Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea triennale in Fisica

La Soluzione interna di Schwarzschild e le sue Applicazioni

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello
Salvatore Capozziello
Dott. Pasquale Feola
Pasquale Feola

Candidato:
Simone Piscitelli
Matricola N85000923

A.A. 2018/2019

Durante questo lavoro di tesi sono state studiate e ricavate le soluzioni a simmetria sferica delle equazioni di campo di Einstein, dette anche le soluzioni di Schwarzschild, focalizzando l'attenzione sulla sua soluzione interna. Dalla soluzione esterna, tramite il calcolo delle grandezze tensoriali in gioco, si è poi passato al calcolo della soluzione interna; osservando dunque, come queste soluzioni si raccordino tra loro. In seguito questi risultati sono stati applicati al caso delle Stelle di Neutroni, riuscendo ad ottenere delle proprietà e delle informazioni sulla struttura di questi oggetti, che possono essere connesse con i dati osservativi.

Indice

Introduzione

Nel 1915 Albert Einstein formulò, in un suo articolo, la teoria della Relatività Generale. Questa nuova teoria della gravitazione permette di estendere la Relatività Ristretta, includendo anche l'interazione gravitazionale cambiando radicalmente la concezione della gravità e dello spazio-tempo. Infatti, alla base della teoria di Einstein, c'è l'obiettivo di generalizzare le equazioni di Newton per qualsiasi sistema di riferimento, descrivendo l'interazione gravitazionale come una conseguenza della geometria dello spazio-tempo. La teoria di Einstein fu elaborata considerando alcuni principi che ne hanno poi permesso la formulazione. Il principio più importante viene chiamato: **Principio di Equivalenza**; il quale afferma che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono equivalenti. Secondo questo principio gli effetti di un'interazione gravitazionale sono localmente indistinguibili rispetto ad un normale moto accelerato. Una conseguenza di tale principio è il **Principio di Relatività Generale**, che sancisce che il risultato di qualsiasi fenomeno fisico rimanga invariato, indipendentemente dal sistema di riferimento in cui si trova l'osservatore e rispetto a qualsiasi trasformazione di coordinate. Questa condizione si traduce matematicamente, con l'aiuto della geometria differenziale, in quello che viene detto **Principio di Covarianza Generale**. Principio per il quale tutte le leggi della fisica devono essere scritte sotto forma di equazioni covarianti rispetto alle trasformazioni generali di coordinate. Ciò comporta che le equazioni debbano essere in forma tensoriale. In questo modo, Einstein scrisse le equazioni di campo mettendo in evidenza la correlazione che c'è tra la materia e la geometria dello spazio-tempo tramite l'uso di grandezze fondamentali come il tensore di Ricci, lo scalare di Ricci e il tensore energia-impulso.

La prima soluzione alle equazioni di campo di Einstein fu proposta da K. Schwarzschild nel 1916. Essa è una soluzione che descrive il campo gravitazionale generato da una sorgente con simmetria sferica, elettricamente neutra e non rotante; in particolare, questa soluzione descrive la metrica all'esterno della materia, quindi nel vuoto. Supponendo tali caratteristiche della sorgente, ottenne delle soluzioni statiche e stazionarie. Viene definita soluzione stazionaria una soluzione indipendente dal tempo che può evolvere, ma non in maniera esplicita rispetto al tempo. Si definisce, invece, una soluzione statica una soluzione su cui vige una restrizione più forte, ossia che non può evolvere. Di conseguenza la soluzione è simmetrica rispetto al tempo per qualsiasi origine di tempo. Partendo dalla sola richiesta della simmetria sferica, Schwarzschild dimostrò che questa condizione, nel vuoto, implica necessariamente la staticità, risultato noto come **teorema di Birkhoff**. Sono state calcolate pertanto le componenti del tensore di Ricci in modo da determinare la soluzione esterna di Schwarzschild.

La soluzione si estende anche all'interno del corpo massiccio in esame, per il quale vale l'equazione di Einstein all'interno della materia, ovvero quella relazione che lega il tensore di Einstein al tensore energia-impulso. Punto focale del lavoro di tesi è stato calcolare le componenti del tensore energia-impulso, partendo dalla metrica di Schwarzschild, tramite una condizione di conservazione dell'energia, è stato possibile ricavare una importantissima relazione che definisce l'equilibrio idrostatico sferico di un corpo compatto, idealizzato come fluido perfetto. Successivamente, sono state risolte le equazioni di Einstein, il che ha consentito, inanzitutto, di ottenere una prima stima generica della distribuzione di massa all'interno di un corpo compatto e infine, i vari contributi energetici alla stessa, ricordando che sussiste l'equivalenza massa/energia. La risoluzione delle equazioni ha portato ad un altro rilevante risultato : il fenomeno di rigenerazione della pressione.

La soluzione di Schwarzschild è applicabile a vari oggetti osservati nell'universo che possono essere, in prima approssimazione, considerati come sfere non rotanti, in modo tale da ricavare alcune proprietà di struttura come è stato fatto per le Stelle di Neutroni; idealizzate come un nucleo composto da neutroni degeneri ad altissima densità. Analizzando questi corpi secondo il modello a Gas di Fermi, è possibile ottenere le equazioni di struttura stellare che, opportunamente parametrizzate, forniscono una stima di alcune proprietà fisiche come la massa e il raggio.

Il lavoro di tesi è organizzato come segue: Nel capitolo 1 verranno analizzate le equazioni di Einstein e la soluzione esterna di Schwarzschild; nel capitolo 2 analizzeremo invece la soluzione interna di Schwarzschild; nel capitolo 3 l'applicazione alle Stelle di Neutroni e infine verranno riportate le conclusioni.

Capitolo 1 La soluzione esterna di Schwarzschild

1.1 Equazioni di Einstein

Le equazioni di campo di Einstein definiscono il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ che descrive la curvatura dello spazio-tempo in funzione della densità di materia, dell'energia e della pressione, rappresentate tramite il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Le seguenti equazioni sono un sistema di 16 equazioni differenziali alle derivate parziali al secondo ordine. Il numero delle equazioni si riduce a 10 considerando la simmetria del tensore di Einstein e del tensore energia-impulso e si distingue il caso in cui vi sia presenza o assenza di sorgenti di campo gravitazionale. Le equazioni di campo sono:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \tag{1}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

dove R è lo scalare di curvatura di Ricci e $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci; queste sono due grandezze legate al tensore di Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ che determina la presenza di curvatura per una superficie. Storicamente queste relazioni sono state ricavate sia da Einstein stesso, sia dallo scienziato David Hilbert tramite un metodo variazionale. Entrambi andarono alla ricerca di equazioni che fossero:

- scritte in forma tensoriale, per obbedire al principio di covarianza;
- del secondo ordine;
- tali da fornire la soluzione newtoniana per campi deboli.

La differenza sostanziale tra le due relazioni, oltre la presenza del tensore di energia-impulso, è la presenza della costante χ che è la costante di accoppiamento dell'interazione gravitazionale e permette di correlare la geometria alla materia. Questa costante è data dall'espressione:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{3}$$

dove G è la costante di gravitazione universale di Newton e c è la velocità della luce.

1.2 Soluzione esterna di Schwarzschild

Poichè le equazioni di Einstein sono un sistema di 16 equazioni differenziali alle derivate parziali al secondo ordine, esse ammettono infinite soluzioni; pertanto sono state utilizzate le ipotesi di Schwarzschild sulla particolare simmetria del sistema in esame e sui gradi di libertà, in modo da poter semplificare le equazioni di campo e trovare una delle soluzioni esistenti. Le considerazioni fatte da Schwarzschild furono le seguenti :

1) siccome i tensori $g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ e $T_{\alpha\beta}$ sono simmetrici rispetto allo scambio dei due indici, 6 equazioni possono essere eliminate.
2) siccome vale l'identità di Bianchi $\nabla^{\alpha}T_{\alpha\beta} = 0$ per $\beta \in [0; 3]$ si ottengono quattro identità differenziali, pertanto vanno eliminate altre 4 equazioni.

Le equazioni differenziali indipendenti sono quindi sei e determinano le funzioni $g_{\alpha\beta}$ che caratterizzano la geometria dello spazio-tempo. Inoltre, imponendo alcune simmetrie del sistema, Schwarzschild osservò che le equazioni pareggiavano in numero i gradi di libertà del sistema stesso (r, θ, ϕ per simmetria sferica).

La considerazione di partenza da cui si imposta il problema è quella di considerare l'ipotesi di simmetria radiale: le componenti della metrica sono funzioni solamente dal raggio; come se il comportamento del sistema potesse essere considerato identico su una superficie sferica una volta assegnato r.
Al fine di ricavare la metrica di Schwarzschild, si scriva l'invariante metrico in forma generale:

$$ds^2 = A(r,t)c^2dt^2 - B(r,t)dr^2 - 2C(r,t)drdt - D(r,t)d\Omega^2, \tag{4}$$

con $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ed A, B, C, D sono funzioni arbitrarie dello spazio e del tempo.

Le componenti della metrica vengono definite grazie al **Teorema di Killing** :

Il ***Teorema di Killing*** *sancisce che in caso il tensore metrico sia isometrico, ossia:*

$$\nabla^\alpha g_{\alpha\beta} = 0 \tag{5}$$

in un sistema di coordinate curvilinee x^μ *se* $\exists\xi^\alpha : \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$ *allora* $g(x^\mu) = g(x^\mu + \xi^\alpha)$.

Ciò significa che la metrica è invariante per traslazioni rispetto al vettore di Killing ξ^α, per cui è possibile scegliere una trasformazione in modo da scrivere le componenti della metrica in questo modo:

$$g_{00} = e^\nu, g_{11} = -e^\lambda, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2\sin^2\theta, \tag{6}$$

ottenendo:

$$ds^2 = e^\nu c^2dt^2 - -e^\lambda dr^2 - r^2d\Omega^2, \tag{7}$$

dove ν e λ sono funzioni di r e t.

Una volta conosciuta la metrica, è possibile ricavare i simboli di Christoffel in modo da costruire il tensore di Ricci nel seguente modo:

- considero la lagrangiana $L = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$;
- considero l'equazione di Eulero-Lagrange $\frac{d}{ds}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}] = [\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}]$;
- confronto il risultato con le equazioni delle geodetiche.

In forma esplicita la Lagrangiana è:

$$L = \frac{e^\nu(x^0)^2}{ds^2} - \frac{e^\lambda(x^1)^2}{ds^2} - \frac{r^2(x^2)^2}{ds^2} - \frac{r^2\sin^2\theta(x^3)^2}{ds^2}, \tag{8}$$

$$L = e^\nu(\dot{x}^0)^2 - e^\lambda(\dot{x}^1)^2 - r^2(\dot{x}^2)^2 - r^2\sin^2\theta(\dot{x}^3)^2, \tag{9}$$

dove $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$.

A partire da questa Lagrangiana, si determinano le equazioni di Eulero-Lagrange per tutti i valori di α. Per $\alpha = 0$ si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = 2e^{\nu}\dot{x}^0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{ds}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0}\Big] = 2e^{\nu}\ddot{x}^0 + 2e^{\nu}\nu_{\mathrm{r}}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \frac{2}{c}e^{\nu}\nu_{\mathrm{t}}\dot{x}^0\dot{x}^0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = \frac{1}{c}e^{\nu}\nu_{\mathrm{t}}\dot{x}^0\dot{x}^0 - \frac{1}{c}e^{\lambda}\lambda_{\mathrm{t}}\dot{x}^1\dot{x}^1. \tag{12}$$

Si ottiene così l'equazione di Eulero-Lagrange per $\alpha = 0$:

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{2c}\nu_{\mathrm{t}}\dot{x}^0\dot{x}^0 + \nu_{\mathrm{r}}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\lambda_{\mathrm{t}}\dot{x}^1\dot{x}^1 = 0. \tag{13}$$

Confrontando questa espressione con l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \tag{14}$$

posso esplicitare i simboli di Christoffel:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\nu_{\mathrm{t}}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\lambda_{\mathrm{t}}, \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu_{\mathrm{r}}. \tag{15}$$

Per $\alpha = 1$ si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = -2e^{\lambda}\dot{x}^1, \tag{16}$$

$$\frac{d}{ds}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\Big] = -2[e^{\lambda}\ddot{x}^1 + e^{\lambda}\lambda_{\mathrm{r}}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \frac{1}{c}e^{\lambda}\lambda_{\mathrm{t}}\dot{x}^0\dot{x}^1], \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^1} = e^{\nu}\nu_{\mathrm{r}}\dot{x}^0\dot{x}^0 - e^{\lambda}\lambda_{\mathrm{r}}\dot{x}^1\dot{x}^1 - 2r\dot{x}^2\dot{x}^2 - 2r\sin^2\theta\dot{x}^3\dot{x}^3. \tag{18}$$

Analogamente, si ottiene l'equazione di Eulero-Lagrange ed i simboli di Christoffel per $\alpha = 1$:

$$\ddot{x}^1 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_{\mathrm{r}}\dot{x}^0\dot{x}^0 + \frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{r}}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \frac{1}{c}\lambda_{\mathrm{t}}\dot{x}^0\dot{x}^1 - re^{-\lambda}\dot{x}^2\dot{x}^2 - re^{-\lambda}\sin^2\theta\dot{x}^3\dot{x}^3 = 0, \tag{19}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_{\mathrm{r}}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{r}}, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2c}\lambda_{\mathrm{t}}, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta. \tag{20}$$

Per $\alpha = 2$ si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = -2r\dot{x}^2, \tag{21}$$

$$\frac{d}{ds}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2}\Big] = -2[r^2\ddot{x}^2 + 2r\dot{x}^1\dot{x}^2], \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} = -2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{x}^3\dot{x}^3. \tag{23}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per $\alpha = 2$ è:

$$\ddot{x}^2 + \frac{2}{r}\dot{x}^1\dot{x}^2 - \sin\theta\cos\theta\dot{x}^3\dot{x}^3 = 0, \tag{24}$$

da cui si ricavano i seguenti simboli di Christoffel:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{25}$$

Per $\alpha = 3$ si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = -2r^2\sin^2\theta\dot{x}^3, \tag{26}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3}\right] = -2[r^2\sin^2\theta\ddot{x}^3 + 2r^2\sin^2\theta\dot{x}^1\dot{x}^3 + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{x}^2\dot{x}^3], \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0, \tag{28}$$

dove l'ultima equazione vale in quanto la Lagrangiana viene derivata rispetto alla coordinata ciclica ϕ.
Si ottiene così la quarta equazione di Eulero-Lagrange:

$$\ddot{x}^3 + \frac{2}{r}\dot{x}^1\dot{x}^3 + 2\cot\theta\dot{x}^2\dot{x}^3 = 0, \tag{29}$$

da cui, confrontandola sempre con le equazioni delle geodetiche, si ottengono ulteriori simboli di Christoffel:

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta. \tag{30}$$

Ora è possibile costruire il tensore di Ricci contraendo il tensore di Riemann rispetto al primo ed al terzo indice, ottenendo così una espressione esplicita da cui ricavare il tensore stesso:

$$R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\alpha\sigma\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} & \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} & \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\sigma_{\tau\sigma} & \Gamma^\sigma_{\tau\beta} \\ \Gamma^\tau_{\alpha\sigma} & \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}. \end{vmatrix} \tag{31}$$

Sfruttando allora la relazione:

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln(\sqrt{-g})), \tag{32}$$

si può risolvere il determinante e ottenere l'espressione cercata:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(\ln(\sqrt{-g})) + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\ln(\sqrt{-g})) - \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta}, \tag{33}$$

dove g rappresenta il determinante della metrica dato dall'espressione:

$$g = -e^{\nu+\lambda}r^4\sin^2\theta, \tag{34}$$

e di conseguenza

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}r^2\sin\theta. \tag{35}$$

Ciò implica che:

$$\ln(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}(\nu + \lambda) + 2(\ln(r)) + (\ln(\sin\theta)). \tag{36}$$

In particolare, l'espressione di $R_{\alpha\beta}$ è caratterizzata dai due termini $\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ e $\Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta}$. Questi termini vanno esplicitati tramite le relazioni:

$$\Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta} = \Gamma^0_{\alpha 0}\Gamma^0_{0\beta} + \Gamma^1_{\alpha 0}\Gamma^0_{1\beta} + \Gamma^0_{\alpha 1}\Gamma^1_{0\beta} + \Gamma^1_{\alpha 1}\Gamma^1_{1\beta} \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^2}\Gamma^2_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^3}\Gamma^3_{\alpha\beta}, \tag{38}$$

tramite le quali vengono calcolate le componenti del tensore di Ricci R_{00}, R_{01} e R_{11}. Determiniamo allora le espressioni di questi due termini in funzione delle componenti del tensore di Ricci che si andranno a calcolare.

Per $\alpha = \beta = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma^\tau_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} \\ &= \frac{1}{4c^2}\nu_t^2 + \frac{1}{4c^2}\lambda_t^2 + \frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}\nu_r^2 + \frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}\nu_r^2 \\ &= \frac{1}{4c^2}(\nu_t^2 + \lambda_t^2) + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r^2, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{00} &= \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{00} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{00} \\ &= \frac{1}{2c^2}\nu_{tt} + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r(\nu_r - \lambda_r)e^{\nu-\lambda}. \end{aligned} \tag{40}$$

Per $\alpha = \beta = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma^\tau_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau 1} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} + 2\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} \\ &= \frac{1}{4}\nu_r^2 + \frac{1}{2c^2}e^{\lambda-\nu}\lambda_t^2 + \frac{1}{4}\lambda_r^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{11} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{11} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda_{rr}. \tag{42}$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma^\tau_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{1\tau} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} \\ &= \frac{1}{4c}\nu_t\nu_r + \frac{1}{4c}\lambda_t\lambda_r + \frac{1}{4c}\lambda_t\nu_r + \frac{1}{4c}\lambda_t\nu_r \\ &= \frac{1}{4c}(\nu_t\nu_r + \lambda_t\lambda_r + 2\lambda_t\nu_r), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{01} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{01} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}(\nu_{rt} + \lambda_{rt}). \tag{44}$$

Adesso calcoliamo i termini $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\ln(\sqrt{-g}))$.

Per $\alpha = \beta = 0$ si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma^\tau_{00}\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\ln(\sqrt{-g})) &= \Gamma^0_{00}\frac{\partial}{\partial x^0}(\ln(\sqrt{-g})) + \Gamma^1_{00}\frac{\partial}{\partial x^1}(\ln(\sqrt{-g})) \\ &= \frac{1}{4c^2}\nu_t^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r\left(\frac{1}{2}\nu_r + \frac{1}{2}\lambda_r + \frac{2}{r}\right).\end{aligned} \tag{45}$$

Per $\alpha = \beta = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\Gamma^\tau_{11}\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\ln(\sqrt{-g})) &= \Gamma^0_{11}\frac{\partial}{\partial x^0}(\ln(\sqrt{-g})) + \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial x^1}(\ln(\sqrt{-g})) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_r\left(\frac{1}{2}\nu_r + \frac{1}{2}\lambda_r + \frac{2}{r}\right).\end{aligned} \tag{46}$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\Gamma^\tau_{01}\frac{\partial}{\partial x^\tau}(\ln(\sqrt{-g})) &= \Gamma^0_{01}\frac{\partial}{\partial x^0}(\ln(\sqrt{-g})) + \Gamma^1_{01}\frac{\partial}{\partial x^1}(\ln(\sqrt{-g})) \\ &= \frac{1}{4c}\nu_r(\nu_t + \lambda_t) + \frac{1}{2c}\lambda_t\left(\frac{1}{2}\nu_r + \frac{1}{2}\lambda_r + \frac{2}{r}\right).\end{aligned} \tag{47}$$

Infine, possiamo calcolare i termini $\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(\ln(\sqrt{-g}))$ per tutte e tre le combinazioni possibili. Otteniamo che:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^1}(\ln(\sqrt{-g})) = \frac{1}{2c}\left(\nu_{rt} + \lambda_{rt}\right), \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0}(\ln(\sqrt{-g})) = \frac{1}{2c^2}\left(\nu_{tt}\right), \tag{49}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1}(\ln(\sqrt{-g})) = \frac{1}{2}\left(\nu_{rr} + \lambda_{rr}\right) - \frac{2}{r^2}. \tag{50}$$

Adesso è possibile calcolare le componenti del tensore di Ricci semplicemente sostituendo le espressioni appena trovate. Partendo dalla componente R_{01}, si possono ottenere due risultati interessanti:

$$R_{01} = \frac{1}{4c}\nu_r(\nu_t + \lambda_t) + \frac{1}{2c}\lambda_t\left(\frac{1}{r}\nu_r + \frac{1}{2}\lambda_r + \frac{2}{r}\right) - \frac{1}{4c}(\nu_t\nu_r + \lambda_t\lambda_r + 2\nu_r\lambda_t), \tag{51}$$

$$R_{01} = \frac{1}{cr}\lambda_t. \tag{52}$$

Ponendo la componente uguale a zero si ottiene la prima equazione di campo:

$$R_{01} = \frac{1}{cr}\lambda_t = 0, \tag{53}$$

dalla quale si ricava che λ sia del tipo $\lambda(r,t) = \lambda(r)$ e che quindi non sia una funzione del tempo; ciò significa che le derivate di qualsiasi ordine rispetto al tempo di questo parametro saranno nulle. Inoltre, si suppone che ν abbia le stesse caratteristiche di λ; per cui anche ν è un parametro indipendente dal tempo.
L'intepretazione di questo risultato è noto come **Teorema di Birkoff**:

*il **Teorema di Birkhoff** stabilisce che quando un corpo a simmetria sferica evolve in maniera uniforme e simmetrica, lo spazio-tempo esterno è statico.*

Analogamente, determiniamo le rimanenti componenti del tensore di Ricci:

$$R_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{2}{r}\nu_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r), \tag{54}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{2}{r}\lambda_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r), \tag{55}$$

dove le derivate temporali dei parametri λ e ν si annullano.
Queste equazioni, poste uguali a zero, rappresentano le altre due equazioni di campo:

$$\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{2}{r}\nu_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r\right) = 0, \tag{56}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{2}{r}\lambda_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r\right) = 0. \tag{57}$$

Affinchè siano valide queste uguaglianze si richiede che i termini in parentesi siano uguali a zero, ottenendo:

$$\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{2}{r}\nu_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r\right) = 0, \tag{58}$$

$$\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{2}{r}\lambda_r - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r\right) = 0. \tag{59}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\nu_r + \lambda_r = 0, \tag{60}$$

$$\nu_r = -\lambda_r, \tag{61}$$

$$\nu + \lambda = C, \tag{62}$$

dove C è una costante; questa costante dev'essere nulla affinchè venga rispettata la proprietà di piattezza asintotica, ossia, che si abbia a grandi distanze ($r \to \infty$) una metrica piatta rappresentata dalle relazioni $e^{\nu} \to 1$ e $e^{-\lambda} \to 1$.
Per ottenere infine un'espressione delle componenti della metrica, consideriamo che l'equazione di campo per R_{00} si può scrivere in modo equivalente tramite l'espressione:

$$\frac{1}{r}(re^{\nu})'' = 0. \tag{63}$$

Integrando due volte si ottiene:

$$e^{\nu} = A + \frac{B}{r}, \tag{64}$$

dove la costante A si trova ancora una volta imponendo la condizione di piattezza asintotica

$$A = \lim_{r\to\infty} \left(e^{\nu} - \frac{B}{r} \right) = 1, \tag{65}$$

mentre la costante B si trova facendo riferimento al limite post-Newtoniano:

$$e^{\nu} = g_{00} = 1 + \frac{B}{r} \Rightarrow 1 + \frac{B}{r} = 1 - \frac{2\phi}{c}, \tag{66}$$

$$B = -\frac{2\phi}{c} r. \tag{67}$$

Poichè $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{R_s}{r}$, dove $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ è una grandezza chiamata raggio di Schwarzschild, possiamo scrivere la metrica di Schwarzschild come:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{68}$$

Questa soluzione, trovata da Karl Schwarzschild, determina completamente il campo gravitazionale nel vuoto creato da qualsiasi distribuzione di massa a simmetria centrale. Il raggio di Schwarzschild è il raggio gravitazionale del corpo di massa M.

Capitolo 2 La soluzione interna di Schwarzschild

2.1 Componente temporale dell'equazione di Einstein

La soluzione interna di Schwarzschild caratterizza e definisce le componenti della metrica internamente ad un corpo compatto come le Stelle di Neutroni e di conseguenza, la relazione tra la metrica, il potenziale gravitazionale e la distribuzione interna della massa della stessa. La distribuzione di massa viene inizialmente schematizzata come quella di un fluido perfetto.

Per determinare le componenti della metrica, consideriamo l'equazione di campo di Einstein per la componente temporale, ricordando che anche rispetto a tale procedimento valgono le considerazioni di Schwarzschild sulla simmetria del problema e sui gradi di libertà fatte in precedenza.
L'equazione da considerare è:

$$G_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{00}, \tag{69}$$

dove T_{00} è la componente temporale completamente covariante del tensore energia-impulso. Per calcolare questa componente, esplicitiamo il tensore energia-impulso secondo la relazione:

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \tag{70}$$

dove ϵ è la densità propria di energia, p la pressione e $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ la quadrivelocità. Le componenti di questo tensore possono essere facilmente calcolate considerandole singolarmente, analizzando inanzitutto la metrica e la quadrivelocità. La metrica rimane quella di Schwarzschild secondo le ipotesi iniziali

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2\theta), \tag{71}$$

mentre la quadrivelocità è calcolata di conseguenza tramite la relazione:

$$\frac{ds^2}{ds^2} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1. \tag{72}$$

In approssimazione di fluido a riposo si ha $u^k = 0$ per $k = 1{,}2{,}3$. Di conseguenza l'unica componente non nulla è:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = e^{-\frac{\nu}{2}}, \tag{73}$$

$$u^\alpha = (e^{-\frac{\nu}{2}},0,0,0). \tag{74}$$

A questo punto possiamo calcolare le componenti del tensore energia-impulso:

$$T^{00} = (\epsilon + p) u^0 u^0 - p g^{00} = \epsilon e^{-\nu}, \tag{75}$$

$$T^{11} = (\epsilon + p) u^1 u^1 - p g^{11} = p e^{-\lambda}, \tag{76}$$

$$T^{22} = (\epsilon + p) u^2 u^2 - p g^{22} = \frac{p}{r^2}, \tag{77}$$

$$T^{33} = (\epsilon + p) u^3 u^3 - p g^{33} = \frac{p}{r^2 \sin^2\theta}, \tag{78}$$

ottenendo:
$$T^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(\epsilon e^{-\nu}, pe^{-\lambda}, \frac{p}{r^2}, \frac{p}{r^2\sin^2\theta}\right). \tag{79}$$

E' possibile ottenere un'espressione esplicita di G_{00} sostituendo le grandezze presenti nell'equazione di campo, calcolate nel capitolo precedente e di seguito riportate:

$$g_{00} = e^{\nu}, \tag{80}$$
$$R_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + 2\frac{\nu}{r}\right), \tag{81}$$
$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\ &= e^{-\lambda}\Big[\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2}{r}(\nu' - \lambda') + \frac{2}{r^2}\Big], \end{aligned} \tag{82}$$

dove $'$ indica la derivata fatta rispetto ad r. Sostituendo otteniamo:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{\nu}[1 - (re^{-\lambda})'], \tag{83}$$

questa espressione viene poi confrontata con

$$G_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{00}, \tag{84}$$

dove $T_{00} = \epsilon e^{\nu}$. Uguagliando le relazioni si ottiene:

$$\frac{1}{r^2}[1 - (re^{-\lambda})'] = \frac{8\pi G_N}{c^4}\epsilon, \tag{85}$$

da cui:

$$\frac{d}{dr}[re^{-\lambda}] = 1 - \epsilon\frac{8\pi G_N}{c^4}r^2. \tag{86}$$

Integrando tale equazione si ha:

$$[re^{-\lambda}] = r - \frac{8\pi G_N}{c^4}\int \epsilon r^2 dr, \tag{87}$$

da cui

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G_N}{c^4 r}\int \frac{4\pi\epsilon r^2}{c^2}dr, \tag{88}$$

dove definisco

$$M(r) = \int \frac{4\pi\epsilon r^2}{c^2}dr, \tag{89}$$

ottenendo così l'espressione della componente della metrica g_{11}:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G_N}{c^4 r}M(r). \tag{90}$$

Dalla condizione di raccordo della soluzione interna con quella esterna, si osserva che la quantità $M(r)$ appena definita non può non essere che la distribuzione di massa del corpo:

$$M = M(r) = \frac{1}{c^2}\int_0^R 4\pi\epsilon r^2 dr, \tag{91}$$

dove l'integrazione viene effettuata dal centro fino al bordo di raggio R, oltre al quale si annullano la pressione e la densità. Abbiamo così ottenuto una prima espressione di una proprietà relativa a questi corpi.
E' giusto precisare, inoltre, che questa espressione rappresenta la distribuzione di massa totale del corpo compatto, comprendendo i contributi energetici gravitazionali e quelli non gravitazionali.

2.2 Equilibrio idrostatico sferico

L'espressione della seconda componente della metrica è intrinsecamente legata ad un altro risultato utile per i corpi compatti determinato in questo paragrafo. L'ipotesi di partenza di fluido perfetto consente di schermatizzare le stelle come sistemi soggetti ad un equilibrio tra la gravità, che tende a far collassare il corpo su se stesso, e la pressione che tende ad opporsi al collasso stesso. Questa pressione nasce da fenomeni quantistici e si basa sul fatto che le particelle che compongono la stella non si possono agglomerare all'infinito in quanto si avrebbe una violazione del principio di Pauli. Questa pressione prende il nome di pressione di degenerazione.

L'equazione che rappresenta tale equilibrio si ottiene da una condizione di conservazione dell'energia tradotta nell'espressione:

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0, \tag{92}$$

dove il tensore $T^{\beta}_{\alpha;\beta}$ è esprimibile tramite la seguente relazione:

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\sqrt{-g} T^{\beta}_{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu} = 0. \tag{93}$$

Le componenti miste del tensore energia-impulso sono ricavabili ancora una volta mediante la contrazione di un indice tramite il tensore metrico:

$$T^0_0 = g_{00} T^{00} = \epsilon, \tag{94}$$

$$T^1_1 = g_{11} T^{11} = -p, \tag{95}$$

$$T^2_2 = g_{22} T^{22} = -p, \tag{96}$$

$$T^3_3 = g_{33} T^{33} = -p. \tag{97}$$

Per $\alpha = 0{,}2{,}3$ si ottengono banali identità dovute alle ipotesi iniziali sulle simmetrie del problema. Invece, per $\alpha = 1$, si ottiene che il primo termine dell'equazione vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{-g} T^{\beta}_1) &= \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{-g} T^1_1) = \frac{\partial}{\partial r} (p r^2 \sin\theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}) \\ &= -e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \left[\frac{1}{2} p r^2 \sin\theta (\nu' + \lambda') + 2pr \sin\theta + r^2 \sin\theta \frac{\partial p}{\partial r} \right]. \end{aligned} \tag{98}$$

Osservando che

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}}, \tag{99}$$

allora si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{-g}T_1^1) = -\frac{1}{2}p(\nu' + \lambda') - \frac{2p}{r} - \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{100}$$

il secondo termine invece vale:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g_{\mu\nu,1}T^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\Big[g_{00,1}T^{00} + g_{11,1}T^{11} + g_{22,1}T^{22} + g_{33,1}T^{33}\Big] \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\epsilon\nu' - p\lambda' - \frac{2p}{r} - \frac{2p}{r}\Big]. \end{aligned} \tag{101}$$

L'equazione di conservazione diventa allora:

$$\frac{1}{2}p(\nu' + \lambda') + \frac{2p}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2}\epsilon\nu' + \frac{1}{2}p\lambda' + \frac{2p}{r}, \tag{102}$$

da cui

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(\epsilon + p)\frac{d\nu}{dr} = 0, \tag{103}$$

che rappresenta l'equazione dell'equilibrio idrostatico sferico.
Questa equazione mette in evidenza la relazione di proporzionalità che c'è tra il gradiente di pressione e il potenziale gravitazionale.
Inoltre, sottolineiamo che nel limite di basse energie si ha:

$$g_{00} = e^{\nu} \approx 1 + \nu \approx 1 - \frac{2U}{c^2}, \tag{104}$$

$$\nu \approx -\frac{2U}{c^2} \qquad \epsilon \approx \rho c^2 \gg \rho. \tag{105}$$

Di conseguenza, l'equazione di equilibrio idrostatico coincide con l'equazione di Poisson per un sistema classico:

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{dU}{dr}. \tag{106}$$

Tale equazione esprime la condizione classica di equilibrio idrostatico, cioè il bilancio fra l'attrazione gravitazionale ed il gradiente di pressione. Invece, l'equazione relativistica che è stata ricavata, rappresenta quindi una generalizzazione dell'equazione dell'idrostatica nella quale si tiene conto anche del contributo della pressione e delle energie non gravitazionali.

2.3 La soluzione interna di Schwarzschild

In questo paragrafo viene determinata la soluzione interna di Schwarzschild; per farlo è necessario avanzare un'altra ipotesi strutturale sui corpi compatti: quella di fluido incompressibile. L'ipotesi in questione è rappresentata matematicamente dalla seguente condizione: $\epsilon = \rho c^2$ con $\rho = costante$. Sostituendo questa relazione nell'equazione di equilibrio idrostatico trovata precedentemente e integrando si ottiene:

$$\rho c^2 + p = cost \cdot e^{\frac{-\nu}{2}} = \frac{c^4}{8\pi G_N}De^{\frac{-\nu}{2}}, \tag{107}$$

dove D è una costante.
Posso utilizzare questa espressione nella risoluzione del problema principale di questo paragrafo: trovare e^{ν}.
Considero perciò l'equazione:

$$G^0_0 - G^1_1 = \frac{8\pi G_N}{c^4}(T^0_0 - T^1_1), \tag{108}$$

dove

$$T^0_0 - T^1_1 = \rho c^2 - p = \frac{c^4}{8\pi G_N} D e^{\frac{-\nu}{2}}, \tag{109}$$

mentre, per quanto riguarda il membro sinistro dell'equazione, sono state ottenute le seguenti espressioni per le componenti miste del tensore di Einstein:

$$G^0_0 = g^{00}G_{00} = e^{-\nu}\frac{e^{\nu}}{r^2}\Big[1 - (re^{-\lambda})'\Big], \tag{110}$$

$$G^1_1 = g^{11}G_{11} = -e^{-\lambda}\Big[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r^2}\Big]. \tag{111}$$

Sottolineiamo inoltre che la componente covariante G_{00} è stata calcolata nel paragrafo precedente ed è stato applicato un procedimento analogo per G_{11}.
Sostituendo queste espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}(\lambda' + \nu') &= \frac{8\pi G_N}{c^4}(\rho c^2 + p)r; \\ e^{-\lambda}(\lambda' + \nu') &= \frac{8\pi G_N}{c^4}\frac{c^4}{8\pi G_N} r D e^{-\frac{\nu}{2}}; \\ e^{-\lambda}(\lambda' + \nu') &= rDe^{-\frac{\nu}{2}}; \\ e^{\frac{\nu}{2}}e^{-\lambda}(\lambda' + \nu') &= rD; \\ e^{-\lambda}\lambda' e^{\frac{\nu}{2}} + e^{\frac{\nu}{2}}\nu' e^{-\lambda} &= rD. \end{aligned} \tag{112}$$

Osserviamo ora che aver supposto $\epsilon = \rho c^2$ comporta una variazione nell'espressione della distribuzione di massa trovata in precedenza:

$$M(r) = \int \frac{4\pi\epsilon}{c^2} r^2 dr = 4\pi\rho \int r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\rho r^3, \tag{113}$$

e, di conseguenza, varia anche la componente della metrica trovata:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G_N M(r)}{c^2 r} = 1 - \frac{2G_N}{c^2 r}\frac{4}{3}\pi\rho r^3, \tag{114}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \quad r_0^2 = \frac{3c^2}{8\pi G_N \rho}. \tag{115}$$

Possiamo così sfruttare queste ultime relazioni e sostituirle nella equazione precedente, semplificandola.

Inanzitutto vale

$$e^{-\lambda}\lambda' e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{d}{dr}\left(e^{-\lambda}\right)e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{d}{dr}\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}\right)e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{2r}{r_0^2}e^{\frac{\nu}{2}}, \tag{116}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}}\nu' e^{-\lambda} = 2\frac{d}{dr}\left(e^{\frac{\nu}{2}}\right)\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}\right), \tag{117}$$

da cui si ricava

$$\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{d}{dr}\left(e^{\frac{\nu}{2}}\right) + \frac{r}{r_0^2}e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2}Dr. \tag{118}$$

Integrando allora di ottiene

$$e^{\frac{\nu}{2}} = A - B\Big[1-\Big(\frac{r^2}{r_0^2}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{119}$$

dove $A = \frac{1}{2}Dr_0^2$ e B è una costante positiva poichè $\nu' > 0$.
Bisogna a questo punto determinare con esattezza le costanti A e B. Imponendo le condizioni di bordo sulla superficie della stella $r = R$ e $p = 0$, la soluzione dell'equazione di equilibrio idrostatico diventa

$$\rho c^2 = \frac{c^4}{8\pi G_N}De^{-\frac{\nu(R)}{2}}, \tag{120}$$

$$D = \frac{8\pi G_N \rho}{c^2}e^{\frac{\nu(R)}{2}}, \tag{121}$$

da cui sostituendo nell'espressione di A si ha:

$$A = \frac{1}{2}Dr_0^2 = \frac{3}{2}e^{\frac{\nu(R)}{2}}, \tag{122}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{2}{3}A \rightarrow \frac{2}{3}A - A = \frac{A}{3} = -B\Big[1-\Big(\frac{R}{r_0}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{123}$$

$$e^{\frac{\nu}{2}} = B\Big\{3\Big[1-\Big(\frac{R}{r_0}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} - \Big[1-\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}. \tag{124}$$

Si impone ora la condizione di raccordo tra le soluzioni interna ed esterna sul bordo

$$e^{\nu}_{\text{ext}} = e^{-\lambda}_{\text{ext}} = 1 - \frac{2G_N M(r)}{c^2 R} = 1 - \Big(\frac{R}{r_0}\Big)^2, \tag{125}$$

ciò implica che

$$B = \frac{1}{2}, \tag{126}$$

ottenendo infine la soluzione cercata

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \Big\{\frac{3}{2}\Big[1-\Big(\frac{R}{r_0}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Big[1-\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}. \tag{127}$$

Tutto ciò ci permette, infine, di scrivere l'equazione per la pressione:

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{3\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{128}$$

In questa equazione il denonimatore non può mai annullarsi; imponendo che esso sia positivo anche in $r = 0$, si ottiene si ottiene la disuguaglianza $\frac{R_s}{r} < \frac{8}{9}$. Questa disuguaglianza ci dice che la superficie fisica della stella deve essere esterna alla superficie patologica, cioè al cosiddetto orizzonte degli eventi.

Capitolo 3 La Stella di Neutroni

3.1 Rigenerazione della pressione

La Rigenerazione della pressione è un importante fenomeno che non solo contribuisce all'equilibrio idrostatico sferico, consentendo alla pressione di assumere il ruolo di massa passiva, ma influenza anche il potenziale gravitazionale.
Per giungere all'equazione che definisce questo fenomeno e ricavarne quindi una espressione analitica, consideriamo l'equazione di campo per la componente radiale del tensore di Einstein:

$$G_{11} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{11}, \tag{129}$$

dove

$$T_{11} = pe^{\lambda}, \tag{130}$$

$$G_{11} = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{\lambda}}{r^2}. \tag{131}$$

Osserviamo che G_{11} è stato calcolato ricavando la componente R_{11} del tensore di Ricci seguendo lo stesso procedimento usato per le altre componenti. L'equazione di campo assume la forma:

$$\frac{8\pi G_N}{c^4} pe^{\lambda} = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{\lambda}}{r^2}, \tag{132}$$

da cui

$$\nu' = e^{\lambda} \left(\frac{8\pi G_N}{c^4} pr + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r}. \tag{133}$$

Ricordando che $e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right)^{-1}$, l'equazione precedente può essere riscritta come

$$\nu' = \frac{d\nu}{dr} = \frac{\frac{8\pi G_N}{c^4} pr^3 + \frac{2G_N M}{c^2}}{r^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2}\right)}. \tag{134}$$

Come si vede da quest'ultima espressione, ν' dipende dalla pressione. Ciò significa che la pressione fornisce un contributo al potenziale gravitazionale. Siccome nel limite classico vale

$$\nu \approx -\frac{2U}{c^2}, \tag{135}$$

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{G_N M(r)}{r^2}, \tag{136}$$

che è l'integrale primo dell'equazione di Poisson, ν è quindi collegata al potenziale gravitazionale e essendo anche dipendente da p si osserva che ad un aumento della pressione corrisponde un aumento del potenziale gravitazionale. Dunque, la pressione ha un duplice ruolo: contribuisce alla massa passiva nell'equazione dell'equilibrio idrostatico e contribuisce alla generazione del campo gravitazionale. Questo meccanismo viene chiamato *rigenerazione della pressione.*

3.2 Applicazioni: Stelle di Neutroni

La metrica di Schwarzschild può essere utilizzata per ricavare delle proprietà strutturali dei corpi compatti siccome molti di essi possono essere considerati sferici e non rotanti. Le Stelle di Neutroni, in particolare, non fanno eccezione e vengono schematizzate come nuclei molto densi ($\rho \geq 10^{15} gr/cm^3$) composti da neutroni degeneri. Per neutroni degeneri si intende uno stato della materia soggetta ad una tale pressione che i neutroni rischiano di assumere stati quantistici uguali ma, per via del Principio di esclusione di Pauli, ciò non succede impedendo il collasso della stella.

Su una struttura così complessa è impossibile pensare che vi sia assenza di contaminazioni di protoni e elettroni; viene infatti stimato un rapporto *neutroni/protoni* e *neutroni/elettroni* di circa 8:1.

In questa trattazione viene utilizzato il modello a gas di Fermi, secondo il quale il numero di fermioni di impulso tra P e $P + dP$ è dato dalla seguente espressione

$$N(p)dP = \frac{8\pi P^2 dP}{h^3}. \tag{137}$$

Il modello a gas di Fermi stima una serie di relazioni per il calcolo di alcune caratteristiche strutturali dei corpi compatti.

$$n = \int_0^{P_F} N(P)dP = \frac{8\pi P_F^{3\,3}}{3h} = \text{Densità di neutroni}, \tag{138}$$

$$p = \frac{1}{3}\int_0^{P_F} N(P)PvdP = \frac{8\pi}{3mh^3}\int_0^{P_F} \frac{P^4 dP}{\sqrt{1+\left(\frac{P}{mc}\right)^2}} = \text{pressione}, \tag{139}$$

$$\epsilon = \int_0^{P_F} N(P)E(P)dP = \text{Densità di energia a riposo}, \tag{140}$$

dove P_F è l'impulso di Fermi. Definendo $y = \frac{E_F}{mc^2} = \sqrt{1+\left(\frac{P_F}{mc}\right)^2} \geq 1$, vengono risolti questi integrali e ottenute le seguenti relazioni:

$$p = kf(y), \tag{141}$$

$$\epsilon = kg(y), \tag{142}$$

$$n = \frac{8k}{mc^2}(y^2-1)^{\frac{3}{2}}, \tag{143}$$

che prendono il nome di **Equazioni di Stato**, scritte in forma parametrica, dove:

$$f(y) = y\sqrt{y^2-1}(2y^2-5) + 3\ln(y+\sqrt{y^2-1}), \tag{144}$$

$$g(y) = 8y(y^2-1)^{\frac{3}{2}} - f(y), \tag{145}$$

$$k = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} = 6{,}8 \cdot 10^{35} erg/cm^3. \tag{146}$$

Inoltre, vale la relazione:

$$\frac{df}{dy} = 8(y^2-1)^{\frac{3}{2}}, \tag{147}$$

e, in aggiunta, sulla superficie della stella di neutroni vale la relazione $y = 1$, cioè $E = mc^2$. Introducendo ora il parametro adimensionale s, possiamo scrivere in una forma semplificata le equazioni di struttura che caratterizzano la stella:

$$r = \alpha s \quad \alpha = \frac{c^2}{\sqrt{4\pi G_N k}} = 11.9Km \tag{148}$$

$$M(r) = \frac{4\pi k}{c^2}\alpha^3 m(s) = 8.1M_{\odot}m(s) \tag{149}$$

dove $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}g$ è la massa del Sole. Le equazioni della distribuzione di massa e di $\nu(r)'$ assumono la forma:

$$\frac{dm}{ds} = s^2 g(y), \quad m(0) = 0, \tag{150}$$

$$s^2\frac{dy}{ds} = -y\frac{m(s) + s^3 f(y)}{1 - \frac{2m(s)}{s}}, \quad y(0) = y_0 > 1. \tag{151}$$

Queste equazioni prendono il nome di **Equazioni di Struttura** e sono scritte in forma parametrica. Esse vanno integrate numericamente tra $s = 0$ e $s = s_0$ in modo che $y(s_0) = 1$, ossia, $E = mc^2$ sulla superficie della stella.
Per quanto riguarda i potenziali gravitazionali $\lambda(r)$ e $\nu(r)$, anch'essi vengono modificati:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(s)}{s}, \tag{152}$$

$$e^{\nu} = \left[1 - \frac{2m(s_0)}{s_0}\right]y^2(s). \tag{153}$$

Queste due ultime espressioni garantiscono il raccordo con la soluzione di Schwarzschild esterna. Dalla conoscenza delle funzioni $y(s)$ e $m(s)$ e ricordando l'espressione della massa propria

$$M_p = 4\pi\int_0^R pe^{\frac{\lambda}{2}}r^2 dr, \tag{154}$$

è possibile ricavare le espressioni della massa propria e del raggio di Schwarzschild della stella di neutroni:

$$\bar{M} = 8.1M_{\odot}\bar{m}, \quad \bar{m} = \int_0^{s_0}\frac{8(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{2m(s)}{s}\right)^{\frac{1}{2}}}s^2 ds, \tag{155}$$

$$\bar{R} = \bar{s_0}11.9km, \tag{156}$$

$$\bar{s_0} = \int_0^{s_0} ds\left(1 - \frac{2m(s)}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{157}$$

Le soluzioni di questo problema di equilibrio costituiscono una famiglia uniparametrica in cui il parametro è y_0. Equivalentemente, queste equazioni possono essere scritte in funzione di un nuovo parametro noto come densità neutronica centrale:

$$\rho_c = \frac{8k}{c^2}(y_0^2 - 1)^3 = 6 \cdot 10^{15}gr/cm^3(y_0^2 - 1)^{\frac{3}{2}}. \tag{158}$$

Nella tabella seguente riportiamo alcuni casi indicativi che mostrano come la sequenza degli equilibri abbia un massimo della massa osservabile, della massa propria, dell'energia di legame in funzione della densità centrale.
Si dimostra che, nel nostro caso, l'energia di legame è data da:

$$E = G_N \int_0^M \frac{MdM(r)}{r}. \tag{159}$$

$\sqrt{y_0^2 - 1}$	$\rho_c(gr/cm^3)$	s_0	$m(s_0)$	$\bar{m}(s_0)$	$\bar{R}(km)$	$M/M_\odot$
0.1000	$6.06 \cdot 10^{12}$	2.87	0.0105	0.0105	34.3	0.0855
0.2500	$9.50 \cdot 10^{13}$	1.76	0.0370	0.0373	21.3	0.3050
0.5000	$7.57 \cdot 10^{14}$	1.14	0.0741	0.0760	14.8	0.6030
0.7500	$2.56 \cdot 10^{15}$	0.84	0.0878	0.0910	11.5	0.7150
0.8331	$5.57 \cdot 10^{15}$	0.77	0.0885	0.0918	10.3	0.7190
1.0000	$6.06 \cdot 10^{15}$	0.66	0.0866	0.0896	9.14	0.7050

Le misure riportate in tabella evidenziano quali sono le caratteristiche tipiche delle stelle di neutroni. Si è osservato infatti che vi è un massimo per la massa corrispondente ad un valore di $0.7190 M_\odot$ in relazione ad una densità centrale di circa $5 \cdot 10^{15} gr/cm^3$. In quelle condizioni si realizzano allora le caratteristiche tipiche delle stelle di neutroni, ossia
- Massa dell'ordine della massa Solare,
- Raggio dell'ordine di 10km,
- Energia di legame per unità di massa uguale a 3,6%.

Questi risultati dimostrano come il modello di fluido perfetto e la metrica di Schwarzschild siano coerenti con le osservazioni sperimentali effettuate sulle stelle di neutroni.

Conclusioni

La soluzione interna di Schwarzschild è una soluzione applicabile alla maggioranza dei corpi nel cosmo e si è dimostrata molto versatile nella determinazione di una stima di alcune caratteristiche delle stelle di neutroni. Nel corso del lavoro di tesi sono state calcolate tutte le componenti del tensore di Ricci, sotto le ipotesi di simmetria fatte da Schwarzschild, ricavando così l'espressione analitica della soluzione esterna. Nella seconda parte è stato analizzato il fenomeno di equilibrio idrostatico, fondamentale per determinare informazioni sulla struttura degli oggetti compatti come le stelle di neutroni, osservando che alla base di questo fenomeno vi è anche il meccanismo di rigenerazione della pressione. La stretta dipendenza tra potenziale gravitazionale e pressione, osservabile dalle equazioni, spiega il motivo per il quale questi oggetti non collassano e rimangono stabili. Infine, partendo dall'ipotesi di fluido perfetto e incompressibile, è stato usato il modello di Gas di Fermi, analogamente alla trattazione di Chandrasekar, per ricavare delle equazioni parametrizzate dette equazioni di struttura che, una volta risolte, hanno messo in evidenza le caratteristiche fisiche delle stelle di neutroni, quali il raggio, circa $10km$, e la massa, dell'ordine della massa solare.
Queste stelle compatte presenti nell'universo, sono oggetti molto studiati perchè lo stato della materia, altamente degenere, ci potrebbe dare delle informazioni su stati fisici della materia confrontabili con quello dell'universo primordiale, date le loro condizioni di temperatura e regimi gravitazionali estremi. Nonostante la difficoltà dello studio di questi corpi nel 2011 l'agenzia spaziale ESA ha reso pubblico un progetto che partirà nel 2020 denominato progetto *LOFT Large Observatory For x-ray Timing.* Questo progetto consiste nel lancio di un satellite ad alta precisione che consentirà di studiare al meglio l'emissione di raggi X delle stelle di neutroni per determinare il comportamento della materia, le equazioni di struttura in prossimità delle stelle stesse e gli effetti di campi gravitazionali forti in modo da poter comprenderne meglio la struttura interna. In occasione del lancio di questo nuovo satellite sarà possibile quindi effettuare per la prima volta misure dirette delle stelle di neutroni e ottenere informazioni più precise su questi corpi.

Bibliografia

[1] A. Einstein (1916). *"The Foundation of the General Theory of Relativity"*. Annalen der Physik. 354 (7): 769.

[2] A. Einstein (November 25, 1915). *"Die Feldgleichungen der Gravitation"*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: 844–847.

[3] S. Carroll (2004). *Spacetime and Geometry – An Introduction to General Relativity.* pp. 151–159.

[4] Ø. Grøn; S. Hervik (2007). *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology (illustrated ed.).* Springer Science & Business Media. p. 180.

[5] H. Stephani; D. Kramer;M. MacCallum;C. Hoenselaers;E. Herlt (2003). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* Cambridge University Press.

[6] A.D. Rendall *"Theorems on existence and global dynamics for the Einstein equations." Living Reviews in Relativity* 8.1 (2005): 6.

[7] S. Weinberg (1972). *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons.

[8] J.A. Peacock (1994). *Cosmological Physics.* Cambridge University Press.

[9] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1916 (1916), pagg. 424-434.

[10] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitatstheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (1915) 778, Addendum-ibid. (1915) 799.

[11] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Cambrigdge 1923, MA: Harvard University Press.

[12] R.M. Wald, *General relativity*, University Of Chicago Press, 1984

[13] J.R. Oppenheime;G.M. Volkoff (1939). *"On Massive Neutron Cores"*. Physical Review. 55 (4): 374–381.

[14] C.W. Misner;K.S. Thorne;J.A. Wheeler (2017). *"Coordinates and Metric for a Static, Spherical System". Gravitation*. Princeton University Press. pp. 594–595.

[15] R.C. Tolman (1939). *"Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid"*. Physical Review. 55 (4): 364–373.

[16] S. Chandrasekhar (1931). *"The Density of White Dwarf Stars". Philosophical Magazine*. 11 (70): 592–596.

[17] S. Chandrasekhar (1934). *"Stellar Configurations with degenerate Cores"*. The Observatory. 57: 373–377.