UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Solitoni in condensati di Bose-Einstein

Relatori: Prof. Perroni Carmine Antonio Candidato: Francesco Pandolfelli Matr. N85001081

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Indice Introduzione			$\frac{3}{5}$
	1.1	Distribuzione di Bose	7
	1.2	Densità degli stati	9
	1.3	Temperatura di transizione	10
	1.4	Frazione condensata	11
2	Teoria dello stato condensato		13
	2.1	Lunghezza di scattering e interazione effettiva	13
	2.2	L'equazione Gross-Pitaevskii	15
		2.2.1 Considerazioni qualitative sullo stato fondamentale di un gas di	
		bosoni confinato	17
		2.2.2 Calcolo variazionale dell'energia di stato fondamenntale di un gas	
		di bosoni confinato	18
	2.3	Approssimazione Thomas-Fermi	21
	2.4	Funzione d'onda di un condensato in una box infinita	24
3	Din	amica del condensato e solitoni	27
	3.1	Formulazione generale	27
	3.2	Le equazioni dell'idrodinamica	28
	3.3	Le equazioni di Bogoliubov	31
	3.4	Solitoni	34
		3.4.1 Solitoni scuri	35
		3.4.2 Solitoni nella fisica sperimentale	39
		3.4.3 Solitoni scuri in condensati Bose-Einstein di ${}^{87}Rb$ a forma di sigaro	41
C	onclu	ısioni	49
\mathbf{A}	ppen	dice	51
	Stru	ttura superficiale del condensato	51
Bibliografia			55

INDICE

Introduzione

I condensati di Bose-Einstein, sono stati predetti teoricamente da Einstein nel 1925. Negli anni 70 con lo sviluppo delle tecniche di *laser cooling* vennero effettuati i primi esperimenti per la realizzazione di un condensato BE. Dato che da solo il laser ccoling non produceva temperature sufficientemente basse e densità sufficientemente alte per la condensazione, in seguito al laser cooling è stato aggiunto un secondo stadio di raffreddamento, l'evaporative cooling, nel quale gli atomi a maggiore energia vengono rimossi dal confinamento, abbassando ulteriormente la temperatura del gas. In questo modo nel 1995 è stato possibile realizzare sperimentalmente per la prima volta un condensato di Bose-Einstein, in un gas diluito di atomi confinato. I primi esperimenti vennero condotti su gas di rubidio, sodio, e litio. I gas raffreddati a questa temperatura costituiscono dei potenti strumenti per l'investigazione di fenomeni quantici. In un condensato Bose-Einstein debolmente interagente, gli atomi essenzialmente occupano lo stesso stato, e il condensato può essere descritto in termini di teorie di campo medio. Inoltre data la loro densità bassa, le scale di lunghezza microscopiche sono così grandi che la struttura della funzione d'onda del condensato, può essere studiata con mezzi ottici. Per questo lo studio di gas di Bose ultrafreddi costituiscono una delle aree più attive della fisica contemporanea.

Lo scopo dell'elaborato è di riprendere i principali risultati di un gas di Bose non interagente in un confinamento, in particolare ci concentreremo su confinamenti armonici data la loro importanza nella fisica sperimentale. Nel primo capitolo, dalla statistica di Bose-Einstein faremo vedere come è possibile ricavare le principali proprietà del sistema come la densità degli stati, la frazione condensata e la temperatura di transizione.

Nella seconda parte, vogliamo mostrare come per un gas rarefatto la lunghezza di scattering caratterizza completamente l'interazione tra due particelle. Nel limite di basse enrgie vedremo che la lunghezza di scattering è data dall'approssimazione di Born, in cui il comportamento dello scattering tra due particelle con piccola energia del centro di massa può essere descritta da un'interazone effettiva di contatto. Faremo un passo avanti quindi introducendo l'interazione tra atomi, e svilupperemo una teoria di campo medio per calcolare la funzione d'onda del condensato che ci porterà alla scrittura dell'equazione Gross-Pitaevskii indipendente dal tempo. L'equazione ha la forma di un equazione di Schrödinger, nella quale il potenziale agente sulla particella è la somma di un potenziale esterno e un termine non lineare che tiene conto del campo medio prodotto dagli altri bosoni e l'autovalore sarà il potenziale chimico non l'energia della particella come nell'equazione di Schrodinger lineare. Nell'elaborato mostreremo la risoluzione tramite un metodo variazionale dell'equazione, che è valida solamente per T = 0, ricavando gli andamenti dell'energia per numero di particelle. Inoltre dato che per un numero molto grande di particelle il termine di energia cinetica è trascurabile, introdurremo l'approsimazione Thomas-Fermi che ci permetterà di arrivare in maniera estremamente semplice ai risultati

ottenuti con il metodo variazionale.

Nel terzo capitolo entriamo nel vivo della trattazione in quanto analizzeremo la dinamica del condensato. Con una teoria di campo medio dinamica otteniamo la Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, che non è altro che una generelaizzazione dipendente dal tempo dell'equazione Gross-Pitaevskii del capitolo 2. Questa ci permetterà di ricavare la dinamica del condensato. Linearizzando l'equazione si ottengono l'equazioni di Bogoliubov le cui soluzioni daranno lo spettro d'eccitazione del condensato.

L'ultima parte dell'elaborato è un focus approfondito sui *solitoni*, che sono delle soluzioni analitiche non lineari unidimensionali dell'equazione Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, e costituiscono un collegamento tra fisica dei condensati, fluidodinamica ed ottica non lineare. In particolare approfondiremo le proprietà dei solitoni scuri che si ottengono per interazioni repulsive tra particelle del condensato. Infine sono state indicate le principali tecniche sperimentali per la produzione e lo studio delle proprietà dei solitoni scuri.

Capitolo 1 Il gas di Bose non interagente

In questo capitolo tratteremo le proprietà di un gas di Bose non interagente confinato in un potenziale armonico. Calcoleremo le proprietà del sistema all'equilibrio mediante un'approssimazione semiclassica, nella quale lo spettro di energia è trattato come continuo. Affinché questo approccio sia valido è necessario che la temperatura sia grande rispetto a $\Delta \varepsilon / k$, dove $\Delta \varepsilon$ denota l'energia di separazione tra livelli energetici vicini. Il primo passo della trattazione sarà ricavare la funzione di distribuzione statistica che è necessaria per il calcolo della densità degli stati. Il passo successivo è quello di definire la temperatura di transizione a cui segue un conto semplice per calcolarla in assenza d'interazione, e successivamente calcolare la frazione di particelle del condensato.

1.1 Distribuzione di Bose

Consideriamo un sistema di bosoni non interagenti in equilibrio termodinamico, il numero di occupazione di singola particella dello stato r è dato dalla funzione di distribuzione di Bose:

$$f^{0}(\varepsilon_{r}) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{r}-\mu)/kT} - 1},$$
(1.1)

dove ε_r è l'energia dello stato di singola particella, nel particolare potenziale confinante considerato. Il potenziale chimico μ è una funzione di N e T che soddisfa la condizione che il numero totale di particelle, è uguale alla somma delle occupazioni dei singoli livelli. Solitamente nella trattazione della transizione Bose-Einstein si lavora in termini della fugacità:

$$\zeta = e^{\mu/kT}.\tag{1.2}$$

Se prendiamo come zero dell'energia, l'energia dello stato di singola particella a energia minima, la fugacità è più piccola dell'unità sopra la temperatura di transizione ed uguale all'unità nello stato condensato (a meno di termini dell'ordine 1/N che trascureremo).



Figura 1.1: Nel grafico abbiamo riportato la funzione di distribuzione $f^0 = \frac{1}{\zeta^{-1}e^{\varepsilon/kT} - 1}$ in relazione all'energia per diversi valori della fugacità. Il valore $\zeta = 1$ corrisponde a temperature al di sotto della temperatura di transizione mentre $\zeta = 0.5$ e $\zeta = 0.25$ corrispondono a valori di $\mu \approx -0.69kT$ e $\mu \approx -1.39kT$

Ad alte temperature gli effetti della statistica quantistica del sistema sono trascurabili, e la distribuzione di Bose (1.1) può essere approssimata con la distribuzione di Boltzmann:

$$f^{0}(\varepsilon_{r}) = e^{-(\varepsilon_{r}-\mu)/kT}.$$
(1.3)

Se consideriamo le particelle all'interno di una box di volume V, allora l'indice r labella i vettori d'onda \overrightarrow{q} degli stati d'onda piana:

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.\tag{1.4}$$

L'energia dello stato è $\varepsilon = \hbar^2 q^2/2m$ la distribuzione (1.3) è quindi una maxwelliana per la velocità $v = \hbar q/m$. Ad alte temperature il potenziale chimico è molto più piccolo dell'energia dello stato di singola particella più basso ε_{min} , cosicché in questo limite il numero di occupazione di qualunque stato è molto più piccolo dell'unità, e quindi in particolare:

$$e^{-\frac{(\varepsilon_{min} - \mu)}{kT}} \ll 1. \tag{1.5}$$

Al diminuire della temperatura il potenziale chimico cresce e cresce di conseguenza il numero di occupazione medio. Comunque il potenziale chimico μ è sempre più piccolo di ε_{min} , altrimenti avremo che la distribuzione di Bose (1.1) valutata al livello energetico a energia più bassa restituirebbe un valore negativo del numero di occupazione (non accettabile fisicamente). Di conseguenza il numero di occupazione media di qualunque stato eccitato di singola particella non può superare il valore:

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \varepsilon_{min})/kT} - 1}.$$
(1.6)

1.2. DENSITÀ DEGLI STATI

Se il numero totale di particelle negli stati eccitati è minore di N, allora le restanti particelle dovranno occupare lo stato fondamentale di singola particella, il sistema è un condensato di Bose-Einstein. La temperatura più alta alla quale il condensato esiste è detta temperatura di transizione Bose-Einstein e viene indicata con T_c .

Nello stato condensato a temperatura al di sotto di T_c , il potenziale chimico resta uguale a ϵ_{min} , a meno di termini dell'ordine di kT/N che è piccolo per grandi N, e l'occupazione dello stato fondamentale è macroscopica, nel senso che per $N \to \infty$ una frazione di particelle diversa da zero sarà in questo stato.

1.2 Densità degli stati

Assumiamo che tutte le particelle sono in un particolare stato interno (spin), e trascuriamo la parte della funzione d'onda che tiene conto dello stato interno della particella. In tre dimensioni per una particella libera in un particolare stato di spin, c'è in media uno stato quantico per volume $(2\pi\hbar)^3$ dello spazio delle fasi. La regione dello spazio dei momenti per cui il modulo del momento è minore di p, ha un volume parti a $4\pi p^3/3$ che è il volume di una sfera di raggio p. Dato che l'energia di una particella di momento \mathbf{p} è $\epsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$, il numero totale di stati $G(\epsilon)$ con energia minore di ϵ è data da:

$$G(\epsilon) = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V2^{1/2}}{3\pi^2} \frac{(m\epsilon)^{3/2}}{\hbar^3},$$
(1.7)

generalmente il numero di stati con energia compresa tra $\epsilon \in \epsilon + d\epsilon$ è data da $g(\epsilon) d\epsilon$, dove $g(\epsilon)$ è la densità degli stati.

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} \Rightarrow g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2}}{2^{1/2}\hbar^3} \epsilon^{1/2}.$$
(1.8)

In generale in *d*-dimensioni il corrispondente risultato è $g(\epsilon) \propto \epsilon^{(d/2-1)}$ e quindi la DOS è indipendente dall'energia per una particella libera in due dimensioni.

Introduciamo ora il potenziale di un oscillatore armonico anisotropo:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\left(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2\right), \qquad (1.9)$$

i livelli energetici $\epsilon(n_x, n_y, n_z)$ sono:

$$\epsilon \left(n_x, n_y, n_z \right) = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z.$$
(1.10)

Determiniamo il numero di stati $G(\epsilon)$ con energia minore di un dato ϵ , osserviamo che per valori di energia grandi se comparati con $\hbar\omega_i$ possiamo usare n_i continui e trascurare l'energia di punto zero. Per effettuare il calcolo, introduciamo un sistema di coordinate definito dalle 3 variabili $\epsilon_i = \hbar\omega_i n_i$ con (i = x, y, z). In termini di queste variabili una superficie con energia costante è $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$. $G(\epsilon)$ è proporzionale al volume nel primo ottante delimitato dal piano:

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^{\epsilon} d\epsilon_x \int_0^{\epsilon - \epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon - \epsilon_x - \epsilon_y} d\epsilon_z = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}.$$
 (1.11)

Dato che $g(\epsilon) = dG/d\epsilon$, otteniamo la densità degli stati data da:

$$g\left(\epsilon\right) = \frac{dG\left(\epsilon\right)}{d\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}.$$
(1.12)

Per un potenziale di oscillatore armonico d-dimensionale con frequenze $\omega_i (i = x, y, z)$ si ha: (d-1)

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{(a-1)}}{(d-1)! \prod_i \hbar \omega_i}.$$
(1.13)

Da ora in poi, calcoleremo le proprietà termodinamiche utilizzando una DOS nella forma:

$$g\left(\epsilon\right) = C_{\alpha}\epsilon^{(\alpha-1)},\tag{1.14}$$

dove C_{α} è una costante. Per un gas tridimensionale confinato da pareti rigide $\alpha = 3/2$ e $C_{3/2}$ si ricava dalla (1.8):

$$C_{3/2} = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}.$$
(1.15)

Per un potenziale armonico tridimensionale $\alpha = 3$ e $C_3 = \frac{1}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}$

1.3 Temperatura di transizione

La temperatura T_c è definita come la più alta temperatura alla quale si ha un occupazione macroscopica del livello energetico fondamentale. Per un numero di particelle N sufficientemente grande, possiamo trascurare il punto zero dell'energia $\epsilon (n_x, n_y, n_z)$ e quindi porre l'energia minima ϵ_{min} a zero.

Il numero di particelle negli stati eccitati è data da:

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f^0(\epsilon), \qquad (1.16)$$

che raggiunge il valore massimo per $\mu = 0$, e la temperatura di transizione T_c è determinata dalla condizione che il numero totale di particelle può essere accomodato in stati eccitati, che è

$$N = N_{ex} \left(T_c, \mu = 0 \right) = \int_0^\infty d\epsilon g \left(\epsilon \right) \frac{1}{e^{\epsilon/kT_c} - 1},\tag{1.17}$$

scrivendola in termini della variabile adimensionale $x = \epsilon/kT_c$ si ottiene:

$$N = C_{\alpha} \left(kT_c \right)^{\alpha} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha - 1}}{e^x - 1} = C_{\alpha} \Gamma \left(\alpha \right) \zeta \left(\alpha \right) \left(kT_c \right)^{\alpha}, \tag{1.18}$$

dove $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ è la funzione zeta di Riemann, e $\Gamma(\alpha)$ è la funzione gamma. Nella valutazione dell'integrale (1.18) espandiamo la funzione di Bose in potenze di e^{-x} e sfruttiamo che $\int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x} = \Gamma(\alpha)$, otteniamo così che:

$$\int_{0}^{\infty} dx \frac{x^{\alpha - 1}}{e^{x} - 1} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha), \qquad (1.19)$$

e dalla (1.18) ricaviamo che:

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{\left[C_{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)\zeta\left(\alpha\right)\right]^{1/\alpha}}.$$
(1.20)

10

1.4. FRAZIONE CONDENSATA

Per un potenziale armonico tridimensionale $\alpha = 3$, e C_{α} l'abbiamo calcolato precedentemente:

$$kT_c = \frac{\hbar\overline{\omega}N^{1/3}}{\left[\zeta\left(\alpha\right)\right]^{1/3}} \simeq 0,94\hbar\overline{\omega}N^{1/3},\tag{1.21}$$

dove $\overline{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ è la media geometrica delle frequenze. Il risultato può essre riscritto nella forma seguente:

$$T_c \simeq 4,5 \left(\frac{\overline{f}}{100Hz}\right) N^{1/3} nK, \qquad (1.22)$$

dove $\overline{f} = \frac{\overline{\omega}}{2\pi}$. Per un gas contenuto in una box di volume V, $C_{3/2}$ è nota e si trova che

$$KT_c \approx 3.31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \tag{1.23}$$

Per un gas uniforme in due dimensioni $\alpha = 1$ e l'integrale diverge. Quindi osserviamo che per un gas bidimensionale omogeneo la condensazione Bose-Einstein può avvenire solo a T = 0. La condensazione di un gas bidimensionale può avvenire però se il potenziale confinante è di tipo armonico. Infatti in questo caso $\alpha = 2$ e l'integrale (1.18) è finito. È utile introdurre la densità della spezio delle faci π che à il numero di particelle contenuto

È utile introdurre la densità dello spazio delle fasi ϖ che è il numero di particelle contenute in un volume uguale al cubo della lunghezza termica di De Broglie:

$$\lambda_T^3 = \frac{2\pi\hbar^3}{(mkT)^{3/2}},\tag{1.24}$$

con $\varpi = n\lambda_T^3$. Per un gas classico questa è una misura della tipica occupazione degli stati di singola particella. La maggioranza degli stati occupati hanno energia dell'ordine di kTo meno, e quindi il numero di stati per unità di volume che sono occupati significativamente è dell'ordine del numero di stati totali sull'unità di volume con energia minore di kT che è approssimativamente $(mkT/\hbar)^{3/2}$. La densità dello spazio delle fasi è quindi il rapporto tra la densità di particelle e il numero di stati significativamente occupati per unità di volume. La transizione di Bose-Einstein avviene in accordo con la (1.23) quando $\varpi = \zeta (3/2) = 2,612$. Osserviamo che ϖ è comparabile con l'unità, questo indica che sono necessarie basse temperature ed alta densità di particelle affinché avvenga la transizione di Bose-Einstein.

L'esistenza di una transizione di fase per particella è una conseguenza della nostra assunzione che la separazione dei livelli energetici di singola particella è minore di kT.

1.4 Frazione condensata

Al di sotto della temperatura di transizione T_c il numero N_{ex} di particelle negli stati eccitati è data da:

$$N_{ex}(T) = C_{\alpha} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{(\alpha-1)} \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}.$$
(1.25)

Al di sotto della temperatura di transizione, le particelle negli stati ecitati saranno una frazione delle particelle totali, quindi la parte restante sarà il numero di particelle del condensato.

Osservato che l'integrale (1.25) converge per $\alpha > 1$, possiamo usare l'equazione (1.19) per scrivere questo risultato nella forma:

$$N_{ex}(T) = C_{\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT)^{\alpha}. \qquad (1.26)$$

Notiamo che il risultato non dipende dal numero totale di particelle. Comunque se si utilizza l'equazione (1.20) per T_c , questa può essere riscritta nella forma:

$$N_{ex} = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\alpha}.$$
(1.27)

Il numero di particelle nel condensato è quindi dato da:

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T),$$
 (1.28)

0

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\alpha} \right]. \tag{1.29}$$

Per un potenziale armonico tridimensionale ($\alpha = 3$), il numero di particelle nel condensato è:

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \right]. \tag{1.30}$$

Capitolo 2 Teoria dello stato condensato

In questo capitolo analizziamo la struttura del condensato di Bose-Einstein in presenza di interazione. Innanzitutto mostreremo che per piccole energie del centro di massa del sistema l'interazione può essere descritta in termini di un parametro la lunghezza di scattering, e vedremo che nella nostra approssimazione (approssimazione di Born) l'interazione è un interazione di contatto. Introdotta l'interazione tra particelle il primo passo sarà derivare l'equazione Gross-Pitaevskii a temperatura zero, trattando l'interazione in approssimazione di campo medio. Dalla Gross-Pitaevskii ricaveremo lo stato fondamentale di un gas di bosoni confinato in un potenziale di oscillatore armonico.

Utilizzando metodi variazionali compareremo i risultati ottenuti con quelli dell'approssimazione Thomas-Fermi, nella quale viene trascurato l'operatore dell'energia cinetica dell'equazione Gross-Pitaevskii. L'approssimazione Thomas-Fermi fallisce in prossimità della superficie del gas, cosicché ricaveremo la struttura della superficie a partire dalla Gross-Pitaevskii. Infine ricaveremo la funzione d'onda del condensato, nel caso di un gas confinato da pareti rigide infinite, ritrovando risultati che saranno fondamentali per lo sviluppo della teoria dei solitoni.

2.1 Lunghezza di scattering e interazione effettiva

Consideriamo lo scattering di due particelle senza concentrarci sui gradi di libertà interni. Come al solito introduciamo il sistema del centro di massa e il sistema di coordinate relative. La funzione d'onda per il centro di massa è un'onda piana, mentre il moto relativo soddisfa l'equazione di Schrodinger con massa uguale alla massa ridotta $m_r = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Per descrivere lo scattering, possiamo scrivere la funzione d'onda per il moto relativo come la somma di un onda piana e un onda diffusa:

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \psi_{sc}\left(\mathbf{r}\right). \tag{2.1}$$

Per separazioni interatomiche grandi l'onda diffusa è un onda sferica uscente $f(\mathbf{k'}) e^{ikr/r}$, dove $f(\mathbf{k'})$ è l'ampiezza di scattering e $\mathbf{k'}$ specifica il vettore d'onda dell'onda diffusa. Trascurando gli effetti dovuti all'accoppiamento tra gli orbitali e i gradi di libertà di spin, supponiamo che l'interazione fra atomi abbia simmetria sferica, allora l'ampiezza di scattering dipende solamente dall'angolo di scattering Θ , che è l'angolo tra le direzioni del momento relativo prima e dopo lo scattering. Per grandi r la funzione d'onda è data da:

14

$$\psi = e^{ikz} + f(\Theta) e^{ikr/r} \tag{2.2}$$

dove abbiamo scelto la velocità relativa dell'onda in ingresso in direzione z. L'ampiezza di scattering f dipende solo da Θ e dal modulo del vettore d'onda dell'onda in ingresso **k**.

L'energia dello stato è data da:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}.$$
(2.3)

A energie molto basse è sufficiente considerare lo scattering delle onde s. In questo limite l'ampiezza di scattering $f(\Theta)$ approccia a un valore costante -a e la funzione d'onda diventa:

$$\psi = 1 - \frac{a}{r}.\tag{2.4}$$

La costante a è detta lunghezza di scattering. Essa dà l'intercetta della funzione d'onda asintotica (2.4) lungo l'asse r.

Le interazioni tra atomi sono forti solo quando due atomi sono molto vicini tra loro. Nei gas diluiti questo è piuttosto improbabile, cosicchè le interazioni sono molto piccole alle tipiche distanze atomiche. Per la maggior parte delle configurazioni del sistema, la funzione d'onda a molti corpi varia lentamente nello spazio, ma quando due atomi si avvicinano si hanno rapide variazioni spaziali. Per evitare di dover valutare nel dettaglio correlazioni tra atomi a corto range, ogni volta che si calcola la funzione d'onda a molti corpi, è conveniente introdurre il concetto di interazione effettiva. Questa descrive le interazioni tra ampie lunghezze d'onda, ossia i gradi di libertà di un sistema a bassa frequenza, quando è stato preso in considerazione l'accoppiamento di questi gradi di libertà tramite le interazioni con quelli a piccola lunghezza d'onda. I gradi di libertà a piccola lunghezza d'onda vengono detti "integrati fuori".

Come abbiamo visto lo scattering di due particelle con piccola energia totale del centro di massa è dominato dal contributo delle onde s alla funzione d'onda, ed è descritto interamente in termini di un singolo parametro, la lunghezza di scattering a. Al primo ordine dell'interazione la lunghezza di scattering è data da:

$$a_{Born} = \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} U\left(\mathbf{r}\right),\tag{2.5}$$

risultato noto come approssimazione di Born. L'equazione mostra che il comportamento reale di scattering a basse energie può essere ottenuto usando in approssimazione di Born, un interazione effettiva a due corpi avente la proprietà che:

$$\int d\mathbf{r} U_{eff}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_r} \equiv U_0.$$
(2.6)

Per il calcolo delle proprietà del sistema a basse energie, il reale potenziale interatomico, che in generale ha una complicata dipendenza dalla separazione tra particelle, può essere rimpiazzato da un'interazione effettiva proporzionale alla lunghezza di scattering. Nello spazio delle coordinate, l'interazione effettiva tra due particelle situate nei punti \mathbf{r} ed \mathbf{r}' può quindi prendere la forma di interazione di contatto

$$U_{eff}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = U_0 \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r'}\right).$$
(2.7)

2.2 L'equazione Gross-Pitaevskii

Abbiamo mostrato nella sezione precedente che l'interazione effettiva tra due particelle a basse energie, è una costante nella rappresentazione nello spazio dei momenti: $U_0 = (4\pi\hbar^2 a) / m.$

Nello spazio delle coordinate abbiamo visto che questa corrisponde ad un interazione di contatto $U_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'})$ dove $\mathbf{r} \in \mathbf{r'}$ sono le posizioni delle particelle. Per studiare l'energia degli stati a molti corpi utilizziamo un approssimazione di campo medio, e assumiamo quindi che la funzione d'onda sia un prodotto simmetrico di funzioni d'onda di singola particella. Nello stato completamente condensato tutti i bosoni sono nello stesso stato di singola particella, $\phi(\mathbf{r}_i)$, e quindi possiamo scrivere la funzione d'onda del sistema di N particelle come:

$$\psi\left(\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},...,\mathbf{r}_{N}\right) = \prod_{i=1}^{N} \phi\left(\mathbf{r}_{i}\right).$$
(2.8)

La funzione d'onda di singola particella $\phi(\mathbf{r}_i)$ è normalizzata:

$$\int d\mathbf{r} |\phi\left(\mathbf{r}\right)|^2 = 1. \tag{2.9}$$

Questa funzione d'onda non tiene conto della correlazione prodotta dall'interazione quando due atomi sono vicini tra loro. Questi effetti sono presi in considerazione usando l'interazione effettiva $U_0\delta$ ($\mathbf{r} - \mathbf{r}'$), che include l'influenza dei gradi di libertà di piccola lunghezza d'onda. Nella teoria di campo medio, dobbiamo tenere conto delle interazioni tra gradi di libertà corrispondenti a lunghezze diverse, come l'estensione spaziale della nube, l'estensione della struttura di superficie o la lunghezza d'onda di un eccitazione. Queste scale di lunghezza sono generalmente molto maggiori della lunghezza di scattering, e quindi possiamo settare a zero il vettore d'onda di taglio nello spazio k. Di conseguenza si dimostra che l'interazione effettiva è uguale a U_0 , e l'Hamiltoniana effettiva può essere scritte come:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\left(\mathbf{p}_{i}\right)^{2}}{2m} \right] + V\left(\mathbf{r}_{i}\right) + U_{0} \sum_{i < j} \delta\left(\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{j}\right), \qquad (2.10)$$

dove $V(\mathbf{r}_i)$ è il potenziale esatto. L'energia dello stato (2.8), ossia il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana (2.10) nello stato ψ , è dato da:

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (2.11)$$

nel termine d'interazione, N(N-1)/2 è il numero di termini di energia d'interazione, che è il numero di modi di costruire coppie di bosoni $\int d\mathbf{r} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4$ volte.

Iniziamo considerando un gas di Bose uniforme. In un sistema uniforme di volume V, la funzione d'onda di una particella nello stato fondamentale è $1/V^{1/2}$ e quindi l'energia d'interazione di una coppia di particelle è U_0/V . L'energia dello stato di N bosoni tutti nello stesso stato è questa quantità moltiplicata per il numero di possibili modi di fare coppie di bosoni, N(N-1)/2. In questa approximazione l'energia è:

$$E = \frac{N(N-1)}{2V}U_0 \simeq \frac{1}{2}Vn^2U_0,$$
(2.12)

dove n = N/V, con $N \gg 1$.

È conveniente introdurre il concetto di funzione d'onda dello stato condensato definita nel seguente modo:

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = N^{1/2}\phi\left(\mathbf{r}\right). \tag{2.13}$$

La densità di particelle è data da:

$$n\left(\mathbf{r}\right) = |\psi\left(\mathbf{r}\right)|^{2},\tag{2.14}$$

e trascurando i termini di ordine 1/N, l'energia del sistema può essere scritta come:

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right].$$
(2.15)

Per trovare la migliore forma per ψ , minimizziamo l'energia (2.15) rispetto a variazioni indipendenti di $\psi(\mathbf{r})$ e la sua complessa coniugata $\psi^*(\mathbf{r})$, soggette alla condizione che il numero totale di particelle

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi\left(\mathbf{r}\right)|^2 \tag{2.16}$$

sia costante.

Di questo vincolo si tiene conto utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Scrivendo $\delta E - \mu \delta N = 0$ dove il potenziale chimico μ è il moltiplicatore di Lagrange che assicura la costanza del numero di particelle per variazioni di $\psi \in \psi^*$ arbitrarie. Questa procedura è equivalente a minimizzare la quantità $E - \mu N$ a fissato μ . Eguagliando a zero la variazione di $E - \mu N$ rispetto a ψ^* si ottiene:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\left(\mathbf{r}\right) + U_0|\psi\left(\mathbf{r}\right)|^2\right]\psi\left(\mathbf{r}\right) = \mu\psi\left(\mathbf{r}\right).$$
(2.17)

Per ottenere questo risultato, la variazione del termine di energia cinetica si ricava effettuando un integrazione per parti. I termini di superficie che derivano da questo processo, si annullano per sistemi di estensione finita o quando vengono imposte condizioni al contorno periodiche.

La (2.17) prende il nome di equazione Gross-Pitaevskii indipendente dal tempo [2]. L'equazione ha la forma di un equazione di Schrodinger, nella quale il potenziale agente sulla particella è la somma di un potenziale esterno V e un termine non lineare $U_0|\psi(\mathbf{r})|^2$ che tiene conto del campo medio prodotto dagli altri bosoni. Osserviamo che l'autovalore è il potenziale chimico non l'energia della particella come nell'equazione di Schrodinger lineare. Per particelle non interagenti tutte nello stesso stato, il potenziale chimico è uguale all'energia per particella, così come nell'usuale equazione di Schrodinger lineare, ma non per particelle interagenti. Per un gas di Bose diluito l'equazione Gross-Pitaevskii (2.17) è:

$$\mu = U_0 |\psi\left(\mathbf{r}\right)|^2 = U_0 n, \qquad (2.18)$$

che è in accordo con il risultato ottenuto usando la relazione termodinamica $\mu = \partial E / \partial N$ per calcolare il potenziale chimico dall'energia dallo stato uniforme (2.12).

2.2.1 Considerazioni qualitative sullo stato fondamentale di un gas di bosoni confinato

Ora esaminiamo le soluzioni dell'equazione Gross-Pitaevskii per bosoni confinati. Data la rilevanza sperimentale, considereremo confinamenti armonici, ma il formalismo può essere esteso per confinamenti più generali. Iniziamo considerando qualitativamente le proprietà delle soluzioni. Per semplicità trascureremo l'anisotropia del potenziale dell'oscillatore, e assumiamo sia nella forma:

$$V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2.$$
 (2.19)

Se l'estensione spaziale del condensato è circa R l'energia potenziale di una particella nel potenziale è $\[mu] m\omega_0^2 R^2/2$ e l'energia cinetica è dell'ordine $\hbar^2/2mR^2$ per particella, dato che nello stato fondamentale il momento della particella è dell'ordine \hbar/R dal principio di indeterminazione di Heisenberg. Quindi in assenza di interazione, l'energia totale varia come $1/R^2$ per piccoli R e come R^2 per grandi R, ed essa ha un minimo quando energia cinetica e potenziale si eguagliano. Il corrispondente valore del raggio della nube condensata è dell'ordine:

$$a_{osc} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{1/2},\tag{2.20}$$

che è la lunghezza quanto-meccanica caratteristica per un oscillatore armonico. Consideriamo ora l'effetto delle interazioni. La tipica densità di particelle è $n \sim N/R^3$, e l'energia d'interazione di una particella è dell'ordine $nU_0 \sim U_0 N/R^3$. Per interazioni repulsive, l'effetto di un contributo aggiuntivo all'energia che varia come R^{-3} sposta la posizione del minimo dell'energia totale verso valori di R più grandi, e conseguentemente, per valori crescenti di Na, il termine di energia cinetica diventa meno importante. La dimensione all'equilibrio si trova minimizzando la somma di energia di interazione e energia potenziale, e questo avviene quando i due contributi sono dello stesso ordine di grandezza. Eguagliando le due energie si trova il raggio d'equilibrio:

$$R \sim a_{osc} \left(\frac{Na}{a_{osc}}\right)^{1/5},\tag{2.21}$$

e l'energia per particella è:

$$\frac{E}{N} \sim \hbar \omega_0 \left(\frac{Na}{a_{osc}}\right)^{2/5}.$$
(2.22)

La quantità Na/a_{osc} è una misura adimensionale della forza dell'interazione, e in molti esperimenti su atomi che interagiscono repulsivamente, essa è molto più grande dell'unità cosicché il raggio R è piuttosto più grande di a_{osc} . Per $|a| \sim 10nm$ e $a_{osc} \sim 1\mu m$, con Ntra 10⁴ e 10⁶, il rapporto R/a_{osc} si trova in un range di 2, 5 e 6. All'equilibrio l'energia d'interazione e l'energia dovuta al potenziale confinante sono entrambi dell'ordine $m\omega_0R^2$, dove R è il raggio di equilibrio calcolato con l'equazione (2.21), e quindi il rapporto tra l'energia cinetica, che è proporzionale a R^{-2} , e gli altri contributi all'energia è proporzionale a $\left(\frac{a_{osc}}{Na}\right)^{4/5}$. Questo conferma che l'energia cinetica è quindi trascurabile per nubi contenenti un numero di particelle sufficientemente grande, come calcoleremo in seguito. Torniamo ora alle interazioni attrattive. Per un piccolo numero di particelle, l'energia totale in funzione di R è simile a quella per particelle non interagenti, eccetto che per valori molto piccoli di R per cui l'energia diverge a $-\infty$ come $1/R^3$. Conseguentemente per un numero piccolo di particelle l'energia ha un minimo locale vicino a quello per particelle non interagenti, ma a un raggio più piccolo. Questo stato è metastabile, dato che per piccoli spostamenti dal minimo, l'energia cresce, ma per piccoli valori di R l'energia varia come $-1/R^3$ e diventa più piccola di quella del minimo locale. Con un numero crescente di particelle, il minimo locale diventa meno profondo, e ad un numero critico di particelle N_c esso svanisce. Per un grande numero di particelle quindi non si hanno stati metastabili. Come ci si aspetta, il numero critico di particelle è determinato dalla condizione che il parametro d'accoppiamento adimensionale sia dell'ordine di -1, ossia $N_c \sim \frac{a_{osc}}{|a|}$.

2.2.2 Calcolo variazionale dell'energia di stato fondamenntale di un gas di bosoni confinato

Vogliamo determinare l'energia di stato fondamentale di un gas di bosoni confinato in un potenziale di oscillatore armonico tridimensionale anisotropo dato da:

$$V = \frac{1}{2} \left(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2 \right), \qquad (2.23)$$

dove le tre frequenze possono essere diverse tra loro.

L'equazione Gross-Pitaevskii (2.17) può essere risolta direttamente mediante integrazione numerica, ma ci proponiamo adesso di risolvere analiticamente il problema mediante l'utilizzo del metodo variazionale, dove come funzione di prova utilizzeremo una Gaussiana. In assenza di interazione tra particelle lo stato più basso di singola particella è descritto dalla funzione d'onda

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} \left(a_x a_y a_z \right)^{1/2}} e^{-x^2/2a_x^2} e^{-y^2/2a_y^2} e^{-z^2/2a_z^2}, \qquad (2.24)$$

dove le lunghezze dell'oscillatore $a_i(i = x, y, z)$ sono date da $a_i^2 = \hbar/m\omega_i$. La distribuzione di densità $n(\mathbf{r}) = N\phi_0^2(\mathbf{r})$ è quindi una gaussiana. Le interazioni interatomiche comportano un cambiamento delle dimensioni della nube, ma possiamo utilizzare come funzione di prova una funzione della stessa forma della (2.24).

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{\pi^{3/4} \left(b_x b_y b_z\right)^{1/2}} e^{-x^2/2b_x^2} e^{-y^2/2b_y^2} e^{-z^2/2b_z^2},\tag{2.25}$$

dove le lunghezze b_i sono i parametri variazionali. La funzione di prova soddisfa la condizione di normalizzazione (2.16). Sostituendo la $\psi(r)$ della (2.25) nell'equazione (2.15) otteniamo l'espressione dell'energia

$$E \simeq N \sum_{i} \hbar \omega_{i} \left(\frac{a_{i}^{2}}{4b_{i}^{2}} + \frac{b_{i}^{2}}{4a_{i}^{2}} \right) + \frac{N^{2}U_{0}}{2 \left(2\pi \right)^{3/2}} b_{x} b_{y} b_{z}.$$
 (2.26)

Se valutiamo $E(b_x, b_y, b_z)$ ponendo le b_i uguale ai loro valori a_i in assenza di interazione, si trova che:

$$E(b_x b_y b_z) = N \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \frac{N^2 U_0}{2 (2\pi)^{3/2}} b_x b_y b_z = N \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \frac{N^2}{2} \langle 00|v|00\rangle, \qquad (2.27)$$

dove

$$\langle 00|v|00\rangle = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{r} |\phi_0(\mathbf{r})|^4, \qquad (2.28)$$

2.2. L'EQUAZIONE GROSS-PITAEVSKII

è l'energia d'interazione per due particelle nello stato fondamentale dell'oscillatore. Il risultato (2.27) è valido al primo ordine in a, ed è una buona approssimazione finchè l'energia d'interazione è piccola rispetto alle energie di punto zero $\hbar\omega_i/2$. Se gli ordini di grandezza delle tre frequenze ω_i sono comparabili, il rapporto dell'energia d'interazione con l'energia di punto zero dell'oscillatore è dell'ordine di Na/a_{osc} , che come abbiamo detto precedentemente è una misura adimensionale della forza d'interazione. La condizione $Na/a_{osc} \sim 1$ segna il passaggio tra regime perturbativo ed uno dove l'equilibrio è determinato dalla competizione tra energia d'interazione e l'energia potenziale dovuta al confinamento.

Con interazioni effettive crescenti positivamente, il condensato si espande, e la funzione d'onda diventa più estesa, questa situazione corrisponde a valori maggiori delle lunghezze b_i . È conveniente introdurre le lunghezze adimensionali β_i definite come

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_i}.\tag{2.29}$$

Minimizzando E rispetto ai parametri variazionali $\beta_i(i = x, y, z)$ si ottengono le tre equazioni:

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_i \left(\beta_i^2 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{2\left(2\pi\right)^{3/2}} \frac{NU_0}{\overline{a}^3} \frac{1}{\beta_x \beta_y \beta_z} = 0, \qquad (2.30)$$

dove abbiamo introdotto le lunghezze caratteristiche

$$\overline{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\overline{\omega}}},\tag{2.31}$$

per un oscillatore di frequenza

$$\overline{\omega} = \left(\omega_x \omega_y \omega_z\right)^{1/3},\tag{2.32}$$

che è proprio la media geometrica delle frequenze degli oscillatori nelle tre direzioni. Nel caso generale, otteniamo i parametri ottimali per le funzioni di prova risolvendo questo set di equazioni accoppiate.

Consideriamo invece la situazione semplice in cui il numero di particelle è sufficientemente grande, che l'energia d'interazione per particella è grande rispetto a $\hbar\omega_i/2$ per ogni ω_i . Allora è possibile trascurare i termini di energia cinetica (proporzionali a $1/\beta_i^2$) nell'equazione (2.30). Risolvendo per β_i abbiamo:

$$\beta_i^5 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{Na}{\overline{a}} \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_i}\right)^{5/2},\tag{2.33}$$

e l'energia per particella è data in questa approssimazione da

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{Na}{\overline{a}}\right)^{2/5} \hbar\overline{\omega}.$$
(2.34)

In accordo con la stima variazionale (2.34) l'energia per particella è proporzionale a $N^{2/5}$ nel limite in cui l'energia cinetica è trascurabile, ed è $\left(\frac{Na}{\overline{a}}\right)^{2/5}$ volte più grande dell'energia in assenza d'interazione.



Figura 2.1: Grafico dell'espressione variazionale dell'energia per particella, in un confinamento armonico isotropo in funzione del parametro variazionale b, per differenti valori del parametro adimensionale Na/a_{osc} . La linea tratteggiata corrisponde al valore critico approssimativamente uguale a -0.67, alla quale il gas diventa instabile.

Nel grafico (2.1) è illustrata la dipendenza di E/N dal parametro variazionale $b (= b_x = b_y = b_z)$ per un oscillatore isotropo, per differenti valori del parametro adimensionale Na/a_{osc} . Nel grafico sono riportati inoltre esempi di interazioni attrattive corrispondenti a valori negativi della lunghezza di scattering a. Come è possibile osservare dal grafico esiste un minimo locale per a negativi a patto che N è minore del valore critico N_c , ma per valori di N maggiori il condensato collasserebbe. Il numero critico di particelle si trova dalla condizione che la derivata prima e seconda di E/N rispetto al parametro bsono entrambi uguali a zero, che dà

$$\frac{N_c|a|}{a_{asc}} = \frac{2\left(2\pi\right)^{1/2}}{5^{5/4}} \approx 0.67.$$
(2.35)

L'energia minima per particella (in unità di $\hbar\omega_0$) è graficata in funzione di Na/a_{osc} nel grafico che segue, nel range di stabilità $-0.67 < Na/a_{osc} < \infty$.



Figura 2.2: Grafico della stima variazionale per l'energia di singola particella per un confinamento armonico isotropo in funzione del parametro adimensionale Na/a_{osc} . La linea tratteggiata è il risultato dell'approssimazione Thomas-Fermi

Il grafico compara il risultato ottenuto con l'utilizzo del metodo variazionale, e in approssimazione di Thomas-Fermi che tratteremo nel prossimo paragrafo. Un integrazione numerica dell'equazione Gross-Pitaevskii invece fornisce un valore di $N_c |a|/a_{osc} \approx 0.57$

2.3 Approssimazione Thomas-Fermi

Per gas sufficientemente estesi un'espressione accurata per l'energia dello stato fondamentale può essere ottenuta trascurando il termine dell'energia cinetica nell'equazione Gross-Pitaevskii. Come abbiamo visto per un confinamento armonico, quando il numero di atomi è grande e le interazioni di tipo repulsivo l'energia cinetica è piccola rispetto alle altre energie. Una migliore approssimazione per la funzione d'onda dello stato condensato per un numero grande di atomi può essere ottenuta risolvendo l'equazione Gross-Pitaevskii, trascurando il termine di energia cinetica dall'inizio. La Gross-Pitaevskii (2.17) diventa quindi:

$$\left[V\left(\mathbf{r}\right) + U_{0}|\psi\left(\mathbf{r}\right)|^{2}\right]\psi\left(\mathbf{r}\right) = \mu\psi\left(\mathbf{r}\right), \qquad (2.36)$$

dove μ è il potenziale chimico. Questa ha soluzione:

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{U_0},$$
 (2.37)

nella regione dove il lato destro è positivo
e $\psi=0$ altrove. Il confine della nube condensata è quindi dato da:

$$V\left(\mathbf{r}\right) = \mu. \tag{2.38}$$

Il contenuto fisico dell'approssimazione è che l'energia necessaria per aggiungere una particella al gas, è la stessa in ogni punto. Questa energia è data dalla somma del potenziale

CAPITOLO 2. TEORIA DELLO STATO CONDENSATO

esterno $V(\mathbf{r})$ e un contributo d'interazione $n(\mathbf{r}) U_0$ che è il potenziale chimico di un gas uniforme avente densità uguale alla densità locale $n(\mathbf{r})$. Dato che questa approssimazione ricorda l'approssimazione Thomas-Fermi in teoria degli atomi, questa viene indicata con lo stesso nome. Per gli atomi, il potenziale elettrostatico totale prende il posto di un potenziale confinante, e l'energia locale di Fermi quella dell'energia di campo medio $U_0|\psi(\mathbf{r})|^2 = U_0 n$. In approssimazione Thomas-Fermi l'estensione della nube nelle tre direzioni è data dai tre semiassi R_i ottenute sostituendo la (2.23) nell'equazione del potenziale (2.38).

$$R_{i}^{2} = \frac{2\mu}{m\omega_{i}}, i = x, y, z.$$
(2.39)

Le lunghezze R_i possono essere valutate in termini dei parametri confinanti una volta che il potenziale chimico è stato determinato. La condizione di normalizzazione della ψ , dà una relazione tra potenziale chimico μ e il numero totale di particelle N. Per un potenziale armonico confinante e un potenziale dato dall'equazione (2.23), si trova:

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\overline{\omega}^2}\right)^{3/2} \frac{\mu}{U_0},$$
 (2.40)

come si può vedere scalando ciascuna coordinata spaziale di $(2\mu/m\omega_i^2)^{1/2}$ e integrando sulla sfera interna unitaria.

Risolvendo la (2.40) per μ si ottiene l'espressione del potenziale chimico in funzione di $\hbar \overline{\omega}$

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na}{\overline{a}}\right)^{2/5} \hbar \overline{\omega}.$$
(2.41)

La quantità $\overline{R} = (R_x R_y R_z)^{1/3}$ è una misura conveniente dell'estensione spaziale della nube condensata. Combinando l'equazione (2.39) con la (2.41) otteniamo:

$$\overline{R} = 15^{1/5} \left(\frac{Na}{\overline{a}}\right)^{1/5} \overline{a} \approx 1.719 \left(\frac{Na}{\overline{a}}\right)^{1/5} \overline{a}, \qquad (2.42)$$

la quale implica che \overline{R} è piuttosto maggiore di \overline{a} sotto le tipiche condizioni sperimentali.



Figura 2.3: Nel grafico sono riportate la funzione d'onda dello stato fondamentale calcolato utilizzando il metodo variazionale (linea continua) e la funzione d'onda calcolata in approssimazione Thomas-Fermi (linea tratteggiata), in un potenziale confinante armonico isotropo. Le funzioni d'onda sono riportate in unità di $N^{1/2} (\beta a_{osc})^{3/2}$, con $\beta \equiv (Na/a_{osc})^{1/5}$

Nel grafico (2.2) sono riportati gli andamenti delle funzioni d'onda ottenute mediante il metodo variazionale e quello ottenuto mediante l'approssimazione Thomas-Fermi. Dato che $\mu = \partial E / \partial N$ e $\mu \propto N^{2/5}$ in accordo con l'equazione (2.41) l'energia per particella è:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7}\mu. \tag{2.43}$$

Questo è il risultato esatto per il contributo maggiore all'energia per grandi N, ed è minore della stima variazionale (2.34) di un fattore numerico $(3600\pi)^{1/5}/7 \approx 0.92$. La distribuzione di densità centrale della nube condensata è $n(0) = \mu/U_0$ in approximazione Thomas-Fermi.

Per vedere come l'energia totale è distribuita tra potenziale ed energia d'interazione, sostituiamo le soluzioni della Thomas-Fermi date dalla (2.37) nella (2.15), e valutiamo gli ultimi due termini trascurando l'energia cinetica. Il calcolo si effettua lavorando in termini delle variabili x_i/R_i , così il potenziale $V(\mathbf{r})$ e la soluzione Thomas-Fermi in termini di queste variabili assumono simmetria sferica. Il rapporto tra l'energia d'interazione e l'energia potenziale diventa:

$$\frac{E_{int}}{E_{pot}} = \frac{\int_0^1 d\lambda \lambda^2 \left(1 - \lambda^2\right)^2 / 2}{\int_0^1 d\lambda \lambda^4 \left(1 - \lambda^2\right)} = \frac{2}{3}.$$
(2.44)

L'energia d'interazione in approssimazione Thomas-Fermi è quindi uguale a 2/5 dell'energia totale. Dato che l'energia totale per particella è $5\mu/7$ concludiamo che l'energia

d'interazione per particella e il potenziale chimico sono legati dalla relazione:

$$\frac{E_{int}}{N} = \frac{2}{7}\mu.$$
(2.45)

L'approssimazione Thomas-Fermi dà un eccellente descrizione delle proprietà generali del condensato quando Na/\overline{a} è molto maggiore dell'unità, ma in molti problemi di interesse fisico l'energia cinetica gioca un ruolo fondamentale come vedremo nel calcolo della struttura superficiale riportato in appendice.

2.4 Funzione d'onda di un condensato in una box infinita

Nelle sezioni precedenti abbiamo considerato la funzione d'onda di condensati confinati in potenziali che variavano più o meno dolcemente nello spazio. È istruttivo però vedere cosa succede ad un condensato confinato in una box a pareti rigide e infinite. Sulle pareti la nostra funzione d'onda dovrà annularsi mentre all'interno della box la densità del condensato arriva al suo valore di bulk. La distanza alla quale la funzione d'onda cresce dal valore zero avvicinandosi al suo valore di bulk può essere stimata grazie all'equazione Gross-Pitaevskii, dato che lontano dal muro la funzione d'onda è governata dalla competizione tra il termine di energia d'inerazione $\sim nU_0$ e quello di energia cinetica. Se denotiamo la variazione spaziale con ξ , l'energia cinetica per particella è dell'ordine di $\hbar^2/2m\xi$ e le due energie, d'interazione e cinetica, sono uguali quando:

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi} = nU_0, \tag{2.46}$$

ossia

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2mnU_0} = \frac{1}{8\pi na} = \frac{r_s^3}{6a},\tag{2.47}$$

dove r_s è la separazione tra particelle che è legata alla densità dalla relazione $n = 1/(4\pi/3) r_s^3$.

La lunghezza ξ è nota nella letteratura di materia condensata come *lunghezza di coerenza*. Dato che negli esperimenti la distanza tra atomi è tipicamente molto maggiore della lunghezza di scattering, la lunghezza di coerenza è più grande della separazione atomica. Dato che la lunghezza di coerenza descrive la distanza oltre la quale la funzione d'onda del condensato tende al suo valore di bulk, quando è soggetta ad una perturbazione loca-lizzata, essa è anche detta lunghezza di *risanamento*.

Per investigare il comportamento della funzione d'onda del condensato quantitativamente, partiamo dall'equazione Gross-Pitaevskii (2.17) e assumiamo che il potenziale si annula per $x \ge 0$ e che per x < 0 è infinito. Lo stato fondamentale della funzione d'onda è uniforme nelle direzioni $y \in z$, e quindi l'equazione Gross-Pitaevskii è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0|\psi(x)|^2\psi(x) = \mu\psi(x).$$
(2.48)

Per la materia uniforme il potenziale chimico è dato dalla (2.18) e possiamo quindi scrivere $\mu = U_0 |\psi_0|^2$, dove ψ_0 è la funzione d'onda lontana dalle pareti dove il termine di energia

2.4. FUNZIONE D'ONDA DI UN CONDENSATO IN UNA BOX INFINITA

cinetica è trascurabile. L'equazione diventa

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -U_0 \left[|\psi_0|^2 - |\psi(x)|^2 \right] \psi(x) \,. \tag{2.49}$$

Quando ψ è reale, possiamo considerare la ψ come se fosse una coordinata spaziale, e la x come se fosse il tempo. In questo modo la (2.49) ha la stessa forma dell'equazione del moto classico di una particella in un potenziale $\propto \psi_0^2 \psi^2 - \psi^4/2$. L'equazione si può risolvere analiticamente, con condizioni al contorno tali che: $\psi(0) = 0$ e $\psi(\infty) = \psi_0$, ottenendo il risultato:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(x/\sqrt{2}\xi\right). \tag{2.50}$$

Questo conferma che la funzione d'onda raggiunge il suo valore di bulk dopo una distanza ~ ξ .

Capitolo 3 Dinamica del condensato e solitoni

In questo capitolo vogliamo discutere la dinamica di un condensato a temperatura zero, partendo da una generalizzazione dipendente dal tempo dell'equazione Gross-Pitaevskii vista nel capitolo 2. Da questa equazione ricaveremo due equazioni molto simili a quelle dell'idrodinamica. Il passo successivo sarà ricavare le equazioni di Bogoliubov che ci permetteranno di descrivere le eccitazioni elementari di un condensato. Introdurremo infine i solitoni che sono una soluzione esatta unidimensionale e non lineare della Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, e in particolare ci suffermeremo sui solitoni scuri. Alla fine del capitolo sono presentate le principali tecniche sperimentali per la produzione di solitoni, e verrà discusso in dettaglio un esperimento condotto sui solitoni scuri, che deluciderà le tecniche che permettono lo studio della dinamica dei solitoni e alcune interessanti proprietà.

3.1 Formulazione generale

Abbiamo visto nel capitolo precedente che la struttura d'equilibrio del condesato è descritta da un'equazione di Schrodinger indipendente dal tempo, con un contributo non lineare al potenziale che tiene conto delle interazioni tra particelle. Per discutere i problemi di dinamica del condensato, è naturale usare una generalizzazione dipendente dal tempo di questa equazione di Schrodinger con lo stesso terrmine d'interazione non lineare. Questa equazione è l'equazione Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t} = -\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi\left(\mathbf{r},t\right) + V\left(\mathbf{r}\right)\psi\left(\mathbf{r},t\right) + U_{0}|\psi\left(\mathbf{r},t\right)|^{2}\psi\left(\mathbf{r},t\right),\qquad(3.1)$$

che è la base di partenza per la discussione della dinamica del condensato.

L'equazione Gross-Pitaevskii (2.17) è un'equazione di Schrodinger non lineare con il potenziale chimico che rimpiazza l'autovalore dell'energia dell'equazione di Schrodinger indipendente dal tempo. Per assicurare la consistenza tra l'equazione Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, e quella indipendente dal tempo, sotto condizioni stazionarie $\psi(\mathbf{r}, t)$ deve evolversi nel tempo come $exp(-i\mu t/\hbar)$. Il fattore di fase mostra che la ψ microscopica è uguale all'elemento di matrice dell'operatore di annichilazione $\hat{\psi}$ tra lo stato fondamentale con N particelle e quello con N - 1 particelle.

$$\psi(\mathbf{r},t) = \langle N-1|\hat{\psi}(\mathbf{r})|N\rangle \propto \exp\left[-i\left(E_N - E_{N-1}\right)t/\hbar\right],\tag{3.2}$$

dato che gli stati $|N\rangle \in |N-1\rangle$ evolvono nel tempo come $exp(-iE_Nt/\hbar) \in exp(-iE_{N-1}t/\hbar)$ rispettivamente. Per grandi valori di N la differenza tra l'energie $E_N - E_{N-1}$ è uguale a $\partial E/\partial N$, che è il potenziale chimico. Quindi questo risultato è praticamente la relazione di Josephson per l'evoluzione della fase ϕ della funzione d'onda del condensato

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar}.\tag{3.3}$$

E utile effettuare una formulazione variazionale per la dinamica così come abbiamo fatto per il caso statico. L'equazione Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo (3.1) può essere derivata dal principio di azione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{3.4}$$

dove la Lagrangiana L è data da

$$L = \int d\mathbf{r} \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - E = \int d\mathbf{r} \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon \right].$$
(3.5)

Qui E è l'energia dell'equazione (2.15), e la densità di energia ε è data da

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi|^4.$$
(3.6)

Nel principio variazionale (3.4) le variazioni di ψ (o ψ *) sono arbitrarie, con la sola richiesta che esse si annulino a $t = t_1, t = t_2$, e sui bordi per ogni t. Con delle scelte delle funzioni di prova ψ motivate da ragioni fisiche, questo principio variazionale ci permetterà di calcolare soluzioni approssimate di problemi di dinamica del condensato. Importanti proprietà dell'equazione Gross-Pitaevskii (3.1) possono essere comprese riformulandola come coppia di equazioni idrodinamiche come vedremo nel prossimo paragrafo.

3.2 Le equazioni dell'idrodinamica

Sotto condizioni generali dipendenti dal tempo, possiamo utilizzare invece della (3.1), un set di equazioni equivalenti per la densità, che sono date da $|\psi|^2$, e il gradiente della sua fase, che è proporzionale alla velocità locale del condensato. Per capire la natura della velocità del condensato, deriviamo l'equazione di continuità. Moltiplicando per $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ l'equazione Gross-Pitaevskii (3.1) e sottraendo il complesso coniugato dell'equazione risultante, arriviamo all'equazione:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \right] = 0.$$
(3.7)

Questa equazione (3.7) ha la forma di un'equazione di continuità per la densità di particelle $n = |\psi|^2$, e può essere scritta come

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \qquad (3.8)$$

dove la velocità del condensato è definita come:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{|\psi|^2}.$$
(3.9)

3.2. LE EQUAZIONI DELL'IDRODINAMICA

La densità di momento \mathbf{j} è data da

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right), \qquad (3.10)$$

e quinda la relazione (3.9) è equivalente al risultato:

$$\mathbf{j} = mn\mathbf{v},\tag{3.11}$$

la quale afferma che la densità di momento è uguale al prodotto della massa per la densità di corrente di particelle.

Un modo semplice di ottenere un'espressione per la densità e la velocità può essere ottenuta se scriviamo ψ in termini della sua ampiezza f e fase ϕ ,

$$\psi = f e^{i\phi},\tag{3.12}$$

da cui segue che

$$n = f^2, (3.13)$$

e la velocità è

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi. \tag{3.14}$$

Dall'equazione (3.14) concludiamo che il moto del condensato corrisponde al flusso di potenziale, dato che la velocità è il gradiente di una quantità scalare. Per un condensato, l'equazione (3.14) mostra che la velocità di potenziale è $\hbar\phi/m$. Dato che ϕ non è singolare, possiamo immediatamente concludere che il moto del condensato deve essere irrotazionale

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times \nabla \phi = 0. \tag{3.15}$$

I possibili moti del condensato sono quindi molto più limitati di quelli di un fluido classico. L'equazioni del moto per $f \in \phi$ si otengono sostituendo la (3.12) nell'equazione Gross-Piaevskii (3.1) e separando le parte reale e immaginaria. Dalla separazione delle due parti otteniamo:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\frac{\partial f}{\partial t}e^{i\phi} - \frac{\partial\phi}{\partial t}fe^{i\phi}$$
(3.16)

е

$$-\nabla^2 \psi = \left[-\nabla^2 f + \left(\nabla \phi \right)^2 f - i \left(\nabla^2 \phi \right) f - 2i \left(\nabla \phi \right) \cdot \nabla f \right] e^{i\phi}.$$
 (3.17)

Da cui ricaviamo le due equazioni:

$$\frac{\partial \left(f^{2}\right)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot \left(f^{2} \nabla \phi\right) \tag{3.18}$$

е

$$-\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mf} \nabla^2 f + \frac{1}{2} m v^2 + V(\mathbf{r}) + U_0 f^2.$$
(3.19)

L'equazione (3.18) è l'equazione di continuità espressa in termini delle nuove variabili. Per trovare l'equazione della velocità (3.14), prendiamo il gradiente dell'equazione (3.19), trovando così:

$$m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\overline{\mu} + \frac{1}{2}mv^2\right),\tag{3.20}$$

dove:

$$\overline{\mu} = V + nU_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}$$
(3.21)

L'equazione (3.19) può essere espressa in termini della derivata funzionale $\delta E/\delta n$,

$$\frac{\partial \psi\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\delta E}{\delta n\left(\mathbf{r}\right)}.$$
(3.22)

La quantità $\delta E/\delta n(\mathbf{r})$ è l'energia richiesta per aggiungere una particella in un punto \mathbf{r} , e quindi questo risultato è la generalizzazione delle relazioni di Josephson (3.3) per sistemi non nel loro stato fondamentale. Sotto codindizioni stazionarie $\overline{\mu} + \frac{1}{2}mv^2$ è una costante, e se inoltre la velocità è zero, allora ϕ è indipendente dalla posizione, $\overline{\mu}$ è costante, ed è precisamente l'equazione Gross-Pitaevskii indipendente dal tempo (2.17). La quantità nU_0 nell'equazione (3.21) è l'espressione per il potenziale chimico di un gas uniforme, omettendo evntuali contributi dal potenziale esterno. A temperatura nulla, i cambiamenti del potenziale chimico per un sistema bulk sono legati ai cambiamenti di pressione pdall'equazione di Gibbs Duhem $dp = nd\mu$. Questo risultato è facilmente confermato per il gas di Bose uniforme diluito, dato che $\mu = nU_0$ e $p = -\partial E/\partial V = n^2 U_0/2$. L'equazione (3.20) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{m} \nabla \left(\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}\right) - \frac{1}{m} \nabla V.$$
(3.23)

L'equazione (3.8) e l'equazione (3.23) sono molto simili all'equazioni dell'idrodinamica di un fluido ideale. Se denotiamo la velocità del fluido con \mathbf{v} , l'equazione di continuità (3.8) ha esattamente la stessa forma di quella per un fluido ideale, mentre l'equazione analoga della (3.23) è l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \,\mathbf{v} + \frac{1}{mn} \nabla p = -\frac{1}{m} \nabla V, \qquad (3.24)$$

0

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{mn} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{1}{m} \nabla V, \qquad (3.25)$$

qui la pressione p è quella del fluido che in generale ha una forma differente da quella del condensato. Ci sono due differenze tra l'equazioni (3.23) e (3.25). La prima è che l'equazione di Eulero contiene il termine $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$, ma dato che il campo di velocità del superfluido corrisponde al flusso di potenziale $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ il termine $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ per un tale flusso non darà contributo nell'equazione di Eulero.

L'unica differenza tra le due equazioni per flussso di potenziale è il terzo termine della parte destra dell'equazione (3.23) che è noto come termine di pressione quantica. Questo descrive le forze dovute alle variazioni spaziali del modulo della funzione d'onda per lo stato condensato. Come il termine $\nabla v^2/2$ la sua origine deriva dal termine di energia cinetica $\hbar^2 |\nabla \psi|^2/2m = mnv^2/2 + \hbar^2 (\nabla f)^2/2m$ nella densità di energia, ma i due contributi corrispondono a effetti fisici diversi: il primo è l'energia cinetica del moto di particelle, mentre il secondo corrisponde al punto zero del moto, che non dà luogo a correnti di particelle. Se le variazioni spaziali della funzione d'onda del condensato è l allora il termine di pressione nel'equazione (3.23) è dell'ordine nU_0/ml , mentre il termine di pressione quantica

30

3.3. LE EQUAZIONI DI BOGOLIUBOV

è dell'ordine di $\hbar^2/m^3 l^3$. Quindi il termine di pressione quantica domina l'usuale termine di pressione se le variazioni spaziali della densità avvengono su una scala di lunghezza l, più piccola o dell'ordine della lunghezza di coerenza $\xi \sim \hbar/(mnU_0)^{1/2}$, e diventa meno importante al crescere della lunghezza della variazione.

Come abbiamo visto i moti di un condensato possono essere descritti in termini di una densità locale e una velocità locale. La ragione di questo è che i gradi di libertà sono solo quelli della funzione d'onda del condensato, che ha un ampiezza e una fase. Solitamente i gas e i liquidi hanno maggiori gradi di libertà e come conseguenza dobbiamo procedere con una descrizione microscopica, per esempio in termini delle funzioni di distribuzione per paricella. Comunque una descrzione idrodinamica è possibile per gas e liquidi ordinari se le collisioni tra particelle sono sufficientemente frequenti da instaurare localmente l'equilibrio termodiamico. Lo stato del fluido può quindi essere completamente specificato in termini della densità di particelle locale, la velocità locale e la temperatura locale. A temperatura zero, la temperatura non è un parametro rilevante, e il moto può essere descritto in termini della densità locale e la velocità locale del fluido così come per un condensato. La ragione per cui le equazioni del moto per un condensato e per una fluido perfetto sono così simili è che essi sono una espressione delle leggi di conservazione per il numero di particelle e per il momento totale. Comunque, le ragioni fisiche per cui è possibile una descrizione in termini della densità locale e una velcità locale sono piuttosto diverse.

3.3 Le equazioni di Bogoliubov

Un metodo per calcolalare lo spettro di eccitazioni del condensato è quello di partire direttamente dall'equazione Gross-Pitaevskii senza introdurre le variabili idrodinamiche. Quest'approccio enfatizza il comportamento di singola particella e mostra come si manifestano comportamenti collettivi per grandi lunghezze d'onda. Denotiamo la variazione di ψ con $\delta \psi$ e linearizziamo l'equazione Gross-Pitaevskii (3.1) ottenendo così

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right) + V\left(\mathbf{r}\right) + U_0\left[2|\psi\left(\mathbf{r},t\right)|^2\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right) + \psi\left(\mathbf{r},t\right)^2\delta\psi^*\left(\mathbf{r},t\right)\right]$$
$$= i\hbar\frac{\partial\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t} \quad (3.26)$$

е

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right) + V\left(\mathbf{r}\right) + U_0\left[2|\psi\left(\mathbf{r},t\right)|^2\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right) + \psi\left(\mathbf{r},t\right)^2\delta\psi^*\left(\mathbf{r},t\right)\right]$$
$$= -i\hbar\frac{\partial\delta\psi^*\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}.$$
 (3.27)

Qui $\psi(\mathbf{r}, t)$ è la funzione d'onda del condensato nel sistema imperturbato, che può essere scritta come $\psi = \sqrt{n(\mathbf{r})}e^{-i\mu t/\hbar}$, dove $n(\mathbf{r})$ è la densità di particelle all'equilibrio e μ è il potenziale chimico del sistema imperturbato. Per evitare di portarci un fattore di fase arbitrario nei calcoli, abbiamo imposto che la fase della funzione d'onda del condensato è zero a t = 0. Vogliamo trovare delle soluzioni di queste equazioni che siano periodiche nel tempo, oltre ad il fattore di fase globale $e^{-i\mu t/\hbar}$ presente per lo stato imperturbato. Cerchiamo quindi soluzioni nella forma:

$$\delta\psi\left(\mathbf{r},t\right) = e^{-i\mu t/\hbar} \left[u\left(\mathbf{r}\right)e^{-i\omega t} - v^{*}\left(\mathbf{r}\right)e^{i\omega t} \right], \qquad (3.28)$$

CAPITOLO 3. DINAMICA DEL CONDENSATO E SOLITONI

dove $u(\mathbf{r}) \in v(\mathbf{r})$ sono le funzioni da determinare e ω è reale. Il fattore di fase globale è necessario per cancellare gli effetti delle fasi di $\psi^2(\mathbf{r},t)$ e di $\psi^*(\mathbf{r},t)^2$ nelle equazioni (3.26) e (3.27), e quindi assicurare che le equazioni possono essere soddisfatte per ogni t. La scelta del segno di v è convenzionale, e abbiamo scelto il segno meno così come nel [2]. La coppia di equazioni $\delta \psi \in \delta \psi^*$ non possono essere soddisfatte a meno che non siano permesse componenti delle frequenze sia negative che positive. Inseriamo la nostra soluzione (3.28) nelle due equazioni (3.26) e (3.27), e verificato che $\omega \neq 0$, possiamo porre uguale a zero i coefficenti di $e^{i\omega t} \in e^{-i\omega t}$. Da qui otteniamo due equazioni accoppiate per $u(\mathbf{r}) \in v(\mathbf{r})$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu - \hbar\omega \left[u(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})U_0v(\mathbf{r}) = 0 \right]$$
(3.29)

е

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\left(\mathbf{r}\right) + 2n\left(\mathbf{r}\right)U_0 - \mu + \hbar\omega\right]v\left(\mathbf{r}\right) - n\left(\mathbf{r}\right)U_0u\left(\mathbf{r}\right) = 0, \quad (3.30)$$

che sono note come equazioni di Bogoliubov.

Applichiamo i risultati appena trovati ad un gas di Bose uniforme. Dato che il sistema è invariante per traslazione possiamo scegliere le soluzioni nella forma:

$$u\left(\mathbf{r}\right) = u_q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad e \quad v\left(\mathbf{r}\right) = v_q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}},\tag{3.31}$$

dove V è il volume occupato dal sistema, e quindi $V^{1/2}$ è il fattore di normalizzazione. Come ricordiamo per il gas uniforme il potenziale chimico è dato da nU_0 (Eq.(2.18)), e quindi le equazioni di Bogoliubov sono:

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 - \hbar\omega\right) u_q - nU_0 v_q = 0 \tag{3.32}$$

е

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 + \hbar\omega\right) v_q - nU_0 u_q = 0.$$
(3.33)

Le due equazioni sono consistenti solo se il determinante dei coefficenti si annulla. Definendo l'energia di particella libera:

$$\epsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m},\tag{3.34}$$

arriviamo alle condizioni

$$\left(\epsilon_q^0 + nU_0 + \hbar\omega\right)\left(\epsilon_q^0 + nU_0 - \hbar\omega\right) - n^2 U_0^2,\tag{3.35}$$

0

$$(\hbar\omega)^{2} = \left(\epsilon_{q}^{0} + nU_{0}\right)^{2} - (nU_{0})^{2} = \epsilon_{q}^{0}\left(\epsilon_{q}^{0} + 2nU_{0}\right) = \epsilon_{q}^{2}.$$
(3.36)

La natura delle eccitazioni è più chiara osservando prima il comportamento dei coefficenti $u_q \in v_q$. In questo caso considereremo interazioni repulsive dato che le frequenze associate sono reali. Per le soluzioni a energia positiva ($\hbar \omega = +\epsilon_q$) si ha

$$v_q = \frac{nU_0}{\epsilon_q + \xi_q} u_q, \tag{3.37}$$

3.3. LE EQUAZIONI DI BOGOLIUBOV

dove

$$\xi_q = \epsilon_q^0 + nU_0 \tag{3.38}$$

è l'energia d'eccitazione trascurando i termini di accoppiamento tra $u_q e v_q$. Dato che le equazioni di Bogoliubov restano inalterate se $u_q e v_q$ sono moltiplicati per un fattore di fase, senza perdita di generalità possiamo prenderli reali. Con questa scelta si trova:

$$u_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{\epsilon_q} + 1 \right) \tag{3.39}$$

е

$$v_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{\epsilon_q} - 1 \right). \tag{3.40}$$

L'energia d'eccitazione in termini di ξ_q è data da:

$$\epsilon_q = \sqrt{\xi_q^2 - \left(nU_0\right)^2}.\tag{3.41}$$



Figura 3.1: Nel grafico sono riportati gli andamenti di u_q e v_q (tratteggiato) in termini della variabile adimensionale $\hbar q/ms$

Per la soluzione a energia positiva v_q tende a zero come $1/q^2$ per grandi q e in questo limite $\delta \psi = e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega_q t)}/V^{1/2}$, con $\omega_q = \epsilon_q/\hbar$. Questa situazione corrisponde all'aggiunta di una singola particella con momento $\hbar \mathbf{q}$, e la rimozione di una particella dallo stato condensato. Per momenti più piccoli, le eccitazioni sono sovrapposizioni lineari degli stati in cui una particella di momento $\hbar \mathbf{q}$ è aggiunta (e una particella del condensato rimossa) e dello stato in cui viene rimossa una particella con momento $-\hbar \mathbf{q}$ (e aggiunta una particella al condensato). A grandi lunghezze d'onda $u_q \in v_q$ divergono come $1/q^{1/2}$, e le due componenti

della funzione d'onda sono essenzialmente uguali in modulo. Per la soluzione a energia negativa ($\hbar\omega = -\epsilon_q$) si ha che $v_q^2 \ge u_q^2$ e $u_q \to 0$ per grandi **q**. Nel limite di grandi **q** l'eccitazioni corrispondono alla rimozione di una particella con momento $-\hbar \mathbf{q}$ (e l'aggiunta di una particella al condensato).

3.4 Solitoni

L'equazione Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo ha soluzioni analitiche esatte in regime non lineare in una dimensione. Queste hanno la forma di onde solitarie, o solitoni, che sono perturbazioni localizzate le quali si propagano senza cambiare forma.

I solitoni sono soluzioni per un gran numero di equazioni non lineari, tra cui le equazioni di Kortweg-de Vries, che descrivono le proprietà delle onde superficiali d'acqua, e per equazioni di Schrodinger non lineari, di cui la Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo è un caso particolare. Gli effetti fisici che danno luogo all'esistenza dei solitoni sono la non linearità e la dispersione. Entrambi sono presenti nelle equazioni Gross-Pitaevskii, come possiamo osservare esaminando le relazioni di dispersione di Bogoliubov date da: $\omega^2 = (nU_0/m) q^2 + \hbar^2 q^4/4m^2$ (3.36), che mostrano la dipendenza della velocità di un eccitazione dalla densità locale e dal numero d'onda. I solitoni preservano la loro forma perchè gli effetti di non linearità compensano quelli di dispersione.

Prima di passare alla trattazione analitica, partiamo dall'analisi degli ordini di grandezza. Consideriamo un gas di Bose uniforme nello spazio che presenta interazioni di tipo repulsivo. Se una perturbazione della densità locale ha un ampiezza Δn e si stende su una lunghezza L, è possibile osservare dalla relazione di dispersione che la velocità del suono nella perturbazione è diversa da quella nel gas di Bose per un fattore $\sim s(\Delta n)/n$ dovuto ad'effetti non lineari. È possibile osservare anche che poichè $q \sim 1/L$, la dispersione accresce la velocità del suono di $\sim s\xi^2/L^2$, dove ξ è la lunghezza di coerenza data dalla (2.47). Affinchè gli effetti di non linearità compensino quelli di dispersione, questi due contributi devono cancellarsi. Quindi l'ampiezza della pertubazione è legata alla sua lunghezza dalla seguente relazione

$$\frac{\Delta n}{n} \sim -\frac{\xi^2}{L^2}.\tag{3.42}$$

La velocità della perturbazione u differisce da quella del suono di una quantità dell'ordine del cambiamento di velocità dovuto alla dispersione e alla non linearità, che è:

$$|u-s| \sim s \frac{\xi^2}{L^2}.$$
 (3.43)

Osserviamo che i solitoni per questo sistema corrispondono a depressioni di densità mentre per le onde superficiali dell'acqua, esse corrispondono a elevazioni del livello dell'acqua. Le differenze posssono essere capite osservando che la dispersione ha segno opposto per le onde superficiali dell'acqua, dove per esse: $\omega^2 \simeq ghq^2 \left[1 - (qh)^2/3\right]$, con g accelerazione di gravità e h la profondità di equilibrio. La non linerità invece ha lo stesso segno in entrambi i casi, in quanto la velocità delle onde di superficie cresce con la profondità dell'acqua, così come la velocità del suono in un gas di Bose con interazioni repulsive cresce con la densità. I solitoni sono osservati anche in ottica non lineare, e l'intensità della luce gioca un ruolo simile a quello della densità del condensato in un gas. Per analogia, la parola scuro è usata per descrivere solitoni che corrispondono a depressioni di densità. Questa categoria di solitoni è a sua volta divisa in solitoni *neri*, per i quali il minimo della densità è zero, e quelli *grigi*, per i quali il minimo della densità è maggiore di zero. I solitoni corrispondenti a un massimo della densità vengono detti *chiari*.

3.4.1 Solitoni scuri

Per interazioni repulsive tra particelle, l'esempio più semplice di un solitone si ottiene estendendo a tutto lo spazio la soluzione stazionaria dell'equazione Gross-Pitaevskii di un condensato chiuso da pareti rigide trovata nella sezione (2.4) (equazione(2.50)),

$$\psi\left(x\right) = \psi_0 tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \tag{3.44}$$

 con

$$\xi = \frac{\hbar}{\left(2mn_0 U_0\right)^{1/2}} \tag{3.45}$$

lunghezza di coerenza lontana dalle pareti. Questa soluzione è statica e quindi corrisponde a solitoni con velocità zero. L'equazione Gross-Pitaevskii (3.1) possiede soluzioni solitoniche unidimensionali, per le quali la densità associata dipende dalla coordinata spaziale xe quella temporale t attraverso la combinazione x - ut. Per interazioni repulsive ($U_0 > 0$) cerchiamo soluzioni dove la densità n tende a un valore diverso da zero n_0 per $x \to \infty$. Inseriamo nella (3.1) una soluzione nella forma:

$$\psi(x,t) = f(x-ut) e^{-i\mu t/\hbar}$$
(3.46)

e otteniamo la seguente equazione differenziale per f,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}f'' + U_0|f|^2f = -i\hbar uf' + \mu f.$$
(3.47)

Abbiamo denotato f' come la derivata di f rispetto alla variabile x - ut. Il potenziale chimico $\mu = U_0 n$ è determinato dalla densità di background $n_0 = f_0^2$, dove f_0 è l'ampiezza della funzione d'onda del condensato per $x \to \infty$. Separiamo le soluzioni della (3.47) in parte reale e immaginaria:

$$f = f_0 \left[\alpha \left(\overline{x} \right) + i\beta \left(\overline{x} \right) \right], \tag{3.48}$$

dove $\alpha \in \beta$ sono due funzioni reali della variabile adimensionale $\overline{x} = (x - ut)/\xi$. Quando $\overline{x} \to \pm \infty$, le funzioni $\alpha \in \beta$ tendono ai valori $\alpha (\pm \infty) \in \beta (\pm \infty)$ rispettivamente, dove

$$\alpha \left(\pm\infty\right)^2 + \beta \left(\pm\infty\right)^2 = 1. \tag{3.49}$$

Consideriamo soluzioni possibili in cui la parte immaginaria è uguale a una costante ovunque $\beta = \beta_0$, e separiamo l'equazione (3.47) in parte reale e immaginaria. Questo ci conduce a due equazioni:

$$\alpha'' + \left(1 - \alpha^2 - \beta_0^2\right)\alpha = 0$$
(3.50)

е

$$\left(1 - \alpha^2 - \beta_0^2\right)\beta_0 = \frac{\sqrt{2}u}{s}\alpha',\tag{3.51}$$

dove $s = (nU_0/m)^{1/2}$ è la velocità del suono nel condensato uniforme, e l'apice indica la derivazione rispetto a \overline{x} . Come primo passo assicuriamo la consistenza delle due equazioni

moltiplicando per α' la (3.50) e integrando, usando le condizioni al contorno $\alpha (\pm \infty)^2 = 1 - \beta_0^2$. Questo ci porta a

$$2(\alpha')^{2} = \left(1 - \alpha^{2} - \beta_{0}^{2}\right)^{2}, \qquad (3.52)$$

che è consistente con la (3.51) se:

$$\beta_0^2 = \frac{u^2}{s^2}.$$
 (3.53)

Comparando la (3.50) con la (2.49) e la sua soluzione (2.50) concludiamo che l'equazione (3.51) e le condizioni al contorno sono soddisfatte dalla funzione:

$$\alpha = \alpha_0 \tanh\left[\frac{(x-ut)\,\alpha_0}{\sqrt{2}\xi}\right] \tag{3.54}$$

con

$$\alpha_0 = \sqrt{\beta_0^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{s^2}} \tag{3.55}$$

La funzione d'onda del solitone è quindi:

$$\psi = \sqrt{n_0} \left[i \frac{u}{s} + \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{s^2}\right)} \tanh\left(\frac{x - ut}{\sqrt{2}\xi_u}\right) \right] e^{-i\mu t/\hbar}$$
(3.56)

con densità associata

$$n = n_0 \left(\alpha^2 + \beta_0^2\right) = n_0 \left[\frac{u^2}{s^2} + \left(1 - \frac{u^2}{s^2}\right) \tanh^2 \left(\frac{x - ut}{\sqrt{2}\xi_u}\right)\right]$$
$$= n_0 - (n_0 - n_{min}) \frac{1}{\cosh^2 \left[(x - ut)/\sqrt{2}\xi_u\right]}.$$
 (3.57)

Nelle equazioni abbiamo introdotto l'ampiezza ξ_u che dipende dalla velocità secondo la relazione:

$$\xi_u = \frac{\xi}{\left[1 - (u/s)^2\right]^{1/2}},\tag{3.58}$$

e la densità minima

$$n_{min} = n_0 \frac{u^2}{s^2}.$$
 (3.59)

L'equazione (3.59) mostra che la velocità del solitone u è data da $(n_{min}U_0/m)^{1/2}$, che è la velocità del suono di bulk valutata alla densità n_{min} . Quando u = 0 la densità minima nel solitone si annulla, e il profilo di densità (3.57) si riduce a quello associato alla funzione d'onda (3.44). Questi risultati analitici sono stati derivati per la prima volta da Tsuzuki, e confermano le stime qualitative fatte nella sezione precedente (3.42) e (3.43).

Il campo di velocità associato al moto del solitone può essere trovato dalla fase ϕ della funzione d'onda (3.56) nella forma $v = (\hbar/m) \partial \phi / \partial x$. Una derivazione alternativa può essere ottenuta utilizzando l'equazione di continuità per esprimere v in termini della densità. Dato che $\partial n/\partial t = -u\partial n/\partial x$, l'equazione di continuità assume la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(un-vn\right)=0,\tag{3.60}$$

36

che integrandola e imponendo che il campo di velocità sia nullo all'infinito diventa



$$v = u \left(1 - \frac{n_0}{n} \right). \tag{3.61}$$

Figura 3.2: Nel grafico abbiamo riportato la densità (grafico in alto) e la velocità di un solitone scuro per $u^2 = 0.3s^2$

La fase ϕ della funzione d'onda è $\phi = \tanh^{-1}(\beta_0/\alpha)$. Il cambiamento di fase complessivo $\Delta \phi$ sarà

$$\Delta\phi = \phi\left(\infty\right) - \phi\left(-\infty\right) = \tan^{-1}\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) = -2\cos^{-1}\left(\frac{u}{s}\right). \tag{3.62}$$

Per un solitone scuro che si muove nel verso positivo delle x, il cambio di fase è negativo. Fisicamente questo è dovuto al fatto che l'onda è una depressione di densità e di conseguenza la velocità del fluido associata ad essa è diretta nel verso negativo delle x come si evince dalla (3.61). L'energia totale del solitone si può ricavare dalla (3.56). Per studiare il deficit di particelle nel solitone è conveniente considerare la quantità $E - \mu N$ piuttosto che l'energia E. In assenza del solitone la densità corrispondente sarebbe $U_0 n_0^2/2 - \mu n_0$. La differenza $\Delta (E - \mu N)$ di $E - \mu N$ con e senza solitone è

$$\Delta \left(E - \mu N \right) = A \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 + \frac{1}{2} U_0 \left(|\psi|^4 - n_0^2 \right) - \mu \left(|\psi|^2 - n_0 \right) \right], \quad (3.63)$$

dove A è l'area della sezione d'urto nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Dato che stiamo considerando un singolo solitone, il potenziale chimico μ è dato dal suo valore in assenza del solitone, $\mu = n_0 U_0$, e l'energia del solitone per unità di area della sezione d'urto può quindi essere scritta come:

$$E_{sol} = \frac{\Delta \left(E - \mu N\right)}{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 + \frac{1}{2} U_0 \left(|\psi|^2 - n_0\right)^2\right].$$
 (3.64)

Quando inseriamo la funzione d'onda del solitone (3.56) nell'integrale e usiamo il risultato $\int_{-\infty}^{+\infty} dx / \cosh^4 x = 2/3$, si trova che i due termini nell'integrale (3.64), contribuiscono allo stesso modo all'energia del solitone per unità di area, che può essere quindi scritta nella forma

$$E_{sol} = \frac{4}{3} n_0 \hbar s \left(1 - \frac{u^2}{s^2} \right)^{3/2}.$$
 (3.65)

Notiamo che l'energia del solitone decresce al crescere della velocità, quest'effetto è dovuto ad una massa effettiva negativa, come è possibile osservare dall'espansione della (3.65) per $u \ll s$,

$$E_{sol} \simeq \frac{4}{3} n_0 \hbar s - 2n_0 \hbar s \frac{u^2}{s^2}, \qquad (3.66)$$

questo mostra che la massa effettiva per unità di area è $4n_0\hbar/s$. Il deficit di particelle ΔN (per unità di area) associata al solitone si ottiene dall'espressione della densità (3.57). Questo è uguale a $\Delta N = 2\sqrt{2}n_0\xi (1-u^2/s^2)^{1/2}$, che si annulla quando u tende alla velocità del suono. L'energia per deficit di particelle $E_{sol}/\Delta N$ è dell'ordine del potenziale chimico moltiplicato per $(1-u^2/s^2)$. L'espressione (3.65) può essere riscritta nella forma:

$$E_{sol} = \frac{4}{3\sqrt{mU_0}} \left(\mu - mu^2\right)^{3/2},$$
(3.67)

che ci permette di dare delle conclusioni molto interessanti sulla dinamica dei solitoni. I solitoni scuri in presenza di un potenziale esterno si comportano come delle particelle, se il potenziale varia in modo sufficientemente lento nello spazio. Consideriamo quindi un potenziale V(x) che varia lentamente. In approssimazione Thomas-Fermi, il potenziale chimico e il potenziale esterno sono legati alla densità locale in assenza del solitone n_0 mediante l'equazione $\mu = V(x) + n_0 U_0$. Questo ci suggerisce che l'energia (3.67), in presenza del potenziale cambia nella seguente espressione:

$$E_{sol} = \frac{4}{3\sqrt{mU_0}} \left[\mu - V(x_s) - mu^2(x_s) \right]^{3/2}, \qquad (3.68)$$

dove x_s indica la posizione del centro del solitone. Dall'equazione (3.68) capiamo che affinchè l'energia si conservi, la quantità $\mu - V(x_s) - mu^2(x_s)$ deve essere costante, implicando che $V(x_s) - mu^2(x_s)$ è una costante indipendente da x_s . Quest'ultima espressione è l'energia di una particella di massa 2m. Di conseguenza arriviamo alla conclusione notevole che il moto di un solitone in un condensato di Bose-Einstein in presenza di un potenziale esterno è lo stesso di quello di una particella di massa 2m nello stesso potenziale. Quindi per un potenziale che presenta un minimo, il periodo del moto del solitone è $\sqrt{2}$ volte quello di una particella di massa m nello stesso potenziale, e l'energia della particella sarà uguale al valore del potenziale esterno al punto d'inversione del moto. Data la non omogeneità del potenziale, la forma della velocità che abbiamo utilizzato non è una soluzione esatta dell'equazione del moto, e quando il solitone accelera per effetto del potenziale

3.4. SOLITONI

esterno, emetterà un onda sonora in maniera analoga ad una particella carica che emette una radiazione elettromagnetica quando accelera. Comunque quest'effetto è molto piccolo se il potenziale varia lentamente nello spazio. Le dissipazioni tendono a far diventare il solitone meno scuro, ossia di ridurre la profondità della depressione di densità. In un condensato di estensione finita, come ad esempio in un confinamento armonico, l'emissione di fononi è soppressa dalla natura discreta dello spettro delle eccitazioni elementari.

3.4.2 Solitoni nella fisica sperimentale

In questa sezione vogliamo discutere i risultati dell studio condotto da J.Denschlag e E.Simsarian, sulle principali tecniche che permettono di studiare la distibuzione spaziale di fase di un condensato di Bose-Einstein [1].

Il controllo di un sistema fisico può essere ottenuto manipolando precisamente la sua funzione d'onda che come sappiamo caratterizza pienamente lo stato del sistema. Un condensato di Bose-Einstein di un gas diluito, si mostra particolarmente adatto a queste manipolazioni dato che la sua funzione d'onda è osservabile direttamente: esso ha molti atomi identici nello stato fondamentale, ed è sufficientemente grande da poter essere osservato otticamente. Vogliamo quindi mostrare due tecniche ottiche che permettono di preparare e misurare la fase della funzione d'onda di un condensato di Bose-Einstein. Il primo passo è quello di scegliere un particolare pattern di luce di un laser, che incidendo sul condensato modifica la forma della fase in maniera piuttosto arbitraria. Viene successivamente impiegato un interferometro di materia ondulatoria, per analizzare la distribuzione di fase nello spazio. Questi metodi sono utilizzati negli studi sperimentali di ottica non lineare, ossia la propagazione dei solitoni.

Riportiamo quindi i passi principali dell'articolo:

• Phase imprinting:

L'esperimento è stato condotto su un condensato di circa ~ 2×10^6 atomi di sodio. Il condensato si trova in un confinamento magnetico caratterizzato dalle frequenze $\omega_x = \sqrt{2}\omega_y = 2\omega_z = 2\pi \times 28Hz$. Inizialmente il condensato è descritto dallo stato fondamentale della Gross-Pitaevskii, ed ha una fase uniforme. Modifichiamo la sua fase esponendo il condensato ad impulsi di laser con un pattern di intensità I(x, y). In questo processo, gli atomi risentono di un potenziale variabile nello spazio $U(x, y) = (\hbar\Gamma^2/8\Delta) [I(x, y)/I_0]$, e quindi acquistano una fase corrispondente $\phi(x, y) = -U(x, y) T/\hbar$. Abbiamo indicato con Γ l'ampiezza della linea di transizione, I_0 è l'intensità di saturazione, Δ è il detuning del laser dalla risonanza atomica, e T il periodo dell'impulso, che è stato scelto sufficientemente piccolo da ritenere trascurabile il moto atomico durante l'impulso. In questo limite, l'effetto dell'impulso può essere espresso come un'improvviso phase imprint, che modifica la funzione d'onda da ψ a $\psi exp [i\phi(x, y)]$.



Figura 3.3: (A) Imprinting di un fattore di fase sul condensato. (B) Imprinting di una banda di fase. (C) Imprinting di una fase che varia al variare dell'angolo azimuth, utilizzato per crerae vortici.

• Interferometria:

Misuriamo la distribuzione dell'imprinted phase della funzione d'onda del condensato con un interferometro Mach-Zehnder di materia ondulatoria, che utilizza la diffrazione di Bragg indotta. Il nostro interferometro differisce da quello precedente in quanto possiamo manipolare indipendentemente gli atomi nei due percorsi (dato che la loro separazione è grande) e utilizzare le porte di output per rivelare la distribuzione di fase del condensato. Nell'interferometro un impulso di Bragg splitta il condensato iniziale in due stati $|A\rangle \in |B\rangle$, che differiscono solo per il loro momento. Dopo essere stati separati spazialmente, la fase viene impressa su $|A\rangle$, mentre $|B\rangle$ rimane inalterato e funge da riferimento di fase. Quando vengono ricombinati essi interferiscono in accordo con la loro differenza di fase locale. Dove la loro differenza di fase è 0, gli atomi appaiono nella porta 1, e dove è π appaiono nella porta 2. Analizzando la distribuzione di densità della porta 1 e 2 si ottiene l'immagine della variazione di fase nello spazio. Nella figura (3.4) abbiamo mostrato l'output di un interferometro quando viene impressa una fase π nella metà superiore di $|A\rangle$. Il contrasto a "mezza Luna" è un'evidenza diretta del fatto che possiamo manipolare la distribuzione di fase del condensato, e in particolare, effettuare un phase imprinting appropriato per un solitone



Figura 3.4: Diagramma spazio tempo dell'interferometro a onde di materia utilizzato per misurare la distribuzione spaziale di fase impressa nel condensato di Bose Einstein. Tre diffrazioni di Bragg otticamente indotte formano l'interferometro. Ciascun impulso consiste di due fasci laser contropropraganti desintonizzati di -2GHz dalla risonanza atomica (così l'emissione spontanea è trascurabile). Il primo impulso ha una durata di $8\mu s$ e splittano coerentemente il condensato due componenti $|A\rangle \in |B\rangle$ con lo stesso numero di atomi, $|A\rangle$ resta a riposo, e $|B\rangle$ riceve due fotoni di momento. Quando questi sono completamente separati, applichiamo i 5ns di phase imprinting sulla metà superiore di $|A\rangle$, che cambia la distribuzione di fase di $|A\rangle$, mentre $|B\rangle$ serve come riferimento di fase. Un secondo impulso di Bragg (della durata di $16\mu s$), $1\mu s$ dopo il primo, porta lo stato $|B\rangle$ a riposo e impartendo due momenti di fotoni di a $|A\rangle$. Quando essi si sovrappongono di nuovo, 1ms dopo, un terzo impulso della durata di 8ms, converte la loro differenza di fase in distribuzioni di densità alle porte 1 e 2. L'immagine mostra l'output 1 e 2 quando viene impressa una fase di π

3.4.3 Solitoni scuri in condensati Bose-Einstein di ⁸⁷Rb a forma di sigaro

Adesso che abbiamo visto le principali tecniche di manipolazione della distribuzione di fase di un condensato di Bose-Einstein, vogliamo concludere la trattazione riportando i principali risultati dell'esperimento "Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates" condotto da S. Burger, K. Bongs e il loro team di ricerca [3].

La realizzazione della condensazione di Bose-Einstein per un gas debolmente interagente permette di esplorare le proprietà non lineari delle onde di materia. Le soluzioni solitoniche dell'equazione Gross-Pitaevskii sono strettamente legate a soluzioni simili in ottica non lineare che descrivono la propagazione di impulsi di luce nelle fibre ottiche. I solitoni chiari corrispondono a piccoli impulsi dove la dispersione è compensata da un'auto-modulazione, cioè, la forma dell'impulso non cambia. I solitoni scuri corrispondono ai minimi d'intensità all'interno di un ampio impulso di luce. Nel caso delle onde di materia, i solitoni

CAPITOLO 3. DINAMICA DEL CONDENSATO E SOLITONI

chiari sono previsti solo per interazioni attrattive tra particelle, mentre i solitoni scuri detti anche "kink states", sono previsti per interazioni di tipo repulsivo. Concettualmente i solitoni sono oggetti che si comportano come particelle e quindi fungono da collegamento tra la fisica dei BEC, alla fluidodinamica, ottica non lineare e alla fisica delle particelle elementari.

In questo studio sono riportati i risultati di esperimenti condotti sui solitoni scuri, in condensati Bose-Einstein a forma di sigaro in un vapore diluito di ⁸⁷*Rb*. Innanzitutto sono stati prodotti stati eccitati del condensato tramite il metodo del phase imprinting, aggiungendo così un fattore di fase alla funzione d'onda del condensato. Successivamente è stata monitorata l'evoluzione del profilo di densità per studiare la dinamica della funzione d'onda. Si osservano così dei minimi di densità, che viaggiano a velocità minore di quella del suono nel condensato confinato. Comparando le soluzioni numeriche e analitiche della Gross-Pitaevskii 3D, in accordo con le condizioni sperimentali si identificano i minimi di densità con la propagazione di solitoni scuri.

Nell'esperimento è stato utilizzato un potenziale confinante fortemente anisotropo, in modo da creare un condensato a forma allungata che ci permette di raggiungere quasi la situazione unidimensionale, dove i solitoni scuri ci si aspetta che siano dinamicamente stabili. Ricordiamo che i solitoni scuri nelle onde di materia sono caratterizzati da un minimo locale della densità e da un forte gradiente di fase della funzione d'onda in corrispondenza della posizione del minimo. La forma del solitone non cambia grazie al bilanciamento tra le interazioni repulsive che cercano di ridurre il minimo e il gradiente di fase che cerca di accrescerlo. La funzione d'onda macroscopica di un solitone scuro, in un confinamento armonico cilindrico, forma un piano di minimi di densità (Piano DS) perpendicolare all asse del potenziale confinante. Perciò la distribuzione di densità corrispondente mostra un minimo al piano DS, con un ampiezza dell'ordine della lunghezza di correlazione locale. Un solitone scuro in un BEC omogeneo di densità n_0 è descritto dalla funzione d'onda (3.56), che riscriviamo in termini delle variabili d'interesse: $x_k e v_k$ che sono la posizione e velocità del piano DS, $\xi = 4\pi a n_0^{-1/2}$ che è la lunghezza di correlazione, e $s = \sqrt{4\pi a n_0}\hbar/m$ è la velocità del suono e infine m è la massa dell'atomo

$$\psi_k = \sqrt{n_0} \left[i \frac{v_k}{s} + \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{s^2}} \tanh\left(\frac{x - x_k}{\xi} \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{s^2}}\right) \right], \qquad (3.69)$$

Per T = 0 in una dimensione, i solitoni scuri sono stabili. In questo caso, solo i solitoni con velocità zero nel centro del confinamento non si muovono, mentre gli altri oscillano intorno l'asse del confinamento. In tre dimensioni a T finita, i solitoni scuri mostrano delle instabilità termodinamiche e dinamiche. Le interazioni con la nube eccitata causano dissipazioni che accelerano il solitone, facendolo così raggiungere la velocità del suono e sparire. Questa instabilità è eliminata grazie al confinamento a forma di sigaro come nel caso dell'esperimento. Come possiamo vedere dall'equazione (3.69), la fase locale della funzione d'onda del solitone scuro varia solo in prossimità del piano DS ($x \approx x_k$), ed è costante nelle regioni esterne, con una differenza di fase $\Delta \phi$ tra regione a destra e a sinistra del piano (figura 3.5(b)).



Figura 3.5: (a) Distribuzione di densità di un solitone scuro, il minimo di densità ha un ampiezza ξ . (b) Distribuzione di fase di un solitone con $\Delta \phi = \pi$. (c) Schema della generazione di solitoni scuri, tramite phase imprinting, dove l_c è l'ampiezza del confine del potenziale.

Per generare solitoni scuri utilizziamo il metodo del phase imprinting. Applichiamo un potenziale omogeneo U_{int} , generato dal potenziale di dipolo di un fascio laser lontano, a metà della funzione d'onda del condensato (fig 3.5 (c)). Il potenziale viene acceso per un tempo t_p cosicchè la funzione d'onda acquisisce localmente un fattore di fase $e^{-i\Delta\phi}$, con $\Delta\phi = U_{int}t_p/\hbar \sim \pi$. La durata dell'impulso è scelta in modo da essere piccola se comparata al tempo di correlazione del condensato $t_c = \hbar/\mu$. Questo assicura che l'effeto medio dell'impulso è un cambiamento di fase del BEC, mentre i cambiamenti di densità in questo intervallo di tempo possono essere trascurati. Nell'esperimento sono stati utilizzati condensati contenenti tipicamente 1.5×10^5 atomi, con meno del 10% degli atomi presenti nella nube eciitata. Le frequenze del confinamento magnetico sono $\omega_x = 2\pi \times 14Hz$ e $\omega_{\perp} = 2\pi \times 425Hz$, lungo la direzione assiale e radiale rispettivamente.

Per il potenziale di phase imprinting abbiamo usato un laser con $(\lambda = 532nm)$ di intensità $I \approx 20W/mm^2$, acceso per un tempo $t_p = 20\mu s$, ottenendo uno cambiamento di fase $\Delta \phi$ dell'ordine di π . Viene inoltre utilizzato un sofisticato sistema ottico per ottenere l'immagine del profilo di densità del BEC, che corrisponde più o meno a una funzione a gradini con un ampiezza degli spigoli l_e più piccola di $3\mu m$ (fig 3.5 (c)). Il gradiente di potenziale corrispondente produce una forza che permette di variare il momento della funzione d'onda localmente, e supportando la creazione di un minimo della densità nella posizione del piano DS per i solitoni scuri. Dopo aver applicato il potenziale di dipolo lasciamo che gli

atomi evolvano all'interno del confinamento magnetico per un tempo variabile t_{ev} . Quindi rilasciamo il condensato dal confinamento (che viene spento dopo $200\mu s$) e assorbiamo l'immagine della distribuzione di densità dopo un tempo $t_{TOF} = 4ms$. In una serie di misurazioni sono stati studiati la creazione e successivamente la dinamica dei solitoni scuri in funzione del tempo di evoluzione e della fase impressa.



Figura 3.6: Immagine assorbita di un BEC, con solitoni che si propagano nella direzione dell'asse lungo del condensato, per tempi di evoluzione differenti in confinamenti magnetici. ($\Delta \phi \sim \pi, N \approx 1.5 \times 10^5$.

La figura (fig 3.6) mostra il profilo di densità della nube atomica per diversi tempi di evoluzione nel confinamento magnetico, t_{ev} .

Il potenziale U_{int} è stato applicato alla parte del condensato con x < 0. Per queste misurazioni la forza del potenziale è stata stimata corrispondente al cambiamento di fase $\sim \pi$. Per piccoli tempi di evoluzione il profilo di densità mostra un minimo pronunciato (contrasto circa del 40%). Dopo un tempo tipicamente dell'ordine $t_{ev} \approx 1.5ms$ appare un secondo minimo. Entrambi i minimi (contrasto circa del 20%) viaggiano in direzioni opposte e con velocità diverse. La figura (fig 3.7 (a)) mostra l'evoluzione dei due minimi comparandoli con i risultati teorici ottenuti risolvendo la Gross-Pitaevskii 3D.

Uno dei risultati più importanti di questo esperimento è che entrambe le strutture si muvono con velocità più piccole di quelle del suono ($s \approx 3,7mm/s$ per i parametri dell'esperimento) e dipendono dal cambiamento di fase applicato.

Quindi le due strutture osservate differiscono dalle onde sonore in un condensato. Identifichiamo il minimo che si muove più lentamente nella direzione negativa delle x, come il piano DS di un solitone scuro. Sono state effettuate una serie di misure con differenti set di parametri per l_e , diversi tempi di imprinting e diversi prodotti dei laser. La velocità del solitone scuro si trova in un range tra $v_k = 2.0mm/s$ e $v_k = 3.0mm/s$. Fissato l_e la velocità v_k decresce al crescere di $\Delta \phi$. Un aumento di $\Delta \phi \sim \pi/2$ di un fattore 1.5 comporta una decrescita di v_k di circa il dieci percento, in accordo con i risultati teorici (fig 3.7 (a)) e (fig 3.7).



Figura 3.7: (a) Posizione dei minimi di densità osservati sperimentalmenti in funzione dei tempi di evoluzione in un confinamento magnetico, per $\Delta \phi = 0, 5\pi$. La linea tratteggiata mostra i risultati numerici dell'equazione 3D per $N = 5 \times 10^4$, $l_e = 3\mu s$, e $\Delta \phi = 2\pi/3$. (b) e (c) mostrano la dipendenza di v_k/s , dalla fase impressa (per $l_e = 3\mu m$) e da l_e (per $\Delta \phi = \pi$) ottenuta numericamente in simulazioni quasi 1-D.

Per piccole fasi impresse non si osservano solitoni scuri, mentre per grandi fasi impresse, si osservano strutture con numerosi minimi estremamente complesse. Inoltre il potenziale di dipolo crea oltre al solitone scuro un'onda di pressione che si propaga in verso opposto e velocità ~ s. Per capire la generazione di solitoni scuri il team di ricerca come prima cosa ha risolto attraverso metodi computazionali l'equazione Gross-Pitaevskii. I tempi di computazione hanno ristretto lo studio a un numero di atomi minore di 5×10^4 . Le simulazioni descrivono bene il caso in cui T = 0, ma vengono ignorati totalmente gli effetti di instabilità termodinamiche.

I risultati teorici possono essere riassunti nel seguente elenco:

- I risultati delle simulazioni numeriche sono in buon accordo con le osservazioni sperimentali. Attraverso un potenziale in grado di cambiare la fase della funzione d'onda del condensato, si osserva un solitone che si muove nella direzione negativa delle x. La generazione del solitone è accompagnata da un'onda di densità che si muove in direzione opposta. Il massimo della densità si muove con una velocità $\sim s$ indipendentemente dai valori di $l_e \in \Delta \phi$. Il tempo caratteristico per la creazione di un solitone è di ξ/s e nell'esperimento non va oltre il ms.
- Per l_e fissato, un aumento di $\Delta \phi$ da π a $2\pi, 3\pi, ...$, comporta la creazione di solitoni doppi, tripli, ecc..

CAPITOLO 3. DINAMICA DEL CONDENSATO E SOLITONI

- La velocità iniziale del solitone decresce quando $l_e \rightarrow 0$. Come osservato sperimentalmente, le tipiche velocità solitoniche sono più piccole di quelle del suono, e crescono con il numero di atomi. La velocità dell'onda di densità corrispondente è vicina a quella del suono, e si muove dal centro della trappola, allargandosi ed eventualmente svanendo. Questo è in contrasto con la teoria dei solitoni dai quali ci si aspetta che oscillino nel confinamento, conservando la loro ampiezza e profondità. Comunque l'osservazione di oscillazioni richiederebbe tempi di vita dei solitoni più lunghi.
- La situazione cambia quando viene aperto il confinamento e si permette al condensato di espandersi in direzione radiale. La simulazione mostra che la velocità del solitone diminuisce rapidamente, mentre la sua ampiezza cresce. Per capire quest'aspetto sono state usate delle tecniche che permettono di calcolare la velocità del solitone. In questo modo è stato possibile osservare un secondo minimo localizzato tra il solitone e l'onda di densità, subito doppo aver spento il confinamento (fig 3.8 (b)). Questo minimo presenta profondità e ampiezza comparabili con quelli del solitone scuro. La sua posizione in funzione di t_{ev} ci permette di osservare che questo si muove a velocità costante simile a quella del solitone. La creazione di un secondo minimo è un fenomeno coerente, e può essere attribuito a una fase acquisita dinamicamente dalla funzione d'onda, nella regione compresa tra solitone scuro e onda di densità. I risultati sperimentali inoltre mostrano la chiara presenza di dissipazioni originate dalle interazioni con la nube eccitata.



Figura 3.8: Evoluzione della densità di distribuzione ottenuta numericamente dalle simulazioni 3D per $N = 10^4$ e $\Delta \phi = 2\pi/3$. (a) Evoluzione al'interno dei confinamenti magnetici per differenti t_{ev} , il solitone scuro è rimarcato con una freccia. (b). Dopo 4ms dallo spegnimento del confinamento, si osserva un secondo minimo di densità dietro l'onda di densità.

In conclusione i risultati principali dell'esperimento sono un metodo per la creazione dei solitoni scuri, che ci permette anche di studiarne la dinamica. In accordo con la

46

3.4. SOLITONI

risoluzione numerica delle equazioni teoriche (Gross-Pitaevskii) è stato trovato che questi si propagano con velocità approssimativamente costante e più piccola di quella del suono. Infine gli stadi iniziali dell'evoluzione ed espansione del campione sono ben descritti per T che tende a 0, stato che inoltre mostra un'assenza di instabilità dinamiche. Infine è stato possibile osservare chiari segni di dissipazione nella dinamica dei solitoni.

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo voluto ripercorrere i principali risultati teorici che hanno permesso di capire a fondo il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. L'elaborato parte da un caso semplice, un gas di Bose diluito in assenza d'interazione in un confinamento armonico, di cui abbiamo potuto calcolare le proprietà fondamentali come la temperatura di condensazione e la densità degli stati a partire dalla statistica di Bose.

Il passo successivo è stata l'introduzione dell'interazione tra particelle, che abbiamo approssimato come un'interazione di contatto. Per poter ottenere la funzione d'onda del condensato, abbiamo utilizzato un'approssimazione di campo medio che ci ha portato alla scrittura dell'equazione Gross-Pitaevskii (2.17).

Questo punto è stato fondamenetale per lo sviluppo dell'elaborato, in quanto dallo studio dell'equazione abbiamo potuto osservare proprietà notevoli dei condensati di Bose-Einstein. Dalla risoluzione dell'equazione tramite metodi variazionali, siamo riusciti a ricavare gli andamenti dell'energia del condensato in funzione del numero di particelle, in particolare abbiamo visto che l'energia per particella E/N è proporzionale a $N^{2/5}$. Dallo studio dell'andamento dell'energia del condensato in funzione del numero di particelle abbiamo visto che per N sufficienetemente grandi il termine cinetico dell'equazione Gross-Pitaevskii può essere trascurato, portando all'approssimazione Thomas-Fermi, che permette di calcolare le principali proprietà del condensato come la sua estensione media, l'energia per particella e il profilo di densità in maniera estremamente semplice.

Per descrivere i problemi di dinamica del condensato abbiamo effettuato una teoria di campo medio dinamica che ci ha portato alla scrittura della Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, utilizzando sempre l'interazione effettiva di contatto come nel caso statico. Da questa abbiamo ricavato due equazioni dell'idrodinamica equivalenti all'equazione di continuità e all'equazione di Eulero per un fluido ideale. Dal confronto con il fluido ideale sono emerse proprietà notevoli del condensato tra cui l'irrotazionalità del moto di un condensato e un termine di pressione quantica.

Linearizzando la Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo siamo arrivati all'equazioni di Bogoliubov, che permettono di calcolare lo spettro d'eccitazioni elementari del condensato. Sono stati discussi gli ottimi risultati trovati per vettori d'onda piccoli (ossia per grandi lunghezze d'onda) che hanno permesso inoltre di calcolare lo spettro d'eccitazione dei fononi, ma nel limite di grandi vettori d'onda (piccole lunghezze d'onda) l'equazioni di Bogoliubov non sono più efficaci. Infatti grazie a trattazioni avanzate, in particolare con una trattazione microscopica in regime di seconda quantizzazione, lo spettro d'eccitazione mostra un'andamento con un minimo che non è possibile osservare dalla risoluzione dell'equazioni di Bogoliubov.

Le equazioni tipo Schrodinger non lineari, di cui la Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo è un caso particolare, ammettono soluzioni solitoniche. Nella parte finale dell'elaborato, quindi, abbiamo voluto approfondire le proprietà dei solitoni.

Per un gas di Bose interagente, i solitoni sono depressioni di densità, e la loro esistenza dal punto di vista fisico sono dovute alla non linerità e la dispersione, che abbiamo discusso nelle relazioni di Bogoliubov. I solitoni sono distinti in *chiari* e *scuri* in relazione con i solitoni in ottica non lineare. In particolare abbiamo visto una soluzione stazionaria della Gross-Pitaevskii per interazioni repulsive, queste sono state ottenuto estendendo a tutto lo spazio la funzione d'onda di *risanamento*, questo è l'esempio più semplice di solitone scuro. Siamo stati quindi in grado di calcolare la funzione d'onda del solitone e il suo profilo di densità. Abbiamo fatto vedere inoltre teoricamente, come è possibile ricavare il campo di velocità del solitone dalla fase della funzione d'onda, che ha portato al risultato che una propagazione nel verso positivo dell'asse di riferimento è accompagnato da un cambiamento di fase negativo. Infine abbiamo ricavato l'energia del solitone scuro e siamo arrivati alla conclusione notevole che il moto di un solitone scuro in un condensato di Bose-Einstein confinato da un potenziale, è lo stesso di quello di una particella libera di massa 2m sotto l'azione dello stesso potenziale.

Nella parte sperimentale del lavoro abbiamo mostrato due tecniche ottiche il *phase imprinting* e l'*interferometria*, che permettono di preparare e misurare la fase della funzione d'onda di un condensato, che ci permetterà di studiare la dinamica solitonica.

Nell'esperimento "Dark solitons in cigar-shaped Bose-Einstein condensate of ⁸⁷Rb" i risultati trovati sono interpretati mediante la teoria discussa nella sezione (3.4.1), vogliamo quindi suffermarci su alcuni aspetti delicati dell'esperimento. Dall'esperimento abbiamo visto che per vedere le soluzioni solitoniche abbiamo bisogno di un condensato quasi unidemensionale, a forma di sigaro, che è stato ottenuto confinando fortemente in due direzioni e poco nell'altra. Ma come abbiamo visto le soluzioni della Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo sono stabili in una dimensione, ma sono instabili se le estendiamo a più dimensioni. Ci chiediamo quindi, per solitoni a forma di sigaro, è ancora possibile una teoria di campo medio dinamica? In linea teorica no, in quanto si può far vedere che in una dimensione o anche nel caso quasi unidimensionale entrano in gioco fenomeni di fluttuazioni quantistiche che diventano importanti, e non è detto che possiamo sviluppare una teoria di campo medio. Nella nostra trattazione noi abbiamo analizzato solo il limite 1D, ma in linea teorica il caso più generale è risolvere la teoria di campo medio dipendente dal tempo per un condensato quasi unidimensionale. Nelle prospettive future sarà quindi fondamentale estendere la teoria nel caso quasi unidimensionale, vedere se è possibile utilizzare in questo limite la teoria di campo medio e analizzare il ruolo delle fluttuazioni quantistiche.

Appendice

Struttura superficiale del condensato

L'approccio Thomas-Fermi è applicabile se la funzione d'onda del condensato varia in modo sufficientemente lento nello spazio. Questa tuttavia non permette di descrivere adeguatamente le proprietà del sistema ai confini del sistema come è possibile vedere dalla stima dei contributi al funzionale dell'energia per la funzione d'onda Thomas-Fermi.

Il profilo di densità è $n(\mathbf{r}) = [\mu - V(\mathbf{r})]/U_0$, e se espandiamo il potenziale esterno intorno a un punto \mathbf{r}_0 sulla superficie, che è dato da $V(\mathbf{r}_0) = \mu$, questa diventa $n(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/U_0$ dove:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \left(\mathbf{r}_0 \right), \tag{3.70}$$

è la forza che il potenziale esterno esercita sulle particelle della superficie. La funzione d'onda del condensato è data da:

$$\psi(r) = \left[\frac{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{U_0}\right]^{1/2}.$$
(3.71)

Se denotiamo la coordinata in direzione di $\nabla V(\mathbf{r}_0)$ con x, e denotiamo la posizione della superficie con $x = x_0$, l' interno della nube corrisponde a $x \leq x_0$. La funzione d'onda Thomas-Fermi del condensato varia come $(x - x_0)^{1/2}$ per $x \leq x_0$, e quindi la sua derivata rispetto a x è proporzionale a $(x - x_0)^{-1/2}$. Conseguentemente, il termine di energia cinetica nel funzionale dell'energia va come $1/(x_0 - x)$, e l'energia totale per unità di area della superficie, che è ottenuta per integrazione di questa espressione rispetto a x, diverge come $-\log(x_0 - x)$ quando x si avvicina a x_0 dal basso.

Per stimare il valore della distanza dalla superficie alla quale l'energia cinetica diventa importante, osserviamo che il contributo dell'energia cinetica al funzionale dell'energia è dell'ordine:

$$\frac{\hbar^2 |\frac{d\psi}{dx}|^2}{2m|\psi|^2} \sim \frac{\hbar^2}{2m\left(x_0 - x\right)^2},\tag{3.72}$$

per atomo. La differenza tra il potenziale chimico e il potenziale esterno è:

$$\mu - V(\mathbf{r}) \simeq F(x_0 - x), \qquad (3.73)$$

dove F è l'ordine di grandezza della forza di confinamento agente su una particella della superficie della nube condensata. Quindi il termine di energia cinetica diventa preponderante per $x - x_0 \leq \delta$, dove:

$$\delta = \left(\hbar^2 / 2mF\right)^{1/3},\tag{3.74}$$

è la stessa scala di lunghezza che si osserva in quantistica nel moto di una particella libera sotto l'azione di un potenziale lineare. Per un potenziale armonico isotropo $V = m\omega_0^2 r^2/2$, $F \in m\omega_0^2 R$, dove R è il raggio della nube condensata, e quindi:

$$\delta = \left(\frac{a_{osc}^4}{2R}\right)^{1/3} = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\mu}\right)^{2/3} \frac{R}{2},\tag{3.75}$$

dove $a_{osc} = (\hbar/m\omega_0)^{1/2}$, e nella seconda uguaglianza abbiamo usato che $\mu = m\omega_0^2 R^2/2$. Conseguentemente, la frazione di volume della nube dove l'approssimazione di Thomas-Fermi è inadeguata è proporzionale a $(a_{osc}/R)^{4/3}$, che è piccola per un numero di particelle sufficientemente grande.

Adesso vogliamo però studiare la superficie del condensato a partire dall'equazione Gross-Pitaevskii. Se il potenziale esterno varia lentamente rispetto alla scala di lunghezza δ , possiamo espandere il potenziale intorno la posizione della superficie, ed il problema diventa essenzialmente unidimensionale. In termini della coordinata x introdotta precedentemente, e con origine sulla superficie della nube, in approssimazione Thomas-Fermi, l'equazione Gross-Pitaevskii diventa:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx} + Fx + U_0|\psi(x)|^2\right]\psi(x) = 0.$$
(3.76)

Nella discussione precedente abbiamo identificato la scala di lunghezza δ associata alla struttura di superficie e, come ci si potrebbe aspettare, l'equazione Gross-Pitaevskii si semplifica se misuriamo le lunghezze in unità di δ . Inoltre è conveniente misurare in approssimazione Thomas-Fermi la funzione d'onda del condensato in termini del valore $b = (F\delta/U_0)^{1/2}$ a una distanza δ dalla superficie della nube. Dopo aver introdotto una scala di lunghezza variabile $y = x/\delta$ e una funzione d'onda scalata data da: $\Psi = \psi/b$ otteniamo l'equazione:

$$\Psi'' = y\Psi + \Psi^3, \tag{3.77}$$

dove l'apice "'" indica la differenziazione rispetto
ay.La soluzione in approssimazione Thomas Fermi è:

$$\Psi = \sqrt{-y} \qquad per \quad y \leqslant 0, \qquad \Psi = 0 \qquad per \quad y > 0. \tag{3.78}$$

Innanzitutto studiamo il comportamento per $x \gg \delta$, corrispondente a $y \gg 1$. Dato che la funzione d'onda del condensato è piccola possiamo trascurare il termine cubico nell'equazione (3.77). L'equazione risultante è una funzione di Airy, e la sua soluzione asintotica è:

$$\Psi = \frac{C}{y^{1/4}} e^{-2y^{3/2}/3}.$$
(3.79)

In profondità all'interno del condensato, che corrisponde a $y \ll -1$, la soluzione Thomas-Fermi $\Psi \simeq \sqrt{-y}$ è approssimativamente valida. Per determinare la correzione principale alla funzione d'onda, scriviamo Ψ come somma di due contributi: $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ e linearizziamo l'equazione (3.77), ottenendo:

$$-\Psi_1'' + y\Psi_1 + 3\Psi_0^2\Psi_1 = \Psi_0'', \qquad (3.80)$$

usando $\Psi_0 = (-y)^{1/2}$ dalla (3.78), e trascurando Ψ_1'' nella (3.80), dato che dà contributo a termini di ordine superiore a 1/y, arriviamo al risultato:

$$\Psi_1 \simeq -\frac{1}{8y^2\sqrt{y}}.\tag{3.81}$$

La soluzione asintotica è quindi:

$$\Psi = \sqrt{-y} \left(1 + \frac{1}{8y^3} \right). \tag{3.82}$$

L'equazione (3.77) può essere risolta numericamente, e questo ci permette di valutare il coefficiente C nell'equazione (3.79), che si trova essere approssimativamente di 0,3971. Calcoliamo l'energia cinetica per unità di superficie perpendicolare all'asse x:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx |\nabla \psi|^2.$$
(3.83)

Utilizziamo innanzitutto la funzione d'onda Thomas-Fermi (3.78) che ci aspettiamo essere valida nella regione con $x \ll -\delta$. Dato che l'integrale diverge per $x \longrightarrow 0$, valutiamo l'integrale per x minore di un certo valore -l. Prendiamo come limite inferiore d'integrazione -L, con L grande rispetto a δ . Ci aspettiamo che l'energia cinetica sarà data approssimativamente dal risultato Thomas-Fermi se la distanza di taglio la scegliamo $\sim -\delta$, la distanza alla quale l'approssimazione Thomas-Fermi fallisce:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{l} dx \left(\psi'\right)^2 \simeq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{F}{U_0} \log \frac{L}{l},\tag{3.84}$$

Compariamo questo risultato con l'energia cinetica per unità di area calcolata numericamente utilizzando la funzione d'onda reale:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{\infty} dx \left(\psi'\right)^2 \simeq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{F}{U_0} \log \frac{4,160L}{\delta},\tag{3.85}$$

che è valida per valori grandi di $\log L/\delta$.

Concludiamo quindi che si ottiene il comportamento asintotico corretto dell'energia cinetica, se utilizziamo l'approccio Thomas-Fermi e tagliamo l'integrale a x = -l dove:

$$l = 0.240\delta. \tag{3.86}$$

Torniamo ora al sistema d'interesse fisico, una nube di N atomi, confinato in un potenziale di oscillatore armonico tridimensionale. Per semplicità, consideriamo il caso isotropo, dove il potenziale è: $V(r) = m\omega_0^2 r^2/2$. La funzione d'onda dello stato fondamentale soddisfa l'equazione Gross-Pitaevskii.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\psi(r)|^2\right]\psi(r) = \mu\psi(r).$$
(3.87)

Effettuiamo la sostituzione $\chi = r\psi$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(r^2 - R^2\right)\chi\left(r\right) + \frac{4\pi\hbar^2}{mr^2}|\chi\left(r\right)|^2\chi\left(r\right) = 0,$$
(3.88)

dato che $\mu = m\omega_0^2 R^2/2$. La soluzione Thomas-Fermi è:

$$\chi_{TF} = r \left(\frac{R^2 - r^2}{8\pi a a_{osc}^4}\right)^{1/2}.$$
(3.89)

Espandendo r intorno R nell'equazione (3.88), arriviamo a un'equazione nella forma dell'equazione (3.77), dove la scala di lunghezza δ è data dalla (3.75).

Per calcolare l'energia cinetica, usiamo la funzione d'onda Thomas-Fermi e tagliamo l'integrale ad un raggio R-l, dove l è dato dal calcolo delle equazione lineare da cui abbiamo ricavato l'andamento a rampa. Il risultato è:

$$\frac{E_{cin}}{N} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\int_0^{R-l} dr r^2 \left(d\psi/dr \right)^2}{\int_0^R dr r^2 \psi^2} \simeq \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{15}{4} \log \frac{2R}{l} - \frac{5}{2} \right).$$
(3.90)

Quest'equazione è in buon'accordo con il risultato numerico per log (R/δ) maggiore di 3, inoltre la differenza relativa è minore del 2,5 percento.

Bibliografia

- D.L. Feder Charles W. Clark L.A. Collins J. Cubizolles L. Deng E.W Hagley K. Helmerson W.P Reinhardt J.Denschlag, J.E. Simsarian et al. Generating solitons by phase engineering of a bose-einstein condensate. *Science*, 287(5450):97–101, 2000.
- [2] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- [3] S. Dettmer W. Stefanie K. Sengstock A. Sanpera G.V. Shlyapnikov M. Lewenstein S.Burger, K. Bongs. Dark solitons in bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 83(25):5198, 1999.