

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Descrizione statistica e realizzazione della condensazione di Bose-Einstein

Relatori:

Prof. Mario Nicodemi

Candidata:

Francesca Vercellone

Matr. N85000991

Anno Accademico 2018/2019

*...A Nonna Carla,
che vive dentro di me e mi conduce, tenendomi per mano,
verso il mio futuro.*

Indice

Introduzione	2
1 La statistica del gas di Bose e la condensazione di Bose-Einstein	4
1.1 Considerazioni statistiche	4
1.1.1 L'operatore densità	4
1.1.2 Le distribuzioni di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein	6
1.1.3 Termodinamica del gas di particelle quantistiche nel limite di bassa densità	8
1.2 La condensazione di Bose-Einstein	10
1.2.1 La frazione condensata	11
1.2.2 Quantità termodinamiche del gas di Bose ideale	14
2 La prima realizzazione di un Condensato di Bose- Einstein	16
2.1 Introduzione all'esperimento di Cornell e Wieman	16
2.2 Raffreddamento e confinamento atomico ed osservazione del condensato	18
2.2.1 Il laser cooling	18
2.2.2 La trappola magnetica	22
2.2.3 L'evaporative cooling	24
2.3 Risultato dell'esperimento	26
Conclusioni	29

Introduzione

Il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein (BEC) fu teorizzato nel 1925 da Einstein, sulla base di un articolo del fisico indiano Satyendranath Bose sulla statistica di un gas di fotoni risalente all'anno precedente. Applicando i risultati ottenuti da Bose ad un sistema di bosoni massivi Einstein concluse che al di sotto di una certa temperatura una certa frazione di particelle del sistema si porta ("condensa") nello stato di singola particella di più bassa energia.

L'interesse per l'argomento fu acceso nel 1938 da Fritz London, che ipotizzò che esistesse una connessione tra la condensazione di Bose-Einstein e la transizione dell' ^4He liquido allo stato superfluido. Oggi sappiamo [10] che la condensazione di Bose-Einstein non è necessaria nè sufficiente per la superfluidità, e che dunque i due fenomeni sono indipendenti.

La BEC è inoltre estremamente difficile da osservare in un gas di ^4He a causa della forte interazione tra gli atomi che riduce drasticamente la frazione di particelle che possono trovarsi nello stato fondamentale di singola particella.

Proprio questa difficoltà ha spinto gli scienziati a ricercare la BEC in sistemi atomici differenti, ed in particolare in gas bosonici molto poco interagenti. Il primo successo si è ottenuto nel 1995 con gli atomi alcalini, i più idonei ad essere trattati con la tecnica del laser cooling, e in particolare con il ^{87}Rb che si è rivelato essere la specie atomica più calzante per le caratteristiche dell'apparato sperimentale costruito.

Sebbene indipendente dalla superfluidità, il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein rimane estremamente interessante perché l'occupazione macroscopica di un singolo stato quantico all'interno del condensato rende evidente al livello macroscopico il comportamento quantistico della materia e la funzione d'onda complessiva del sistema viene ad avere una lunghezza d'onda abbastanza grande da poter essere esaminata e manipolata con strumenti ottici.

La condensazione di Bose-Einstein può infatti definirsi, come fece lo stesso London, come una "condensazione nel solo spazio dei momenti"[10] perché i pacchetti d'onda di singola particella vengono ad essere molto stretti e piccati nello spazio dei momenti, ma estesissimi nello spazio tridimensionale ordinario, al punto da sovrapporsi e formare un unico pacchetto d'onda nel limite di $T \rightarrow 0$.

In un gas di atomi debolmente interagenti la temperatura di condensazione T_c è legata alla densità atomica n dalla relazione:

$$n\lambda^3 \simeq 2.612 \quad (1)$$

Dove λ è la *lunghezza termica di de Broglie*:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (2)$$

Qui m è la massa della singola particella e k_B è la *costante* di Boltzmann.

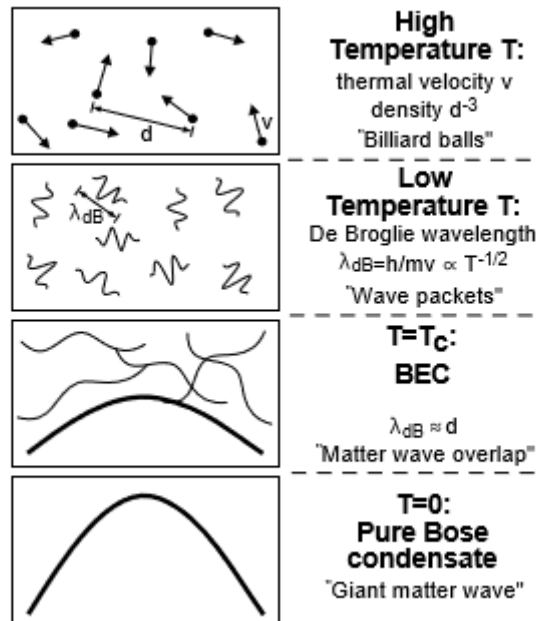


Figura 1. Ad alte temperature un gas debolmente interagente può trattarsi come un sistema di "palle da biliardo", perchè la lunghezza termica λ degli atomi è molto più piccola delle loro distanze reciproche. Al diminuire della temperatura del gas λ cresce e il comportamento quantistico delle particelle diventa predominante, fino alla formazione del BEC, che nel limite di $T = 0$ è un puro condensato. [4]

Quello che succede al variare della temperatura del sistema è descritto in figura 1

La presente tesi si occuperà della descrizione della condensazione di Bose-Einstein prima dal punto di vista statistico e poi dal punto di vista della sua prima realizzazione sperimentale. Nella conclusione accenneremo infine alle potenzialità sperimentali di un condensato e ad alcune prospettive più moderne per il suo utilizzo.

In particolare nel Capitolo 1 esamineremo la condensazione di Bose-Einstein dal punto di vista della meccanica statistica, avvalendoci di alcuni strumenti appositamente introdotti.

Nel Capitolo 2 descriveremo le tecniche e l'apparato sperimentale che hanno condotto nel 1995 gli scienziati Cornell e Wieman alla realizzazione del primo condensato in un gas ultrafreddo di atomi di rubidio. Le tecniche che descriveremo sono ancora oggi largamente utilizzate nella realizzazione e nello studio delle proprietà dei condensati di Bose-Einstein, ed anche in altri campi della fisica.

Capitolo 1

La statistica del gas di Bose e la condensazione di Bose-Einstein

In questo capitolo daremo una trattazione teorica della condensazione di Bose-Einstein, soffermandoci in primo luogo sulla funzione di partizione di un gas ideale di particelle quantistiche, dalla quale è possibile ricavare tutte le proprietà termodinamiche e d'interesse del gas. Da essa ricaveremo le distribuzioni di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein, grazie alle quali sarà facile comprendere perchè per i bosoni sia possibile lo stato di condensazione che non è invece ammesso per i fermioni, soggetti al principio di esclusione di Pauli. La prima parte del capitolo riguarderà inoltre il richiamo di alcuni strumenti che ci saranno utili nella seconda parte.

In secondo luogo studieremo approfonditamente la condensazione di Bose-Einstein, che ricordiamo essere una transizione di fase "nello spazio dei momenti", per mezzo delle proprietà statistiche del gas.

Nel capitolo seguiremo essenzialmente la trattazione di [9] per quanto riguarda gli aspetti puramente statistici e di [7] per quanto riguarda gli aspetti quantistici più tecnici.

1.1 Considerazioni statistiche

Prendiamo in esame un gas di particelle quantistiche (fermioni o bosoni) non relativistici e non interagenti. Ci stiamo quindi mettendo nell'approssimazione di *gas ideale*. Un sistema siffatto ha delle peculiari proprietà che possiamo dare in tutta generalità, ma ai fini della trattazione della condensazione di Bose-Einstein ci sarà utile introdurre alcune ipotesi e approssimazioni particolarmente adatte al caso.

1.1.1 L'operatore densità

Nell'ottica di una trattazione del tutto generale, notiamo innanzitutto che quando studiamo le proprietà statistiche di un sistema quantistico non siamo sempre in grado di dare

un ben definito stato iniziale per il sistema, diversamente da quanto accade nel caso della singola particella.

Infatti quando studiamo l'evoluzione nel tempo dello stato quantistico di singola particella siamo in grado di "preparare il sistema" in uno stato iniziale $|\psi(0)\rangle$ che al tempo $t = 0$ sia *ben definito*.

Per un sistema di particelle, invece, in molte situazioni fisiche d'interesse siamo in grado soltanto di dire che esso può trovarsi all'istante $t = 0$ in un certo stato $|\psi_k(0)\rangle$ con una *probabilità classica* p_k .

Potremo così dare un set di stati iniziali ciascuno con la sua probabilità:

$$\begin{array}{ccc} |\psi_1(0)\rangle, & |\psi_2(0)\rangle, & \dots |\psi_k(0)\rangle \\ p_1, & p_2, & \dots p_k \end{array}$$

Si noti che le $|\psi_k\rangle$ sono stati di sistema, non di singola particella e che non sono obbligatoriamente ortonormali tra loro.

Questa situazione ci richiede, per la descrizione del sistema, l'introduzione dell' *operatore densità*, $\hat{\rho}$. Tale operatore tiene conto della miscela quantistica di particelle del sistema e ne contiene tutte le informazioni statistiche.

L'operatore densità è così definito:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \quad (1.1)$$

Come si vede, $\hat{\rho}$ consiste sostanzialmente di una somma pesata di proiettori sugli stati possibili per il sistema.

La definizione di tale operatore ci permette di calcolare il valor medio di un osservabile A sul sistema, che come è facile dimostrare risulta essere:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (1.2)$$

L'evoluzione temporale dell'operatore densità obbedisce all' *Equazione di Von-Neumann*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.3)$$

Da questa equazione risulta subito evidente che se $\hat{\rho}$ è stazionario allora commuta con l'hamiltoniana e l'intero sistema può descriversi su una base di autovettori comuni ai due operatori.

Esisterà cioè, in questo caso, un sistema ortonormale completo per lo spazio di Hilbert in cui vive il sistema, $|\varphi_i\rangle$, tale che:

$$\begin{aligned} \hat{H} |\varphi_i\rangle &= E_i |\varphi_i\rangle \\ \hat{\rho} |\varphi_i\rangle &= \pi_i |\varphi_i\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

In meccanica statistica dei sistemi all'equilibrio, dove si colloca la nostra teoria, i sistemi che prendiamo in esame si trovano all'equilibrio termodinamico con un reservoir a temperatura T .

Consideriamo inoltre l'*Ipotesi Ergodica*: In un sistema sufficientemente complesso (quale ad esempio un gas), le uniche costanti del moto sono l'hamiltoniana e le sue funzioni.

Le ultime osservazioni ci portano ad un'immediata conclusione: La condizione di equilibrio termodinamico impone la stazionarietà di $\hat{\rho}$. Di conseguenza, $\hat{\rho}$ commuta con $\hat{H}$ ed è una costante del moto. Dunque per l'ipotesi ergodica sotto le condizioni da noi imposte al problema $\hat{\rho}$ è una funzione dell'hamiltoniana.

A questo punto è facile scoprire quale sia la relazione funzionale tra i due operatori introducendo l'*Entropia di Von-Neumann del sistema*, così definita:

$$S = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) \quad (1.5)$$

Richiedendo che $\hat{\rho}$ massimizzi S con la condizione che $E = \langle \hat{H} \rangle$ sia ben definita e funzione della temperatura, la determinazione degli autovalori di $\hat{\rho}$, π_i , diviene un semplice problema di massimo vincolato la cui soluzione fornisce:

$$\pi_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} \quad (1.6)$$

Dove $\beta = (k_B T)^{-1}$.

Dalla (1.6) risulta evidente che nel caso di equilibrio termodinamico di un gas di particelle quantistiche, sulla base degli autovettori comuni a $\hat{\rho}$ e $\hat{H}$ gli autovalori dell'operatore statistico coincidono con le *distribuzioni di Boltzmann* per i microstati della meccanica classica nella descrizione di insieme canonico. Per questo motivo in tutta la tesi si darà per inteso di star trattando il problema in questa base, in modo da poter recuperare i risultati della meccanica statistica applicata ad un gas di particelle classiche.

1.1.2 Le distribuzioni di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein

Un'altra peculiarità dello studio delle proprietà statistiche di un sistema quantistico è che in generale non possiamo usare la descrizione di insieme canonico e dobbiamo allargarci a quella di insieme grancanonico, perchè non è sempre possibile considerare fissato il numero di particelle N (Vedremo che nel caso particolare della BEC le due descrizioni sono sostanzialmente equivalenti). Ciò che possiamo considerare costante è invece il numero medio di particelle $\langle N \rangle$. Il potenziale termodinamico associato a N è μ , il *potenziale chimico*.

Da questo momento in poi, per leggerezza di notazione, ci riferiremo a $\langle N \rangle$ con il simbolo N .

La probabilità che il sistema si trovi in un certo stato quantistico $|R\rangle$ è data in questa descrizione da:

$$p_R = \frac{e^{-\beta(E_R - \mu N_R)}}{Z_G} \quad (1.7)$$

Dove Z_G è la funzione di partizione dell'insieme grancanonico, dal calcolo della quale è possibile ricavare tutte le proprietà di interesse del nostro sistema.

Al fine di ciò introduciamo il *formalismo di seconda quantizzazione*. Definiamo il microstato complessivo del sistema, $|R\rangle$, che è il vettore dei numeri d'occupazione dei microstati di singola particella, n_r :

$$|R\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_r, \dots\rangle$$

A questo punto l'energia ed il numero di occupazione del microstato complessivo sono:

$$E(R) = \sum_r n_r \varepsilon_r \quad N(R) = \sum_r n_r \quad (1.8)$$

Dove per $\sum_r$ si intende la somma su tutti i possibili microstati di singola particella e gli ε_r sono i livelli energetici di questi ultimi. In questo modo il sistema è completamente caratterizzato da $|R\rangle$.

Non ci resta che calcolare Z_G :

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_R e^{-\beta(E(R) - \mu N(R))} = \sum_R e^{-\beta \sum_r (\varepsilon_r - \mu) n_r} = \\ &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_r} \prod_r e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu) n_r} = \prod_r \sum_{n_r} e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu) n_r} = \prod_r Z_r \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dove Z_r è la funzione di partizione di singolo microstato.

Z_r può calcolarsi esplicitamente per un sistema di fermioni e per un sistema di bosoni. Nella discussione seguente risiede la ragione fisica per la quale un gas di bosoni può essere soggetto ad una "condensazione energetica", mentre un gas di fermioni no. Per il *Principio di esclusione di Pauli* due fermioni identici non possono trovarsi, nello stesso sistema quantistico, nel medesimo stato di singola particella. Nel caso fermionico allora fissato ε_r , n_r può assumere i soli valori 0 o 1. Per i bosoni invece non esiste alcun principio di esclusione: in linea di principio ciascun livello può essere occupato da un numero qualsiasi di bosoni. Dunque fissato ε_r , $n_r \in \mathbb{N}$.

A questo punto il calcolo di Z_r^F (Z_r per un gas di fermioni) e Z_r^B (Z_r per un gas di bosoni) risulta banale e fornisce:

$$\begin{aligned} Z_r^F &= 1 + e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)} \\ Z_r^B &= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

La forma della funzione di partizione per un sistema di bosoni impone un vincolo sul potenziale chimico: μ deve essere minore del più piccolo degli ε_r , altrimenti la funzione

di partizione diventa negativa, il che non ha significato fisico. Da Z_r otteniamo il numero d'occupazione medio dell' r -esimo microstato mediante la formula:

$$\langle n_r \rangle = \beta^{-1} \partial_\mu \log Z_r \quad (1.11)$$

Da cui otteniamo:

- La *Distribuzione di Fermi-Dirac* per un gas di fermioni:

$$\langle n_r \rangle_F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} \quad (1.12)$$

- La *Distribuzione di Bose-Einstein* per un gas di bosoni:

$$\langle n_r \rangle_B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} \quad (1.13)$$

Si osserva immediatamente che l'andamento di $\langle n_r \rangle_B$ in funzione di ε_r per qualunque fissata temperatura presenta un asintoto in $\varepsilon_r = \mu$, dove *diverge* a $+\infty$. Questo significa che se μ è molto vicino a ε_0 , energia di stato fondamentale per il singolo microstato, è teoricamente possibile portare tutti i bosoni allo stato fondamentale, ovvero realizzare la BEC.

1.1.3 Termodinamica del gas di particelle quantistiche nel limite di bassa densità

La nostra sezione introduttiva si conclude con lo studio del comportamento del gas nel limite di bassa densità nello spazio delle fasi ($\langle n_r \rangle \ll 1$), in quel limite cioè in cui ogni microstato del nostro sistema è mediamente poco popolato. Vedremo che questa ipotesi si traduce nel limite di alta temperatura ($T \simeq T_A$), dove T_A è la temperatura ambiente. Non è sicuramente in questo limite che vediamo verificarsi la BEC, ma studiarlo è comunque utile per avere un punto di partenza dal quale discostarci nella prossima sezione.

Il limite di alte temperature è il nostro "limite classico", nel quale bosoni e fermioni si comportano sostanzialmente allo stesso modo e gli effetti quantistici sono poco importanti. Il numero di particelle N può ritenersi praticamente fissato e possiamo introdurre una descrizione canonica con funzione di partizione:

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\sum_r e^{-\beta \varepsilon_r} \right)^N \quad (1.14)$$

Come si vede Z è equivalente a quella che si ottiene per il gas ideale classico, a meno del *fattore di Gibbs* $\frac{1}{N!}$ che tiene conto dell'invarianza del sistema sotto scambio di particelle identiche.

È possibile riscrivere Z in una forma più utile mediante il trucco del confinamento del gas in una scatola di lato L molto grande. In questo modo le particelle del gas saranno considerate essenzialmente libere, ma l'imposizione di condizioni al bordo periodiche sulle facce della scatola ci permetterà di quantizzare l'impulso. Si fa presente ora che in tutta la trattazione verrà trascurato nei calcoli il grado di libertà definito dal numero quantico di spin delle particelle. A questo punto poiché l'energia di una particella libera è completamente caratterizzata dal suo impulso $\mathbf{p}$, da questo momento il label r che ha sinora caratterizzato i microstati di singola particella sarà sostituito dal label $\mathbf{p}$.

L'hamiltoniano di un sistema di N particelle non relativistiche e non interagenti è:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}. \quad (1.15)$$

Per il problema appena descritto valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}}(x) &= \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar}} \\ \mathbf{p} &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} (n_1, n_2, n_3), n_\alpha = 0, \pm 1, \dots \\ \varepsilon_{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Possiamo dunque legare il "volume unitario" sullo spazio degli stati a quello sullo spazio degli impulsi:

$$d^3n = \frac{V}{h^3} d^3p \quad (1.17)$$

E sostituire, nel *Limite Termodinamico* (LT)¹ le somme sui microstati con integrali in d^3p ²:

$$\sum_p \dots \simeq \frac{V}{h^3} \int \dots d^3p \quad (1.18)$$

Questa approssimazione può applicarsi al calcolo del valor medio di un osservabile F per il nostro sistema. In particolare considereremo soltanto osservabili *isotropi* e potremo quindi sempre sostituire a d^3p l'equivalente $4\pi p^2 dp$:

$$\langle F \rangle = \sum_r F_r \langle n_r \rangle \simeq \frac{4\pi V}{h^3} \int dp p^2 F(p) \langle n(p) \rangle \quad (1.19)$$

¹ $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, \frac{N}{V} = \text{costante} < \infty$

² N.B: Stiamo trascurando il contributo dei microstati ad n piccolo (questa ipotesi cadrà nello studio della BEC), e approssimando le somme a integrali per n grandi, dove i livelli energetici sono più vicini.

Questo può essere trasformato in un integrale in $d\varepsilon$ mediante la relazione di dispersione definita in (1.16). Riscriviamo la (1.19) come:

$$\langle F \rangle = \int d\varepsilon g(\varepsilon) F(\varepsilon) \langle n(\varepsilon) \rangle \quad (1.20)$$

Dove abbiamo definito la *Funzione densità di stati* con la nostra relazione di dispersione non relativistica:

$$g(\varepsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \varepsilon^{1/2} \quad (1.21)$$

Questa funzione ci è utile per ragionare facilmente su tutte le quantità d'interesse del sistema e ci permette di ricavare in maniera snella l'equazione di stato per il nostro gas.

Infatti ricaviamo semplicemente:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1} \\ E &= \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) \varepsilon = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1} \\ pV &= -\phi = \beta^{-1} \log Z = \pm \beta^{-1} \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \log(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) = \\ &= \pm \frac{2}{3} \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dove resta inteso che il segno + si usa nel caso fermionico e il segno - nel caso bosonico e nella terza delle (1.22) si è utilizzata l'integrazione per parti

La (1.22) ci permette di ricavare immediatamente l'*Equazione di stato*, perfettamente equivalente nella forma a quella del gas ideale classico:

$$pV = \frac{2}{3} E \quad (1.23)$$

A questo punto disponiamo di tutti gli strumenti necessari per descrivere, sotto alcune approssimazioni, la condensazione di Bose-Einstein.

1.2 La condensazione di Bose-Einstein

Quando si fa tendere a zero la temperatura di un gas di Fermi, i fermioni occupano tutti i livelli energetici possibili a partire dallo stato fondamentale, disponendosi per effetto del principio di esclusione in modo che vi sia un singolo fermione per ciascun livello, fino al livello corrispondente ad un'energia che si chiama *energia di Fermi*, ε_F . Quando invece si fa la stessa cosa per un gas di Bose, in linea di principio i bosoni si porteranno tutti verso il livello di energia più bassa per il sistema, lo stato fondamentale di singola particella $\varepsilon_0 = 0$.

1.2.1 La frazione condensata

Tratteremo qui il caso più semplice, in cui si trascurano completamente le interazioni tra i bosoni e gli effetti relativistici.

Definiamo la *fugacità*:

$$z = e^{\beta\mu} \quad (1.24)$$

E recuperiamo i risultati ottenuti nelle sezioni 1.1.2 e 1.1.3, ricordando che per un gas di bosoni dev'essere $\mu \leq 0$ e dunque $0 \leq z \leq 1$.

Consideriamo il *numero d'occupazione medio dello stato fondamentale*, che in funzione di z può scriversi:

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} \quad (1.25)$$

É subito visto che se $\mu = 0$, $z = 1$ e $\langle n_0 \rangle$ diverge. Se il potenziale chimico può tendere a zero allora, tutti i bosoni collassano allo stato fondamentale. Vediamo come questo può succedere esaminando il numero N di particelle.

Quando nella sezione 1.1.3 abbiamo approssimato le somme con degli integrali lo abbiamo fatto nel limite in cui gli stati su cui stavamo integrando erano poco popolati ($\langle n_r \rangle \ll 1$). Per usare lo stesso metodo in questa situazione è necessario estrarre $\langle n_0 \rangle$ dall'integrale e trattarlo in maniera discreta.

$$N = \langle n_0 \rangle + \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1}$$

cambio di variabile: $x = \beta\varepsilon$ (1.26)

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \beta^{-3/2} \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x z^{-1} - 1}$$

Dalla (1.26) si vede subito che N è funzione della sola z . A questo punto introduciamo la *funzione speciale* $g_{3/2}(z)$ per i bosoni:³

$$g_{3/2}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x z^{-1} - 1} \quad (1.27)$$

Il cui andamento è mostrato in figura 1.1.

Introducendo anche il volume specifico del gas $v = \frac{V}{N}$ e moltiplicando e dividendo l'espressione di N per il fattore di normalizzazione $g_{3/2}(1)$, otteniamo per N :

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} + N \left(v \frac{m^{3/2} \sqrt{2} k_B^{3/2}}{\pi^{5/2} \hbar^3} \right) T^{3/2} g_{3/2}(1) \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \quad (1.28)$$

³Essa è una delle *funzioni di Bose - Einstein*, definite da:

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1},$$

Dove $\Gamma(\nu)$ è la funzione *Gamma di Riemann*

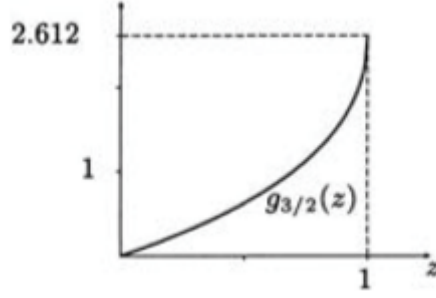


Figura 1.1. La funzione $g_{3/2}(z)$, [9]

Che ci permette di definire la *Temperatura di Condensazione*:

$$T_c = \frac{1}{mv^{2/3}} \left(\frac{\pi^{5/3} \hbar^2}{2^{1/3} k_B} \right) \quad (1.29)$$

Questa temperatura è in genere molto piccola (dell'ordine delle decine o centinaia di nK) e dipende solo da v e dalla massa m degli atomi del gas. Il suo andamento in funzione di v è mostrato in figura 1.2



Figura 1.2. T_c in funzione del volume specifico v , [9]

Come si vede in figura 1.2, più alta è la densità del gas (quindi più è piccolo il volume specifico), tanto più è alta la temperatura di transizione.

Riscriviamo l'espressione di N :

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} + N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \quad (1.30)$$

Consideriamo questa relazione dapprima nel limite $T \gg T_c$. Come abbiamo già detto, ad alte temperature lo stato fondamentale è occupato in maniera trascurabile. In questo limite, cioè, $z \ll 1$ ed il primo termine della (1.30) può essere trascurato. Otteniamo così la relazione tra $g_{3/2}(z)$ e T_c .

$$g_{3/2}(z) = 2.612 \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} \quad \text{per } T > T_c \quad (1.31)$$

Quando $T \rightarrow T_c^+$, $z \rightarrow 1$ e dunque $g_{3/2}(z) \rightarrow g_{3/2}(1)$, $\mu \rightarrow 0$ e possiamo scrivere:

$$\langle n_0 \rangle = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right) \quad (1.32)$$

Definiamo allora, nel LT, a v fissata, la *frazione condensata*

$$\nu_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{N} \quad (1.33)$$

E troviamo :

$$\nu_0 = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & T < T_c \end{cases} \quad (1.34)$$

Abbiamo così ottenuto la *Condensazione di Bose-Einstein*: al di sotto di T_c , lo stato fondamentale del sistema è macroscopicamente occupato e nel limite $T = 0$ tutti i bosoni collassano in quello stato.

Le quantità ν_0 e $\sqrt{\nu_0}$ sono graficate in figura 1.3

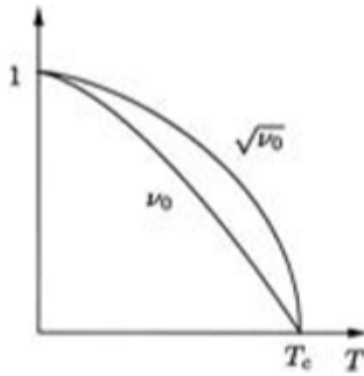


Figura 1.3. ν_0 e $\sqrt{\nu_0}$ in funzione della temperatura, [9]

1.2.2 Quantità termodinamiche del gas di Bose ideale

Grazie ai risultati discussi in 1.1.2, siamo facilmente in grado di ricavare le quantità termodinamiche del nostro sistema.

Notiamo che così come per trattare il numero N di particelle (che presentava $\varepsilon^{1/2}$ all'interno dell'integrale) abbiamo usato la funzione di Bose-Einstein $g_{3/2}(z)$, per trattare la quantità Φ (che presenta $\varepsilon^{3/2}$ all'interno dell'integrale) possiamo usare la funzione di Bose-Einstein $g_{5/2}(z)$.

Le due funzioni sono graficate insieme in figura 1.4

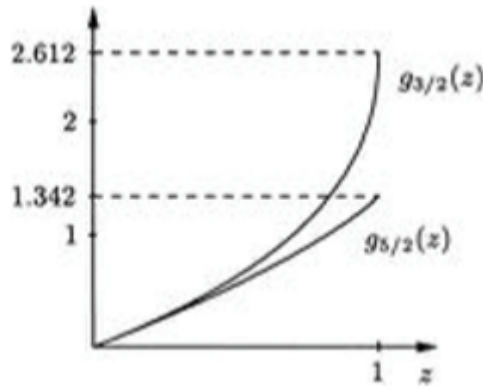


Figura 1.4. Le funzioni speciali $g_{3/2}(z)$ e $g_{5/2}(z)$. Come si vede, per $z \rightarrow 0$ diventano asintoticamente identiche. [9]

Da tutte le considerazioni qui esposte ed introducendo la *lunghezza termica delle particelle* λ , otteniamo per la pressione:

$$P = \begin{cases} \frac{k_B T}{\lambda^3} g_{5/2} & T > T_c \\ \frac{k_B T}{\lambda^3} 1.342 & T < T_c \end{cases} \quad (1.35)$$

Dall'equazione (1.31) possiamo riscrivere la pressione in un modo che ci permette di fare ragionamenti qualitativi:

$$P = \frac{k_B T}{v} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad T > T_c \quad (1.36)$$

Per piccoli valori di z , $g_{3/2}(z) \simeq g_{5/2}(z)$, quindi nel limite di alta temperatura e grande volume specifico riotteniamo l'equazione di stato classica. Avvicinandosi a T_c diventa significativo il fatto che $g_{5/2}(z) < g_{3/2}(z)$ e la pressione a v fissato diminuisce.

Studiamo infine il comportamento dell'entropia e della capacità termica (ovvero N x calore specifico a V costante):

$$S = \left(\frac{\partial PV}{\partial T}\right)_{V,\mu} = \begin{cases} Nk_B \left(\frac{5v}{2\lambda^3} g_{5/2}(z) - \log z \right) & T > T_c \\ Nk_B \left(\frac{5g_{5/2}(1)}{2g_{3/2}(1)} \right) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \end{cases} \quad (1.37)$$

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N,V} = Nk_B \begin{cases} \frac{15v}{4\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \end{cases}$$

Le (1.37) mostrano che l'entropia e il calore specifico variano come $T^{3/2}$ a bassa T . Soltanto gli stati eccitati contribuiscono all'entropia, infatti per il condensato $S = 0$. A $T = T_c$ il calore specifico del gas presenta una cuspid: C_V è continua in quel punto con derivata discontinua, come mostrato in figura 1.5.

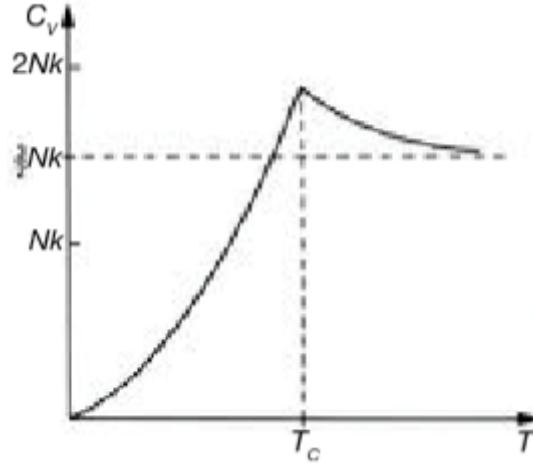


Figura 1.5. Andamento di C_V in funzione della temperatura. [9]

Capitolo 2

La prima realizzazione di un Condensato di Bose- Einstein

La teoria del Condensato di Bose-Einstein di cui abbiamo discusso nel Capitolo 1 era già stata ultimata nel 1925. Ciononostante la sua prima realizzazione sperimentale è avvenuta 70 anni dopo, nel 1995, con un esperimento grazie al quale gli scienziati E.A. Cornell, C. E. Wieman e W. Ketterle sono stati insigniti del Premio Nobel per la Fisica nel 2001, "per la realizzazione della condensazione di Bose-Einstein in gas diluiti di atomi alcalini, e per i primi fondamentali studi sulle proprietà dei condensati" [11].

Un così lungo lasso di tempo tra la scoperta e la realizzazione del fenomeno è dovuta principalmente alle grandi difficoltà sperimentali che questa ricerca ha richiesto.

Da qui in avanti i bosoni ai quali ci riferiremo durante la trattazione saranno atomi, e i gas di bosoni con i quali avremo a che fare si riterranno per questo a numero di particelle fissato.

L'esperimento qui descritto è stato molto rilevante poiché ha permesso di raffreddare atomi neutri nello stato di minima energia, realizzando il miglior controllo possibile sulla posizione e sul moto degli atomi, limitato soltanto dal principio di indeterminazione di Heisenberg. [4]

In questo capitolo ci dedicheremo alla descrizione di questo esperimento seguendo le fonti [2], [6], [4], [10].

2.1 Introduzione all'esperimento di Cornell e Wieman

L'osservazione del condensato ha richiesto il raggiungimento di temperature bassissime in un gas di atomi diluito e confinato in una trappola magnetica in una camera ad altissimo vuoto. Il raffreddamento è necessario affinché la lunghezza termica degli atomi sia dello stesso ordine di grandezza della distanza tra gli stessi, mentre il confinamento magnetico ed il vuoto fanno in modo che gli atomi non vengano in contatto con le pareti del recipiente ricombinandosi con gli atomi delle stesse, nè con eventuali impurità.

Il preraffreddamento si ottiene attraverso la tecnica del *laser cooling*, che permette di raggiungere temperature dell'ordine di $100\mu K$. Successivamente il gas viene forzato ad un *evaporative cooling*, che espelle gli atomi più energetici del gas abbassandone l'energia media e portando il sistema a una temperatura dell'ordine delle decine di nK [10]. In questo processo circa il 90 % degli atomi del gas vengono espulsi e la nube di atomi rimanenti forma spontaneamente il BEC.

Come detto nella sezione introduttiva, dal punto di vista teorico la caratteristica distintiva di un BEC è che il sistema può essere descritto da un'unica funzione d'onda della quale si possono direttamente osservare e manipolare le proprietà.

Inoltre, questa condensazione può considerarsi un fenomeno esotico perché contraddice un'assunzione generale secondo cui le transizioni di fase avvengono in un'evoluzione del sistema verso l'equilibrio termodinamico.

Infatti, come è schematicamente rappresentato in figura 2.1 le regioni al di sopra e al di sotto della BEC sono termodinamicamente proibite.

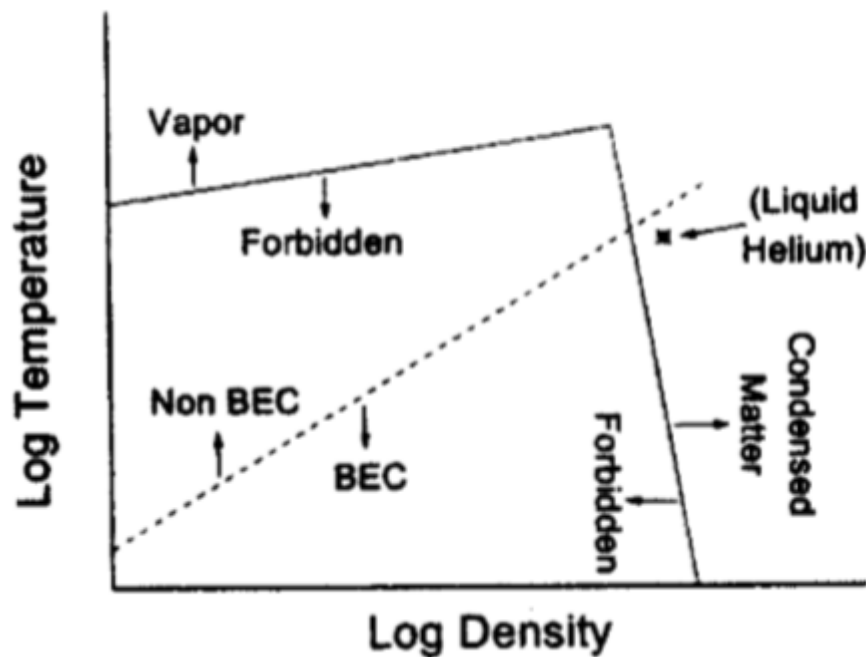


Figura 2.1. Diagramma di fase generico comune a tutti gli atomi. In ogni specie atomica, con unica eccezione l'elio, la BEC avviene solo in regioni termodinamicamente proibite.[2]

Questo non significa che il condensato non possa esistere, ma che si realizza su scale di tempo differenti da quelle delle comuni transizioni di fase e per un diverso tipo di

equilibrio: un gas di atomi può raggiungere l'equilibrio termico attraverso le collisioni a due corpi (che sono quelle che nel contesto della BEC chiameremo *good collisions*), mentre sono necessarie collisioni a tre corpi (*bad collisions*) per raggiungere l'equilibrio chimico.

In un gas a densità sufficientemente bassa (10^{14} cm^{-3}) il rate di *good collisions* può dominare su quello di *bad collisions* e il sistema può portarsi all'equilibrio termico in un condensato metastabile per un certo periodo di tempo prima di raggiungere anche l'equilibrio chimico e portarsi in uno stato termodinamicamente stabile.

Questo è ciò che si è fatto accadere nell'esperimento del 1995, che ha avuto successo con atomi di ^{87}Rb . Il rubidio non è stata l'unica specie atomica con la quale si è realizzato il condensato, ma è stata la prima grazie ad una combinazione di proprietà che la rendono adatta per l'apparato sperimentale.

Per la BEC in sè, infatti, in linea teorica l'unico requisito che gli atomi devono avere è di essere bosonici. Invece le trappole magnetiche funzionano al loro meglio con atomi che hanno un grande momento magnetico e almeno un elettrone spaiato, e il laser cooling favorisce gli atomi con grandi rate di transizione nelle regioni del visibile e dell'infrarosso. E inoltre indispensabile per l'evaporative cooling e per l'esperimento stesso, come detto prima, un rapporto favorevole tra il rate di *good collisions* e quello di *bad collisions*. Il ^{87}Rb si è rivelato essere la specie con la più favorevole combinazione di proprietà.

2.2 Raffreddamento e confinamento atomico ed osservazione del condensato

In questa sezione esamineremo le tecniche sperimentali utilizzate per la realizzazione della BEC nell'esperimento del 1995. Sebbene esistano molte tipologie di trappole magnetiche, nella sezione 2.2.2 descriveremo soltanto la TOP, la trappola magnetica grazie alla quale l'esperimento ha avuto successo.

2.2.1 Il laser cooling

La tecnica del laser cooling si basa sull'interazione degli atomi del gas con la radiazione elettromagnetica del laser in una specifica configurazione.

L'interazione tra un atomo e la radiazione elettromagnetica è descritta in *approssimazione di dipolo*, laddove lo splitting energetico indotto sui livelli atomici può considerarsi una perturbazione, come:

$$H' = -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1)$$

Dove $\mathbf{d}$ è l'operatore di dipolo elettrico e $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il vettore campo elettrico.

Iniziamo a studiare il problema nell'approssimazione in cui gli stati eccitati atomici hanno tempo di vita infinito.

Se il campo elettrico è statico lo stato fondamentale dell'atomo subisce uno splitting energetico ΔE_g del secondo ordine in ε pari a:

$$\Delta E_g = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 \quad (2.2)$$

Dove:

$$\alpha = 2 \sum_e \frac{|\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{E_e - E_g} \quad (2.3)$$

è la polarizzabilità atomica.

Qui $\hat{\mathbf{e}}$ è il versore nella direzione del campo elettrico ed e e g sono i label rispettivamente degli stati eccitati e dello stato fondamentale.

Se il campo elettrico dipende dal tempo il discorso è simile. Detta ω la frequenza del campo elettrico, quest'ultimo può scriversi come:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_\omega e^{-i\omega t} + \varepsilon_{-\omega} e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

Con la condizione:

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon_{-\omega}^* \quad (2.5)$$

Dovuta al fatto che il campo elettrico è reale.

Generalizzando i concetti enunciati per un campo statico, otteniamo:

$$\Delta E_g = -\frac{1}{2}\alpha(\omega) \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t \quad (2.6)$$

Dove:

$$\alpha(\omega) = \sum_e \frac{2(E_e - E_g) |\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{(E_e - E_g)^2 - (\hbar\omega)^2} \quad (2.7)$$

è detta *polarizzabilità dinamica*.

Nella situazione di nostro interesse (e in molte altre), l'unica transizione rilevante è quella tra lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato. Inoltre la frequenza della radiazione viene scelta molto vicina a quella di questa transizione, per cui la polarizzabilità dinamica può riscriversi sotto queste ipotesi come:

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{|\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{E_e - E_g - \hbar\omega} \quad (2.8)$$

A questo punto dobbiamo mettere in conto il fatto che il primo stato eccitato non ha tempo di vita infinito, ma tende a decadere allo stato fondamentale per emissione spontanea di un fotone. Se il tempo di vita di $|e\rangle$ è $1/\Gamma_e$, possiamo tenere conto di questo effetto sostituendo all'energia dello stato E_e un'energia complessa $E_e - i\hbar\Gamma_e/2$.

A questo punto $\alpha(\omega)$ e ΔE_g diventano quantità complesse date da:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &\simeq \frac{|\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{E_e - i\hbar\Gamma_e/2 - E_g - \hbar\omega} \\ \Delta E_g &= V_g - i\hbar\Gamma_g/2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dove:

$$V_g = -\frac{1}{2}\alpha'(\omega) \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t \quad (2.10)$$

ed $\alpha'(\omega)$ è la parte reale di $\alpha(\omega)$:

$$\alpha'(\omega) \simeq \frac{(E_e - E_g - \hbar\omega) |\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{(E_e - E_g - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_e/2)^2}. \quad (2.11)$$

ΔE_g ha la forma di un potenziale effettivo che agisce sull'atomo, con la parte reale che corrisponde a uno shift dell'energia dello stato fondamentale e la parte immaginaria all'inverso di un tempo di vita finito dello stato fondamentale dovuto all'interazione con la radiazione elettromagnetica.

Definiamo ora il *detuning*, δ , che è la differenza tra la frequenza del laser ω e la frequenza di transizione atomica $\omega_{eg} = (E_e - E_g)/\hbar$:

$$\delta = \omega - \omega_{eg} \quad (2.12)$$

Quando $\delta > 0$ siamo nel caso di *blue detuning*, quando $\delta < 0$ siamo nel caso di *red detuning*, che come vedremo in seguito è proprio il caso del nostro esperimento.

Introducendo la *frequenza di Rabi*, ω_R :

$$\omega_R = |\langle e | \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\omega | g \rangle| / \hbar \quad (2.13)$$

possiamo riscrivere lo shift energetico come:

$$V_g = \frac{\hbar\omega_R^2\delta}{\delta^2 + \Gamma_e^2/4} \quad (2.14)$$

che sarà negativo nel caso di red detuning, e il rate di perdita di atomi per lo stato fondamentale sarà:

$$\Gamma_g = \frac{1}{\hbar}\alpha''(\omega) \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t \quad (2.15)$$

dove $\alpha''(\omega)$ è la parte immaginaria di $\alpha(\omega)$:

$$\alpha''(\omega) \simeq \frac{\hbar\Gamma_e/2 |\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{(E_e - E_g - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_e/2)^2}. \quad (2.16)$$

È a questo punto chiaro che il rate di transizione dallo stato fondamentale al primo stato eccitato ha, nella nostra approssimazione, dipendenza Lorentziana dalla frequenza.

I concetti appena discussi ci permettono ora di descrivere la vera e propria tecnica del laser cooling.

Mettiamoci nel caso semplice di un atomo che può muoversi solo lungo l'asse z del nostro sistema. Due raggi laser contropropaganti di uguale frequenza ω diretti lungo z incidono sull'atomo uno da destra ed uno da sinistra. Supponiamo inoltre che la frequenza del laser sia poco più piccola (ma ad essa molto vicina) della frequenza di transizione ω_{eg} .

Se l'atomo è inizialmente a riposo avrà una probabilità non nulla di assorbire fotoni, uguale per i due fasci. Il rate di assorbimento di fotoni potrà scriversi, per quanto detto prima, come:

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = CL(\omega) \quad (2.17)$$

dove:

$$C = \frac{\pi}{\hbar^2} |\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2 \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t$$

$$L(\omega) = \frac{\Gamma_e/2\pi}{(\omega - \omega_{eg})^2 + (\Gamma_e/2)^2} \quad (2.18)$$

E quindi il tempo di vita dell'atomo nello stato fondamentale sarà pari a $1/CL(\omega)$.

Come detto sopra, un atomo a riposo ha la stessa probabilità di assorbire fotoni da destra e da sinistra. Un atomo in moto con velocità v_z diretta verso destra invece, a causa dell'effetto Doppler vedrà la frequenza dei fotoni diretti verso destra diminuita e pari a $\omega - v_z\omega/c$, dunque più lontana dalla frequenza di risonanza, e la frequenza dei fotoni diretti verso sinistra (quindi che si scontrano frontalmente con l'atomo) accresciuta e pari a $\omega + v_z\omega/c$ (Si veda la figura 2.2).

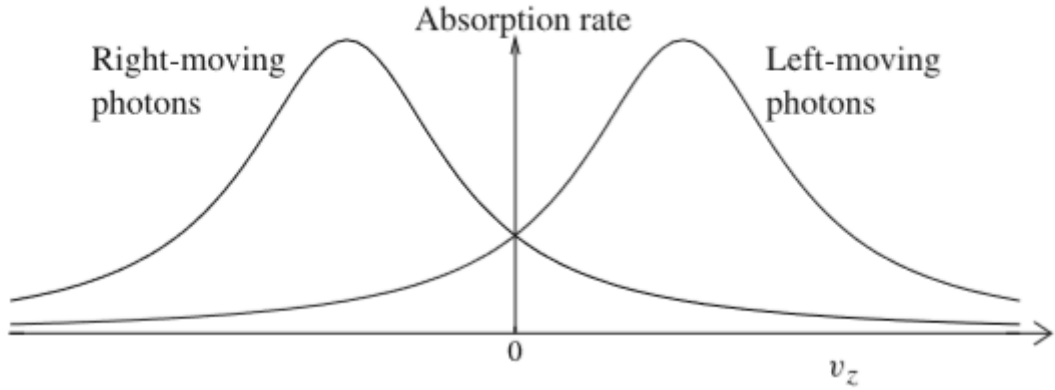


Figura 2.2. Rates di transizione di un atomo per i due fasci laser detunati in funzione della velocità atomica. [6]

Di conseguenza per un atomo che si muove verso destra:

$$\frac{dN_{left}}{dt} = CL(\omega + v_z\omega/c) > \frac{dN_{right}}{dt} = CL(\omega - v_z\omega/c) \quad (2.19)$$

e per gli atomi che si muovono verso sinistra varrà il discorso opposto.

In sintesi, gli atomi che hanno una velocità iniziale non nulla hanno maggiore probabilità di assorbire fotoni che viaggiano nel verso opposto al proprio che fotoni che viaggiano nello stesso verso.

Quando l'atomo si scontra "frontalmente" con il fotone e lo assorbe, gli viene trasferito l'impulso di quest'ultimo pari ad $\hbar\omega/c$ nel verso opposto a quello in cui sta viaggiando l'atomo. La successiva riemissione del fotone può avvenire in tutte le direzioni e dunque, quando mediato nello spazio, il fenomeno di emissione spontanea non dà contributo alla velocità dell'atomo. Quello che succede allora è che si genera una forza frenante sull'atomo grazie all'impulso trasferitogli dai fotoni, che tende ad abbattere v_z , rallentando l'atomo e diminuendo quindi la sua energia cinetica.

Con tre coppie di laser contropropaganti ortogonali tra loro si abbattano tutte e tre le componenti cartesiane della velocità degli atomi, diminuendone drasticamente l'energia cinetica e dunque di fatto abbattendo la temperatura del gas. Siffatta configurazione di laser è chiamata "*melassa ottica*".

Il limite della tecnica del laser cooling è che sebbene l'effetto energetico della riemissione dei fotoni assorbiti sia trascurabile, non è trascurabile il rinculo che gli atomi subiscono in questa emissione. A ciascun atomo rimane quindi una piccola energia cinetica successiva ad ogni emissione che è pari a:

$$T_{\text{rinculo}} = \frac{\hbar k}{2m} \quad (2.20)$$

Dove m è la massa dell'atomo e k è il modulo dell'impulso del fotone emesso.

La conseguenza di questo fenomeno è che non si riesce a raggiungere nel gas la temperatura di condensazione T_c : si è stimato che la minima temperatura raggiungibile con questa tecnica è di circa $240\mu K$ [6]. Per questo motivo è necessaria una seconda fase di raffreddamento del gas per poter osservare la BEC.

Per l'invenzione del laser cooling gli scienziati S. Chu, C. Cohen-Tannoudji e W. D. Phillips sono stati insigniti del Premio Nobel per la Fisica nel 1997 "per lo sviluppo di metodi per raffreddare e intrappolare gli atomi con luce laser"[11].

2.2.2 La trappola magnetica

Il lavoro di Cornell e Wieman al JILA per la realizzazione del primo BEC cominciò intorno al 1990. I cinque anni trascorsi tra l'inizio del progetto e il suo successo hanno visto i molti scienziati coinvolti incontrare e risolvere svariati problemi tecnici, in particolare quello della ricerca di una trappola magnetica adatta allo scopo.

Il fatto che sia possibile confinare spazialmente atomi neutri grazie all'effetto di un campo magnetico è dovuto all'*effetto Zeeman* [3]: il campo magnetico genera una struttura iperfine nei livelli energetici atomici e difatti l'energia di uno stato atomico dipende dalla posizione dell'atomo all'interno di esso. In altre parole, all'interno di un campo magnetico disomogeneo l'atomo risulta soggetto ad un potenziale che varia nello spazio.

Se l'atomo si trova in un particolare stato $|i\rangle$, la sua energia può scriversi come:

$$E_i = C_i - \mu_i B \quad (2.21)$$

Dove C_i è una costante e μ_i è il *momento magnetico dello stato*. Il contributo magnetico all'energia dell'atomo ha quindi la forma dell'energia potenziale $-\mu_i B$. Se μ_i è negativo (e sperimentalmente si fa in modo che sia così), gli atomi sono soggetti ad una forza che tende a spingerli verso regioni di minimo del campo magnetico. Il modo per confinare un gas di rubidio è dunque quello di costruire un campo magnetico che presenti dei minimi locali.

La profondità della trappola è determinata dalla grandezza della quantità $\mu_i B$. Il momento μ_i è dell'ordine di grandezza del magnetone di Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$, che in unità di temperatura vale circa $0.67 K/T$. Poichè i campi magnetici da laboratorio hanno solitamente modulo di meno di $1T$, la profondità della trappola è dell'ordine di qualche decimo di K . Questa è la ragione per la quale il gas di atomi deve essere raffreddato mediante il laser cooling prima di poter essere confinato nella trappola [6].

La prima strategia che si tentò nell'esperimento fu quella di usare una *trappola di quadrupolo*. Nella trappola di quadrupolo il campo magnetico varia linearmente con la distanza in tutte le direzioni, si annulla in un punto e per produrlo è sufficiente una semplice configurazione fisica come ad esempio due bobine di Helmholtz che contengono superfici tra loro parallele percorse da correnti in verso opposto.

Supponendo di costruire il sistema in modo che sia simmetrico rispetto all'asse z e di denotare le derivate parziali del campo rispetto a x e y con B' , la derivata parziale rispetto a z deve essere $-2B'$ perchè $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Allora se scegliamo di porre il minimo del campo magnetico nell'origine del sistema di riferimento, nelle vicinanze di esso il campo magnetico è dato da $\mathbf{B} = B'(x, y, -2z)$ ed il suo modulo è $B = B'(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}$.

Lo svantaggio sperimentale di questo campo magnetico è il suo annullarsi nel punto di minimo: il potenziale ($-\mu_i B$) che agisce sugli atomi spingendoli verso il minimo si annulla nel minimo stesso. Lo splitting iperfine tra i livelli atomici dipende come abbiamo visto proprio dal modulo del campo magnetico. Quando questo splitting si riduce fino ad annullarsi gli atomi hanno probabilità sempre maggiore di saltare in un altro stato della struttura iperfine che potrebbe presentare un $\mu_i > 0$, provocando la fuga degli atomi dalla trappola, che difatti ha quindi un "buco" nel punto di minimo del campo magnetico, dal quale gli atomi tendono a fuggire.

Una prima soluzione a questo problema fu individuata dal gruppo di ricerca del MIT di Ketterle e collaboratori nel 1993. L'approccio di Ketterle consisteva nell'applicare un fascio di laser nella regione del buco della trappola di quadrupolo, in modo che la pressione di radiazione allontanasse gli atomi dalle vicinanze di quest'ultimo, riducendo le perdite. Grazie a questa evoluzione dell'apparato sperimentale Cornell e Wieman furono in grado di tenere in vita la trappola magnetica per circa 100 secondi [2], un tempo sufficiente a far avvenire per la prima volta l'evaporative cooling nel gas di atomi di rubidio. Ciononostante, il problema non era completamente risolto: gli atomi fuggivano più lentamente dalla trappola, ma vi fuggivano comunque. Questo apparato sperimentale non era dunque ancora idoneo alla realizzazione della BEC.

La trappola giusta si rivelò essere la "*TOP* (Time - averaged orbiting potential) *trap*". In questa trappola viene sovrapposto al campo di quadrupolo sinora discusso un altro

campo magnetico rotante e spazialmente uniforme.

Nell'esperimento il campo rotante utilizzato aveva componente $B_0 \cos \omega t$ lungo la direzione dell'asse x e $B_0 \sin \omega t$ lungo la direzione dell'asse y .

Il campo istantaneo in questa situazione è dato da:

$$\mathbf{B} = (B'x + B_0 \cos \omega t, B'y + B_0 \sin \omega t, -2B'z). \quad (2.22)$$

Se scegliamo la frequenza del campo oscillante molto più piccola di quella di transizione tra i livelli della struttura iperfine riusciamo con questa trappola a mantenere gli atomi nel loro stato quantico iniziale e a non farli dunque fuggire dalla trappola. Questo si verifica perché il modulo del campo magnetico non si annulla mai, rimuovendo in questo modo il "buco" nella trappola di quadrupolo.

Poiché abbiamo scelto un campo magnetico di frequenza molto più piccola di quelle tipiche del sistema atomico, siamo autorizzati a considerare la media temporale del campo magnetico nelle vicinanze del minimo.

Otteniamo:

$$\langle B \rangle_t \simeq B_0 + \frac{B'^2}{4B_0}(x^2 + y^2 + 8z^2). \quad (2.23)$$

Il contributo di questo campo all'energia di un atomo nello stato $|i\rangle$ è allora data nelle vicinanze del minimo dal seguente sviluppo intorno a B_0 :

$$\begin{aligned} E_i(\langle B \rangle_t) &\simeq E_i(B_0) - \mu_i(B_0)(\langle B \rangle_t - B_0) \simeq \\ &\simeq E_i(B_0) - \mu_i(B_0) \frac{B'^2}{4B_0}(x^2 + y^2 + 8z^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dove:

$$\mu_i = \left(-\frac{\partial E_i}{\partial B} \right)_{B_0} \quad (2.25)$$

Come si vede il campo oscillante trasforma la dipendenza lineare di B dalla distanza dall'origine in una dipendenza *quadratica*, che corrisponde ad un potenziale di oscillatore armonico anisotropo che non si annulla in corrispondenza del suo minimo, con:

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = -\mu_i \frac{B'^2}{2mB_0} \quad \omega_z^2 = 8\omega_x^2 = -8\mu_i \frac{B'^2}{2mB_0}. \quad (2.26)$$

La TOP trap fu per queste ragioni la trappola all'interno della quale fu per la prima volta realizzata la BEC.

Nella figura 2.3 è illustrato l'apparato sperimentale utilizzato da Cornell e Wieman.

2.2.3 L'evaporative cooling

Come discusso in precedenza, il laser cooling permette di raggiungere temperature incredibilmente basse ma comunque non sufficienti a realizzare la BEC in un gas che abbia una densità realizzabile sperimentalmente.

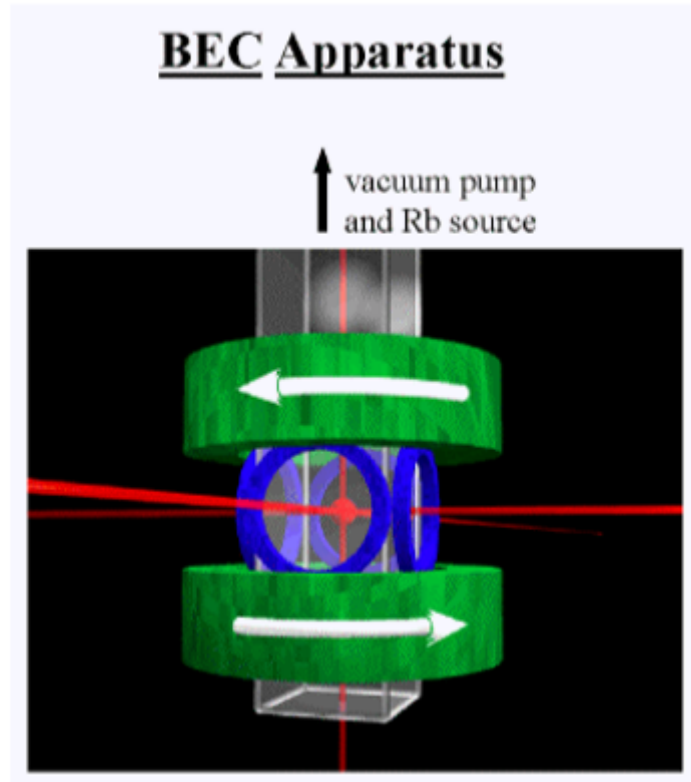


Figura 2.3. Le sei linee rosse rappresentano i laser utilizzati per il laser cooling. Le due bobine verdi generano il campo magnetico di quadrupolo, mentre le 4 bobine blu generano il campo magnetico rotante. Gli atomi di Rb sono intrappolati al centro di questo apparato. [10]

Il processo dell'evaporative cooling avviene all'interno della trappola magnetica e funziona lasciando fuggire dalla trappola gli atomi che abbiano energia maggiore dell'energia media del sistema, in modo da abbassare quest'ultima e di conseguenza la temperatura.

All'interno del potenziale di trappola gli atomi si distribuiscono termicamente, come si vede in figura 2.4. A questo punto è sufficiente creare in corrispondenza di un valore energetico scelto ϵ_{ev} , che sarà la nostra *energia di soglia* per l'evaporazione, un "buco" nella trappola, in modo che solo gli atomi di energia maggiore a ϵ_{ev} possano fuggire.

Nella pratica questo "buco" può realizzarsi facendo incidere sul gas un fascio di onde radio ad una certa frequenza scelta in base ad ϵ_{ev} , che interagendo con gli atomi più energetici li faccia saltare in uno stato della struttura iperfine con $\mu_i > 0$, espellendoli di fatto dalla trappola. Questo processo è schematicamente illustrato in figura 2.5.

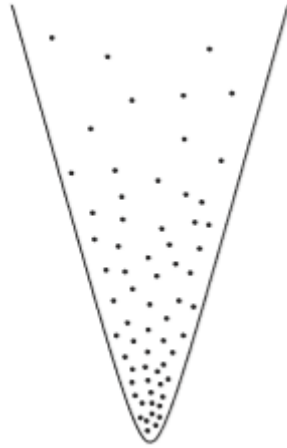


Figura 2.4. Distribuzione termica degli atomi all'interno del potenziale di trappola [6]

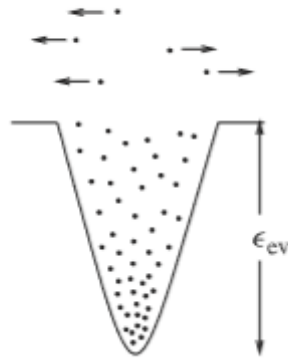


Figura 2.5. Il buco nella trappola è praticato in corrispondenza dell'energia di soglia ϵ_{ev} . Gli atomi più energetici fuggono dalla trappola. [6]

2.3 Risultato dell'esperimento

Una volta risolti i problemi inerenti alla trappola magnetica Cornell e Wieman sapevano cosa aspettarsi nel caso di riuscita dell'esperimento. L'osservazione del gas avveniva immediatamente dopo aver spento il campo magnetico, dunque sul gas in espansione, e ci si aspettava che la BEC si manifestasse come una distribuzione molto piccata intorno allo zero *nello spazio dei momenti*.

Ciononostante in presenza di un potenziale armonico la distribuzione nello spazio

dei momenti e quella nello spazio delle coordinate hanno la stessa forma e sono sostanzialmente equivalenti e dunque intercambiabili. Era sufficiente dunque osservare la distribuzione nello spazio delle coordinate.

La TOP trap ha inoltre permesso agli scienziati di essere certi che ciò che stavano osservando fosse davvero un condensato di Bose-Einstein, grazie alla sua particolare caratteristica di generare un potenziale *anisotropo*.

Dopo lo spegnimento del potenziale, infatti, un qualunque gas termico nel limite termodinamico si espanderebbe nello spazio in maniera isotropa per effetto del principio di equipartizione dell'energia. Un BEC presenta però una funzione d'onda macroscopica, e la sua espansione deve quindi essere governata da una particolare equazione d'onda. Lungo la direzione inizialmente confinata in maniera più forte (che nella nostra trattazione è l'asse z), il gas si espanderà più velocemente per effetto del principio di indeterminazione. In presenza del BEC quello che ci si aspetta di osservare è quindi un gas che si espande anisotropicamente.

Quello che gli esperimenti rilevarono sull'espansione del gas di atomi di rubidio fu che esso consisteva di due componenti: una che si espandeva isotropicamente, corrispondente alla frazione di gas non condensata, ed una che invece si espandeva con la stessa anisotropia prevista dai ragionamenti teorici, corrispondente alla frazione condensata.

Per quanto detto sinora, l'anisotropia di una frazione della nube di gas fu per Cornell e Wieman la prova schiacciante del fatto che erano riusciti a realizzare il primo condensato di Bose-Einstein.

I risultati appena discussi sono mostrati in figura 2.6.

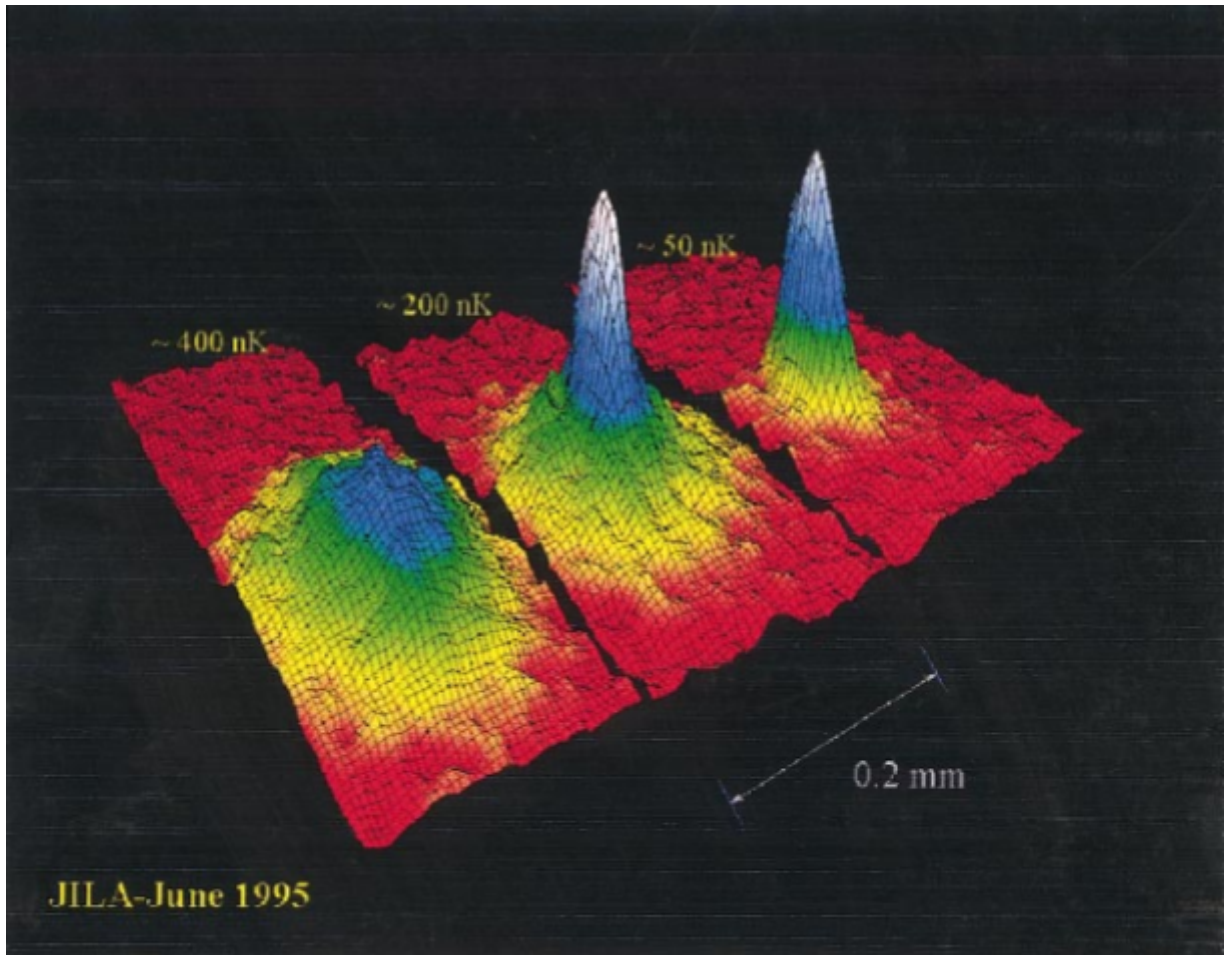


Figura 2.6. Tre distribuzioni di densità osservate al JILA per il gas di atomi di rubidio a tre differenti temperature. A sinistra un gas non condensato, al centro un gas che presenta una frazione condensata ed una non condensata, a sinistra un "puro condensato", ovvero un gas nel quale quasi tutti gli atomi sono nel condensato.[2]

Conclusioni

La tesi che qui si conclude è consistita nell'esaminare la condensazione di Bose-Einstein dalla sua formulazione teorica estremamente semplice e lineare, ricavata come immediata conseguenza della statistica di Bose-Einstein, fino alla sua realizzazione sperimentale che è invece stata difficile e delicata a causa delle bassissime temperature necessarie per il fenomeno.

Dopo la realizzazione del 1995 il condensato di Bose-Einstein ha manifestato molte interessanti proprietà.

Un vantaggio dell'uso dei condensati nei gas a bassa densità è che, come abbiamo discusso nella tesi, possono essere facilmente controllati dall'esterno mediante campi magnetici e fasci laser. Ciò permette di operare sui BEC esperimenti che permettono di testare modelli teorici pensati per sistemi più complessi. In questo modo i gas ultrafreddi di bosoni possono essere utilizzati per emulare fenomeni che ad esempio occorrono nella materia condensata e che nei sistemi originali presentano forme ed effetti complicati a causa delle interazioni tra le particelle, mentre in un BEC possono essere studiati in una forma più semplice e pulita, poichè non sono influenzati dalle interazioni.

Un'altra fruttuosa applicazione della BEC è l'utilizzo delle onde di materia generate dai condensati per esperimenti di interferometria. La grande coerenza della funzione d'onda dei condensati permette misure molto precise dell'interferenza per esempio tra due nubi condensate di atomi diversi. La stessa caratteristica rende promettente l'utilizzo dei BEC per generare "*laser atomici*", ovvero fasci di atomi molto intensi formati da onde di materia tra loro coerenti. Anche questa tecnologia è rivolta al campo delle misure di precisione.

Possiamo quindi concludere con convinzione che quella della condensazione di Bose-Einstein è una teoria consolidata e fondamentale nella fisica teorica che si traduce in uno strumento molto utile e versatile in molti campi della fisica sperimentale.

Bibliografia

- [1] Vanderlei Salvador Bagnato, Dimitri J Frantzeskakis, Panagiotis G Kevrekidis, Boris A Malomed, and D Mihalache. Bose-einstein condensation: Twenty years after. *Romanian Reports in Physics*, 2015.
- [2] Eric A Cornell and Carl E Wieman. Nobel lecture: Bose-einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):875– 893, 2002.
- [3] B. H. Bransden ; C. J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Longman Scientific & Technical, 1983.
- [4] Wolfgang Ketterle, Dallin S Durfee, and DM Stamper-Kurn. Making, probing and understanding bose-einstein condensates. *arXiv preprint cond-mat/9904034*, 1999.
- [5] EM Lifshitz, LD, and Sykes Landau (JB). *Quantum Mechanics; Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1965.
- [6] Christopher J Pethick and Henrik Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2002.
- [7] P. Caldirola ; R. Cirelli ; G.M Prosperi. *Introduzione alla Fisica Teorica*. Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1982.
- [8] Frederick Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. AAPT, 1998.
- [9] F. Schwabl. *Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, 2006.
- [10] Amber L. Stuver. Bose einstein condensation. *PHYS*, 518, 2002.
- [11] Wikipedia. Vincitori del premio nobel per la fisica — wikipedia, l’enciclopedia libera, 2019. [Online; in data 18-novembre-2019].