

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Candele Standard e l’espansione dell’Universo

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Micol Benetti

Candidato:

Pietro Farina
Matr. N85001015

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	2
1 Candele Standard	4
1.1 Supernove di tipo Ia	5
1.2 Le SNe Ia come candele standard	8
1.3 La legge di espansione di Hubble	9
2 Interpretazione delle Osservazioni	11
2.1 Il modello Λ CDM	12
2.2 Supernove in Cosmologia	15
2.2.1 Grandezze utili in Cosmologia Classica	16
2.2.2 Distanza di Luminosità in funzione del modello cosmologico	18
2.2.3 Equazione di stato	20
Conclusioni	23
Bibliografia	25

Introduzione

Sin da quando Lemaître e Hubble hanno proposto, indipendentemente, un effetto di espansione dell'universo, uno dei principali obiettivi della Cosmologia è stato creare un modello autoconsistente, basato sulla Relatività Generale, che potesse descrivere tale effetto. La legge di Hubble ha rappresentato uno dei cardini della Cosmologia moderna: essa infatti si basa sul **principio cosmologico** e sul **principio di espansione**. Il primo afferma che su scale cosmologiche (distanze dell'ordine di centinaia di Mpc), l'universo risulta essere omogeneo ed isotropo; il secondo afferma che l'universo è in espansione. Tali principi conducono alla scrittura di una metrica invariante ed omogenea in espansione, detta metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (o metrica FLRW). Essa dipende essenzialmente da un parametro di curvatura spaziale, e da un fattore di scala, dipendente, a sua volta, dal tempo cosmico. Tale fattore ed altre grandezze possono essere ricavate applicando alla metrica FLRW le equazioni di campo gravitazionale di Einstein, accoppiate con l'equazione di continuità del tensore energia-impulso. Ad esse ne viene aggiunta un'ulteriore, che è un'equazione di stato per la materia-energia presente nell'universo. Le precedenti equazioni sono dette equazioni del **Modello Cosmologico Standard**. Tale modello rappresenta la più semplice teoria cosmologica che sia in accordo con i dati osservativi. Infatti esso prevede l'esistenza di una radiazione cosmica di fondo (o CMBR) e di una struttura a larga scala ossia ammassi, superammassi e filamenti di galassie. Inoltre il Modello Cosmologico Standard riesce ad inglobare alcune tra le più importanti teorie odierne come la teoria del Big Bang, la cui scoperta della CMBR è la principale prova, ed il Modello Standard delle particelle elementari.

Negli ultimi decenni, grazie alle numerose osservazioni delle Supernove di tipo Ia (SNe Ia) e sulla radiazione cosmica di fondo, si è riusciti a comprendere che l'universo è in una fase di espansione accelerata. Per considerare questo comportamento utilizzando il Modello Cosmologico Standard si aggiunge, in modo opportuno, nelle sopramenzionate equazioni, una costante cosmologica (Λ): essa rappresenta una forma di energia non addensata in strutture, detta Energia Oscura. Il modello non specifica quale possa essere la sorgente di questa forma di energia: pertanto sono nate le più disparate teorie per comprenderne la natura.

Nel presente lavoro di tesi si è spiegato in che modo le recenti osservazioni delle Supernove di tipo Ia suggeriscano un'espansione accelerata. In particolare, la tesi è così strutturata:

nel primo capitolo, sono introdotti vari indicatori di distanza per la cosmologia, presentati i fenomeni fisici che spiegano l'andamento delle curve di luminosità delle Supernove di tipo Ia, come esse vengano usate come candele standard per misure cosmologiche ed una successiva introduzione alla legge di espansione di Hubble; nel secondo capitolo viene introdotto il modello Λ CDM e come le osservazioni delle Supernove siano utilizzate all'interno di tale modello cosmologico per ricavare teoricamente un universo in espansione, con particolare attenzione alla parametrizzazione dell'equazione di stato per l'Energia Oscura; infine, sono riportate le conclusioni.

Capitolo 1

Candele Standard

Le candele standard sono delle sorgenti astronomiche con peculiari meccanismi che possono essere utilizzate come indicatori di distanza. Difatti, per ricavare le distanze in astronomia extragalattica e in cosmologia, è di fondamentale importanza conoscere la luminosità (o magnitudine assoluta) dell'oggetto in questione: infatti, confrontando questa con la luminosità osservata (magnitudine apparente), è possibile capire quanto l'oggetto sia lontano dal punto di osservazione.

Una volta identificati degli oggetti con luminosità intrinseca costante o con legge nota, essi possono essere rilevati nelle osservazioni astronomiche. Tale tipo di approccio risulta conveniente per distanze fino all'ordine di 10^7 pc (indicatori primari). Fanno parte di questa classe le Cefeidi, le RR Lyrae, le Mira, le Nove e le Supernove. I metodi che si basano su questi indicatori sono per lo più osservativi, anche se esistono dei metodi teorici basati, ad esempio, sull'evoluzione stellare.

- Le Cefeidi sono stelle la cui luminosità varia con periodi tra i 2 ed i 150 giorni. Tale variazione è dovuta ad un movimento di espansione e contrazione dell'involuppo stellare che si ripete con regolarità da un ciclo all'altro. Ciò che le ha rese delle ottime candele standard è che la loro luminosità intrinseca aumenta col periodo.
- Le RR Lyrae sono stelle variabili di circa una massa solare. La loro variazione luminosa avviene con ampiezze tra 0,5 e 1 magnitudine con periodi che vanno dalle 7 alle 24 ore. Il fatto di avere una luminosità media pressoché costante li rende degli ottimi indicatori di distanza, purché ne sia calcolata la magnitudine assoluta.
- Le Nove sono variabili esplosive che mostrano un improvviso aumento di luminosità su una scala di tempo di 1 o 2 giorni, seguito da un declino molto lento che può durare anni. La magnitudine assoluta raggiunta dalle Nove può essere molto diversa da una variabile all'altra, ma è molto ben correlata alla

rapidità con cui avviene il declino dopo il massimo: Nove che raggiungono luminosità più elevate hanno un declino più rapido.

- Le Mira sono stelle giganti e supergiganti rosse che mostrano delle variazioni di luminosità di circa 5 magnitudini, che si ripetono con abbastanza regolarità, tra i 3 mesi e i 2 anni. Esse, al pari delle Cefeidi seguono una specifica relazione periodo luminosità.

Oltre questi, vi sono indicatori secondari (fino a 10^9 pc), la cui calibrazione dipende dalla conoscenza delle distanze di galassie lontane, ricavata utilizzando gli indicatori primari: alcuni possono essere le zone brillanti di idrogeno ionizzato delle galassie, la correlazione tra colore e luminosità delle galassie ellittiche e la luminosità degli ammassi globulari. Infine gli indicatori terziari (oltre i 10^9 pc), la cui calibrazione dipende direttamente dalla conoscenza di distanze ricavate mediante gli indicatori terziari, possono essere: la luminosità totale delle galassie più brillanti presenti negli ammassi di galassie, supponendo che essa sia costante per tutti gli ammassi; la correlazione fra dimensione delle galassie e loro luminosità. Tali metodi risultano, comunque abbastanza approssimativi per vari motivi, come ad esempio, l'impossibilità di conoscere con esattezza la grandezza di una galassia oppure la sua evoluzione.

1.1 Supernove di tipo Ia

Una Supernova è una stella massiccia nelle fasi finali della sua evoluzione che nell'esplosione espelle i suoi strati più esterni a velocità di migliaia di chilometri al secondo a causa del collasso del nucleo. Il picco di luminosità delle Supernove è molto intenso e può essere comparato a quello di una intera galassia prima di scomparire nel giro di settimane o mesi.

La prima distinzione da fare quando si vuole presentare una classificazione delle Supernove è verificare la presenza o l'assenza delle linee dell'idrogeno nello spettro: le SNe di tipo I non presentano tali linee a differenza di quelle di tipo II. Prendendo in considerazione le SNe di tipo I, se nello spettro è presente l'elio non ionizzato (HeI) si è in presenza di SNe di tipo Ib, altrimenti si ha una Supernova di tipo Ic. Se nello spettro è presente silicio ionizzato (SiII) si hanno, invece, delle SNe di tipo Ia.

Lo studio delle Supernove di tipo Ia, negli ultimi decenni, è risultato essere di grande importanza poiché attraverso le osservazioni di tali oggetti si è riusciti ad avere una dimostrazione che, nell'epoca attuale, l'universo sta subendo una fase di espansione accelerata. A differenza degli altri tipi di SNe, la presenza di quelle di tipo Ia in una determinata galassia non è associato alla particolare forma della stessa. Gli spettri in assorbimento sono caratterizzati, al picco di luminosità, da

elementi medio-pesanti, come calcio, silicio ed ossigeno; mentre nella fase avente luogo settimane dopo il massimo si ha uno spettro dominato da FeII e FeIII. Questo comportamento, complessivamente omogeneo, ha portato a credere che esse siano originate da una esplosione termonucleare di una nana bianca.

Ci sono diversi scenari che possono condurre alla formazione di questo tipo di Supernove. Un modello probabile è costituito dall'evoluzione di un sistema binario, nel quale la nana bianca accresce la sua massa grazie ad una stella compagna, oppure un altro modello può essere fornito da un sistema binario di nane bianche che si fondono. Comunque sia il meccanismo di base è lo stesso. Infatti, inizialmente si ha una nana bianca al carbonio-ossigeno che accresce la sua massa senza, però, raggiungere il limite di Chandrasekhar ($\sim 1,38$ masse solari). Quando essa vi è molto vicina iniziano dei moti di convezione al suo interno che possono durare migliaia di anni: ciò porta ad una fase di fusione del carbonio e dell'ossigeno che aumenta la temperatura della nana bianca. A questo punto la produzione di elementi pesanti, attraverso la fusione di carbonio ed ossigeno, diventa incontrollata, cosa che porta la nana bianca a un runaway termico, ossia essa non riesce a controbilanciare l'aumento di temperatura, dovuta ai processi termonucleari, attraverso l'espansione, come farebbe una normale stella. Questo accade perché la pressione degli elettroni degeneri (ad energia minore dell'energia di Fermi associata al sistema) non dipende dalla temperatura per le nane bianche. L'energia rilasciata dalla fusione (dell'ordine di $\sim 10^{44}$ J) è sufficiente a causare un'esplosione della nana bianca.

Tale esplosione rilascia un'energia, che ha una determinata evoluzione temporale, la quale può essere fonte di numerose informazioni. Per quanto riguarda le SNe Ia ci sono state molte osservazioni nell'ultima decade, per cui, si hanno delle informazioni molto dettagliate su questo tipo di fenomeni. L'evoluzione temporale può essere ricavata attraverso la costruzione delle curve di luminosità, ovvero la variazione della luminosità in funzione del tempo trascorso dopo l'esplosione. In corrispondenza del massimo di luminosità lo spettro mostra linee di elementi intermedi tra il calcio e l'ossigeno che sono i principali costituenti degli strati più esterni della nana bianca. Oltre a tali elementi le linee dominanti sono quelle dell'isotopo del nichel (^{56}Ni), prodotto durante l'esplosione, che ha un tempo di dimezzamento $t_{1/2} = 6.1$ d. Dopo quaranta giorni, le curve di luminosità decadono esponenzialmente. Lo spettro, a questo stadio, è dominato dall'isotopo del cobalto (^{56}Co), proveniente dai decadimenti del nichel attraverso cattura elettronica che produce raggi γ . L'isotopo del cobalto è anch'esso instabile ($t_{1/2} = 77.1$ d) e decade per decadimento β^+ ($\sim 81\%$) o per cattura elettronica ($\sim 19\%$) in ^{56}Fe . I raggi γ prodotti dal primo decadimento hanno una energia di 750 keV, 812 keV e 158 keV mentre per il secondo si parla di energie di 1238 MeV e 847 keV: pertanto essi, subendo scattering o termalizzando, attraverso il materiale espulso durante

l'esplosione, diminuiscono la loro energia cinetica fino a diventare fotoni dell'ottico o del vicino infrarosso, che rappresentano la maggior parte delle emissioni per le SNe Ia.

Nella figura 1.1 è possibile osservare la curva di luminosità bolometrica, ovvero integrata su tutte le frequenze, costruita dalle osservazioni della SN1992bc. Le sottili rette grigie indicano le linee di decadimento teoriche del ^{56}Ni (retta più pendente) e del ^{56}Co (retta meno pendente). Si può notare che vicino al massimo l'energia rilasciata è quasi identica all'energia di decadimento dei due elementi. In questa fase la radiazione è intrappolata all'interno del materiale espulso, quindi un'espansione della superficie corrisponde ad un incremento in luminosità. Nelle fasi successive il materiale espulso inizia a diventare trasparente per cui vengono persi molti raggi γ e l'andamento decrescente è molto più veloce rispetto alla curva teorica di un modello in cui l'energia radiativa rimane intrappolata all'interno del materiale espulso (curva punteggiata e tratteggiata). La curva tratteggiata indica una curva di luminosità in cui nessun raggio γ è convertito nel visibile. Solitamente tutte le curve di luminosità si evolvono tra questi due casi estremi.

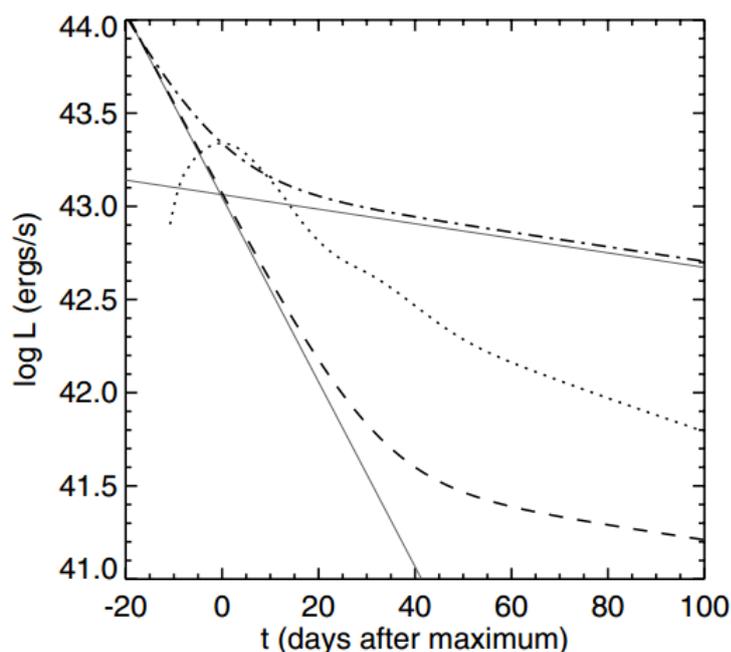


Figura 1.1: Curva bolometrica di una SNIa. La linea punteggiata è la luminosità bolometrica osservata. Le sottili linee grigie sono linee di decadimento. La curva tratteggiata è la curva teorica che si avrebbe se tutti i raggi γ fossero sfuggiti al materiale espulso. La curva punteggiata e tratteggiata indica una completa cattura dell'energia radiativa. Credit Ref. [7].

1.2 Le SNe Ia come candele standard

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato che la curva di luminosità di una SNIa presenti un picco e poi una fase di discesa lenta (*plateau*) nei giorni successivi al massimo. Dalle osservazioni risulta che tale curva è più o meno la stessa per la quasi totalità delle Supernove di tipo Ia. Pertanto esse vengono scelte come candele standard per misure astronomiche di oggetti abbastanza vicini. Per meglio comprendere tale scelta si possono definire alcuni parametri astronomici che vengono solitamente utilizzati per la determinazione delle distanze di oggetti celesti.

In primo luogo definiamo magnitudine apparente m e magnitudine assoluta M . La prima è la luminosità di un corpo celeste rilevabile da un determinato punto di osservazione, solitamente la Terra: esso viene corretto in modo da eliminare effetti dell'atmosfera. Il secondo rappresenta la luminosità intrinseca, ed equivale alla magnitudine apparente che esso avrebbe se si trovasse a 10 pc di distanza dall'osservatore. Si distingue, inoltre la magnitudine bolometrica se ci si riferisce al totale dell'energia emessa, mentre, solitamente, quando non specificato, si parla di magnitudine assoluta visuale. Matematicamente la magnitudine apparente è definita nel modo seguente:

$$m_b = m_{b,0} - 2,5 \log_{10} \left(\frac{F_b}{F_{b,0}} \right), \quad (1.1)$$

dove F_b è il flusso osservato nella banda b della radiazione, $m_{b,0}$ e $F_{b,0}$ sono, rispettivamente la magnitudine apparente e il flusso di un oggetto di riferimento.

Dalla precedente espressione si evince che più la luminosità di un oggetto è debole più è grande la sua magnitudine. Inoltre è possibile ricavare una relazione che lega M ed m . Consideriamo due corpi celesti, la differenza tra le magnitudini apparenti è:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right). \quad (1.2)$$

Supponendo di stare misurando il flusso proveniente dallo stesso corpo celeste una volta posto alla sua distanza reale d una volta posto a 10 pc, si ottiene:

$$M - m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F d^2}{F 10^2} \right) \quad (1.3)$$

$$= 5 - 5 \log_{10} d. \quad (1.4)$$

Definendo il modulo di distanza $\mu = M - m$, si ha:

$$\mu = 5 - 5 \log_{10} d. \quad (1.5)$$

Talvolta al posto della distanza, si utilizza la distanza di luminosità, definita come segue:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (1.6)$$

dove L è la luminosità dell'oggetto mentre F è il flusso. Allora l'equazione (1.5) diventa:

$$\mu = 5 - 5 \log_{10} d_L. \quad (1.7)$$

Attraverso le precedenti relazioni si può comprendere che prendendo le SNe Ia come candele standard, è possibile misurare la loro luminosità intrinseca L , e quindi è possibile per esse, come per pochi altri oggetti, ricavare la loro distanza attraverso le osservazioni.

1.3 La legge di espansione di Hubble

Per la radiazione elettromagnetica emessa da un corpo in movimento, come può essere una galassia che si allontana da noi, si deve tener conto dell'effetto Doppler relativistico: esso lega la lunghezza d'onda osservata e quella emessa nel seguente modo:

$$\lambda_o = \gamma(1 + \beta)\lambda_e \quad (1.8)$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda osservata, λ_e è quella emessa, $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Come detto il moto più comune è l'allontanamento, la luce si sposta verso lunghezze d'onda maggiori e quindi verso frequenze più basse, come si evince dalla (1.8). Siccome nella luce visibile la frequenza più bassa corrisponde al rosso, allora si usa indicare il fenomeno come spostamento verso il rosso, o redshift. Pertanto definiamo il seguente parametro di redshift:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.9)$$

La (1.9) risulta essere molto importante poiché come indicatore temporale cosmologico si utilizza solitamente il redshift delle galassie. Pertanto dire che due oggetti sono allo stesso redshift cosmologico vuol dire che emettono radiazione alla stessa epoca.

Il fatto che si usi il redshift è strettamente legato alla legge di Hubble. Essa afferma che la velocità di recessione di una galassia è direttamente proporzionale alla sua distanza. Tale regola è approssimata perché non vale sia per galassie che sono molto vicine a noi, sia per quelle più distanti. Questo è dovuto al fatto che le galassie, oltre al moto sistematico di recessione, possiedono propri moti casuali. Tali moti, per galassie vicine, diventano paragonabili al moto sistematico di recessione, facendo sembrare la legge di Hubble non valida. Per galassie lontane la

legge di Hubble potrebbe non valere poiché i moti sistematici indicati da radiazione emessa miliardi di anni fa potrebbero essere molto diversi da quelli dell'attuale epoca cosmologica.

Va, però specificato, che, solitamente, il redshift può essere causato anche da altri processi oltre che alla recessione della sorgente, come ad esempio quello gravitazionale: se la luce è emessa da una sorgente che presenta un forte campo gravitazionale e viene ricevuta da un osservatore in un campo gravitazionale debole quello che si osserverà sarà uno spostamento verso il rosso della radiazione luminosa. Tuttavia, sembra altamente improbabile che il redshift delle galassie sia dovuto ad effetti gravitazionali, poiché essi risultano essere molto più piccoli rispetto a quelli osservati da Hubble. Sebbene quanto detto sia accettato in modo unanime dalla comunità scientifica, non si escludono spiegazioni alternative.

Ora, utilizzando il Principio Cosmologico, che afferma che l'universo è omogeneo ed isotropo su larga scala, possiamo affermare che la distanza tra una coppia di galassie è assegnata attraverso un fattore di scala $a(t)$. Più specificamente, si possono considerare due galassie che partecipano al moto di espansione dell'universo: la distanza tra le due galassie può essere espressa attraverso una quantità detta *distanza comovente* $d_{12} = a(t)r_{12}$ dove r_{12} è una costante che dipende dalle galassie prese in esame. Per quanto detto, in modo analogo, la distanza comovente può essere scritta per una seconda coppia di galassie: $d_{34} = a(t)r_{34}$. In questo senso l'evoluzione globale del sistema universo come sistema dinamico può essere espressa dalla sola funzione del tempo $a(t)$.

Pertanto indicando con v_{12} la velocità di recessione di due galassie l'una rispetto all'altra, si ottiene:

$$v_{12} = \dot{d}_{12} = r_{12}\dot{a} = d_{12}\frac{\dot{a}}{a} \quad (1.10)$$

dove il punto indica una derivata rispetto al tempo cosmico. Quindi ad un tempo t_0 , tempo cosmico attuale, potremo scrivere:

$$v_{12} = H_0 d_{12} \quad \text{con} \quad H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} \quad (1.11)$$

L'equazione precedente è la legge di Hubble, con H_0 costante di Hubble che indica il tasso di recessione delle galassie al tempo t_0 . La denominazione di costante, si riferisce al fatto che essa sia calcolata ad un determinato tempo: è infatti possibile calcolare la sua variazione, come si vedrà in seguito, attraverso le Equazioni Cosmologiche.

Stabilire il valore di H_0 è tutt'ora un problema complesso. Comunque sia, le migliori stime del parametro di Hubble indicano un valore compreso tra $60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Per esempio, se una galassia è distante dalla terra 100 Mpc recede da noi ad una velocità compresa tra i 6500 e i 7000 km s^{-1} .

Capitolo 2

Interpretazione delle Osservazioni

Le osservazioni indicano, quindi, un'espansione accelerata dell'universo, che impone delle condizioni sulla materia-energia presente nell'universo. Definiamo il tensore energia-impulso per un fluido perfetto nel sistema di unità naturali ($c = 1$), dove ci si porrà d'ora in avanti:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

La quantità u_μ è la quadrivelocità di un osservatore in moto nel cono luce, quindi per essa vale la seguente condizione:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1. \quad (2.2)$$

Se si è in un sistema di riferimento in quiete, rispetto al fluido si ha che $u^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) e $u^0 u_0 = 1$, e quindi:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P). \quad (2.3)$$

Per ottenere l'espansione accelerata, quindi, deve valere la seguente condizione:

$$\rho + 3P < 0. \quad (2.4)$$

Chiaramente, tale condizione non può essere soddisfatta dalla radiazione e dalla materia non relativistica (barionica) che ha pressione nulla. Pertanto è necessario introdurre una ulteriore componente alla materia-energia dell'universo con una pressione negativa (dalla (2.4) $P < -\rho/3$). Essa, a differenza della materia ordinaria, non è organizzata in strutture e dà solo un contributo dinamico. In letteratura è detta *Energia Oscura*

2.1 Il modello Λ CDM

Il modo più semplice per considerare l'Energia Oscura è supporre che essa abbia origine dalla costante cosmologica Λ . In questo caso l'Energia Oscura viene trattata come un fluido con la seguente equazione di stato:

$$w_\Lambda = \frac{P_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1. \quad (2.5)$$

Il contributo gravitazionale del fluido di costante cosmologica può essere inserito nel funzionale d'azione di Hilbert-Einstein:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa} \left(\frac{R}{2} - \Lambda \right) + \mathcal{L}_m \right], \quad (2.6)$$

dove g è il determinante del tensore metrico, R è lo scalare di Ricci, \mathcal{L}_m è la densità di lagrangiana per la materia e $\kappa = 8\pi G$ è la costante di accoppiamento gravitazionale. Le equazioni di campo gravitazionale di Einstein sono ottenute applicando al precedente funzionale d'azione una variazione ed imponendo che questa sia nulla. Quello che otteniamo sono due problemi disaccoppiati per $R_{\mu\nu}$, il tensore di Ricci, e per il tensore energia impulso:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Si consideri la metrica FLRW:

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\phi) \right], \quad (2.9)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala e k rappresenta la curvatura spaziale (per $k = -1, 0, +1$ l'universo è rispettivamente aperto, piatto e chiuso). Scrivendo le equazioni (2.7) per tale metrica si ottengono le equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.11)$$

dove ρ è la densità di energia e P è la pressione del fluido cosmologico preso in esame. In aggiunta a queste due equazioni, dall'equazione di continuità, si ottiene:

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + P_i) = 0, \quad (2.12)$$

dove $i = \Lambda, m, r$, rispettivamente: costante cosmologica, materia barionica e radiazione. Già abbiamo visto che per la costante cosmologica si ha, solitamente, l'equazione di stato (2.5). In generale si può scrivere:

$$w_i = \frac{P_i}{\rho_i}, \quad (2.13)$$

dove l'indice i varia come sopra. Ad esempio si ha $w_r = 1/3$ per la radiazione, $w_m = 0$ per la materia barionica. Tali valori fanno parte del cosiddetto intervallo di Zeldovich $w_i \in [0, 1]$. Se si risolvono le equazioni cosmologiche per valori dell'equazione di stato che sono in questo intervallo si ottiene sempre una espansione decelerata dell'universo. Proprio per questo, come specificato, si deve avere la condizione (2.4) e di conseguenza uscire dall'intervallo di Zeldovich.

Si possono inoltre definire i tre parametri densità:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{crit}^{(0)}}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_{crit}^{(0)}}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}^{(0)}}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{(aH_0)^2}, \quad (2.14)$$

dove l'apice (0) denota il valore attuale di un determinato valore. La densità critica $\rho_{crit}^{(0)}$ è definita come segue:

$$\rho_{crit}^{(0)} = \frac{3H_0^2}{\kappa}. \quad (2.15)$$

Essa rappresenta la densità al di sotto della quale l'attrazione tra le parti dell'universo non è in grado di fermare l'espansione. Al di sopra di essa le forze attrattive possono fermare l'espansione accelerata e addirittura generare una fase di contrazione cosmica. Sapendo che il parametro di Hubble può essere parametrizzato come segue:

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.16)$$

si può avere una stima della densità critica:

$$\rho_{crit}^{(0)} = 1,88h^2 \cdot 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}. \quad (2.17)$$

Il che equivarrebbe a dire che un metro cubo di spazio è riempito soltanto con tre atomi di idrogeno. Le misure più accurate (Hubble Space Telescope Key Project) forniscono il seguente valore per h :

$$h = 0,72 \pm 0,08. \quad (2.18)$$

I parametri densità soddisfano, inoltre, la seguente regola:

$$\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r = 1. \quad (2.19)$$

Va osservato che questa è una condizione che deve valere se l'universo è spazialmente piatto. Difatti se $\Omega_{tot} < 1$ esso sarà spazialmente aperto (geometria iperbolica), se $\Omega_{tot} > 1$ sarà spazialmente chiuso (geometria sferica). Attraverso l'equazione (2.10), si ottiene la seguente scrittura del parametro di Hubble:

$$H(a) = H_0 \left[\Omega_r^{(0)} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_m^{(0)} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_k^{(0)} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.20)$$

Oltre a suggerire l'espansione accelerata le osservazioni di oggetti a basso redshift e la radiazione cosmica di fondo forniscono un valore approssimato dei vari parametri densità: $\Omega_k^{(0)} \approx 0$, $\Omega_m^{(0)} \approx 0,3$, $\Omega_\Lambda^{(0)} \approx 0,7$ e $\Omega_r \approx 10^{-5}$. Ciò vuol dire che 70% della materia-energia presente nell'universo è data dall'Energia Oscura sotto forma costante cosmologica.

Un paradigma di questo tipo rappresenta il cosiddetto *concordance model* cosmologico, detto anche modello Λ CDM (Λ Cold Dark Matter), così chiamato poiché esso prevede che la materia totale sia una mistura di materia oscura “fredda”, ossia data da particelle non relativistiche, e da una piccola percentuale di materia barionica. In altri termini:

$$\Omega_m = \Omega_{cdm} + \Omega_b. \quad (2.21)$$

Sebbene tale modello sia in accordo con molte osservazioni, esso non fornisce una interpretazione fisica soddisfacente per molti problemi, come quello denominato *cosmological constant problem*. In fisica delle particelle è possibile identificare la costante cosmologica come energia del vuoto, in analogia alle teorie inflazionarie. Assumendo che il vuoto sia uno stato Lorentz-invariante il suo tensore energia impulso può essere scritto come segue:

$$T_{\mu\nu}^v = -\rho_v g_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

dove la densità del vuoto è fornita dall'equazione (2.5), cosicché sussista la seguente equivalenza:

$$\rho_v = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (2.23)$$

Queste considerazioni, però, possono cambiare quando si considerano aspetti quantistici. Ad esempio si possono prendere in esame le fluttuazioni del vuoto: se si considera un campo quantistico non interagente, ogni stato contribuisce all'energia del vuoto, che si ottiene integrando su tutti gli stati. Tale integrale risulta divergente, il che implicherebbe che l'energia del vuoto sia infinita. Per evitare divergenze “ultraviolette” si potrebbe pensare che esista un limite massimo, grazie al quale è possibile ignorare ogni contributo al di sopra di esso. Introduciamo a tale scopo la lunghezza di Planck ridotta:

$$\ell_P = \sqrt{\kappa}. \quad (2.24)$$

Si può pensare che il limite sia in qualche modo legato a tale quantità. Per tale modello si ha:

$$\Lambda \sim \ell_P^{-2}, \quad (2.25)$$

In modo da ottenere:

$$\rho_\Lambda \sim \frac{1}{\kappa^2} \sim (10^{18} \text{GeV})^4. \quad (2.26)$$

D'altra parte le osservazioni di questi ultimi anni indicano il seguente valore per la densità del vuoto:

$$\rho_\Lambda^o \sim (10^{-3} \text{eV})^4. \quad (2.27)$$

Se si confrontano le due relazioni si ottiene:

$$\rho_\Lambda^o \sim 10^{-120} \rho_v. \quad (2.28)$$

Tale differenza di 120 ordini di grandezza è uno dei problemi aperti nella Cosmologia moderna.

2.2 Supernove in Cosmologia

Le proprietà peculiari che le Supernove e, in particolare, quelle di tipo Ia, possiedono, permettono di utilizzarle come candele standard per misure cosmologiche. Le numerose osservazioni degli ultimi decenni hanno indicato uno spostamento verso il rosso di tali oggetti. Di seguito è presentato un grafico costruito attraverso i dati del Supernova Cosmology Project, grazie al quale si sono osservate numerose SNe con redshift fino a $z = 0,86$. Le osservazioni sembrano suggerire che le SNe Ia sono più deboli del 30%, 40% per $z \approx 0,5$, di quanto ci si aspetterebbe in un universo con $\Omega_m^{(0)} = 0,25$ e $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$. L'introduzione di un modello con una costante cosmologica $\Omega_\Lambda^{(0)} \simeq 0,75$, migliora notevolmente il fit della funzione.

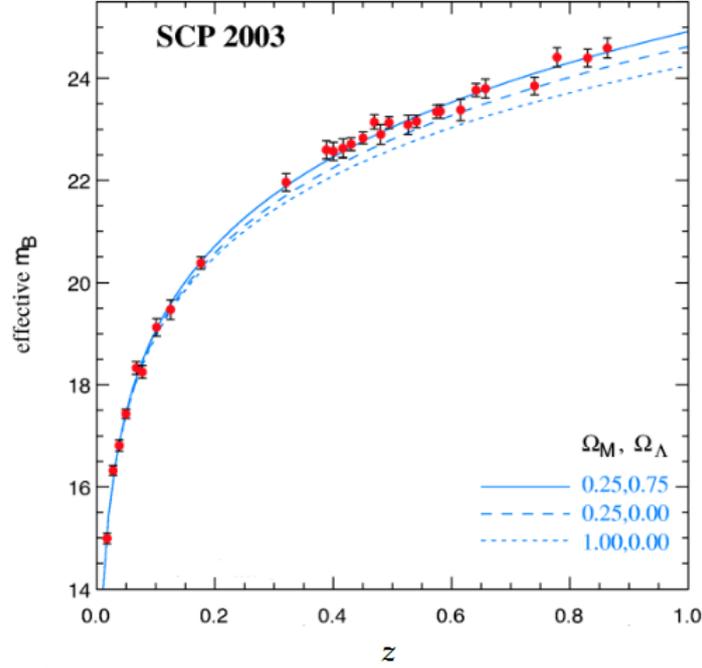


Figura 2.1: Diagramma di Hubble per SNe Ia fino a $z = 0.86$. Le magnitudini della banda B delle SNe Ia al loro massimo di luminosità sono comparate con le predizioni per tre modelli cosmologici, come indicato. Credit Ref. [5].

2.2.1 Grandezze utili in Cosmologia Classica

Quando si tratta di misure su distanze cosmologiche è utile esprimere il parametro di redshift in funzione del fattore di scala.

Un raggio di luce obbedisce alla legge $ds = 0$, supponendo che esso si propaghi radialmente, per la metrica FLRW si ottiene:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\phi) \right] = 0 \implies \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.29)$$

Il tempo che intercorre tra l'emissione e la ricezione è dato da:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.30)$$

dove si è posto il punto di emissione nell'origine e il punto di ricezione in r_0 . Supponiamo che il raggio venga inviato con un certo ritardo dt_e e quindi recepita con un ritardo di dt_r :

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.31)$$

Confrontando la (2.30) con la (2.31) si ottiene:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.32)$$

$$\implies \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.33)$$

Quindi:

$$\frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{dt_r}{dt_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (2.34)$$

Infine utilizzando l'equazione (1.9) si ottiene:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \quad (2.35)$$

dove t_r è stato sostituito con t_0 , che solitamente indica il tempo cosmico attuale. É possibile, inoltre, definire il parametro di decelerazione:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH_0^2} \quad (2.36)$$

se esso è negativo dà un'accelerazione positiva, se positivo dà un'accelerazione negativa. In generale, il parametro di decelerazione può essere scritto in funzione dei parametri densità e dell'equazione di stato come segue:

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i^{(0)} (1 + 3w_i); \quad (2.37)$$

In conclusione, al fine di trovare un'espressione alternativa di d_L poniamo un corpo al centro di una sfera, supponendo di misurare il flusso dalla sua superficie. Il raggio di tale sfera, in un universo in espansione, è $a_0 r_0$, mentre il flusso di radiazione risentirà di due effetti: la perdita di energia del singolo fotone di un fattore $(1+z)$ e la diminuzione della frequenza con cui questi arrivano, proporzionale sempre allo stesso fattore. Il flusso avrà la seguente espressione:

$$F = \frac{L}{a_0^2 r_0^2 (1+z)^2}, \quad (2.38)$$

da cui si ricava

$$d_L = a_0 r_0 (1+z). \quad (2.39)$$

2.2.2 Distanza di Luminosità in funzione del modello cosmologico

Tenendo conto dell'equazione (2.20) e della (2.35) possiamo definire la funzione $E(z)$:

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^{(0)}}. \quad (2.40)$$

dove per scrivere la precedente uguaglianza si è normalizzato il fattore di scala al tempo cosmico attuale, ovvero $a_0 = 1$. Definendo la funzione Y come segue:

$$Y = \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.41)$$

può essere dimostrato che per geometrie piatte:

$$r_0 = \frac{1}{H_0} Y. \quad (2.42)$$

L'integrale del parametro di Hubble è presente perché per distanze molto grandi esso potrebbe variare, infatti, nel momento in cui si hanno distanze cosmologiche considerevoli, si deve tener presente che r_0 non può essere calcolato senza presupporre un modello cosmologico preesistente. In generale r_0 si può scrivere come:

$$r_0 = \frac{1}{H_0} S^k(Y) \quad (2.43)$$

dove si hanno le seguenti condizioni per la funzione $S^k(Y)$:

$$\begin{cases} S^k(Y) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} Y\right) & \text{per } k = -1 \\ S^k(Y) = Y & \text{per } k = 0 \\ S^k(Y) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sin\left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} Y\right) & \text{per } k = 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Pertanto, in generale, avendo normalizzato a_0 , dall'equazione (2.39), si ricava:

$$d_L = \frac{1}{H_0} S^k(Y)(1+z) \quad (2.45)$$

Definiamo la distanza di luminosità *Hubble free* nel modo seguente:

$$D_L = H_0 d_L, \quad (2.46)$$

e assumiamo di essere localmente in un universo spazialmente piatto ($\Omega_k^{(0)} = 0$) in quanto, per le osservazioni delle SNe, stiamo considerando distanze cosmologiche abbastanza ridotte. Per lo stesso motivo nella funzione $E(z)$ si può porre $\Omega_r^{(0)} \approx 0$. Pertanto:

$$D_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.47)$$

Dalla espressione di D_L per un universo piatto, derivando ambo i membri si ottiene:

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H_0(1+z)} \frac{d}{dz} D_L \implies H(z) = \frac{(z+1)}{\frac{d}{dz} D_L}. \quad (2.48)$$

A questo punto, siccome l'equazione (2.47) è molto complessa da integrare, si può espandere D_L intorno a $z = 0$, cosa che è in accordo con le misure effettuate.

$$D_L = H_0 d_L = H_0 d_L(z=0) + H_0 \frac{d}{dz} d_L \Big|_{z=0} z + \frac{H_0}{2} \frac{d^2}{dz^2} d_L \Big|_{z=0} z^2 + O(z^3). \quad (2.49)$$

Si può facilmente verificare che $d_L(z=0)$ è nullo. Se si utilizza l'equazione (2.48) si può scrivere lo sviluppo nel seguente modo:

$$D_L = \frac{z+1}{E(z)} \Big|_{z=0} z + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z+1}{E(z)} \right) \Big|_{z=0} z^2 + O(z^3). \quad (2.50)$$

Sapendo che $H(0) = H_0$, si ha che $E(0) = 1$:

$$D_L = z + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E(z)} - \frac{z+1}{E(z)^2} \frac{d}{dz} E(z) \right) \Big|_{z=0} z^2 = \quad (2.51)$$

$$= z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{dz} E(z) \Big|_{z=0} \right) z^2 + O(z^3) \quad (2.52)$$

Utilizzando l'equazione (2.40) e l'equazione (2.37), si ricava:

$$D_L = z + \left(\frac{1-q_0}{2} \right) z^2 + O(z^3). \quad (2.53)$$

Da tale relazione possiamo comprendere che nella parte “vicina” dell'universo la distanza di luminosità scala linearmente con il parametro di redshift. Nell'universo più “lontano” D_L dipende dal parametro di decelerazione, o, equivalentemente dai parametri densità dei vari tipi di materia presenti nell'Universo. Per esempio, si consideri un universo composto solo da Energia Oscura e materia non relativistica: si avrà $w_m = 0$ e $w_\Lambda = -1$, quindi, la seguente espressione per q_0 :

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda. \quad (2.54)$$

In un universo composto da questi due tipi di materia-energia, se $\Omega_m < \Omega_\Lambda$, q_0 è negativo, D_L aumenta, fornendo una espansione accelerata.

Se le misure di distanza sono fatte a bassi redshift c'è una degenerazione dei due parametri ed è impossibile calcolare la quantità di ogni specie. Se si va a redshift compresi tra 0,5 e 1 tale degenerazione può essere eliminata (figura 2.1).

2.2.3 Equazione di stato

Nel modello Λ CDM si suppone che $w_\Lambda = -1$ ad ogni tempo. Dalla condizione (2.4) si evince che questo è un caso particolare e che l'espansione accelerata si ottiene anche per altri valore negativi di w_Λ . Nel seguente grafico è illustrata l'effetto del cambiamento dell'equazione di stato della componente legata all'Energia Oscura, assumendo un universo piatto. Per poter, quindi, affermare che la componente dell'Energia Oscura, con parametro di stato $w = -1$, non è legata alla costante cosmologica, servirebbero misure precise almeno al 5%, per il modulo di distanza.

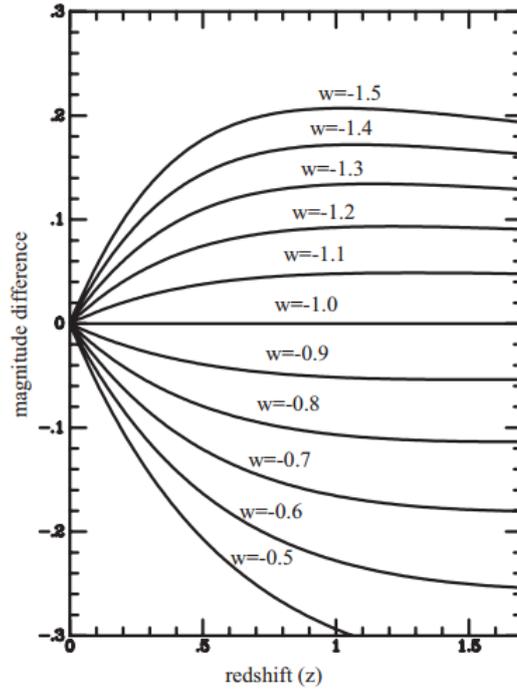


Figura 2.2: Modulo di distanza in funzione del redshift per diversi valori costanti di w_Λ , dove si è supposto $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$. Il modello con $w_\Lambda = -1$ è stato sottratto per evidenziare le differenze tra i vari modelli. Credit Ref. [10].

Oltre alla più semplice parametrizzazione dell'equazione di stato dipendente da un parametro costante, sono stati studiati modelli cosmologici che prevedono una dipendenza di w con il parametro z . Un'evidenza osservativa di $w \neq -1$ potrebbe essere un chiaro indizio che il Modello Cosmologia Standard deve essere revisionato.

I più recenti dati riguardanti le SNe Ia sono stati utilizzati per costruire un andamento di $w(z)$, anche se questi hanno mostrato un alto grado di consistenza con il modello Λ CDM, a differenza dei set di dati di alti indicatori come la CMBR e l'oscillazione acustica dei barioni.

Si consideri, a titolo di esempio, la parametrizzazione di Chevalier-Polarski-Linder (CPL):

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}. \quad (2.55)$$

È possibile quantificare le distanze in termini di σ (deviazione standard) delle misure delle SNe Ia tra i punti $(w_0, w_1) = (-1, 0)$, corrispondente al modello Λ CDM, e il punto di *best fit* per il set di dati delle SNe Ia. A tal proposito, scriviamo il modulo di distanza teorico come segue:

$$\mu_t(z) = 5 \log_{10} D_L + \mu_0 \quad (2.56)$$

dove $\mu_0 = 42,38 + 5 \log_{10} h$ e $h = (H_0/100) \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Conoscendo la magnitudine assoluta e apparente delle SNe Ia, è possibile ricavare il modulo di distanza osservato $\mu_o(z_i) = M - m$ e scrivere la seguente quantità:

$$\chi^2(w_0, w_1) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_o(z_i) - \mu_t(z_i)]^2}{\sigma_{\mu_i}^2}, \quad (2.57)$$

dove $\sigma_{\mu_i}^2$ sono gli errori dovuti alle incertezze sulla misura del flusso, ed alla dispersione intrinseca di magnitudine delle SNe Ia. Si suppone, inoltre, che tali errori siano gaussiani e indipendenti fra di loro. Minimizzando la precedente espressione è possibile trovare i parametri teorici.

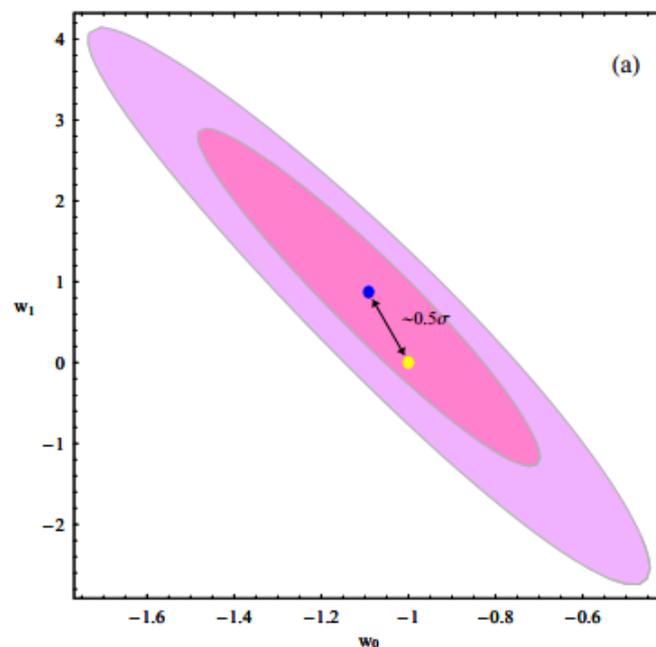


Figura 2.3: Test del χ^2 con confidenza al 68,3% ed al 95,4% per i parametri (w_0, w_1) per il set di dati della ESSENCE Supernova Survey in combinazione con altre SNe Ia [3] con fissati valori di $\Omega_m^{(0)} = 0,24$ e $\Omega_b = 0,042$. Il punto blu corrisponde al best fit di (w_0, w_1) , mentre il punto giallo corrisponde al modello Λ CDM $(-1, 0)$. Credit Ref. [6].

Nella figura 2.3 è mostrato χ^2 al 68,3% ed al 95,4% con $\Omega_m^{(0)} = 0,24$ e $\Omega_b = 0,042$, per i parametri w_0 e w_1 , dove il punto blu indica il best fit (w_0, w_1) mentre quello giallo corrisponde al modello Λ CDM. Dalla figura, si nota che il modello Λ CDM è consistente in 1σ con i dati delle SNe Ia.

Conclusioni

L'espansione accelerata è sicuramente un tassello fondamentale per comprendere la storia e l'evoluzione del nostro Universo. In questo lavoro sono state presentate le prove osservative derivanti dalle Supernove di tipo Ia da cui si ottengono risultati importanti, che, per quanto visto, sono in accordo con il *concordance model*. Altre evidenze osservative dell'evoluzione dinamica del nostro universo sono l'oscillazione acustica dei barioni o BAO (dall'inglese *Baryon Acoustic Oscillations*) e della CMBR, in letteratura *Standard Rulers*. Essi danno indicazioni a scale molto diverse: $z \approx 1021$ per il primo e $z \approx 1090$ per il secondo. Non si può prescindere, pertanto, dall'utilizzo di un determinato modello cosmologico: si potrebbe, per esempio, dover tener conto dei parametri densità di radiazione e di curvatura, cosicché $S^k(Y)$ e $E(z)$, definite nel precedente capitolo, abbiano forma diversa nell'espressione di D_L .

Gli Standard Rulers risultano essere di grande importanza per comprendere l'espansione accelerata dell'universo ed il modello associato a tale sistema dinamico. Di seguito è riportato, a titolo di esempio, un grafico che mostra un test del χ^2 , per la parametrizzazione CPL dell'equazione di stato, come presentato nell'ultima sezione, costruito non solo attraverso l'utilizzo dei dati delle SNe Ia ma anche usando le osservazioni sulla CMBR e sulla BAO.

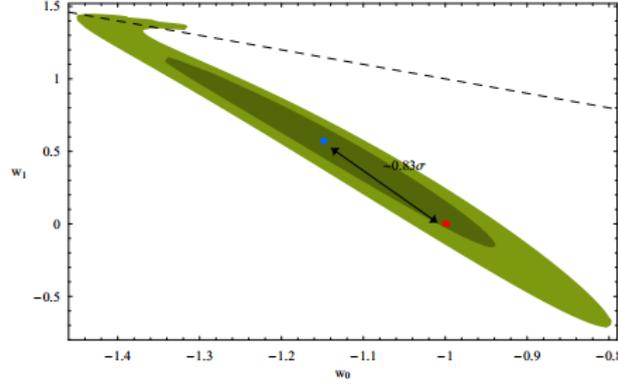


Figura 2.4: Test del χ^2 con confidenza al 68,3% e 95,4% per i parametri w_0 e w_1 , costruito con i dati di SNe Ia, CMBR e BAO e con $\Omega_m^{(0)} = 0,24$ e $\Omega_b = 0,042$. Il punto blu corrisponde al best fit di (w_0, w_1) mentre il punto rosso corrisponde al modello Λ CDM $(-1, 0)$. Credit Ref. [6].

Dal grafico risulta che i dati non escludono il modello Λ CDM ma la distanza con questa combinazione di osservabili è maggiore rispetto a quella trovata solo con dati di SNe Ia. Le Supernove, quindi, sono più consistenti con il modello Λ CDM rispetto agli Standard Rulers: è per questo che si trova una $d_\sigma \simeq 0,8$, più grande rispetto a quello della figura 2.3. Infatti, i dati degli Standard Rulers mostrano una leggera propensione ad avere un best fit per $w(z)$ che oltrepassa la cosiddetta *phantom divide line*, ovvero $w = -1$.

Risulta, pertanto, importante tener conto del fatto che una maggiore precisione di dati equivale ad una maggiore discriminazione di vari modelli e casistiche, come anche risulta fondamentale tener conto di altri tipi di candele standard come i *Gamma Ray Bursts*, o altri tipi di Standard Rulers come i profili a raggi X degli ammassi di galassie. Con una tale quantità aggiuntiva di dati di diverse categorie, si potrà verificare se la differenza tra i vari andamenti persiste, così da identificare un modello consistente con la totalità dei dati raccolti.

Bibliografia

- [1] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Dark Energy Cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests*. *Astrophysics and Space Science*, 342, 155-228, 2012.
- [2] Salvatore Capozziello, Maria Funaro, *Introduzione alla relatività generale: con applicazioni all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*, Liguori, 2006.
- [3] T. M. Davis et al., *Scrutinizing Exotic Cosmological Models Using ESSENCE Supernova Data Combined with Other Cosmological Probes*. *Astrophysical Journal*, 666, 716, 2007.
- [4] W. Hillebrandt, J. C. Niemeyer, *Type Ia Supernovae explosion models*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 38, 191-230, 2000.
- [5] R. A. Knop et al., *New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope*. *Astrophysical Journal*, 598, 102, 2003.
- [6] R. Lazkoz, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *Comparison of Standard Ruler and Standard Candle constraints on Dark Energy Models*. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 7, 2007
- [7] B. Leibundgut, N. B. Suntzeff, *Optical Light Curves of Supernovae*, in *Supernovae and Gamma Ray Bursters*, Springer-Verlag, 2003.
- [8] Andrew Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley & Sons, 2015.
- [9] P. A. Mazzoli, F. K. Ropke, S. Benetti, W. Hillebrandt, *A Common Explosion Mechanism for type Ia Supernovae*. *Science* 315, Issue 5813, 825-828, 2007.
- [10] S. Perlmutter, B. P. Schmidt, *Measuring Cosmology with Supernovae*, in *Supernovae and Gamma Ray Bursters*, Springer-Verlag, 2003.

- [11] M. Turatto, *Classification of Supernovae*, in *Supernovae and Gamma Ray Bursters*, Springer-Verlag, 2003.