

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

L’Approccio Cosmografico in Cosmologia

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:

Alessandro Tiano

Matr. N85000875

Anno Accademico 2018/2019

Alla mia famiglia

Sommario

In questo lavoro di tesi è discusso l'approccio cosmografico come tecnica di modello indipendente per ricavare informazioni sui parametri descrittivi l'evoluzione dell'universo, presupponendo ipotesi solamente di natura geometrica. Nel primo capitolo sono descritte le proprietà di un universo omogeneo ed isotropo ed è ricavata la metrica Friedmann-Robertson-Walker, contenente le assunzioni richieste dal Principio Cosmologico. Nel secondo capitolo l'attenzione è focalizzata nella risoluzione delle equazioni di campo di Einstein al fine di ottenere le equazioni cosmologiche che governano la dinamica dell'universo, secondo le ipotesi del Modello Cosmologico Standard, studiando le varie soluzioni. Inoltre, sono esposti i risultati delle recenti osservazioni astronomiche e le conseguenze che hanno indotto ai modelli teorici. In particolare, è presentato il modello di concordanza cosmologica (Λ CDM) ed è discussa l'ipotesi dell'energia oscura, analizzando i problemi legati alla sua natura e alla sua origine. Nel terzo capitolo sono descritti i metodi usati per la determinazione delle distanze di sorgenti astronomiche, definendo la scala delle distanze cosmiche. In seguito, è analizzato l'approccio cosmografico standard, basato sull'espansione di Taylor degli osservabili cosmologici. Sono discussi i limiti della cosmografia standard ed è presentata un'ulteriore tecnica basata sulle approssimazioni razionali di Padé. Infine, tramite un confronto analitico dell'espressione della distanza di luminosità, prevista dal modello Λ CDM, con le espansioni ottenute dai due differenti metodi di approssimazione, è dimostrata la miglior accuratezza delle funzioni razionali di Padé su un ampio intervallo di redshift considerato, come evidenziato ulteriormente anche dallo studio effettuato sul raggio di convergenza.

Indice

Introduzione	4
1 Il Principio Cosmologico e la metrica Friedmann-Robertson-Walker	8
1.1 Il sistema di coordinate comobili	8
1.2 Spazio tridimensionale omogeneo ed isotropo	9
1.2.1 L'equazione di Killing	10
1.3 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker	12
1.4 La legge di Hubble e la metrica Friedmann-Robertson-Walker	14
2 La dinamica cosmologica	16
2.1 Le equazioni di Friedmann	17
2.1.1 La conservazione dell'energia	19
2.1.2 L'ipotesi di fluido perfetto barotropico	20
2.1.3 Le fasi cosmologiche	22
2.2 L'evoluzione futura dell'universo	25
2.2.1 I modelli di Friedmann	26
2.3 Il redshift cosmologico	28
2.4 Il problema della "massa mancante": la materia oscura	31
2.5 L'espansione accelerata e l'energia oscura	32
2.5.1 La costante cosmologica Λ	32
2.6 Il modello Λ CDM	34
2.6.1 Problematiche del modello Λ CDM	35
3 Il metodo cosmografico	37
3.1 Misure di distanze	37
3.1.1 Parallasse trigonometrica	38
3.1.2 Moti propri	39
3.1.3 Luminosità apparente	41
3.1.4 Diametro angolare	43
3.2 La scala delle distanze cosmiche	44

<i>INDICE</i>	4
3.3 Il ruolo della cosmografia nella <i>Cosmologia di Precisione</i>	46
3.4 La cosmografia standard: l'approssimazione di Taylor	47
3.4.1 Il significato fisico dei parametri cosmografici	48
3.4.2 L'espansione in serie della distanza di luminosità	49
3.4.3 I limiti della cosmografia standard	51
3.5 Il metodo delle approssimazioni razionali di Padé	51
3.5.1 L'approssimante di Padé	52
3.5.2 Confronto delle approssimazioni con il modello Λ CDM .	53
3.5.3 Lo studio del raggio di convergenza	56
Conclusioni	58
A La determinazione della metrica Friedmann-Robertson-Walker	59
Bibliografia	63

Introduzione

Il Principio Cosmologico e la Legge di Hubble

La *Cosmologia* è la scienza che studia l'origine, la struttura a larga scala e l'evoluzione dell'universo considerato come un sistema unico. La Cosmologia moderna nasce agli inizi del '900 grazie ai lavori di Einstein, De Sitter, Hubble, Friedmann e molti altri, che hanno permesso la descrizione dell'universo tramite modelli fisico-matematici da confrontare con le osservazioni astronomiche. Infatti, a differenza degli altri rami della fisica basati sul metodo galileiano, in Cosmologia non è possibile riprodurre le misure tramite gli esperimenti, pertanto, gli assiomi di base della Cosmologia moderna si sono dedotti col tempo grazie all'incremento delle osservazioni cosmologiche.

A partire dalla rivoluzione copernicana l'uomo ha abbandonato l'idea di occupare una posizione geometricamente e fisicamente privilegiata nell'universo. Se si analizza la struttura a larga scala dell'universo, saranno le *galassie* ad avere il ruolo di "punti materiali". Ciò che si evince dalle osservazioni è che esse tendono a raggrupparsi in strutture chiamate *ammassi (cluster)*, contenenti da decine fino a migliaia di oggetti, che a loro volta tendono a formare strutture ancora più grandi come i *superammassi*, separati tra loro da "vuoti". Ad ogni modo, le osservazioni astronomiche mostrano come su larga scala, in media, la distribuzione delle galassie sia omogenea ed isotropa. Uno dei principi su cui si fonda la Cosmologia è ottenuto da un'estrapolazione effettuata a partire da questa conseguenza osservazionale: il *Principio Cosmologico*.

Il Principio Cosmologico afferma che su scale cosmologiche ($> 100Mpc$) l'universo risulta omogeneo ed isotropo, estendendo il principio copernicano a livello cosmico.

Inoltre, Edwin Hubble, nel 1929, scoprì che tutte le galassie sembrano allontanarsi da noi, infatti, la radiazione che emettono risulta essere spostata verso il rosso, mostrando il fenomeno del *redshift*. La relazione empirica tra la velocità di recessione di una galassia rispetto ad un'altra e la loro distanza relativa è data dalla *legge di Hubble*

$$v = H_0 d$$

Il fattore di proporzionalità è la *costante di Hubble* H_0 , il cui valore attuale è dell'ordine di $H_0 = 65 \div 70 \text{ km/sec/Mpc}$. Tuttavia, stabilire il suo valore rimane ancora ad oggi un argomento molto controverso. Il risultato sperimentale ottenuto da Hubble ha mostrato il carattere dinamico dell'universo che appare in continua espansione. Questo concetto è alla base di un ulteriore principio fondamentale della Cosmologia Moderna, ovvero il *principio di espansione dell'universo*.

Se le galassie stanno recedendo l'una dall'altra, si può ipotizzare l'esistenza di un'epoca nel passato in cui le galassie dovevano essere tutte vicine tra loro, formando un agglomerato molto denso ed estremamente caldo. Quindi, in un dato momento del passato si sarebbe manifestata una violenta esplosione che diede origine all'universo e che ne causò l'espansione, espellendo tutta la materia cosmica. Questo evento è detto "*Bing-Bang*".

È possibile ottenere una stima dell'età dell'universo osservando che la grandezza $(H_0)^{-1}$ ha le dimensioni di un tempo. Questa quantità è detta *tempo di Hubble* e, secondo le recenti stime, è pari a circa 14,5 miliardi di anni.

La legge di Hubble a sua volta permette di risolvere anche il cosiddetto *paradosso di Olbers*: *se l'universo è pieno di infinite stelle, come mai il cielo non è saturo di luce?*

L'apparente paradosso non è più tale, infatti, se si ipotizza un universo in espansione. Se le galassie si allontanano da noi con velocità tanto maggiore quanto più grande è la distanza reciproca, allora, ciò vuol dire che, per effetto Doppler relativistico, la luce proveniente da esse sarà sempre più spostata verso il rosso (*redshift cosmologico*), fino a superare lo spettro del visibile e risultare invisibile ai nostri occhi.

Invece, se si ipotizza l'esistenza del Bing Bang e quindi l'idea di un universo finito del tempo, il paradosso di Olbers risulta verificato solo asintoticamente. Infatti, se l'universo non è eterno e la luce possiede una velocità finita, semplicemente non c'è stato abbastanza tempo per illuminare l'intero cielo.

Infine, è importante notare come il Principio Cosmologico semplifichi considerevolmente lo studio della struttura a larga scala dell'universo, in quanto presuppone l'esistenza di un fattore universale legato al concetto di distanza tra due galassie. La distanza di una coppia qualsiasi di galassie, infatti, può essere espressa come

$$d_{1,2} = a(t)r_{1,2}$$

dove $a(t)$ è una grandezza chiamata *fattore di scala* che contiene la dipendenza temporale dovuta all'evoluzione dell'universo.

In questo modo, la velocità di recessione di due galassie potrà essere scritta come

$$v_{1,2} = \dot{d}_{1,2} = r_{1,2} \dot{a} = d_{1,2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)$$

dove con il punto abbiamo indicato la derivata rispetto al tempo cosmico. Dunque, se ci riferiamo all'epoca attuale t_0 , ritroviamo la legge di Hubble

$$v_{1,2} = H_0 d_{1,2} \quad \text{con} \quad H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_0$$

ottenendo la relazione che lega la costante di Hubble al fattore di scala.

Capitolo 1

Il Principio Cosmologico e la metrica Friedmann-Robertson-Walker

In questo capitolo, introdurremo una metrica adatta alle cosmologie dove si assume essere valido il *Principio Cosmologico*, il quale stabilisce che l'universo, su scale cosmiche, appare omogeneo ovunque ed isotropo intorno ad ogni suo punto [1]. Come abbiamo visto, una conseguenza di tale assunzione è che la distanza tra due galassie tipiche è assegnata da un fattore di scala universale dipendente dal tempo, $a(t)$, che è il medesimo per ogni coppia di galassie. Il nostro scopo sarà quello di ottenere una metrica che rappresenti una soluzione delle equazioni di Einstein e che fornisca un'adeguata descrizione circa l'evoluzione dinamica di un universo descritto dal Principio Cosmologico.

1.1 Il sistema di coordinate comobili

In Relatività Generale la scelta del sistema di coordinate è totalmente arbitraria, tuttavia, nella costruzione della metrica, faremo riferimento ad un sistema di coordinate più idoneo, le *coordinate comobili*, ovvero, quel particolare sistema di coordinate in cui un corpo di prova, inizialmente a riposo, rimane a riposo, nonostante sia sottoposto all'azione di un campo gravitazionale che varia nel tempo. In altri termini, le coordinate comobili seguono il moto in maniera "solidale" all'evoluzione temporale della geometria stessa dello spazio-tempo, in modo tale che l'espansione risulti non come una variazione della posizione relativa delle galassie ma come una variazione della parte spaziale della metrica stessa [2]. Per capire meglio questo concetto, si potrebbe immaginare il sistema di coordinate comobile come solidale a delle linee giacenti sulla superficie di un palloncino, i cui punti

rappresentano le galassie tipiche. Quando il palloncino si gonfia o si sgonfia, i punti si muoveranno sulla sua superficie, tuttavia, contemporaneamente, anche le linee modificheranno la loro estensione assieme al palloncino, pertanto, ogni punto conserverà le stesse coordinate [3].

L'uso di coordinate comobili identifica la classe degli osservatori "statici", ovvero solidali all'evoluzione spaziale della metrica, come "osservatori privilegiati", in quanto a riposo con la geometria stessa. Tali osservatori forniscono un possibile riferimento universale rispetto al quale sincronizzare gli orologi e rispetto al quale definire una conveniente coordinata che parametrizzi l'evoluzione temporale in modo indipendente dall'evoluzione della geometria stessa. Tale coordinata coincide con il tempo proprio degli osservatori statici, ed è chiamato *tempo cosmico*.

In generale, un sistema di coordinate in cui è possibile la sincronizzazione degli orologi è definito *sistema di coordinate sincrone*. Dalla Relatività Generale sappiamo che, in un assegnato sistema di coordinate, è possibile eseguire la sincronizzazione di una qualunque coppia di orologi infinitamente vicini solamente se sono nulli i termini di boost spazio-temporali della metrica, ovvero, solo se $g_{0k} = 0$. Viceversa, se $g_{0k} \neq 0$, gli orologi sono desincronizzati e la grandezza g_{0k}/g_{00} ci fornisce la discrepanza temporale. Inoltre, se $g_{00} = 1$ in tutti i punti dello spazio, la coordinata temporale svolge il ruolo di *tempo universale* [4].

Pertanto, dal Principio Cosmologico, si ricava che lo spazio-tempo è dato da $\mathbb{R} \times \Sigma$, dove \mathbb{R} rappresenta la direzione del tempo cosmico.

1.2 Spazio tridimensionale omogeneo ed isotropo

Assumendo come ipotesi per la costruzione della metrica l'omogeneità e l'isotropia dello spazio tridimensionale Σ , possiamo scrivere la metrica per un sistema comobile, i cui tutti gli orologi sono sincronizzati, come [5]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) F(r) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (1.1)$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt, \quad dt = d\tau, \quad g_{00} = 1 \quad (1.2)$$

dove $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Il tensore metrico assume dunque la seguente forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)F(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)F(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)F(r)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Per determinare la forma della funzione $F(r)$, studiamo le proprietà di simmetria per lo spazio tridimensionale richieste dal Principio Cosmologico, ovvero l'isotropia e l'omogeneità a tutti i tempi. L'isotropia implica che l'universo appaia il

medesimo in ogni direzione. Formalmente, una varietà \mathcal{M} è isotropa se per ogni punto p e vettori V e W dello spazio tangente di \mathcal{M} , esiste un'isometria di \mathcal{M} che trasporti V parallelamente a W lasciando invariato p (isomorfismo sotto rotazioni). L'omogeneità, invece, implica che la metrica sia la stessa in tutta la varietà, ovvero, dati due punti p e q qualsiasi della varietà \mathcal{M} esiste un'isometria che trasporti p in q (isomorfismo sotto traslazioni).

Come vedremo in seguito, le simmetrie dello spazio-tempo sono individuate dai suoi vettori di Killing.

In generale, in seguito ad una trasformazione arbitraria di coordinate

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\mu) \quad (1.4)$$

Il tensore metrico obbedirà alla seguente legge di trasformazione

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x(\bar{x})) \quad (1.5)$$

dove x è un punto coordinato dello spazio-tempo [6].

Date le nostre ipotesi di simmetria, siamo interessati a quelle particolari trasformazioni che lasciano invariata la metrica, ovvero le *isometrie* (trasformazioni che mantengono le distanze), per le quali vale:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}(x)) = g_{\mu\nu}(x) \quad \forall x \quad (1.6)$$

Pertanto, sostituendo la condizione 1.6 nell'Eq. 1.5, si ottiene

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{g}_{\alpha\beta}(x(\bar{x})) \quad (1.7)$$

1.2.1 L'equazione di Killing

Consideriamo una trasformazione che differisce poco dalla trasformazione identica, la quale è un caso speciale di isometria

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha(x) \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

Cerchiamo di determinare il campo vettoriale dei vettori $\xi^\alpha(x)$ per i quali la precedente trasformazione è un'isometria.

Sviluppando la derivata che compare nell'Eq. 1.7, si ottiene

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} (\bar{x}^\alpha - \epsilon \xi^\alpha(x)) = \delta_\mu^\alpha - \epsilon \xi_{,\mu}^\alpha \quad (1.9)$$

In questo modo, l'Eq. 1.7 diventa

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = (\delta_\mu^\alpha - \epsilon \xi_{,\mu}^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \epsilon \xi_{,\nu}^\beta) \bar{g}_{\alpha\beta}(x(\bar{x})) \quad (1.10)$$

Trascurando i termini del secondo ordine, si ha

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \bar{g}_{\alpha\beta}(x(\bar{x})) - \epsilon \xi_{,\mu}^\alpha \bar{g}_{\alpha\nu} - \epsilon \xi_{,\nu}^\beta \bar{g}_{\mu\beta} \quad (1.11)$$

ovvero

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(x(\bar{x})) - \epsilon \xi_{,\mu}^\alpha \bar{g}_{\alpha\nu} - \epsilon \xi_{,\nu}^\beta \bar{g}_{\mu\beta} \quad (1.12)$$

Sviluppiamo in serie di Taylor al primo ordine il tensore $\bar{g}_{\mu\nu}(x(\bar{x}))$, al fine di esprimerlo in funzione delle coordinate \bar{x} :

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha - \epsilon \xi^\alpha(x)) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) - \epsilon \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha} \xi^\alpha(x) + o(\epsilon) \quad (1.13)$$

Sostituendo nell'Eq. 1.13, si ottiene un'equazione differenziale per i vettori $\xi^\alpha(x)$

$$\xi^\alpha \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{g}_{\mu\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{g}_{\alpha\nu} = 0 \quad (1.14)$$

Osserviamo, svolgendo la seguente derivata, che

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} (\xi^\beta \bar{g}_{\mu\beta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} (\xi_\mu) = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{g}_{\mu\beta} + \xi^\beta \frac{\partial \bar{g}_{\mu\beta}}{\partial \bar{x}^\nu} \quad (1.15)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\xi^\beta \bar{g}_{\mu\beta} = \xi_\mu$.

La precedente può essere riscritta in maniera più compatta come

$$\xi_{,\nu}^\beta \bar{g}_{\mu\beta} = \xi_{\mu,\nu} - \xi^\beta \bar{g}_{\mu\beta,\nu} \quad (1.16)$$

Analogamente

$$\xi_{,\mu}^\alpha \bar{g}_{\alpha\nu} = \xi_{\nu,\mu} - \xi^\alpha \bar{g}_{\alpha\nu,\mu} = \xi_{\nu,\mu} - \xi^\alpha \bar{g}_{\nu\alpha,\mu} \quad (1.17)$$

per la simmetria del tensore metrico.

Sostituendo le Eq. 1.16 e 1.17 nella 1.14, si ha

$$\xi^\alpha \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} + \xi_{\mu,\nu} - \xi^\beta \bar{g}_{\mu\beta,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \xi^\alpha \bar{g}_{\nu\alpha,\mu} = 0 \quad (1.18)$$

Come è noto, la derivata del tensore metrico è legata ai simboli di Christoffel dalla relazione:

$$\bar{g}_{\mu\nu,\alpha} = \bar{g}_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma + \bar{g}_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \quad (1.19)$$

Pertanto, in termini dei simboli di Christoffel, l'Eq. 1.18 diviene

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \bar{g}_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma + \xi^\alpha \bar{g}_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma + \xi_{\mu,\nu} - \xi^\beta \bar{g}_{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \\ - \xi^\beta \bar{g}_{\mu\sigma} \Gamma_{\beta\nu}^\sigma + \xi_{\nu,\mu} - \xi^\alpha \bar{g}_{\sigma\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma - \xi^\alpha \bar{g}_{\alpha\sigma} \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Semplificando i termini opportuni

$$(\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) + (\xi_{\nu;\mu} - \xi_{\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) = 0 \quad (1.21)$$

Ricordando la definizione di derivata covariante, l'Eq. 1.21 si riscrive

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (1.22)$$

L'Eq. 1.22 è nota come *Equazione di Killing*, mentre i vettori ξ^{α} sono chiamati *vettori di Killing*.

Pertanto, abbiamo dimostrato che il campo di Killing rappresenta il generatore delle isometrie.

1.3 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker

Il problema della determinazione delle isometrie per una data metrica, e viceversa, il problema di introdurre in una generica metrica isometrie desiderate, si trasforma, quindi, in quello della determinazione dei vettori di Killing.

Nell'appendice A è descritto in dettaglio il procedimento per ricavare la forma della funzione $F(r)$, presente nell'espressione della metrica per uno spazio omogeneo ed isotropo (Eq. 1.1), risolvendo l'equazione di Killing 1.22 per le varie componenti [5].

Riportiamo qui di seguito il risultato ottenuto

$$F(r) = \frac{1}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2} \quad (1.23)$$

dove la costante tricotomica k può assumere i valori $+1$, -1 e 0 .

Sostituendo l'Eq. 1.23 nell'Eq. 1.1, possiamo finalmente scrivere la metrica descrivente un universo omogeneo ed isotropo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a(t)^2}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (1.24)$$

Effettuando la trasformazione di coordinate

$$\bar{t} = t, \quad \bar{r} = \frac{r}{1 + \frac{kr^2}{4}}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi \quad (1.25)$$

si ha che

$$d\bar{r}^2 = \frac{(1 - \frac{k}{4}r^2)^2}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^4} dr^2 \quad (1.26)$$

Con questa trasformazione, l'Eq. 1.24 assume la seguente forma equivalente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.27)$$

Le Eq. 1.24 e 1.27 ottenute, rappresentano due forme equivalenti di una metrica che contiene le ipotesi di omogeneità ed isotropia dello spazio tridimensionale, come richiesto dal Principio Cosmologico: essa prende il nome di *metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW)*.

Richiamando alcuni risultati di geometria differenziale, si può verificare che le assunzioni imposte dal Principio Cosmologico, ovvero la presenza di due isometrie, quella traslazionale e quella rotazionale, fanno sì che le iper-superfici caratterizzate da un tempo cosmico costante siano sottospazi massimamente simmetrici dell'intero spazio-tempo. Una caratteristica delle varietà massimamente simmetriche è che possiedono una curvatura che è la stessa ovunque (per le isometrie di traslazione) e in ogni direzione (per le isometrie di rotazione) [7].

Nel caso della metrica FRW, il parametro k assegna la curvatura della sottovarietà spaziale. In particolar modo:

- $k = -1$, per modelli di universo spazialmente aperti,
- $k = 0$, per modelli di universo spazialmente piatti,
- $k = 1$, per modelli di universo spazialmente chiusi.

Nei modelli cosmologici in cui l'universo ha un'estensione finita, il fattore di scala $a(t)$ è correlato alla massima distanza tra due punti dell'universo e può assumere il significato di raggio dell'universo.

In questi modelli, quindi, l'universo spaziale può essere considerato come la superficie di una sfera di raggio $a(t)$ nello spazio Euclideo quadri-dimensionale. Nei modelli descritti da un parametro di curvatura $k = -1, 0$, non è possibile nessuna interpretazione per il fattore di scala, ma esso continuerà a stabilire la scala della geometria dell'universo.

Esponiamo, infine, un'ulteriore proprietà della metrica FRW.

Abbiamo precedentemente definito il sistema di coordinate comobili come un sistema di riferimento nel quale un corpo di prova, inizialmente a riposo, resta a riposo, nonostante sia sottoposto all'azione di un campo gravitazionale variabile nel tempo. Possiamo verificare ciò considerando un corpo di prova, inizialmente fermo, $\dot{x}^i = 0$, localizzato nel punto di coordinate $x^i = \text{costante}$ [2].

La sua accelerazione iniziale è fornita dall'equazione geodetica

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \Gamma_{00}^i (\dot{x}^0)^2 \quad (1.28)$$

Il legame tra il simbolo di Christoffel e il tensore metrico è il seguente

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{ij}(2\partial_0g_{0j} + \partial_jg_{00}) \quad (1.29)$$

Nel caso particolare della metrica FRW, $g_{0j} = 0$, mentre g_{00} dipende solo dal tempo, pertanto:

$$\ddot{x}^i = \Gamma_{00}^i = 0 \quad (1.30)$$

Quindi, anche l'accelerazione iniziale è nulla ed il corpo, inizialmente fermo, resta fisso nella posizione di partenza. Questa proprietà della metrica FRW si può esprimere affermando che, per questa metrica, i campi di velocità tangenti alla traiettoria di osservatori (o corpi di prova) statici, sono campi di velocità geodetici. Ne consegue che l'affermazione che una galassia possiede coordinate spaziali x^i costanti è perfettamente consistente con l'ipotesi che le galassie sono in caduta libera.

In questo modo, è possibile fornire un'ulteriore definizione del tempo cosmico presente nella metrica FRW come il tempo proprio misurato da un orologio a riposo in una galassia tipica in caduta libera.

Ottenuta la metrica FRW, descrivente un universo in accordo con il Principio Cosmologico, il nostro scopo sarà quello di risolvere la *dinamica cosmologica*, ovvero, di ricavare l'evoluzione temporale del fattore di scala incognito $a(t)$, utilizzando le equazioni di campo di Einstein.

1.4 La legge di Hubble e la metrica Friedmann-Robertson-Walker

La convenienza relativa all'uso delle coordinate comobili non ci deve portare a trascurare l'effettivo allontanamento ed avvicinamento delle galassie tipiche quando il fattore di scala $a(t)$ cresce o decresce. Esponiamo, dunque, il concetto di distanza da una galassia.

Immaginiamo una catena di galassie che giacciono sulla linea di vista tra noi e una galassia lontana localizzata, in un sistema di coordinate polari, nel punto di coordinate r_1, θ_1, ϕ_1 e supponiamo che, allo stesso tempo cosmico t , gli osservatori di ogni galassia misurino la distanza della galassia vicina stimando il tempo di percorrenza di una segnale luminoso [3].

La distanza propria tra noi, origine del sistema di coordinate polari, e la galassia localizzata in r_1, θ_1, ϕ_1 sarà ottenuta sommando tutte queste distanze intermedie. Dall'Eq. 1.27 della metrica FRW, ponendo $dt = 0$ (perché le misure sono effettuate allo stesso tempo cosmico), si ha

$$ds = \sqrt{-g_{rr}}dr \quad (1.31)$$

Pertanto, si ottiene

$$d_{prop}(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{-g_{rr}} dr = a(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.32)$$

Siccome risulta impossibile misurare sperimentalmente tutte queste "sotto-distanze", la distanza propria 1.32 non ha un significato operativo rilevante nell'ambito della cosmologia osservativa.

La distanza propria da una sorgente potrà variare nel tempo a causa della dipendenza temporale del fattore di scala.

Derivando l'Eq. 1.32 rispetto al tempo si ottiene la velocità radiale della sorgente rispetto all'origine

$$v_r(t) = \dot{d}_{prop}(t) = \dot{a}(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.33)$$

Facendo il rapporto tra l'Eq. 1.33 e l'Eq. 1.32, si ha

$$\frac{v_r(t)}{d_{prop}(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.34)$$

da cui, si ottiene

$$v_r(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_{prop}(t) = H(t) d_{prop}(t) \quad (1.35)$$

Questa equazione è nota come *legge di Hubble* e la quantità

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.36)$$

è chiamata *parametro di Hubble*.

Il valore di questo parametro valutato al tempo presente H_0 è affetto da incertezza sperimentale

$$H_0 = 100 \frac{km}{sec Mpc} h, \quad \text{con } 0,5 < h < 1 \quad (1.37)$$

Attualmente, l'intervallo di valori più attendibile per h è $0,65 < h < 0,71$.

La legge di recessione delle galassie è stata scoperta nel 1929 da Hubble per via sperimentale, tuttavia, in questo modo, abbiamo dimostrato che essa è diretta conseguenza dell'ipotesi di isotropia ed omogeneità spaziale contenuta nella forma della metrica FRW.

Dunque, tramite la legge di Hubble, la conoscenza del fattore di scala $a(t)$ rappresenta un mezzo con cui poter confrontare i risultati dei modelli teorici con i dati sperimentali.

Capitolo 2

La dinamica cosmologica

Assegnare una data cosmologia in accordo con il Principio Cosmologico vuol dire ricavare l'andamento temporale del fattore di scala $a(t)$, che controlla la dinamica del campo gravitazionale descritto da una metrica di tipo FRW, risolvendo le equazioni di campo di Einstein per questa data metrica.

Per riuscire a formulare un modello descrivente la dinamica dell'Universo, risulta necessaria una descrizione del suo stato attuale e dei processi evolutivi che lo hanno determinato in grado di spiegare in maniera soddisfacente le osservazioni cosmologiche.

Queste assunzioni sono racchiuse nel *Modello Cosmologico standard*, arrivato ad una formulazione completa nella seconda metà del Novecento. Esso si basa sui seguenti principi

- L'interazione gravitazionale su scale di distanze cosmologiche è correttamente descritta dalle equazioni della Relatività Generale.
- Vale il Principio Cosmologico
- L'universo è in espansione (Legge di Hubble)
- Le sorgenti del campo gravitazionale si possono descrivere come un fluido perfetto avente due componenti principali: materia e radiazione.
- Si considera valido il *Modello Standard delle particelle elementari*
- Esiste una *Radiazione Cosmica di Fondo (CMBR)* e la radiazione presente a livello cosmico si trova in uno stato di equilibrio termodinamico.

Lo scopo principale di questo capitolo sarà, pertanto, quello di risolvere le equazioni di Einstein per la metrica FRW, che riportiamo di seguito:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.1)$$

dove il tensore metrico assume la seguente forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

il cui determinante, che sarà utile in seguito, è pari a

$$g = -a^6(t)r^4 \frac{\sin^2\theta}{1-kr^2} \quad (2.3)$$

2.1 Le equazioni di Friedmann

Consideriamo, dunque, le equazioni di campo di Einstein prive del termine cosmologico Λ e poniamoci in un sistema di unità tale che $c = 1$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

dove $\chi = 8\pi G$

In accordo con le ipotesi del modello standard, supponiamo che la sorgente gravitazionale sia descritta dal tensore energia-impulso di un fluido perfetto, avente la forma [4]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

dove $\rho(t)$ è la densità di energia del fluido, mentre $p(t)$ è la pressione del fluido. Queste due grandezze, per essere in accordo con le proprietà di simmetria della metrica FRW (omogeneità ed isotropia spaziale), dovranno dipendere solamente dal tempo cosmico e non dalle coordinate spaziali.

La pressione e la densità di energia sono legate tra loro dall'*equazione di stato* $p = p(\rho)$.

Il campo di quadri-velocità è riferito ad un osservatore che si muove all'interno del cono luce, pertanto, è normalizzato secondo la seguente relazione

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \quad (2.6)$$

Per un fluido a riposo rispetto alle coordinate $u^k = 0$ con $k = 1, 2, 3$, si ha

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = 1 \quad (2.7)$$

quindi, il quadri-vettore velocità avrà componenti $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Sostituendo la condizione di staticità nell'Eq. 2.5, è possibile costruire le componenti del tensore energia-impulso, ricordando l'espressione del tensore metrico

data dall'Eq. 2.2, ottenendo:

$$T_{00} = (\rho + p)u_0^2 - pg_{00} = \rho \Rightarrow T_{00} = \rho \quad (2.8)$$

$$T_{0i} = (\rho + p)u_0u_i - Pg_{oi} = 0 \Rightarrow T_{0i} = 0 \quad (2.9)$$

$$T_{ij} = (\rho + p)u_iu_j - pg_{ij} = -pg_{ij} \Rightarrow T_{ij} = -pg_{ij} \quad (2.10)$$

Pertanto, il tensore energia-impulso per un fluido perfetto a riposo rispetto ad un sistema di coordinate comoventi, è un tensore diagonale. Inoltre, assume una forma ancora più semplice se passiamo alle componenti miste $T_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\tau}T_{\nu\tau}$. In questo modo, si ottiene

$$T_0^0 = g^{00}T_{00} = \rho \quad (2.11)$$

$$T_i^0 = g^{0i}T_{0i} = 0 \quad (2.12)$$

$$T_j^i = g^{it}T_{jt} = -pg^{it}g_{jt} = -p\delta_j^i \quad (2.13)$$

Il tensore energia-impulso assume, dunque, la seguente semplice forma:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (2.14)$$

Ottenuta la forma della sorgente del campo gravitazionale, per poter risolvere le equazioni di Einstein, non ci resta che ricavare le grandezze presenti nel membro sinistro dell'Eq. 2.4. Conoscendo la metrica, possiamo ricavare le connessioni affini tramite la relazione [6]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.15)$$

In questo modo, è possibile ottenere il tensore di Ricci contraendo il tensore di Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} \quad (2.16)$$

Dato il tensore di Ricci, ricaviamo lo scalare di curvatura R :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Pertanto, calcolando le varie componenti dei tensori sopracitati per la metrica FRW, si possono riscrivere le equazioni di campo (Eq.2.4), ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p) \end{cases} \quad (2.18)$$

dove $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di Hubble che esprime il rate di espansione dell'Universo, ovvero la velocità di espansione per unità di distanza.

Le equazioni ottenute sono chiamate *equazioni di Friedmann* e non sono altro che una riscrittura delle equazioni di campo di Einstein con le ipotesi del modello standard. Il sistema 2.18 fornisce le equazioni cosmologiche che governano la dinamica dell'universo descritto dal modello standard, poiché, assegnata l'equazione di stato $p = p(\rho)$, una loro soluzione descrive l'evoluzione temporale del fattore di scala cosmico $a(t)$ e della densità di energia $\rho(t)$.

2.1.1 La conservazione dell'energia

Oltre alle equazioni di campo, è utile considerare un'ulteriore relazione legata alla conservazione dell'energia, fornita in Relatività Generale dall'identità di Bianchi contratta [5]

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.19)$$

In particolar modo, si ha che

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta} \quad (2.20)$$

Si può dimostrare che le componenti spaziali di quest'equazione sono identicamente soddisfatte.

Analizziamo invece la legge di conservazione per la componente temporale, ponendo $\mu = \nu = 0$ nella 2.20 e ricordando la definizione del determinante del tensore metrico data dall'Eq. 2.3:

$$T_{0;0}^0 = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial ct} \left(\frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \rho \right) - \frac{1}{2} g_{ij,0} T^{ij} = 0 \quad (2.21)$$

in quanto il termine $g_{00,0}$ è nullo

Calcoliamo separatamente il termine $g_{ij,0} T^{ij}$, usando l'Eq. 2.10 che definisce le componenti spaziali del tensore energia-impulso. In questo modo, si ottiene

$$g_{ij,0} T^{ij} = g_{ij,0} (-p g^{ij}) \quad (2.22)$$

Esplicitando i termini della sommatoria sugli indici ripetuti, la precedente diventa

$$-p \left\{ \frac{\partial}{\partial ct} \left[-\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \right] \left(-\frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) + \frac{\partial}{\partial ct} [-a^2(t)r^2] \left(-\frac{1}{a^2(t)r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial ct} [-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta] \left(-\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \right) \right\} \quad (2.23)$$

che, semplificando i termini opportuni e derivando, diventa

$$-\frac{3p}{c} \left(\frac{2a\dot{a}}{a^2} \right) = -\frac{6p}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \quad (2.24)$$

Sostituendo l'Eq. 2.24 nella 2.21, si ha

$$T_{0;0}^0 = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} [a^3(t)\rho(t)] + 3p \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = 0 \quad (2.25)$$

che, scrivendo il secondo termine in termini di derivata temporale, si riscrive come

$$\frac{\partial}{\partial t} [a^3(t)\rho(t)] + p \frac{\partial}{\partial t} a^3(t) = 0 \quad (2.26)$$

L'Eq. 2.26 rappresenta un'equazione di continuità che esprime la conservazione della densità di energia del fluido cosmologico, descrivendo la sua evoluzione temporale nella geometria definita dalla metrica FRW.

Infatti, nel caso particolare in cui la pressione della materia cosmica possa essere considerata trascurabile, l'Eq. 2.26 si riconduce alla seguente legge di conservazione [3]

$$a^3(t)\rho(t) = \text{costante} \quad (2.27)$$

Inoltre, può essere riscritta anche in una forma equivalente in termini del parametro di Hubble.

Sviluppiamo la derivata presente al primo termine dell'Eq. 2.25, si ha

$$\frac{1}{a^3} [3a^2 \dot{a} \rho(t) + a^3 \frac{\partial}{\partial t} \rho(t)] + 3pH = 0 \quad (2.28)$$

ottenendo

$$3H(p + \rho) + \dot{\rho} = 0 \quad (2.29)$$

Tuttavia, l'Eq. 2.29 non fornisce ulteriori informazioni sulla dinamica cosmologica poiché non è indipendente dalle equazioni di Friedmann 2.18, ma può essere ottenuta da una loro opportuna combinazione [2].

Per questa ragione, è possibile utilizzare come coppia di equazioni cosmologiche anche il seguente sistema

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

del tutto equivalente all'Eq. 2.18 e che, quindi, imponendo l'equazione di stato per la materia, è in grado di fornire la dinamica.

2.1.2 L'ipotesi di fluido perfetto barotropico

Il sistema 2.30 costituisce un sistema di equazioni differenziali del primo ordine che può essere facilmente risolto per fluidi perfetti *barotropici*, ovvero per quei

particolari tipi di fluidi caratterizzati da un'equazione di stato che esprime una semplice proporzionalità diretta:

$$\frac{p}{\rho} = \gamma = \text{costante} \quad (2.31)$$

dove γ è denominato *indice adiabatico* ed è pari a c_s^2/c^2 , dove c_s è la velocità del suono nel fluido in esame. La costante γ appartiene all'intervallo

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2.32)$$

chiamato *intervallo di Zeldovich* [5].

Considereremo, in linea del tutto generale, che il tensore energia-impulso, sorgente del nostro campo, sia costituito da una miscela di fluidi perfetti barotropici, avente ciascuno un proprio indice adiabatico γ_n .

In questo modo, la pressione e la densità energetica del fluido cosmico saranno

$$\rho = \sum_n \rho_n \quad p = \sum_n p_n \quad (2.33)$$

dove, il legame tra le due grandezze è espresso dall'equazione di stato

$$p_n = \gamma_n \rho_n \quad (2.34)$$

Inoltre, assumeremo che le componenti della miscela siano disaccoppiate tra loro, soddisfacendo separatamente l'equazione di continuità [2]

$$\dot{\rho}_n + 3H(p_n + \rho_n) = 0 \quad (2.35)$$

che può essere riscritta in termini dell'indice adiabatico come

$$\dot{\rho}_n + 3H\rho_n(1 + \gamma_n) = 0 \quad (2.36)$$

Risolviendo l'equazione differenziale 2.36 per separazione di variabili, si ottiene

$$\frac{d\rho_n}{\rho_n} = -3(1 + \gamma_n) \frac{da}{a} \quad (2.37)$$

da cui

$$\rho_n = \rho_{0n} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma_n)} \quad (2.38)$$

con ρ_{0n} e a_0 costanti d'integrazione, ottenute assegnando le condizioni iniziali.

Si osserva, pertanto, che gli andamenti temporali di ρ_n (e quindi anche di p_n) sono diversi a seconda del valore di γ_n , quindi, con il passare del tempo le componenti del fluido cosmico tenderanno a separarsi: possiamo allora studiare la dinamica

cosmologica caratterizzando l'evoluzione temporale per *fasi cosmologiche*, dove una componente del fluido domina sull'altra e determinerà l'evoluzione della geometria durante quella particolare fase.

In questo modo, considerando solamente una componente del fluido cosmico, risulta semplificata la risoluzione delle equazioni di Friedmann 2.30 per quella data era cosmologica e, conseguentemente, è possibile ottenere l'evoluzione del fattore di scala cosmico $a(t)$, il quale risulterà dipendente dal parametro γ_n associato alla componente di fluido che è dominante nella fase cosmologica considerata.

2.1.3 Le fasi cosmologiche

Nel contesto del modello cosmologico standard, la sorgente cosmica coincide con un fluido perfetto barotropico caratterizzato da due componenti:

- *Materia non relativistica*, avente $\gamma_m = 0$.
La sua equazione di stato è, pertanto, $p_m = 0$. Questa componente a pressione nulla descrive le sorgenti gravitazionali macroscopiche come stelle, pianeti, galassie, . . . , ovvero, la cosiddetta materia barionica.
- *Radiazione*, avente $\gamma_r = \frac{1}{3}$.
La sua equazione di stato è $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$. Questa componente di radiazione descrive i contributi ultra-relativistici corrispondenti a particelle con massa nulla (fotoni) ed a particelle avente energie di gran lunga superiori rispetto alla loro massa a riposo (neutrini).

Pertanto, si ha

$$\rho = \rho_m + \rho_r \quad p = p_m + p_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (2.39)$$

Per l'Eq. 2.38, l'andamento della densità energetica per i due tipi di fluido sarà, quindi

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad ; \quad \rho_r \propto a^{-4} \quad (2.40)$$

Pertanto, possiamo affermare che il modello cosmologico standard prevede l'esistenza di due fasi cosmologiche, una dominata dalla materia barionica e una dalla radiazione. In particolare, osservando i due andamenti mostrati nella Fig.2.1, si nota che, all'aumentare del fattore di scala, ovvero, nel caso particolare di un universo descritto da una geometria che si espande, la densità energetica di radiazione diminuisce più rapidamente rispetto a quella di materia. La fase dominata dalla materia, quindi, sarà successiva a quella dominata dalla radiazione. Inoltre, vi sarà un tempo particolare, denotato come *epoca d'equilibrio* t_{eq} , in cui si verifica la condizione

$$\rho_r(t_{eq}) \simeq \rho_m(t_{eq}) \quad (2.41)$$

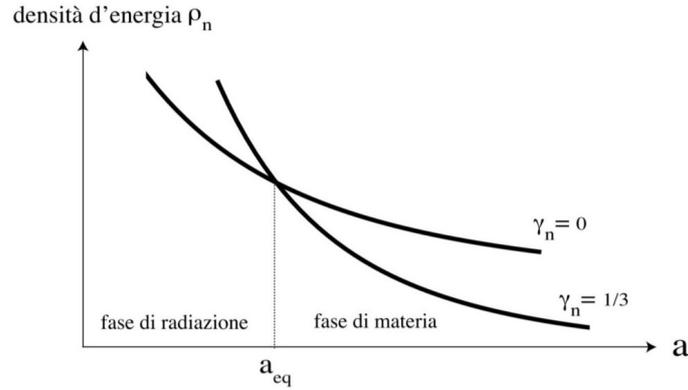


Figura 2.1: Andamento della densità energetica in funzione del fattore di scala per i due tipi di fluido

ovvero, si verifica la transizione tra le due fasi [2].

Per ottenere l'andamento temporale del fattore di scala per una generica fase cosmologica, sostituiamo l'Eq. 2.38 nella prima equazione del sistema 2.30.

Inoltre, consideriamo una particolare soluzione delle equazioni cosmologiche descrivente un modello cosmologico, detto *universo di Einstein-de Sitter*, in cui si suppone nulla la curvatura spaziale k [5].

In questo modo, si ha:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\chi}{3}\rho_{0n} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\gamma_n)} \quad (2.42)$$

da cui

$$\dot{a}^2 \propto a^{-(1+3\gamma_n)} \quad (2.43)$$

Da quest'ultima equazione, essendo il membro di destra una costante, esplicitando la derivata e ponendo tutto sotto radice quadrata, si ottiene

$$\dot{a}a^{\left(\frac{3\gamma_n+1}{2}\right)} = \text{costante} \quad (2.44)$$

da cui, scrivendo il primo membro in termini di derivata temporale, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} \left[a^{\frac{3}{2}(\gamma_n+1)} \right] = \text{costante} \quad (2.45)$$

che, integrando, diventa

$$a^{\frac{3}{2}(\gamma_n+1)} = ct + b \quad (2.46)$$

Imponendo la condizione iniziale nell'Eq. 2.46 affinché per $t = 0$ si abbia $a = 0$, si ottiene per la costante di integrazione un valore $b = 0$.

Pertanto, l'evoluzione del fattore di scala sarà

$$a \propto t^{\frac{2}{3(\gamma_n+1)}} \quad (2.47)$$

ottenendo, come previsto, una dipendenza dall'indice γ_n caratterizzante il tipo di fluido dominante nella fase considerata.

Pertanto, l'andamento della geometria e della densità di energia in una determinata fase cosmologica è descritto dalle Eq. 2.47 e 2.38.

Di conseguenza, per le due ere cosmologiche previste dal modello cosmologico standard si avrà [2]

- Era dominata dalla radiazione ($\gamma_r = \frac{1}{3}$),

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \rho \simeq \rho_r \propto a^{-4} = \frac{1}{t^2} \quad ; \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{1}{2t} \quad 0 \leq t \leq t_{eq} \quad (2.48)$$

- Era dominata dalla materia ($\gamma_m = 0$)

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \rho \simeq \rho_m \propto a^{-3} = \frac{1}{t^3} \quad ; \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad t_{eq} \leq t \leq \infty \quad (2.49)$$

Osservando le Eq. 2.48 e 2.49 si nota che per entrambe le fasi si ha $H > 0$: descrivono quindi un universo in espansione.

Infine, analizzando il tensore di curvatura di Ricci, è possibile ottenere l'andamento temporale della curvatura che si può dimostrare essere decrescente all'aumentare del tempo.

Consideriamo l'evoluzione del fattore di scala dato dall'Eq. 2.47. Si nota che, in generale, se l'esponente è positivo si ottiene una soluzione che fornisce una geometria che si espande per $t > 0$ e che si contrae per $t < 0$. Se l'esponente è negativo si ottiene il viceversa. Tuttavia, è importante sottolineare che questi due andamenti non possono essere considerati come appartenenti ad un modello continuo unico di evoluzione cosmologica, poiché sono separati da una singolarità spazio-temporale per $t = 0$ in cui la densità di energia diverge (si può dimostrare che anche i contributi alla curvatura divergono per $t \rightarrow 0$). Quindi, siccome il modello standard prevede fluidi caratterizzati da valori di $\gamma_n > 0$, la soluzione dell'Eq. 2.47 descriverà un Universo in espansione a partire da uno stato singolare iniziale per $t = 0$, denominato con il termine *big bang*, che evolve verso fasi cosmologiche aventi valori di densità energetica e di curvatura via via minori.

Secondo le osservazioni cosmologiche, l'epoca attuale t_0 è caratterizzata da una

densità di energia della materia predominante rispetto a quella di radiazione, quindi, dovrebbe appartenere alla fase cosmologica dominata dalla materia.

Inoltre, i dati sperimentali derivanti dallo studio delle anisotropie primarie della CMBR, mostrano che, all'epoca attuale, i contributi della curvatura spaziale alle equazioni cosmologiche sono trascurabili e che decrescono al diminuire del tempo [8]: pertanto, l'approssimazione di curvatura nulla $k = 0$, effettuata all'inizio della nostra trattazione, può essere considerata ottimale per il range temporale $0 \leq t \leq t_0$, ovvero, per tutta la fase dominata dalla radiazione e per la fase dominata dalla materia fino all'epoca recente ($t_{eq} \leq t \leq t_0$).

2.2 L'evoluzione futura dell'universo

Per analizzare la dinamica cosmologica futura bisogna studiare la soluzione delle equazioni cosmologiche per tutti i valori possibili della costante tricotomica di curvatura k , poiché, in epoche future, il contributo della curvatura alle equazioni potrebbe non essere trascurabile.

Preliminarmente, risulta utile riscrivere l'equazione di Friedmann 2.30 in una forma adimensionale.

Dividiamo per H^2 l'Eq. 2.30, esplicitando la costante χ

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.50)$$

dove ρ definisce la densità energetica totale del fluido cosmologico. Definiamo, quindi, la quantità

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.51)$$

denominata *densità critica* e coincidente con quel particolare valore della densità energetica per la quale si ottiene $k = 0$, ovvero, una geometria che descrive l'Universo piatto [9].

In questo modo, la precedente equazione diventa

$$1 = \Omega_\rho + \Omega_k \quad (2.52)$$

dove

$$\Omega_\rho = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.53)$$

Il primo termine è chiamato *parametro di densità* mentre il secondo *parametro di curvatura* e rappresentano, rispettivamente, il contributo della densità di energia totale e della curvatura spaziale all'equazione di Friedmann.

In particolare, poiché il fluido cosmologico è costituito da una miscela, si avrà

$$\Omega_\rho = \sum_n \Omega_{\rho_n}, \quad \Omega_{\rho_n} = \frac{\rho_n}{\rho_c} \quad (2.54)$$

Per le ipotesi del modello standard avremo, dunque

$$\Omega_\rho = \Omega_r + \Omega_m, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad (2.55)$$

L'introduzione di queste nuove grandezze adimensionali risulta molto utile poiché sono strettamente connesse alla curvatura della geometria. Infatti, se si mette in evidenza il termine k nell'Eq. 2.30, si ha

$$\frac{k}{a^2} = H^2(\Omega_\rho - 1) \quad (2.56)$$

Questa equazione esplicita il legame tra i parametri k e Ω_ρ .

In particolare:

- Se $\Omega_\rho > 1$ ($\rho > \rho_c$), allora $k > 0$, ovvero $k = +1$ e la geometria descrivente l'universo sarà sferica (chiusa).
- Se $\Omega_\rho < 1$ ($\rho < \rho_c$), allora $k < 0$, ovvero $k = -1$ e la geometria descrivente l'universo sarà iperbolica divergente (aperta).
- Se $\Omega_\rho = 1$ ($\rho = \rho_c$), allora $k = 0$ e la geometria descrivente l'universo sarà euclidea (piatta).

Dunque, risolvere le equazioni cosmologiche per i valori assunti da k risulta equivalente a risolvere le medesime al variare del parametro Ω_ρ .

2.2.1 I modelli di Friedmann

Riscriviamo l'equazione di Friedmann 2.30 in termini di Ω_ρ . Usando l'Eq. 2.38, si ottiene:

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\frac{\sum_n 8\pi G}{3H_0^2} \rho_{0n} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma_n)} - \frac{k}{a^2 H_0^2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \quad (2.57)$$

che, sfruttando l'Eq. 2.52, diventa

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} \left[\sum_n \Omega_{\rho_{0n}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+3\gamma_n)} + (1 - \sum_n \Omega_{\rho_{0n}}) \right] \quad (2.58)$$

dove abbiamo utilizzato le grandezze

$$\Omega_{\rho_{0n}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{0n} = \frac{\rho_{0n}}{\rho_c(t_0)} \quad ; \quad \Omega_{k_0} = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.59)$$

che sono riferite alla nostra attuale epoca cosmologica t_0 e quindi ottenibili grazie ai dati sperimentali.

Dunque, al fine di prevedere l'evoluzione futura dell'universo per $t > t_0$, bisogna risolvere l'Eq. 2.58 per una fase cosmologica dominata dalla materia, quindi con $\Omega_{\rho_0} \simeq \Omega_{m_0}$ e $\gamma_n = \gamma_m = 0$, al variare del parametro di densità, strettamente legato, come abbiamo precedentemente mostrato, alla curvatura spaziale. Pertanto, l'equazione cosmologica da risolvere sarà [10]

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-1} + (1 - \Omega_{m_0}) \right] \quad (2.60)$$

che riscriveremo come

$$\dot{a}^2(t) = H_0^2 a_0^2 \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{a_0}{a} \right) + (1 - \Omega_{m_0}) \right] \quad (2.61)$$

L'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ al variare di Ω_{0_m} è descritta dai seguenti modelli di universo, chiamati *modelli di Friedmann*:

- Se $\Omega_{m_0} < 1$, il secondo membro dell'Eq. 2.61 è sempre positivo, ovvero, $\dot{a}(t) > 0 \quad \forall t > t_0$. Ciò significa che, nel modello di universo aperto, la soluzione $a(t)$ descrive un'evoluzione di tipo "iperbolico" che si può mostrare stabilizzarsi asintoticamente in una fase di espansione lineare: l'universo, a partire dalla singolarità iniziale, si espanderà per sempre e non si ha alcuna singolarità finale.
- Se $\Omega_{m_0} > 1$, il secondo membro dell'Eq. 2.61 potrebbe annullarsi per

$$a(\bar{t}) = a_{max} = a_0 \left[\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0} - 1} \right] \quad (2.62)$$

Per questo valore di a si ha

$$\dot{a}(\bar{t}) = 0 \quad (2.63)$$

Pertanto, nel modello di universo chiuso, la soluzione $a(t)$ descrive un'evoluzione di tipo "ciclo" che inizia con la singolarità iniziale (big bang), si arresta, e procede con una contrazione che termina con un collasso gravitazionale coincidente con un'ulteriore singolarità spazio-temporale, denominata *big crunch*, localizzata anch'essa ad $a = 0$.

- Se $\Omega_{m_0} = 1$, l'Eq. 2.61 possiede una soluzione analitica. Infatti, diventa

$$\dot{a}^2(t) = H_0^2 \frac{a_0^3}{a} \quad (2.64)$$

da cui, si ha

$$daa^{\frac{1}{2}} = H_0 a_0^{\frac{3}{2}} dt \quad (2.65)$$

che, integrando ed imponendo che $a(0) = 0$, conduce a

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.66)$$

ovvero, alla la soluzione 2.47 ottenuta per il modello di universo di Einstein-De Sitter.

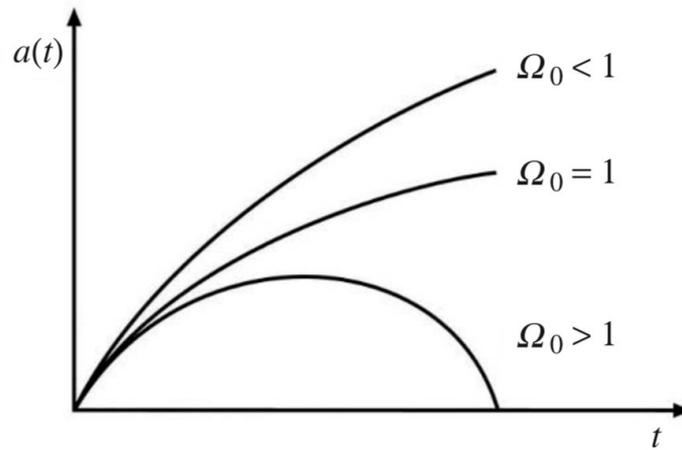


Figura 2.2: Andamento del fattore di scala $a(t)$ per modelli di universo chiusi ($\Omega_0 > 1$), aperti ($\Omega_0 < 1$) e piatti ($\Omega_0 = 1$).

2.3 Il redshift cosmologico

Lo studio della dinamica cosmologica ci ha suggerito l'importanza della conoscenza del fattore di scala $a(t)$ in quanto ricopre il ruolo di "test sperimentale" per la validità di un dato modello cosmologico.

Risulta utile, quindi, introdurre una nuova variabile legata ad $a(t)$ ma che sia direttamente osservabile. Le sorgenti astronomiche emettono radiazione elettromagnetica che, sperimentalmente, presenta una frequenza rilevata spostata verso il rosso rispetto a quella emessa a causa degli effetti cinematici prodotti dalla geometria FRW.

Questo spostamento verso il rosso, denominato "redshift", sarà strettamente legato alla distanza dalla sorgente della radiazione e quindi al fattore di scala $a(t)$.

Per calcolare questi shifts in frequenza poniamoci all'origine di un sistema di coordinate e consideriamo un'onda elettromagnetica in moto verso di noi lungo la direzione radiale, con θ e ϕ fissati.

In questo caso, la radiazione viaggerà lungo un raggio luminoso per il quale si ha

$$ds^2 = 0 \quad (2.67)$$

Pertanto, essendo il $d\Omega = 0$ per l'ipotesi iniziale di θ e ϕ costanti, si ottiene

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0 \quad (2.68)$$

che conduce a

$$cdt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.69)$$

dove sceglieremo il segno $-$ perché la radiazione è in moto verso l'origine e quindi r diminuirà all'aumentare del tempo [5].

Quindi, se la sorgente di coordinata r_1 emette la radiazione al tempo t_1 ed essa viene ricevuta dall'osservatore posto nell'origine al tempo t_0 , integrando, si ha

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r) \quad (2.70)$$

Alternativamente, se la luce è emessa dalla sorgente con un ritardo al tempo $t'_1 = t_1 + \delta t_1$, sarà, di conseguenza, rilevata dall'osservatore al tempo $t'_0 = t_0 + \delta t_0$ ed avremo ancora una relazione del tipo

$$\int_{t'_1}^{t'_0} \frac{cdt}{a(t)} = f(r) \quad (2.71)$$

poiché la funzione $f(r)$ è indipendente dal tempo in quanto r è una coordinata comovente e sia la sorgente che l'osservatore sono in moto solidale all'espansione cosmologica.

Dunque, dal confronto delle Eq. 2.70 e 2.71, si ottiene la seguente uguaglianza

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t'_1}^{t'_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \quad (2.72)$$

Scomponendo l'ultimo integrale, si ha la relazione

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.73)$$

che, sostituita nell'Eq. 2.72, ci permette di scrivere

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.74)$$

da cui, supponendo che il ritardo sia piccolo abbastanza da non provocare variazioni significative del fattore di scala, si ricava

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \quad (2.75)$$

Passando alla frequenza della luce emessa ν_1 ed osservata ν_0 , l'Eq. 2.75 diventa

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (2.76)$$

o, in maniera del tutto equivalente, in termini di lunghezza d'onda

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (2.77)$$

L'Eq. 2.77 è espressa generalmente in termini del *parametro di redshift* z , definito come

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} \quad (2.78)$$

Il parametro z rappresenta, dunque, l'incremento relativo della lunghezza d'onda. L'Eq. 2.77 si riscrive allora come

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (2.79)$$

Quindi, notiamo che se $z > 0$, allora $\lambda_0 > \lambda_1$ e si parla di *redshift*, al contrario, se $z < 0$, allora $\lambda_0 < \lambda_1$ e si parla di *blueshift*.

L'Eq. 2.79 mostra il legame tra il valore di z , ottenibile dai dati sperimentali ed il fattore di scala.

In particolare, se $z > 0$ si ha $a(t_0) > a(t_1)$ per $t_0 > t_1$, condizione descrivente un universo in espansione. Invece, se $z < 0$, allora si ha $a(t_0) < a(t_1)$ per $t_0 > t_1$, e quindi un universo in contrazione.

Pertanto, il confronto tra il redshift osservato sperimentalmente e quello previsto dai vari modelli cosmologici che descrivono l'evoluzione temporale di $a(t)$ costituisce un apprezzabile test sperimentale per la validità di tali modelli teorici.

2.4 Il problema della "massa mancante": la materia oscura

Come abbiamo precedentemente mostrato, secondo le ipotesi del modello standard la fase cosmologica attuale dovrebbe essere dominata dalla componente del fluido cosmologico costituita dalla materia non relativistica con equazione di stato $p_m = 0$.

Tuttavia, le osservazioni sperimentali relative alle forti anisotropie della CMBR mostrano un universo caratterizzato da una curvatura spaziale piatta e quindi con un parametro di curvatura Ω_k praticamente nullo.

Dall'equazione di Friedmann adimensionale

$$\Omega_{m_0} + \Omega_{k_0} = 1 \quad (2.80)$$

ne consegue che, se $\Omega_{k_0} \simeq 0$, allora $\Omega_{m_0} \simeq 1$, ovvero, che la densità di materia attuale ρ_{m_0} dovrebbe essere pari circa alla densità critica ρ_{c_0} [2]. Ciò nonostante, sperimentalmente risulta che, all'epoca attuale, la densità di energia della *materia barionica*, ovvero della materia visibile nell'intero spettro della radiazione elettromagnetica, presenta invece un parametro di densità pari a

$$\Omega_b(t_0) \simeq 0,044 \pm 0,004 \quad (2.81)$$

che testimonia un contributo della materia barionica alla densità materia-energia totale di circa il 5%.

Per essere in accordo con i dati sperimentali, negli anni 70 si ipotizzò l'esistenza di una grande quantità di materia non relativistica nell'universo che non emetta radiazione elettromagnetica e, dunque, che non sia visibile: la *materia oscura fredda* (*cold dark matter*) [8].

La densità di energia di questa "nuova" componente del fluido cosmico deve essere tale che

$$\Omega_{b_0} + \Omega_{cdm_0} = \Omega_{m_0} \simeq 1 \quad (2.82)$$

Sebbene non sia visibile, sperimentalmente la materia oscura è rilevabile in maniera indiretta tramite i suoi effetti gravitazionali. Infatti, l'ipotesi della presenza di materia oscura costituisce una soluzione al problema delle curve della velocità di rotazione delle galassie a spirale che, anziché decrescere con l'aumentare della distanza dal centro di massa, come previsto teoricamente, tendono invece a stabilizzarsi verso un valore costante, segno della presenza di una qualche "massa mancante" all'interno delle suddette galassie non rilevabile sperimentalmente e quindi "oscura".

Dunque, l'ipotesi della materia oscura oltre a risolvere la contraddizione su scala cosmologica sembra in accordo anche con queste incongruenze gravitazionali emerse dalle osservazioni astronomiche, tra le quali è importante menzionare anche il fenomeno del *lensing gravitazionale*.

2.5 L'espansione accelerata e l'energia oscura

Sul finire degli anni 90 le osservazioni astronomiche circa la relazione luminosità-redshift delle Supernovae di tipo Ia (SNeIa), usate come candele standard ad elevate distanze cosmologiche, hanno mostrato che l'universo sta attualmente subendo una fase di espansione accelerata.

Dall'Eq. 2.18, ciò vorrebbe dire che [2]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) > 0 \quad (2.83)$$

ovvero, i dati sperimentali impongono che

$$\rho + 3p < 0 \quad (2.84)$$

rappresentando una condizione inconsistente con le ipotesi del modello standard che prevedono un fluido cosmico costituito solo da radiazione e materia non relativistica (oscura e barionica), entrambi i costituenti caratterizzati da una $\rho > 0$ e $p \geq 0$.

Al fine di concordare con i dati sperimentali e quindi con l'Eq. 2.84 è necessario ipotizzare che il fluido cosmico includa un'ulteriore componente avente una pressione negativa $p \leq -\frac{\rho}{3}$, richiedendo che, all'epoca attuale, sia dominante rispetto alle altre in modo da giustificare la fase accelerata dell'espansione cosmologica recente: questa componente è soprannominata *energia oscura*.

2.5.1 La costante cosmologica Λ

L'ipotesi più semplificativa riguardo la natura dell'energia oscura è legata ai modelli cosmologici aventi la *costante cosmologica* Λ .

La costante cosmologica fu introdotta da Einstein nel 1917 con il fine di ottenere una forza repulsiva che riesca a soddisfare la condizione di universo statico, a quel tempo considerata come l'ipotesi più plausibile [11].

Dall'Eq. 2.18 si nota che un universo statico è possibile solo se

$$3p + \rho = 0 \quad \text{e} \quad k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (2.85)$$

La prima condizione mostra che

$$p = -\frac{1}{3}\rho \quad (2.86)$$

ovvero, affinché l'universo sia statico, la densità di energia o la pressione deve essere negativa. In questo modo Einstein modificò la sua equazione di campo introducendo il termine della costante cosmologica Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.87)$$

in modo da ottenere una soluzione statica con un'opportuna scelta di Λ (può essere sia positiva che negativa in linea di principio) la quale è interpretata, essendo posta al membro sinistro dell'equazione, come una proprietà dello spazio-tempo che compensi la contrazione o l'espansione della geometria spaziale.

Questa modifica all'equazione di campo non cambia il suo carattere covariante e non altera l'equazione di continuità ottenuta dall'Eq. 2.19. La limitazione che si può porre su Λ derivante dalle osservazioni è che essa deve essere sufficientemente piccola da non alterare le leggi del moto planetario.

Tuttavia, risolvendo le equazioni di campo con la costante cosmologica 2.87 si ottiene un modello che descrive un universo statico ma instabile, in quanto la minima perturbazione ne provoca il collasso o l'espansione.

Inoltre, quando Hubble nel 1929 pubblicò i risultati dei suoi esperimenti dimostrando il carattere dinamico dell'universo, Einstein si pentì dell'introduzione di una costante cosmologica considerandola il suo "più grave errore".

In seguito, però, con la scoperta dell'espansione accelerata, la costante cosmologica è stata reintrodotta dai cosmologi con un significato diverso da quello attribuito inizialmente da Einstein.

Riscrivendo l'equazione di campo come segue

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.88)$$

la costante cosmologica non è più considerata come un termine che modifica le proprietà geometriche dello spazio-tempo ma, invece, è interpretata fisicamente come una nuova componente fisica del fluido cosmico, che noi attribuiamo attualmente all'energia oscura, avente densità energetica $\rho = \Lambda = \text{costante}$ e pressione $p = -\Lambda$, e quindi caratteristiche gravitazionali repulsive [12].

Dunque, il termine $\Lambda g_{\mu\nu}$ può essere considerato come la componente del tensore energia-impulsivo che descrive gli effetti gravitazionali della costante cosmologica coincidente con un fluido perfetto barotropico caratterizzato dall'equazione di stato

$$\frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \gamma_\Lambda = -1 \quad (2.89)$$

2.6 Il modello Λ CDM

Risolvendo l'Eq. 2.88 per la metrica FRW si ottengono le equazioni di Friedmann con $\Lambda \neq 0$ [12]

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{cases} \quad (2.90)$$

Definiti i parametri di densità associati alla curvatura, alla metrica e alla costante cosmologica rispettivamente come

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad ; \quad \Omega_m = \frac{\chi \rho_m}{3H^2} \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2.91)$$

dividendo per H^2 , l'Eq. 2.90 si riscrive in forma adimensionale come

$$1 = \Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (2.92)$$

Le osservazioni attuali legate alle misure delle anisotropie della CMBR e ai dati sperimentali a basso redshift descrivono un universo con le seguenti caratteristiche:

- Curvatura spaziale nulla: $\Omega_{k_0} \simeq 0$
- Radiazione presente in quantità trascurabile: $\Omega_{r_0} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$
- Circa il 30% di densità materia-energia costituita da materia oscura fredda e da materia barionica

$$\Omega_{m_0} = \Omega_{cdm,0} + \Omega_{b,0} \simeq 0,3 \quad (2.93)$$

rispartita nel seguente modo

$$\Omega_{cdm,0} \simeq 0,25 \quad \text{e} \quad \Omega_{b,0} \simeq 0,05 \quad (2.94)$$

- Circa il 70% di energia oscura responsabile dell'espansione accelerata recente descritta in termini di costante cosmologica:

$$\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0,7 \quad (2.95)$$

Il modello appena descritto, basato sui valori sperimentali dei vari parametri ricavati dalle osservazioni attuali, è denominato *modello Λ CDM* (Λ Cold Dark Matter) o anche detto *modello di concordanza cosmologica*.

2.6.1 Problematiche del modello Λ CDM

Al giorno d'oggi l'incognita più grande risiede nell'interpretazione della natura fisica della costante cosmologica o dell'energia oscura come quella componente sconosciuta responsabile dell'espansione accelerata dell'universo. I fisici delle particelle hanno considerato le possibilità di identificare la costante cosmologica come il contributo gravitazionale dell'*energia del vuoto*, legata alle fluttuazioni quantistiche presenti nello spazio privo di materia.

Indicata con ρ_{vac} la densità di energia del vuoto, il suo tensore energia-impulso assume la forma:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \quad (2.96)$$

con equazione di stato

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (2.97)$$

Comparando le Eq. 2.89 e 2.97 notiamo che esse sono equivalenti, ottenendo la relazione tra costante cosmologica e ρ_{vac}

$$\rho_{vac} = \rho_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{\chi} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.98)$$

In questo modo, è possibile riscrivere l'equazione di campo di Einstein in termini della densità di energia del vuoto come

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (2.99)$$

In base alla teoria quantistica dei campi è possibile effettuare una stima dimensionale del contributo gravitazionale delle fluttuazioni quantistiche del vuoto ricavando il valore

$$\rho_{\Lambda} \simeq 10^{72} \text{ Gev} \quad (2.100)$$

Tuttavia, i dati sperimentali degli ultimi decenni riguardanti il valore della costante cosmologica mostrano per l'energia del vuoto un valore

$$\rho_{\Lambda}^{(obs)} \simeq (10^{-3} \text{ eV})^4 = 10^{-48} \text{ Gev} \quad (2.101)$$

ottenendo una discrepanza di circa 120 ordini di grandezza: questa incongruenza tra ipotesi teorica ed evidenza sperimentale è nota come *problema della costante cosmologica* [13].

Attualmente, per risolvere questa problematica, si suppone l'esistenza di un'entità dinamica che viene ricondotta ad un campo scalare chiamato *quintessenza* che riesca a ridurre in maniera drastica l'energia del vuoto primordiale e ad "imitare" il comportamento della costante cosmologica all'epoca attuale [12]. Questa nuova interpretazione dell'energia oscura come campo scalare dinamico permette

di spiegare il perché l'energia del vuoto sia diventata dominante solo in epoche recenti.

Ciò nonostante, il modello di concordanza è afflitto anche da un secondo problema noto come il *problema della coincidenza cosmica* [12].

Il modello Λ CDM prevede che il contributo della densità di energia del vuoto Ω_{Λ_0} (0,7) sia confrontabile, all'epoca attuale, con quello della densità di energia della materia Ω_{m_0} (0,3).

Tuttavia, poiché $\rho_{\Lambda} = cost$, mentre $\rho_m \simeq a^{-3}$, i due contributi mostrano storie evolutive diverse. In particolare

$$\frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_m} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_m} \propto a^3 \quad (2.102)$$

quindi, perché proprio nella nostra epoca $\rho_{\Lambda} \simeq \rho_m$ se in ogni altra epoca cosmologica le due densità sono molto diverse tra loro?

Ciò ci suggerisce che l'accelerazione attuale dell'universo sia incominciata in tempi recenti dove l'energia del vuoto ha iniziato a predominare sulla materia ma non esiste nessuna spiegazione del perché ci troviamo in un'epoca così "speciale" in cui le due componenti sono dimensionalmente paragonabili.

I problemi enunciati sono attualmente aperti, in attesa di conferme sperimentali e di ulteriori progressi teorici che riescano a ridurre le carenze del modello cosmologico di concordanza.

Capitolo 3

Il metodo cosmografico

La risoluzione delle problematiche derivanti dal confronto con i dati provenienti dalle osservazioni astronomiche ha portato alla formulazione di diversi modelli cosmologici teorici atti a spiegare l'evoluzione dell'energia oscura e la dinamica futura dell'universo.

Ciò nonostante, a causa delle degenerazioni tra questi approcci teorici, sembra necessaria l'introduzione di una tecnica, in grado di descrivere l'universo, che sia indipendente da tali modelli: la *cosmografia*.

La cosmografia è un modello matematico che si basa solamente sulle osservazioni basate sul Principio Cosmologico, il quale ci ha permesso la definizione di una metrica cosmica, la metrica FRW, e ci permette di sfruttare i dati forniti alla cosmologia dalle osservazioni astronomiche, senza il bisogno di assumere alcuna ipotesi teorica in particolare. Infatti, non conosciamo l'equazione di stato dei componenti dell'universo nel corso della sua storia e, anche se la conoscessimo, non saremmo sicuri se le equazioni di Einstein realmente siano valide per tempi e distanze cosmiche. Quindi, usando l'approccio cosmografico potremmo ricavare i parametri utili alla descrizione dell'universo sulla base di ipotesi solamente di natura geometrica ed indipendenti da qualsiasi modello, avendo una buona possibilità di confrontare direttamente la teoria con le osservazioni, eliminando la degenerazione tra i modelli teorici.

3.1 Misure di distanze

Per determinare la distanza di oggetti localizzati all'interno della nostra galassia ci serviamo di due metodici cinematici: la misura della *parallasse trigonometrica*, ovvero della variazione della sua posizione apparente nel cielo causata dalla rivoluzione della Terra attorno al Sole, e l'analisi del suo *moto proprio*, ovvero dello spostamento della sua posizione apparente nel cielo causata dal moto reale

dell'oggetto rispetto al Sole.

Invece, per quanto concerne la misura di distanza di oggetti localizzati a distanze maggiori, oltre allo studio dei redshift vi sono altri due modi pratici che sfruttano la *luminosità apparente* e la conoscenza del *diametro angolare*.

In questo paragrafo focalizzeremo la nostra attenzione sulla descrizione di questi quattro metodi per la misura di distanze cosmologiche.

3.1.1 Parallasse trigonometrica

La parallasse è lo spostamento angolare apparente di un oggetto vicino rispetto allo sfondo fisso, quando osservato da due punti diversi.

Il metodo della *parallasse trigonometrica* si basa sulla misura della variazione annuale della posizione apparente di una stella attorno ad un'ellisse, prodotta dal moto della Terra attorno al Sole.

Questa tecnica presuppone la conoscenza del diametro dell'orbita terrestre, infatti, per la geometria euclidea (approssimazione che possiamo ritenere valida nel caso di misure di distanza per stelle relativamente vicine) una stella posta alla distanza d dal sistema solare possiede un angolo parallattico massimo π (in radianti), detta parallasse annua, pari a [11]

$$\pi = \frac{d_E}{d} \quad (3.1)$$

dove d_E è la distanza media della Terra dal Sole, definita come l'*unità astronomica*: $1 \text{ a.u.} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Pertanto, possiamo invertire l'Eq. 3.1 e definire una *distanza di parallasse*

$$d_p = \frac{d_E}{\pi} \quad (3.2)$$

Dall'Eq. 3.1 notiamo che più una stella è vicina maggiore sarà la sua parallasse.

In questo modo, è possibile definire una nuova unità di misura delle distanze, il *parsec* (pc), definito come la distanza alla quale la parallasse annua è pari ad un secondo arco: $\pi = 1''$.

Dato che vi sono 206,264.8 secondi in un radiante, allora, si ha che

$$1 \text{ pc} = 206,264.8 \text{ a.u.} = 3,0856 \cdot 10^{13} \text{ km} = 3,26 \text{ anni luce} \quad (3.3)$$

Dunque, notiamo che la parallasse in secondi di arco è il reciproco della distanza in parsec

$$\pi \text{ (in secondi)} = \frac{1}{d_p} \text{ (in pc)} \quad (3.4)$$

Nonostante solamente le stelle vicine possiedano una parallasse trigonometrica apprezzabile, anche le distanze astronomiche al di fuori del sistema solare sono convenzionalmente espresse in parsec.

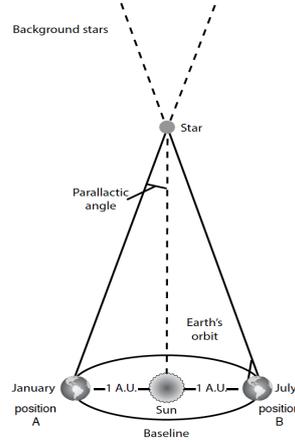


Figura 3.1: Schematizzazione della parallasse stellare

3.1.2 Moti propri

Consideriamo una sorgente di luce avente una velocità "reale" v_{\perp} , ortogonale alla linea di vista [3].

Questa sorgente apparirà muoversi nel cielo di una certa quantità ΔD , nell'intervallo di tempo Δt_0 , pari a

$$\Delta D = v_{\perp} \Delta t_1 = v_{\perp} \Delta t_0 \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \quad (3.5)$$

dove t_1 è il tempo relativo all'emissione del segnale luminoso dalla sorgente, t_0 è il tempo relativo alla ricezione del segnale dall'osservatore sulla Terra e la relazione tra gli intervalli temporali e il fattore di scala è ottenuta dall'Eq. 2.75, che rappresenta l'effetto della dilatazione temporale dovuto all'espansione dell'universo.

Definiamo ora una grandezza geometrica che risulterà utile anche in seguito: il *diametro angolare*.

Supponiamo, in un sistema di coordinate polari, che la sorgente si trovi in $r = r_1$ ($t = t_1$) mentre l'osservatore sulla Terra coincida con l'origine $r = 0$ ($t = t_0$). Ruotiamo il sistema di riferimento in modo da far coincidere $\theta = 0$ con il punto medio della distanza D percorsa dalla sorgente.

In questo modo, possiamo ipotizzare che la luce viaggi verso l'origine definendo un cono di semi-angolo $\theta = \frac{\delta}{2}$.

La distanza propria percorsa dalla sorgente, per la metrica FRW, sarà

$$D = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = a(t_1) r_1 \delta \quad \text{se } \delta \ll 1 \quad (3.6)$$

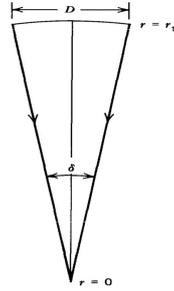


Figura 3.2: Schematizzazione delle quantità utili alla definizione del diametro angolare

Denoteremo δ come il diametro angolare che, dunque, sarà pari a

$$\delta = \frac{D}{a(t_1)r_1} \quad (3.7)$$

Ritornando al nostro caso iniziale, la sorgente luminosa, per l'Eq. 3.7, apparirà muoversi nel cielo di una distanza angolare

$$\Delta\delta = \frac{v_{\perp}\Delta t_0}{r_1 a(t_0)} \quad (3.8)$$

Per la geometria euclidea, la variazione $\Delta\delta$ della posizione apparente nel cielo di una sorgente posta a distanza d è

$$\Delta\delta = \frac{\Delta D}{d} = \frac{v_{\perp}\Delta t_0}{d} \quad (3.9)$$

Pertanto, per l'Eq. 3.9, possiamo definire la *distanza di moto proprio* come

$$d_M \equiv \frac{v_{\perp}\Delta t_0}{\Delta\delta} = \frac{v_{\perp}}{\mu} \quad (3.10)$$

dove $\mu = \frac{\Delta\delta}{\Delta t_0}$ è il *moto proprio*.

Sostituendo l'Eq. 3.8 nell'Eq. 3.10, otteniamo la relazione generale tra il fattore di scala e la distanza di moto proprio

$$d_M = r_1 a(t_0) \quad (3.11)$$

3.1.3 Luminosità apparente

Questo metodo consiste nella determinazione della distanza di sorgenti che possiedono una luminosità assoluta nota, attraverso la misura della loro *luminosità apparente*. La luminosità assoluta L è definita come la potenza totale emessa dalla sorgente, mentre la luminosità apparente l coincide con la potenza ricevuta per unità di area da un rilevatore puntato sulla sorgente, ovvero, in altri termini, con il flusso di energia rilevato F . Di conseguenza, la luminosità apparente di un oggetto luminoso sarà una grandezza dipendente dalla sua distanza dall'osservatore.

Se l'energia è emessa isotropicamente in tutte le direzioni, è possibile ricavare la relazione che lega le grandezze L e l per uno spazio euclideo [14]. Supponiamo che la sorgente sia circondata da un guscio sferico di raggio r e assumiamo che la luce non sia assorbita durante il suo tragitto, allora, il flusso irraggiato F misurato ad una distanza d sarà legato alla luminosità assoluta L dalla relazione

$$F \equiv l = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (3.12)$$

dove il denominatore rappresenta semplicemente l'area del guscio sferico considerato.

Invertendo l'Eq. 3.12, possiamo definire la *distanza di luminosità*

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (3.13)$$

Consideriamo ora gli effetti dell'espansione dell'universo che entrano in gioco nel caso di distanze cosmologiche considerevoli.

Se la sorgente è localizzata ad una distanza radiale $r = r_1$ e l'osservatore è posto all'origine del riferimento $r = 0$, allora, l'area della superficie sferica centrata nell'oggetto luminoso che emette la radiazione al tempo t_1 , passante per $r = 0$ al tempo t_0 di ricezione del segnale, sarà

$$A = 4\pi d_0^2 = 4\pi a(t_0)^2 r_1^2 \quad (3.14)$$

dove $d_0 = a(t_0)r_1$ è la distanza propria per la metrica FRW trascurando la curvatura spaziale, in accordo con le osservazioni recenti.

A causa dell'espansione, i fotoni emessi dalla sorgente ad energia $h\nu_1$ subiranno un redshift di energia $h\nu_1 \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$ (Eq. 2.76) ed inoltre, ogni fotone emesso all'intervallo di tempo δt_1 giungerà al rilevatore nell'intervallo di tempo dilatato $\delta t_0 = \delta t_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$ (Eq. 2.75) [10]. Pertanto, considerando questi effetti gravitazionali, l'Eq. 3.12 si riscriverà come

$$l = \frac{L}{4\pi a(t_0)^2 r_1^2} \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 \quad (3.15)$$

dalla quale otteniamo la definizione generale della distanza di luminosità

$$d_L = a^2(t_0) \frac{r_1}{a(t_1)} \quad (3.16)$$

Scala delle magnitudini e modulo di distanza

Gli astronomi non sono soliti lavorare con la luminosità assoluta L e la luminosità apparente l . Infatti, queste quantità sono generalmente espresse in termini di *magnitudine assoluta* M e di *magnitudine apparente* m .

La magnitudine apparente è una grandezza legata alla misura della luminosità di un oggetto visto dalla Terra ed è stata introdotta inizialmente dall'astronomo greco Ipparco, al fine di catalogare le stelle visibili nel cielo. Ipparco assegnò una magnitudine apparente $m = 1$ alla stella più luminosa del cielo ed un valore $m = 6$ alle stelle più deboli visibili ad occhio nudo.

Nel 1800 si pensava che l'occhio umano fosse sensibile alle differenze di luminosità di due oggetti su scala logaritmica [14]. Questa teoria ha portato storicamente all'introduzione di una scala in cui la differenza di 1 magnitudine tra due stelle implica un rapporto costante tra le loro luminosità apparenti. Secondo la definizione moderna, una differenza di 5 magnitudini corrisponde esattamente ad un fattore 100 in luminosità apparente, pertanto, alla differenza di 1 magnitudine corrisponderà esattamente un rapporto di luminosità pari a $100^{1/5} \simeq 2,512$.

Quindi, la relazione matematica tra la magnitudine apparente di due oggetti celesti e la loro luminosità apparente è

$$\frac{l_2}{l_1} = 100^{(m_1 - m_2)/5} \quad (3.17)$$

da cui si ricava l'andamento logaritmico della scala di magnitudine

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \quad (3.18)$$

Il punto zero della scala corrisponde per ragioni storiche a *Polaris*, avente una magnitudine $m = 2,12$ nella luce visibile. Infatti, quando si parla di magnitudine è necessario specificare il tipo di radiazione misurata: se la radiazione è misurata in tutte le lunghezze d'onda ci riferiamo alla *magnitudine bolometrica*, se si considera solamente lo spettro del visibile si parla di *magnitudine visuale*.

Ad oggi, la scala di Ipparco è stata estesa da un valore minimo, pari circa alla magnitudine apparente del Sole $m = -26,83$, fino approssimativamente al valore $m = 30$, associato agli oggetti rilevabili più deboli.

La magnitudine assoluta è definita, invece, come la magnitudine apparente che un

oggetto avrebbe se si trovasse ad una distanza dall'osservatore di 10 pc. Dall'Eq. 3.12 e 3.18 si ricava il legame tra le grandezze M e m

$$\frac{l_{10}}{l} = 100^{(m-M)/5} = \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right)^2 \quad (3.19)$$

dove l_{10} corrisponde alla luminosità apparente della sorgente rilevabile posta alla distanza di 10 pc. Così facendo, otteniamo una nuova relazione per la distanza di luminosità

$$d_L = 10^{(m-M+5)/5} \text{ pc} \quad (3.20)$$

La quantità $m - M$ è denominata *modulo di distanza* e può essere interpretata come un'ulteriore grandezza utile alla misura della distanza di un oggetto luminoso

$$m - M = 5 \log_{10} d_L - 5 = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) \quad (3.21)$$

Apparentemente, sembra naturale che gli astronomi debbano partire dalle quantità misurabili l ed m per poi utilizzare la distanza della sorgente, se nota, per determinare le sue proprietà intrinseche. Tuttavia, se la sorgente appartiene a particolari classi di oggetti la sua luminosità assoluta L e magnitudine assoluta M può essere determinata senza conoscere la sua distanza: queste specifiche sorgenti luminose vengono chiamate *candele standard*.

3.1.4 Diametro angolare

Quest'ultimo metodo consiste nella misura della distanza di una sorgente luminosa comparando le sue dimensioni angolari osservate dalla Terra con le sue dimensioni fisiche.

Consideriamo una sorgente localizzata a $r = r_1$, che emetta radiazione al tempo t_1 , di diametro proprio D . Il diametro angolare rilevato da un osservatore posto sulla Terra ad $r = 0$ al tempo t_0 per l'Eq. 3.7 sarà [3]

$$\delta = \frac{D}{a(t_1)r_1} \quad (3.22)$$

Per la geometria euclidea, se la sorgente è posta ad una distanza d , si ha

$$\delta = \frac{D}{d} \quad (3.23)$$

pertanto, è possibile definire la *distanza di diametro angolare* di una sorgente luminosa come

$$d_A \equiv \frac{D}{\delta} \quad (3.24)$$

Sostituendo l'equazione precedente nell'Eq. 3.22 si ricava l'espressione generale per la distanza

$$d_A = a(t_1)r_1 \quad (3.25)$$

È importante notare come $a(t_1)$ decresca all'aumentare di r_1 a parità di diametro proprio D della sorgente. Ne consegue che, per alcuni modelli, il diametro angolare osservato potrebbe aumentare all'aumentare della distanza per oggetti molto lontani. Questo fenomeno è dovuto al fatto che l'universo agisce come una sorta di lente gravitazionale, allargando le dimensioni di un oggetto nel cielo rispetto a quelle che ci aspettiamo di osservare per un universo statico euclideo [14].

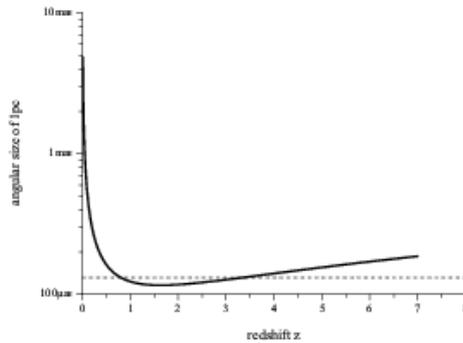


Figura 3.3: Andamento del diametro angolare in funzione del redshift z per una sorgente di dimensioni fisiche di 1 pc

3.2 La scala delle distanze cosmiche

Una volta descritti i metodi per la determinazione della distanza di una sorgente luminosa, è importante sottolineare che per oggetti molto vicini ($r_1 \rightarrow 0$ e $t_1 \rightarrow t_0$) tutte le distanze osservabili descritte diventano essenzialmente uguali tra loro ed alla distanza propria d_{prop}

$$d_A \simeq d_L \simeq d_m \simeq d_p \simeq d_{prop}(t_0) \simeq a(t_0)r_1 \quad (3.26)$$

Pertanto, la distinzione tra le differenti misure di distanza diventa importante solamente per oggetti localizzati a grandi redshift ($z > 0, 1$), dove gli effetti dell'espansione cosmologica non possono essere considerati trascurabili.

Si delinea in questo modo una *scala delle distanze cosmiche* basata sui metodi precedentemente descritti in funzione dei vari range di distanze in cui risultano efficaci [3]. Osservando la Fig.3.4 è possibile notare come i metodi usati per la

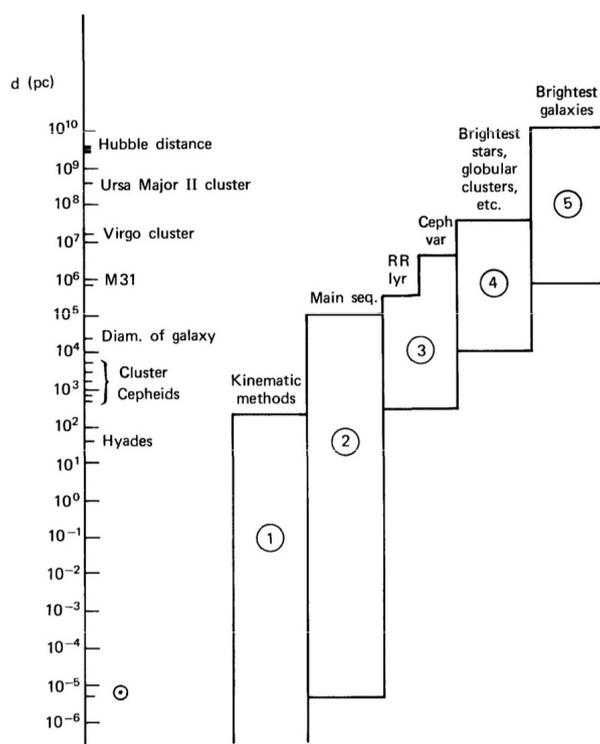


Figura 3.4: La scala delle distanze cosmiche. La posizione e l'altezza delle barre verticali indica il range di distanza per il quale ogni tipo di indicatori di distanze può essere usato

determinazione di distanze per stelle all'interno della nostra galassia siano quelli cinematici. In particolare, il metodo della parallasse risulta conveniente solo quando π è più grande di circa $0,03''$, ovvero, solo se la stella è più vicina di circa $30 pc$. Per quanto riguarda invece l'applicazione osservativa del metodo basato sui moti propri, l'Eq.3.10 ci suggerisce che, sperimentalmente, sembra necessario conoscere a priori la velocità trasversale v_{\perp} della sorgente per determinare la distanza d_M . Tuttavia, v_{\perp} generalmente non è nota direttamente agli astronomi che, invece, sono in grado di stimare la componente v_r della velocità lungo la linea di vista attraverso lo studio degli shift Doppler delle linee spettrali. Per ricavare la velocità v_{\perp} dal valore ottenuto di v_r , si può effettuare un'analisi statistica dei moti propri e delle velocità radiali di particolari campioni di stelle di cui sono note tutte le distanze relative. Un secondo metodo sfrutta le proprietà di peculiari ammassi, i *moving cluster*, caratterizzati da gruppi di stelle in moto attraverso la galassia con velocità uguali e parallele, come le *Iadi*, che contengono più di 100 stelle [15]. Una volta ricavata la distanza della stella tramite uno dei metodi cinematici, per l'Eq. 3.12 è possibile determinare la sua luminosità assoluta L misurando la sua

luminosità apparente l . Procedendo in questa maniera, agli inizi del '900, Hertzsprung e Russell scoprirono che un grande insieme di stelle, denominato *sequenza principale* (*main sequence*), obbedisce ad una precisa relazione tra luminosità assoluta e tipo spettrale, quantità legata alla temperatura della superficie stellare. Data la relazione di Hertzsprung-Russell, diventa possibile per gli astronomi determinare la distanza delle stelle appartenenti a questo gruppo tramite la *fotometria della sequenza principale*. Questo metodo, inoltre, presenta una maggiore applicabilità per un *cluster* di stelle, le quali si trovano tutte approssimativamente alla stessa distanza dalla Terra, per cui la sequenza principale potrà essere individuata studiando la luminosità apparente in funzione del tipo spettrale per un grande campione di stelle del cluster.

Procedendo lungo la scala cosmica, per distanze via via sempre più grandi si utilizzano come indicatori le candele standard. Ad esempio, per misure entro il *gruppo locale*, si è soliti studiare le stelle variabili¹ *Cefeidi* e le *RR Lyrae*, le quali possiedono una relazione luminosità-periodo ben nota. Per raggiungere regioni al di fuori del nostro gruppo locale si usano come indicatori di distanze le *stelle più brillanti* delle galassie, che possiedono una luminosità assoluta massima ben definita, di circa $M \simeq -9,3$ [3]. Gli ultimi gradini della scala delle distanze cosmiche, invece, presentano come candele standard le *galassie più brillanti* e le *supernovae*, ovvero fenomeni di esplosione stellare che presentano un aumento improvviso della luminosità di 4-6 ordini di grandezza, superando anche quella di un'intera galassia. Le supernovae si manifestano nelle galassie tipiche con un rate di 40 per anno e, poiché tendono ad apparire nelle luminose regioni centrali delle galassie, risultano difficili da risolvere.

3.3 Il ruolo della cosmografia nella *Cosmologia di Precisione*

Il metodo cosmografico, come precedentemente accennato, consiste in una tecnica di modello indipendente che consente di ricavare informazioni sulla storia dell'espansione dell'universo degli ultimi tempi, presupponendo la validità del Principio Cosmologico [16]. Infatti, gli unici requisiti richiesti dalla cosmografia sono l'omogeneità e l'isotropia spaziale, con il parametro di curvatura Ω_k fissato ad un certo valore, permettendo lo studio dell'evoluzione dell'energia oscura senza il bisogno di assumere un modello cosmologico in particolare.

Come abbiamo visto, il modello Λ CDM prevede un bilancio energetico dominato dal termine di energia oscura Λ , con la materia oscura fredda al secondo posto

¹Le stelle variabile sono delle stelle pulsanti che possiedono una luminosità apparente variabile nel tempo in maniera regolare.

e la materia barionica solo come una piccola frazione. Il parametro di curvatura spaziale Ω_k è, invece, considerato trascurabile rispetto agli altri termini.

Il Principio Cosmologico richiede che il fattore di scala sia l'unico grado di libertà che governi l'universo. Dunque, è possibile espandere $a(t)$, e tutti gli osservabili cosmologici dipendenti da esso, in serie di potenze intorno al tempo presente t_0 . In questo modo, confrontando tali espansioni con i dati cosmologici, è possibile fissare dei limiti sull'evoluzione di ogni variabile in esame, ottenendo risultati numerici che non dipendono dal particolare modello teorico.

La cosmografia, dunque, è in grado di discriminare i modelli compatibili con le previsioni cosmografiche da quelli che non rientrano nei limiti cosmografici, riducendo così la degenerazione tra i vari modelli cosmologici.

3.4 La cosmografia standard: l'approssimazione di Taylor

L'approccio cosmografico standard è basato sulle espansioni di Taylor degli osservabili, comparabili direttamente con i dati.

Esprimiamo il fattore di scala $a(t)$ in serie di Taylor attorno al tempo presente t_0

$$a(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k a}{dt^k} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^k \quad (3.27)$$

In questo modo, si ha

$$a(t) \simeq a(t_0) + a'(t_0)(t-t_0) + \frac{a''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \frac{a'''(t_0)}{6}(t-t_0)^3 + \frac{a^{(iv)}(t_0)}{24}(t-t_0)^4 + \dots \quad (3.28)$$

dove abbiamo indicato con l'apice la derivata temporale.

Dall'Eq. 3.28, possiamo definire le seguenti quantità

$$H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad , \quad q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2 a}{dt^2} \quad , \quad j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3} \quad , \quad s \equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4 a}{dt^4} \quad (3.29)$$

denominate, rispettivamente, *parametro di Hubble*, di *decelerazione*, di *jerk* e di *snap*. Queste funzioni, per come sono definite, sono quantità indipendenti dal modello, ovvero, non dipendono dalla forma del fluido di energia oscura poiché possono essere determinate direttamente dalle osservazioni.

I parametri 3.29 calcolati all'epoca attuale t_0 costituiscono la cosiddetta *serie cosmografica*, che comprende l'insieme delle quantità adoperate oggi per descrivere la dinamica attuale dell'universo. Dall'Eq. 3.29, possiamo riscrivere l'espansione

di $a(t)$ in termini della serie cosmografica

$$a(t) \simeq a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{j_0}{6} H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{s_0}{24} H_0^4 (t - t_0)^4 + \dots \right] \quad (3.30)$$

Il motivo legato alla scelta di arrestare l'espansione in serie al quarto ordine è dovuto alla mancanza di dati significativi ad alto redshift in grado di determinare in maniera precisa i termini di ordine superiore.

3.4.1 Il significato fisico dei parametri cosmografici

Ogni coefficiente della serie cosmografica possiede uno specifico significato fisico relativo alla dinamica dell'universo.

Abbiamo già visto come il parametro di Hubble H_0 sia un termine positivo che testimonia l'espansione cosmica.

Il segno del parametro di decelerazione q_0 , invece, indica se l'universo sta attraversando una fase di decelerazione o se sta accelerando. In particolare, $q_0 > 0$ mostra un'espansione in fase decelerata, coincidente con un universo dominato dalla materia o da qualsiasi fluido barotropico con pressione nulla. Questa situazione è relativa al range temporale della storia evolutiva dell'universo in cui l'energia oscura non era dominante rispetto al contributo della materia.

Al contrario, $q_0 < 0$ descrive un universo in espansione accelerata, come si osserva all'epoca attuale. In questo caso, il valore di q_0 fornisce informazioni per un fluido cosmico dominante caratterizzato da un carattere anti-gravitazionale, ovvero, con pressione negativa, confermando i risultati dei modelli teorici senza ricorrere ad alcuna equazione di stato per l'energia oscura.

Per vedere se q_0 cambia segno nel tempo dobbiamo studiare il parametro di jerk j_0 , legato alla variazione dell'accelerazione cosmica.

Se $j_0 < 0$, l'universo non mostra transizioni rispetto alla fase accelerata attuale, cioè, in altri termini, l'energia oscura influenza la dinamica durante la prima fase evolutiva, senza mostrare alcun cambiamento in tutta l'evoluzione dell'universo.

Un valore $j_0 = 0$ indica che il parametro q_0 tende a stabilizzarsi ad un valore preciso, senza modificare il suo comportamento man mano che $z \rightarrow \infty$.

Un valore positivo $j_0 > 0$, invece, ci assicura che è esistito un momento in cui l'universo è passato da uno stato decelerato ad uno accelerato. Si definisce il redshift corrispondente a questa particolare epoca, in cui gli effetti dell'energia oscura sono diventanti significativi, come *redshift di transizione* z_{tr} . In questi termini, il parametro di decelerazione q_0 dovrebbe cambiare segno per $z > z_{tr}$. Di conseguenza, effettuando una misura diretta di z_{tr} , si potrebbero ottenere importanti

vincoli sull'equazione di stato dell'energia oscura.

Tuttavia, è importante sottolineare che le quantità q_0 e j_0 sono parametri locali e quindi non sufficienti a discriminare modelli che ammettono l'energia oscura come un'entità dinamica da modelli in cui l'energia oscura è interpretata come un termine di costante cosmologica.

Per ovviare a questa problematica si introduce il parametro di snap s_0 , legato alla dipendenza funzionale dell'energia oscura dal redshift.

3.4.2 L'espansione in serie della distanza di luminosità

Utilizzando l'Eq. 3.29, è possibile ottenere le relazioni che legano i coefficienti della serie cosmografica con le derivate del parametro di Hubble H . In particolare modo, si ottengono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{H} = -H^2(1 + q) \\ \ddot{H} = H^3(j + 3q + 2) \\ \dddot{H} = H^4[s - 4j - 3q(q + 4) - 6] \end{cases} \quad (3.31)$$

le quali mostrano che, una volta scelto un set di n parametri, solo $n - 1$ saranno indipendenti.

Dall'Eq. 3.31, si ha

$$\begin{cases} q = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1 \\ j = \frac{\ddot{H}}{H^3} + 3\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 \\ s = \frac{1}{H^4}(\dddot{H} + 3\dot{H}^2) + 4\frac{\ddot{H}}{H^3} + 6\frac{\dot{H}}{H^2} \end{cases} \quad (3.32)$$

che ci permettono di calcolare i coefficienti della serie cosmografica per un dato modello cosmologico.

Inoltre, possiamo notare la degenerazione tra i parametri, dovuta alla presenza in tutte le espressioni del parametro H .

Dunque, per quanto detto finora, procederemo con la scelta di un particolare set di quantità osservabili al fine di effettuare un'espansione in serie da confrontare con i dati sperimentali, ottenendo così preziose informazioni sui parametri cosmografici.

Nel precedente paragrafo, abbiamo definito la distanza di luminosità per uno spazio-tempo piatto. Ricaveremo, quindi, l'espansione in serie per d_L che per semplicità di calcolo troncheremo al secondo ordine.

Ricordando la definizione di redshift cosmologico 2.79, la distanza di luminosità

può essere riscritta in funzione di z come

$$d_L = r_1 a(t_0)(z + 1) \quad (3.33)$$

Sfruttando l'Eq. 3.30 per $a(t)$, è possibile ottenere un'espansione in serie di potenze anche per il parametro di redshift z [3]

$$z \simeq H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_0 - t_1)^2 + o[(t_0 - t_1)^2] \quad (3.34)$$

Invertendo la relazione 3.34 ricaviamo l'espansione per l'intervallo temporale $\Delta t = t_0 - t_1$, relativo al tempo di emissione e di ricezione dei fotoni provenienti dalla sorgente luminosa

$$(t_0 - t_1) \simeq \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + o(z^2) \right] \quad (3.35)$$

Per ottenere r_1 , invece, effettuiamo l'espansione in serie della distanza propria per una geometria piatta ($k = 0$)

$$r_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.36)$$

In questo modo, si ha

$$r_1 \simeq \frac{1}{a(t_0)} \left[t_0 - t_1 + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 + o[(t_0 - t_1)^2] \right] \quad (3.37)$$

Sostituendo l'Eq. 3.35 nella precedente, si ricava l'espressione di r_1 in funzione del redshift z

$$r_1 \simeq \frac{1}{a(t_0)H_0} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + o(z^2) \right] \quad (3.38)$$

che, sostituita nell'Eq. 3.33, conduce all'espansione in serie di Taylor della distanza di luminosità

$$d_L(z) \simeq \frac{1}{H_0} \left[z + \frac{(1 - q_0)}{2} z^2 + o(z^2) \right] \quad (3.39)$$

Ripetendo la medesima procedura, è possibile ottenere un'espansione in serie per la distanza di luminosità più accurata troncando il polinomio al quarto ordine, in modo che presenti tutti i parametri cosmografici definiti [12]

$$d_L(z) \simeq \frac{z}{H_0} \left[1 + \frac{z}{2}(1 - q_0) - \frac{z^2}{6}(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0) + \frac{z^3}{24}(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0) + o(z^4) \right] \quad (3.40)$$

L'Eq. 3.40 è del tutto generale ed è applicabile a qualsiasi modello cosmologico basato su una metrica FRW piatta.

In questo modo, effettuando direttamente un fit dei dati cosmologici a disposizione per d_L , è possibile utilizzare l'Eq. 3.40 per vincolare i parametri della serie cosmografica al fine di ricavare importanti informazioni sulla dinamica dell'universo, indipendentemente dal modello cosmologico considerato [16].

3.4.3 I limiti della cosmografia standard

Il metodo dell'approssimazione in polinomi di Taylor è un metodo ampiamente utilizzato per approssimare funzioni note con polinomi intorno ad un certo punto. Tuttavia, se l'espansione è effettuata attorno a $z = 0$, la serie di Taylor convergerà solamente se $z < 1$. Pertanto, i limiti dell'approccio cosmografico standard diventano piuttosto eclatanti quando si cerca di sfruttare i dati cosmologici ad alto redshift per ottenere informazioni sull'evoluzione dell'energia oscura. Questa limitata convergenza rende la cosmografia standard scarsamente predittiva per analisi cosmografiche a $z > 1$.

Inoltre, un'ulteriore problematica è legata alla degenerazione presente fra i parametri della serie cosmografica. Infatti, l'impossibilità di misurarli separatamente ma solo la loro somma conduce a risultati differenti a seconda della distribuzione di probabilità associata ad ogni coefficiente.

3.5 Il metodo delle approssimazioni razionali di Padé

L'approssimazione di Taylor standard rappresenta solo una delle possibili approssimazioni della distanza di luminosità. Proporremo in questo paragrafo un diverso approccio cosmografico che consiste nell'approssimare la distanza di luminosità utilizzando le funzioni razionali di Padé.

Il *metodo delle approssimazioni razionali di Padé* mira ad approssimare una funzione mediante il rapporto tra due polinomi: questa procedura risulta vantaggiosa quando si cerca di approssimare funzioni divergenti o funzioni definite su un intero intervallo, offrendo un risultato migliore rispetto ai polinomi di Taylor. Per questa ragione, l'approssimante di Padé potrebbe risolvere i limiti della cosmografia standard, estendendo il raggio di convergenza della serie di Taylor per domini ad alto redshift ($z \gg 1$).

3.5.1 L'approssimante di Padé

Cerchiamo di entrare nel dettaglio di questo diverso approccio cosmografico [17]. La serie di Taylor standard di una generica funzione $f(z)$ è data dalla seguente espressione

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad \text{con} \quad c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \quad (3.41)$$

Data una generica funzione $f(z)$ e due numeri interi $n \geq 0$ e $m \geq 0$, l'*approssimante di Padé di ordine* (n, m) è definito come la funzione razionale

$$P_{n,m}(z) = \frac{R_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m} \quad (3.42)$$

che coincide con la funzione $f(z)$ e con le sue derivate in $z = 0$ all'ordine più alto possibile, ovvero, è tale che [12]

$$\begin{cases} P_{n,m}(0) = f(0) \\ P'_{n,m}(0) = f'(0) \\ P''_{n,m}(0) = f''(0) \\ \vdots \\ P_{n,m}^{(n+m)}(0) = f^{(n+m)}(0) \end{cases} \quad (3.43)$$

Possiamo notare come non vi siano vincoli sul grado dei polinomi. Ne consegue che il numeratore potrebbe avere un grado più alto rispetto a quello del denominatore, e viceversa.

Solitamente, l'approssimante di Padé viene ri-normalizzato ponendo il primo termine costante del denominatore b_0 uguale ad 1, ottenendo

$$P_{n,m}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{1 + \sum_{j=1}^m b_j z^j} \quad (3.44)$$

In questo modo, i $n + 1$ coefficienti indipendenti del numeratore e i m coefficienti del denominatore rendono il numero totale di termini incogniti pari a $n + m + 1$. I coefficienti di Padé possono essere ricavati a partire dall'espansione di Taylor, data dall'Eq. 3.41.

Infatti, imponendo che

$$f(z) = P_{n,m}(z) \quad (3.45)$$

si ha

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots} \quad (3.46)$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 = c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 \\ a_3 = c_3 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 \\ \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

Osservando il sistema 3.47 possiamo notare che, per ogni coefficiente c_i assegnato, ogni nuova equazione introduce due nuove incognite a_i e b_i [18].

Se si specifica il grado del numeratore n , il grado del denominatore m , e dell'espansione di Taylor troncata per $f(z)$ in modo che coincida con $n + m$, allora, il numero delle equazioni costituenti il sistema pareggerà il numero delle incognite, ignorando tutti i termini che sono $o(z^{(n+m+1)})$.

Quindi, in altri termini, i coefficienti dell'approssimante di Padé possono essere determinati imponendo la condizione [12]

$$f(z) - P_{n,m}(z) = o(z^{(n+m+1)}) \quad (3.48)$$

dalla quale si ottiene

$$(1 + b_1 z + \dots + b_m z^m)(c_0 + c_1 z + \dots) = a_0 + a_1 z + a_n z^n + o(z^{(n+m+1)}) \quad (3.49)$$

che, uguagliando i coefficienti aventi la stessa potenza, restituisce il seguente set di $n + m + 1$ equazioni nelle $n + m + 1$ incognite a_i e b_i

$$\begin{cases} a_i = \sum_{k=0}^i c_k b_{i-k} \\ \sum_{j=1}^m b_j c_{m+k+j} = -b_0 c_{n+k}, \quad k = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.50)$$

3.5.2 Confronto delle approssimazioni con il modello Λ CDM

Il metodo delle approssimazioni razionali di Padé ha permesso di risolvere il problema della convergenza ad alti redshifts che affligge l'approssimazione in polinomi di Taylor.

Mostriamo, infatti, una rappresentazione qualitativa di come questo diverso approccio cosmografico riesca a superare i limiti della cosmografia standard. In particolare, è possibile ricavare l'andamento della distanza di luminosità per il modello Λ CDM e confrontare la previsione teorica con le approssimazioni di Taylor e di Padé per un ampio range del redshift z [19].

Per il modello Λ CDM, in accordo con un universo spazialmente piatto, il parametro di Hubble si scrive in termini del redshift z come

$$H_{\Lambda\text{CDM}}(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}} \quad \text{con} \quad \Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_{m_0} \quad (3.51)$$

La distanza di luminosità di una sorgente di luminosità assoluta L posta ad una distanza comovente r , per una geometria piatta, è

$$d_L(z) = (1+z)a(t_0)r \quad (3.52)$$

Se i fotoni vengono emessi al tempo t ed osservati al tempo t_0 , possiamo riscrivere la distanza comovente r (assumendo $c = 1$) in forma integrale come

$$r = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.53)$$

Derivando rispetto al tempo l'Eq. 2.79, descrivente la relazione tra il fattore di scala $a(t)$ e z , si ha

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a(t_0)}{a(t)^2} \dot{a}(t) = -\frac{a(t_0)}{a(t)} H(t) \quad (3.54)$$

da cui, si ricava

$$dt = -\frac{a(t)}{a(t_0)H(t)} dz \quad (3.55)$$

Sostituendo l'Eq. 3.55 nell'Eq. 3.53 e modificando gli estremi di integrazione ($z(t_0) = 0, z(t) = z$), si ottiene

$$r = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.56)$$

che, sostituita nell'Eq. 3.52, restituisce

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.57)$$

Pertanto, la distanza di luminosità per il modello Λ CDM si scrive come

$$d_{L\Lambda\text{CDM}}(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m_0}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (3.58)$$

In questo modo, eseguendo un'integrazione numerica, è possibile graficare l'andamento teorico di d_L previsto dal modello Λ CDM in un determinato intervallo di z .

Nel caso del modello Λ CDM, usando le Eq. 3.32 e 3.51, i parametri della serie cosmografica sono espressi in termini di Ω_{m_0} [20]

$$\begin{cases} q_{0,\Lambda\text{CDM}} = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m_0} \\ \dot{j}_{0,\Lambda\text{CDM}} = 1 \\ s_{0,\Lambda\text{CDM}} = 1 - \frac{9}{2}\Omega_{m_0} \end{cases} \quad (3.59)$$

Se si assume, in accordo con le recenti osservazione, un valore $\Omega_{m_0} = 0,3$, si ottiene

$$\begin{cases} q_{0,\Lambda CDM} = -0,55 \\ j_{0,\Lambda CDM} = 1 \\ s_{0,\Lambda CDM} = -0,35 \end{cases} \quad (3.60)$$

Adottando i valori dell'Eq. 3.60, mostriamo il confronto grafico della distanza di luminosità esatta per il modello ΛCDM con le relative approssimazioni, ottenute sfruttando i polinomi di Taylor e le funzioni razionali di Padé [19]. In particolare, il polinomio di Taylor di terzo grado $T3$ è comparato all'approssimante di Padé di grado $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Analogamente, i polinomi di Taylor $T4$ e $T5$ sono confrontati con i corrispondenti approssimanti di Padé $P_{n,m}(z)$ tali che la somma $n + m$ sia pari al grado del polinomio di Taylor Tk , con $k = n + m$. Ricordiamo, infatti, che se $k = n + m$, allora Tk e $P_{n,m}$ possiedono lo stesso numero di parametri indipendenti e concordano, per definizione, fino all'ordine $(n + m)$ di derivazione per $t = t_0$.

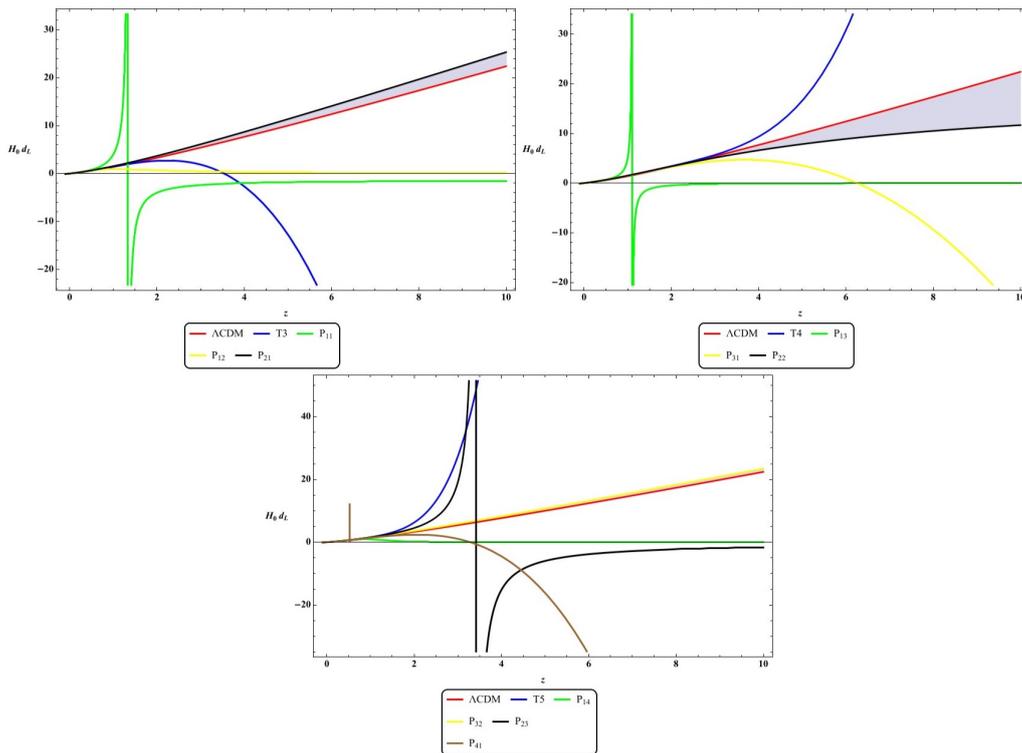


Figura 3.5: Confronto tra l'andamento teorico della d_L previsto dal modello ΛCDM (in rosso) e le relative approssimazioni di Taylor (in blu) e di Padé, per diversi ordini di approssimazione.

Quindi, le approssimazioni di Taylor e di Padé possono essere considerate come espressioni di due modelli diversi che forniscono approssimativamente gli stessi valori dei parametri cosmografici, pur fornendo differenti evoluzioni su tutto l'intervallo considerato.

Osservando la Fig. 3.5 possiamo notare come tutte le approssimazioni di Taylor forniscano un ottimo risultato per piccoli valori di z , mentre divergono in maniera molto evidente dall'andamento teorico per $z > 2$.

Al contrario, gli approssimanti di Padé $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,2}$ si avvicinano abbastanza alla distanza d_L prevista dal modello Λ CDM su tutto l'intervallo considerato.

Dal confronto dei vari andamenti emerge, inoltre, che la bontà dell'approssimazione fornita dai polinomi razionali di Padé non migliora con l'aumentare dell'ordine di approssimazione (n, m) poiché gli approssimanti possiedono comportamenti completamente diversi a seconda del grado del numeratore e del denominatore. Tuttavia, l'analisi analitica delle curve per la distanza di luminosità suggerisce alcune considerazioni teoriche per la costruzione di funzioni razionali di Padé valide. In primo luogo, $P_{n,m}(z)$ non deve presentare singolarità nell'intervallo di redshift scelto per l'analisi cosmografica. Inoltre, l'approssimante di Padé per $d_L(z)$ deve essere definito positivo, in modo da garantire la corretta definizione del modulo di distanza $m - M$ (Eq. 3.21). Infine, notiamo come i polinomi razionali di Padé che forniscono un'approssimazione migliore sono quelli che presentano un valore del grado del numeratore vicino a quello del denominatore, con il primo un pò più grande del secondo ($n + m \geq 0$).

3.5.3 Lo studio del raggio di convergenza

Per verificare il miglioramento effettivo delle approssimazioni razionali di Padé rispetto all'approccio cosmografico standard studiamo il raggio di convergenza dei due metodi cosmografici [12].

Ad esempio, prendiamo in considerazione l'approssimante di Padé $P_{1,1}$ ed il polinomio di Taylor al secondo ordine T_2 . In particolare, l'espressione di T_2 è fornita dall'Eq. 3.39, mentre l'espressione di $P_{1,1}$ può essere ottenuta risolvendo il sistema 3.50, ottenendo

$$P_{1,1}(z) = \frac{2z}{H_0[2 + (q_0 - 1)z]} \quad (3.61)$$

Possiamo riscrivere l'Eq. 3.42 nel seguente modo

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z} = \frac{a_0}{1 + b_1 z} + \frac{a_1}{b_1} \left(1 - \frac{1}{1 + b_1 z}\right) \quad (3.62)$$

da cui

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_1}{b_1} + \left(a_0 - \frac{a_1}{b_1}\right) \left(\frac{1}{1 + b_1 z}\right) \quad (3.63)$$

che può essere riscritta in termini di una serie geometrica come

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_1}{b_1} + \left(a_0 - \frac{a_1}{b_1} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} (-b_1)^n z^n \quad (3.64)$$

La serie geometrica che compare nell'Eq. 3.64 converge solo se $|z| < \frac{1}{|b_1|}$. Pertanto, il raggio di convergenza dell'approssimante di Padé $P_{1,1}$ sarà

$$\rho_{P_{1,1}} = \frac{1}{|b_1|} = \frac{2}{1 - q_0} \quad (3.65)$$

Calcoli analoghi mostrano che il raggio di convergenza della serie di Taylor al secondo ordine T_2 è

$$\rho_{T_2} = \frac{1 - q_0}{2} \quad (3.66)$$

Adoperando il valore del parametro di decelerazione q_0 previsto dal modello Λ CDM (Eq. 3.60) possiamo effettuare un confronto immediato dei due raggi di convergenza, ottenendo

$$\begin{cases} \rho_{P_{1,1}} = 1,290 \\ \rho_{T_2} = 0,775 \end{cases} \quad (3.67)$$

Questo risultato conferma nuovamente che l'uso della tecnica cosmografica basata sui polinomi razionali di Padé comporta un miglioramento nell'estensione del raggio di convergenza rispetto alla serie di Taylor.

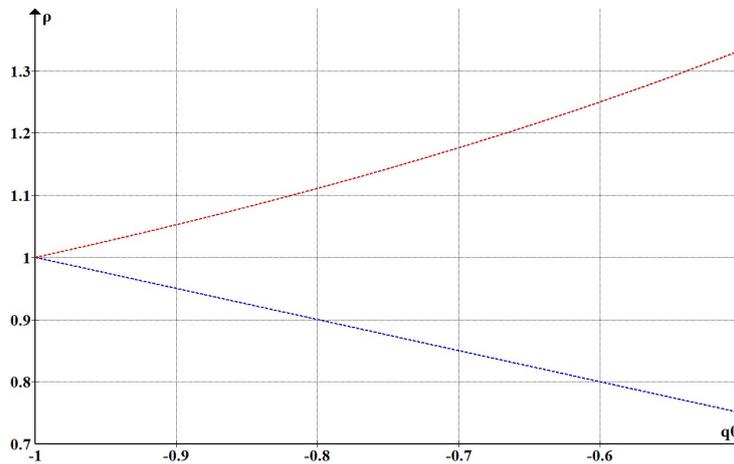


Figura 3.6: Confronto tra il raggio di convergenza del polinomio di Taylor arrestato la secondo ordine (in blu) e dell'approssimante di Padé $P_{1,1}$ (in rosso), in funzione di q_0

Conclusioni

Il metodo cosmografico costituisce un potente strumento matematico indipendente dal modello per ottenere informazioni circa i parametri che descrivono la dinamica cosmologica, senza assumere alcun modello teorico *a priori*.

In questo lavoro di tesi è stata mostrata una tecnica di approssimazione basata sulle funzioni razionali di Padé, più sofisticata rispetto all'espansione in serie di Taylor utilizzata nell'approccio cosmografico standard. Per mostrare i vantaggi di questo metodo, sono state discusse le proprietà matematiche degli approssimanti di Padé. Infatti, in quanto funzioni razionali, risolvono i problemi di cattiva convergenza per dati cosmologici appartenenti ad un ampio intervallo di redshift ($z > 1$) che affliggono l'espansione in serie di Taylor troncata intorno a $z = 0$.

In particolare, è stato mostrato un confronto analitico fra l'andamento della distanza di luminosità teorica prevista dal modello Λ CDM e le relative approssimazioni di Padé e Taylor. La comparazione è stata effettuata tra tutti i possibili approssimanti di Padé $P_{n,m}$ aventi il grado del numeratore n e del denominatore m tali che la loro somma $n + m$ sia pari a 3, 4 e 5 con i corrispondenti polinomi di Taylor di ordine 3, 4 e 5 in z . L'analisi grafica delle curve della distanza di luminosità ha dimostrato come la tecnica basata sulle funzioni razionali di Padé riesca a migliorare la precisione dell'approssimazione su tutto l'intervallo di redshift considerato nell'analisi cosmografica.

Inoltre, come ulteriore verifica dei vantaggi di questa diversa tecnica cosmografica, è stata testata la stabilità delle approssimazioni di Padé per domini ad alto redshift studiando il suo raggio di convergenza ρ . Infine, il confronto dei raggi di convergenza dei due metodi cosmografici ha confermato la maggior accuratezza dei polinomi razionali di Padé che presentano un raggio di convergenza maggiore rispetto ai polinomi di Taylor.

Appendice A

La determinazione della metrica Friedmann-Robertson-Walker

Procederemo col ricavare la forma della funzione $F(r)$, presente nella metrica 1.1, sfruttando le simmetrie dello spazio tridimensionale imposte dal Principio Cosmologico [5]. Per far ciò, sfrutteremo l'equazione di Killing 1.22, la quale rappresenta la condizione sulle ξ affinché la trasformazione di coordinate definita sia isometrica. Inoltre, imporre la seguente condizione aggiuntiva

$$\xi^0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

dovuta al fatto che in un universo in espansione non c'è omogeneità nel tempo. Per semplicità, usiamo la formulazione dell'equazione di Killing data dall'equazione 1.14, espressa come un'equazione differenziale nell'incognita ξ^α :

$$\xi_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} + \xi_{,\nu}^\beta g_{\mu\beta} + \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} = 0, \quad \xi^0 = 0 \quad (\text{A.2})$$

essendo un indice muto, possiamo identificare l'indice sommato β del secondo termine con α , riscrivendo l'equazione differenziale come

$$\xi_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} + \xi_{,\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} + \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} = 0, \quad \xi^0 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Scriviamo ora le equazioni di Killing per le varie componenti, iniziando ponendo $\mu = \nu = 1$.

$$\xi_{,1}^\alpha g_{\alpha 1} + \xi_{,1}^\alpha g_{1\alpha} + \xi^\alpha g_{11,\alpha} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Identifichiamo la coordinata che corrisponde ad $\mu = 1$ con r , analogamente per ν . Inoltre, per la forma del tensore metrico della sottovarietà tridimensionale Σ , rappresentato nell'Eq. 1.3, si nota che il termine $g_{\alpha 1}$ deve essere necessariamente uguale a g_{11} per non ottenere una soluzione banale. La medesima cosa vale per il termine $g_{1\alpha}$. Pertanto, l'Eq. A.4 diviene:

$$2\xi_{,r}^\alpha g_{11} + \xi^\alpha g_{11,\alpha} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ricordando la presenza della condizione aggiuntiva $\xi^0 = 0$ e che $g_{11} = -a^2(t)F(r)$, ne consegue che l'unico termine non nullo della somma $\xi^\alpha g_{11,\alpha}$ è quello corrispondente ad $\alpha = 1$. Pertanto, la precedente equazione diventa

$$2\xi_{,r}^r g_{11} + \xi^r g_{11,r} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Eseguendo la derivata di g_{11} , si ottiene

$$2\xi_{,r}^r F + \frac{dF}{dr} \xi^r = 0 \quad (\text{A.7})$$

Consideriamo la seguente derivata

$$\frac{d}{dr}[\sqrt{F}\xi^r] = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{dF}{dr} \xi^r + \sqrt{F}\xi_{,r}^r \quad (\text{A.8})$$

Pertanto, l'Eq. A.7 può essere riscritta come

$$2\sqrt{F} \frac{d}{dr}[\sqrt{F}\xi^r] = 0 \quad (\text{A.9})$$

la quale ammette come soluzione

$$\sqrt{F}\xi^r = \text{costante} \quad (\text{A.10})$$

dove la costante di integrazione può essere solo funzione di θ e ϕ , cioè

$$\sqrt{F}\xi^r = C(\theta, \phi) \quad (\text{A.11})$$

In pratica, l'unica dipendenza possibile per tale costante è data da θ .

Si ha, quindi:

$$\sqrt{F}\xi^r = C(\theta, \phi) = A \cos\theta \quad (\text{A.12})$$

Scriviamo ora una seconda equazione di Killing, ponendo $\mu = \nu = 2$ nell'Eq. A.3, corrispondente alla componente θ , ottenendo

$$\xi_\theta^\alpha g_{\alpha 2} + \xi_{,\theta}^\alpha g_{2\alpha} + g_{22,\alpha} \xi^\alpha = 0 \quad (\text{A.13})$$

Analogamente al caso precedente, per come è costituito il tensore metrico, i termini $g_{\alpha 2}$ e $g_{2\alpha}$ devono essere necessariamente uguali a g_{22} , essendo quest'ultimo diverso da zero ed uguale a $g_{22} = -r^2 a^2(t)F(r)$. Quindi, l'Eq. A.3 diventa

$$2\xi_{,\theta}^\theta g_{22} + g_{22,\alpha} \xi^\alpha = 0 \quad (\text{A.14})$$

Inoltre, essendo g_{22} dipendente da t e da r , l'unico termine diverso da zero tra i termini $g_{22,\alpha} \xi^\alpha$ è $g_{22,r} \xi^r$, pertanto

$$2\xi_{,\theta}^\theta g_{22} + g_{22,r} \xi^r = 0 \quad (\text{A.15})$$

Eseguendo la derivata di g_{22} , si ottiene

$$2\xi_{,\theta}^\theta r^2 F + \frac{d}{dr}(r^2 F)\xi^r = 0 \quad (\text{A.16})$$

Dunque, è comparsa un'ulteriore incognita $\xi_{,\theta}^\theta$: per eliminarla scriviamo una terza equazione di Killing.

Poniamo nella A.3, $\mu = 1$ e $\nu = 2$, ottenendo

$$\xi_{,r}^\alpha g_{\alpha 2} + \xi_{,\theta}^\alpha g_{1\alpha} + g_{12,\alpha}\xi^\alpha = 0 \quad (\text{A.17})$$

In questa equazione, $g_{12} = 0$, mentre i termini $g_{\alpha 2}$ e $g_{1\alpha}$ devono necessariamente coincidere, rispettivamente, con g_{22} e g_{11} , per non ottenere una soluzione banale dell'equazione. L'Eq. A.17 si riscrive, quindi, come

$$\xi_{,r}^\theta g_{22} + \xi_{,\theta}^r g_{11} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo i valori di g_{22} e di g_{11} , si ottiene

$$\xi_{,r}^\theta r^2 + \xi_{,\theta}^r = 0 \quad (\text{A.19})$$

Deriviamo ora questa equazione rispetto a θ , ottenendo

$$\xi_{,r\theta}^\theta = -\frac{1}{r^2}\xi_{,\theta\theta}^r \quad (\text{A.20})$$

Dividiamo l'Eq. A.16 per $2r^2 F$:

$$\xi_{,\theta}^\theta + \frac{\xi^r}{2r^2 F} \frac{d}{dr}(r^2 F) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Derivando la precedente rispetto ad r , si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\xi^r}{2r^2 F} \frac{d}{dr}(r^2 F) \right] = -\xi_{,\theta r}^{\theta} = -\xi_{,r\theta}^\theta = \frac{1}{r^2}\xi_{,\theta\theta}^r \quad (\text{A.22})$$

dove abbiamo utilizzato nell'ultimo passaggio l'Eq. A.20. Dall'Eq. A.12 si ha

$$\xi^r = \frac{a \cos \theta}{\sqrt{F}} \quad (\text{A.23})$$

da cui si ricava che

$$\xi_{,\theta\theta}^r = -\frac{a \cos \theta}{\sqrt{F}} \quad (\text{A.24})$$

Sostituendo l'Eq. A.23 e A.24 nella A.22, si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2r^2 F^{3/2}} (r^2 F' + 2rF) \right] = -\frac{1}{r^2 \sqrt{F}} \quad (\text{A.25})$$

dove con il "primo" indichiamo la derivata rispetto ad r .

Eseguendo la derivata, si ha

$$\frac{F''}{2F^{3/2}} - \frac{2(F')^2}{4F^{5/2}} + \frac{F'}{2rF^{1/2}} + \frac{1}{r^2F^{1/2}} = 0 \quad (\text{A.26})$$

ovvero

$$F'' - \frac{1}{r}F' - \frac{3(F')^2}{2F} = 0 \quad (\text{A.27})$$

Una soluzione di questa equazione differenziale è

$$F' = ArF^{3/2} \quad (\text{A.28})$$

Infatti, derivando questa equazione si ha

$$F'' = AF^{3/2} + \frac{3}{2}ArF^{1/2}F' = \frac{F'}{r} + \frac{3(F')^2}{2F} \quad (\text{A.29})$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo sfruttato l'Eq. A.28, scrivendo $AF^{3/2} = \frac{F'}{r}$. L'uguaglianza dell'Eq. A.29 con la A.27 dimostra l'esistenza della soluzione A.28. Riscriviamo l'Eq. A.28 nel seguente modo

$$\frac{F'}{F^{3/2}} = Ar \quad (\text{A.30})$$

Il primo membro può essere scritto in termini di una derivata, infatti

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{2}{\sqrt{F}} \right] = \frac{F'}{F^{3/2}} \quad (\text{A.31})$$

Sostituendo l'Eq. A.31 nella A.30, si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{2}{\sqrt{F}} \right] = Ar \quad (\text{A.32})$$

che, integrando, diventa

$$-\frac{2}{\sqrt{F}} = \frac{A}{2}r^2 + B \quad (\text{A.33})$$

ottenendo, finalmente, la forma della funzione $F(r)$

$$F(r) = \frac{4}{\left(B + \frac{A}{2}r^2\right)^2} \quad (\text{A.34})$$

L'Eq. A.34 può essere riscritta nella seguente forma equivalente

$$F(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \quad (\text{A.35})$$

dove il parametro k può assumere i valori $+1$, -1 e 0 .

Bibliografia

- [1] H. Bondi, *Cosmology*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952)
- [2] M. Gasperini, *Lezioni di Cosmologica Teorica*, (Springer, Milano, 2012)
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons, Inc., 1972)
- [4] R. Wald, *General Relativity*, (Chicago Univ. Press, Chicago, 1984)
- [5] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, (Liguori, Napoli, 2004)
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman W. H., San Francisco, 1973)
- [7] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019)
- [8] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1993)
- [9] J. Peacock, *Cosmological Physics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999)
- [10] P. Coles, F. Lucchin, *Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, (John Wiley & Sons, Ltd, 2002)
- [11] S. Weinberg, *Cosmology*, (Oxford Univ. Press, Oxford, 2008)
- [12] S. Capozziello, R. D'Agostino, O. Luongo, *Int. J. Mod. Phys. D* **28** (2019) 1930016
- [13] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1
- [14] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, (Pearsons, 2014)

- [15] M. Rowen-Robison, *The cosmological distance ladder*, (Freeman, 1985)
- [16] A. Aviles, C. Gruber, O. Luongo, H. Quevedo, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 123516
- [17] B. Obsieger, *Numerical Methods III - Approximations of Functions* (University of Rijeka, 2013)
- [18] G. A. Baker Jr., P. Graves-Morris, *Padé Approximants* (Cambridge University Press, 1996)
- [19] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, O. Luongo, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 043531
- [20] S. Capozziello, R. D'Agostino, O. Luongo, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **476** (2018) 3924