geq 0$ in U, allora:

$$\min_{\bar{U}} u \geq .\max_{\partial U} u^-.$$

Dove $u^+ = \max(0, u)$ e $u^- = -\min(u, 0)$.

Questo è il principio debole del massimo nella sua formulazione più generale, si noti che si stanno comunque ponendo dei limiti sui vari coefficienti dell'equazione.

Diamo ora il secondo teorema, ovvero:

Teorema 2.9 (Principio forte del massimo)**.** *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e si assuma che $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ e $c \geq 0$, allora vale che:*

Se U è connesso, $Lu \leq_{(\geq)} 0$ in U e u possiede un massimo(minimo) non negativo(positivo) su $\bar{U}$ in un punto interno, allora u è costante su U

2.2.5 Problema agli autovalori

Consideriamo inizialmente il problema:

$$\begin{cases} L\omega = \lambda\omega & \text{in } U \\ \omega = 0 & \text{su } \partial U \end{cases} \tag{2.29}$$

ovvero, il problema agl'autovalori per L. Nota che, da quanto visto nella sezione sull'esistenza della soluzione debole, sappiamo che una base di autovalor idi L può essere formata da infiniti elemente ma tali da essere contabili.

Prendiamo adesso L in forma di divergenza e con i coefficienti b^i e c nulli, in tal caso allora l'operatore L sarà simmetrico e varrà per la forma bilineare B

$$B[u, v] = B[v, u]$$

e se inoltre U è compatto, si può dimostrare che:

Teorema 2.10.

i) Ogni autovalore di L *è reale;*

ii) che, detto Σ *l'insieme degli autovalori, si potrà scrivere:*

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

dove

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad \textit{con } \lambda_k \to \infty \textit{ se } k \to \infty;$$

iii) esiste una base ortonormale $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ *di* $L^2(U)$ *dove le* $\omega_k \in H_0^1(U)$ *e sono autovettori di autovalore* λ_k *di* L.

Definizione 2.8. Si definisce *Autovalore principale* di L, $\lambda_1 > 0$

Con questa definizione possiamo dare il seguente teorema:

Teorema 2.11 (Principio variazionale)**.** *Si dimostra che:*

$$\lambda_1 = min\left\{B[u, u] | u \in H_0^1, ||u||_{L^2} = 1\right\} \tag{2.30}$$

e che se u *è una soluzione del problema differenziale:*

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \textit{in } U \\ u = 0 & \textit{su } \partial U \end{cases} \tag{2.31}$$

allora è proporzionale a ω_1 *autovettore dell'autovalore principale.*

In via generale però L non si scrive nel modo semplice che abbiamo supposto inizialmente, anzi, la sua forma generale non divergente sarà non simmetrico. Questo implica che gli autovalori di L non sono necessariamente reali. Il teorema precedente allora si trasforma nel seguente:

Teorema 2.12. *Si dimostra che:*

i) λ_1 *continuerà ad essere reale;*

ii) $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ *autovalore di* L *vale che:*

$$Re(\lambda) \leq \lambda_1. \tag{2.32}$$

.

Capitolo 3

Problemi di interesse fisico

3.1 Problema fondametale dell'elettrostatica

Uno dei problemi classici che si descrive con le PDE ellittiche è il *Problema fondamentale dell'elettrostatica*, ovvero la determinazione del potenziale elettrico in una data configurazione di carica statica.

La soluzione di tale problema è ben nota in letteratura, quindi non indagheremo a fondo tale aspetto, piuttosto è interessante vedere come la formulazione debole delle PDE ellittiche collassa in quella classica e che significato fisico hanno teoremi e proprietà enunciati nel capitolo precedente.

Nel caso si voglia risolvere il problema fondamentale dell'elettrostatica nel vuoto, la soluzione discende banalmente dall'equazione di Laplace o di Poisson se ci sono delle cariche localizzate o una distribuzione.

Il vuoto è però un caso del tutto particolare, infatti la sua risposta al campo elettrico è uguale e costante in ogni direzione, trattiamo quindi il caso in cui lo spazio sia costituito da un dielettrico generico, ad esempio potrebbe essere anche l'aria.

In tal caso vi sono delle considerazioni da fare, infatti per un dielettrico esistono fenomeni che nel vuoto non hanno luogo, ad esempio la polarizzazione. Sappiamo infatti che in presenza di un campo elettrico , un dielettrico reagisce deformando la propria distribuzione di carica e dando luogo a densità di cariche aggiuntive. Tale effetto si manifasta sotto forma di un vettore di *Polarizzazzione* P che modifica il campo elettrico E.

Tale vettore P dipende però in modo lineare da E mediante la *Suscettività elettrica*:=χ_e.In linea generale questa non è uno scalare, bensì un tensore.

In tal modo si può scrivere il campo elettrico totale, anche considerando il dielettrico, come: $D = (\varepsilon_0 + \chi_e)E$.

Definiamo la quantità fra parentesi come *costante dielettrica del mezzo*:=ε.

Questa sarà a sua volta un tensore, tale che $D = \varepsilon E$.

Il campo Elettrico E è però ancora quello per cui vale:

$$\oint E \cdot dl \tag{3.1}$$

quindi sarà ancora possibile definire un potenziale V: $E = -\nabla V$.

Infine considerando il teorema di Gauss in un dielettrico si può ottenere la relazione:

$$\nabla \cdot D = \rho \tag{3.2}$$

dove ρ è la densità di carica.

Abbiamo dunque tutti gli strumenti per vedere l'uguaglianza nella forma fra l'equazione di Poisson per questo problema e l'operatore L, infatti:

$$\begin{cases} D_j = \sum_i^3 \varepsilon^{ij} E_i \\ E_i = -(\nabla V)_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -V_{x_i} \end{cases} \tag{3.3}$$

e quindi che:

$$D_j = -\sum_i^3 \varepsilon^{ij} V_{x_i} \tag{3.4}$$

Se consideriamo a tal punto la (3.2) si ottiene:

$$\nabla \cdot (-\sum_i^3 \varepsilon^{ij} V_{x_i}) = \rho \tag{3.5}$$

e, esplicitando l'operatore divergenza:

$$-\sum_{i,j}^3 (\varepsilon^{ij} V_{x_i})_{x_j} = \rho \tag{3.6}$$

Questa non è altro che una PDE ellittica dove:

- La funzione incognita è il potenziale scalare V;
- i coefficienti a^{ij} della teoria generale sono gli elementi ε^{ij};
- l'operatore L è nella forma divergente con i coefficienti b^i e c nulli.

Vediamo dunque che la formulazione debole delle equazioni ellittiche del capitolo precedente non è soltanto uno sforzo matematico, infatti, avendo riconosciuto l'uguaglianza fra tale equazione e quella appena vista sappiamo che tutti i teoremi di esistenza, unicità, regolarità e principio del massimo sono rispettati automaticamente.

Questo non vale solo per il problema analizzato ma per un qualunque problema possa scriversi in questi termini.

3.2 Equazione di Schrödinger

Una tra le più importanti equazioni alle derivate parziali della meccanica quantistica è senza dubbio l'*equazione di Schrödiger*:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + L\psi = 0 \tag{3.7}$$

Se si ricercano delle soluzioni di tipo fattorizzato, ovvero:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)T(t) \tag{3.8}$$

si ottiene che:

$$i\hbar\frac{T'}{T}(t) = \frac{-L\psi}{\psi}(x) \tag{3.9}$$

da cui si capisce che ogni membro deve essere costante.

Per la parte spaziale si perviene dunque ad un'equazione del tipo:

$$L\psi = E\psi \tag{3.10}$$

ovvero, quella che abbiamo visto essere l'equazione agli autovalori per l'operatore L.

Da ciò possiamo ricavare notevoli informazioni sulla soluzione ψ e sui valori di E.

Può essere inoltre interessante vedere che per un'adeguata scelta dei coefficienti di L si ottiene l'equazione di Schrodinger per vari sistemi fisici:

1) Se ad esempio si scelgono i coefficienti di $a^{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m}$ (dove $\hbar$ è la costante di Plank ridotta e m la massa della particella considerata) e $b^i = c = 0$ si ottiene l'equazione di Schrödinger per una particella libera.

   Studiando inoltre il problema:

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 & \text{su } U \times (0,T] \\ u = 0 & \text{in } U \\ u(x,0) = u(x_0) \end{cases} \tag{3.11}$$

   Si riconosce il caso di una buca di potenziale infinita n-dimensionale;

2) se in aggiunta al caso precedente inseriamo un coefficiente $c(x,t) \neq 0$ tale che:

$$c(x,t) = \begin{cases} c & \text{se } |x| > a \in \mathbb{R} \\ o & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{3.12}$$

   Si riconosce il caso di una buca di potenziale radiale finita;

3) se il termine c ha invece la forma:

$$c(x,t) = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 x_i^2 \tag{3.13}$$

Si ha il caso di una particella di massa m soggetta ad un potenziale armonico di frequenza ω_i rispetto alla coordinata x_i;

4) se il termine c ha la forma:

$$c(x,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{3.14}$$

dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto, e è la carica dell'elettrone, r la distanza di un elettrone dall'origine. Si riconosce il caso di un elettrone soggetto al potenziale generato da un protone, ovvero, un elettrone in un atomo di idorgeno.

3.3 Equazione del calore

Ci muoviamo adesso verso una tipologia di equazione fino ad ora mai comparsa in questo lavoro, ossia, quella che storicamente è chiamata *Equazione del calore*, detta così perche utilizzata inizialmente per descrivere la temperatura in un materiale nel tempo.

Presentata così potrebbe sembrare qualcosa di assolutamente nuovo e ci si potrebbe chiedere perchè trattarla, in realtà l'equazione ed il problema differenziale ad essa associato si scrivono nella forma:

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \quad \text{su } U \times (0,T] \\ u = 0 \quad \text{su } \partial U \times (0,T] \\ u(x,0) \equiv u_0(x) = g \quad \text{in } U \end{cases} \tag{3.15}$$

Dove:

- u, funzione incognita, è una $u(x,t)$;
- $U \subset \mathbb{R}^n$ è l'insieme in cui vivono le x;
- t è la variabile temporale tale che $t \in (0,T]$;
- g è una funzione nota e denota il valore della funzione a $t = 0$.

Inoltre, l'operatore L che compare nel problema (3.15) è l'usuale operatore di differenziazione parziale del second'odine, i cui coefficienti possono però essere in generale anche funzioni del tempo:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + cu \tag{3.16}$$

con i coefficienti a^{ij} che rispettano la condizione di ellitticità, ovvero, sono tali che esiste una costante $\theta > 0$ per cui:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{3.17}$$

per ogni $(x,t) \in U_T = U \times (0,T]$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Per visualizzare meglio cosa vuol dire risolvere tale problema differenziale, si immagini che u dipenda da t nel modo che segue:

$$u(t) : (0,T] \to H_0^1(U) \tag{3.18}$$

$$[u(t)](x) : H_0^1(U) \to \mathbb{R} \tag{3.19}$$

In tal modo è facile capire che un problema differenziale come il (3.15) rappresenta la ricerca di una trasformazione ad un parametro di u tale che sia soluzione in ogni istante di tempo dell'equazione di Poisson con condizioni al bordo di Dirichlet.

3.3.1 Proprietà della soluzione

Introdotto il problema, resta da vedere che il problema ammetta una soluzione e questa sia unica.

Definizione 3.1. Così come fatto in precedenza per l'equazione $Lu = f$ anche per quella del calore si definisce *soluzione debole*, una funzione u tale che, presa una $v \in H_0^1$:

$$\langle u', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v) \tag{3.20}$$

Dove vale che:

i) u' indica u_t ed appartiene allo spazio duale di H_0^1, ovvero, H_0^{-1};

ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ rappresenta il prodotto fra un elemento di H_0^{-1} eH_0^1;

iii) B è la forma bilineare definita anche per la soluzione di L.

Teorema 3.1. *Se vale che:*

i) I coefficienti $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$*;*

ii) $f, g \in L^2(U)$.

allora il problema (3.15) *ammette un'unica soluzione debole.*

Di seguito una prova dell'unicità della soluzione debole.

Dimostrazione. Per provare l'unicità è necessario mostrare che l'unica soluzione debole al problema (3.15) con $f \equiv g \equiv 0$ sia $u \equiv 0$.

A tal scopo poniamo $u = v$ nell'equazione (3.20) e otteniamo:

$$\langle u', u \rangle + B[u, u; t] = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(U)}) + B[u, u; t] = 0$$

In analogia a quanto visto *teorema 2.3*, esistono $\gamma \geq 0$ e $\beta > 0$ tali che valga:

$$B[u, u; t] \geq \beta ||u||^2_{H^1_0(U)} - \gamma ||u||^2_{L^2(U)} \geq -\gamma ||u||^2_{L^2(U)}$$

Usando queste due relazioni si può vedere che u deve essere la funzione q.o. nulla □

Inoltre, in analogia con quanto fatto per le equazioni di tipo ellittico, è possibilile provare che se i dati sono regolari(per esempio di classe C^∞) anche la soluzione lo è (di classe C^∞).

3.3.2 Derivazione dell'equazione del calore

LUn'applicazione classica dell'equazione di cui abbiamo brevemente introdotto alcune proprietà è il problema di determinare, dato un mezzo le cui caratteristiche strutturali sono note, l'evoluzione nel tempo del campo scalare T, ovvero la temperatura, conoscendo lo stato iniziale.

Nel modello preso in considerazione, il mezzo conduttore nel quale studiamo il problema individua una porzione U di $\mathbb{R}^3$ delimitata da un bordo ∂U.

Postulato che il flusso di calore nel mezzo rispetti l'equazione di Fourier, ovvero che valga:

$$J = -k\nabla T \tag{3.21}$$

dove J è il vettore *densità di corrente termica*, k è la conduttività termica che in generale è un tensore a causa dell'anisotropia del mezzo in cui si effettua lo studio, e T è il campo scalare di temperatura, si puo osservare la variazione di calore all'interno di una porzione di volume arbitraria del mezzo e vedere che:

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \int_V \rho q(x, t) d^3x - \oint_{\partial V} J \cdot n d\sigma \tag{3.22}$$

dove:

- $Q_V(t)$ è la quantità di calore nella regione V in funzione del tempo;
- ρ è la densità di massa del mezzo;
- $q(x,t)$ è una sorgente di calore, qualora sia presente;
- n è la normale orientata in verso uscente rispetto alla superficie ∂V.

Dalla termodinamica sappiamo però che la variazione di calore è legata alla variazione della temperatura, in condizioni stazionarie,mediante la relazione:

$$dQ = c\rho dT \tag{3.23}$$

dove c è il calore specifico del mezzo, ed in generale e una funzione scalare della posizione. Di conseguenza, integrando la (3.23) su V e sostituendo tale espressione nella (3.22), si ottiene un integrale su V uguale a 0 ed essendo V arbitrario si può scrivere:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\rho c}\sum_{i,j=1}^{3}(k^{ij}T_{x_i})_{x_j} = \frac{q(x,t)}{c} \tag{3.24}$$

Dalla quale imponendo le condizioni di Dirichlet al bordo e dando la condizione iniziale $T(x,0) = T(x_0)$ si ottiene il problema per cui sappiamo che esiste ed è unica una soluzione.

Inolte, se i coefficienti k^{ij} non sono costanti, si può scrivere la (3.24) come:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} a^{ij}T_{x_i,x_j} - \sum_{i=1}^{3} b^i T_{x_i} = \frac{q(x,t)}{c} \tag{3.25}$$

dove si è posto $a^{ij} = k^{ij}/\rho c$ e $b^i = (\sum_{j=1}^{3} k^{ij}_{x_j})/\rho c$.

Bibliografia

[1] Brezis, Haim (2006), Analisi Funzionale: Teoria e applicazioni, Liguori Editore.

[2] Caldirola Piero, Fontanesi Marcello, Sindoni Elio (1991), Elettromagnetismo: Parte I, Masson.

[3] Evans, Lawrence C. (1998), Partial Differential equation, American Mathematical Society.

[4] Moretti, Valter, Fondamenti di FISICA MATEMATICA II: Introduzione alla Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali del Secondo Ordine.