Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



Laurea triennale in Fisica

Funzioni di distribuzione in meccanica quantistica

Relatori: Prof. Luigi Rosa **Candidato:** Anna Di Nardo Matricola N85000683

A.A. 2018/2019

Indice

In	troduzione	1
1	L'oscillatore armonico in meccanica quantistica	3
	1.1 Soluzione con il metodo algebrico	. 4
	1.2 Soluzione con il metodo analitico	. 6
2	Stati coerenti	9
	2.1 Definizione e proprietà	. 9
	2.2 Coerenza negli stati coerenti	. 14
3	Stati coerenti e funzioni di distribuzione	18
	3.1 Operatore densità	. 18
	3.2 Funzioni di distribuzione	. 23
Co	onclusioni	32
Bi	ibliografia	33

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si pone l'obiettivo di fornire un'analisi dettagliata di una delle possibili applicazioni che gli stati coerenti dell'oscillatore armonico trovano in meccanica quantistica: le funzioni di distribuzione. Queste forniscono un modo equivalente al formalismo dell'operatore densità di descrivere lo stato quantistico di un sistema fisico, sia che esso definisca uno stato puro sia che esso si trovi in una miscela statistica. Si troverà, infatti, che l'impiego degli stati coerenti e delle loro proprietà consente una riscrittura agevole di tali funzioni, grazie alla quale l'operazione statisticamente più rilevante, cioè il calcolo dei valori medi, si riduce ad un elementare calcolo algebrico.

Il seguente lavoro di tesi è strutturato in 3 capitoli:

- nel **Capitolo 1** vengono recuperati i principali risultati relativi al problema quantomeccanico di un sistema fisico schematizzabile come oscillatore armonico (per semplicità verrà considerato un sistema unidimensionale). Si risolverà pertanto l'equazione di Schrödinger associata al problema posto, proponendo due metodi di risoluzione equivalenti: uno algebrico (che privilegeremo nel seguito, poiché consente l'introduzione di un formalismo molto utile ai nostri scopi) ed uno analitico, basato sul tradizionale metodo di separazione delle variabili;
- nel **Capitolo 2** vengono esaminate le principali proprietà degli stati coerenti, una particolare classe di stati dell'oscillatore armonico quantistico che ben riproduce, nei valori medi delle osservabili posizione ed impulso, l'oscillazione soluzione del problema classico. Verranno inoltre forniti possibili argomenti a supporto della *coerenza* esibita da tali stati;
- nel **Capitolo 3** viene brevemente richiamato il formalismo dell'operatore densità, ricordando la necessità della sua introduzione ai fini della descrizione di sistemi fisici che si trovano in una *miscela* di stati quantomeccanici. Mostreremo che tale esigenza può essere

soddisfatta anche attraverso l'introduzione delle funzioni di distribuzione. In particolar modo, ci soffermeremo sulle proprietà delle due funzioni $P(\alpha, \alpha^*)$ e $Q(\alpha, \alpha^*)$, proponendo alcuni esempi concreti in cui il loro impiego risulta possibile e vantaggioso. Ragioneremo infine sulla possibilità di stabilire una connessione con le distribuzioni statistiche "classiche".

Capitolo 1

L'oscillatore armonico in meccanica quantistica

Lo studio dell'oscillatore armonico costituisce uno strumento di grande interesse nella fisica. In meccanica classica, l'oscillatore armonico è un sistema di una particella vincolata a muoversi lungo un asse, sotto l'azione di un potenziale della forma $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si tratta di un problema risolvibile rigorosamente la cui soluzione è nota. Si può mostrare che il moto della particella è un'oscillazione sinusoidale attorno all'origine, con frequenza angolare $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Un gran numero di sistemi fisici mostra un comportamento governato dalle equazioni dell'oscillatore armonico attorno ad una posizione di equilibrio stabile, pertanto i risultati derivati dallo studio dell'oscillatore armonico sono applicabili ad una vasta serie di importanti fenomeni fisici.

La trattazione ed il formalismo che sviluppiamo seguono l'impostazione illustrata in [1, 2].

Classicamente, il sistema è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
 (1.1)

In meccanica quantistica, il corrispondente operatore Hamiltoniano del sistema è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$
(1.2)

dove la variabile posizione x e il momento p sono sostituiti con le osservabili $\hat{x} \in \hat{p}$, le quali soddisfano

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{1.3}$$

Ponendo l'Hamiltoniano nella forma $\tilde{H}=\frac{\hat{H}}{\hbar\omega},$ si ottiene

$$\tilde{H} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m\hbar\omega} \hat{p}^2 + \frac{m\omega}{\hbar} \hat{x}^2 \right)$$
(1.4)

e definendo le variabili adimensionali

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}$$

$$\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}$$
(1.5)

si ottiene

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 \right) \tag{1.6}$$

e vale più semplicemente $\begin{bmatrix} \hat{X}, \hat{P} \end{bmatrix} = i.$

Il nostro problema consiste dunque nel trovare gli autostati dell'operatore \tilde{H} e i corrispondenti autovalori dell'energia. Esistono due modi per risolvere questo problema: uno algebrico, che si basa sull'algebra degli operatori \hat{x} e \hat{p} , e uno analitico, che si basa sulla soluzione dell'equazione di Schrödinger.

1.1 Soluzione con il metodo algebrico

Si definiscono gli operatori di creazione a^{\dagger} e distruzione a:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + i\hat{P} \right)$$

$$a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} - i\hat{P} \right)$$

(1.7)

Invertendo le formule si ottiene

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^{\dagger} + a \right)$$

$$\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a^{\dagger} - a \right)$$
(1.8)

Gli operatori a^{\dagger} e a sono uno l'aggiunto dell'altro e il loro commutatore vale

$$\left[a, a^{\dagger}\right] = 1 \tag{1.9}$$

Si vuole scrivere l'Hamiltoniano $\tilde{H}(\hat{X}, \hat{P})$ come funzione degli operatori a^{\dagger} e a: $\tilde{H}(a, a^{\dagger})$. Sostituendo le espressioni di \hat{X} e \hat{P} nell'equazione (1.6) si ottiene

$$\tilde{H} = a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \tag{1.10}$$

Si definisce l'operatore numero $N = a^{\dagger}a$. Si ottiene

$$\hat{H} = \hbar\omega\tilde{H} = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \tag{1.11}$$

Si studia l'equazione agli autovalori di \hat{H}

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \tag{1.12}$$

Dato che \hat{H} è lineare in N, gli autostati di N coincidono con gli autostati di \hat{H} . Sia ψ_n autostato di N: $N\psi_n = n\psi_n$

$$\hat{H}\psi_n = \hbar\omega N\psi_n + \frac{\hbar\omega}{2}I\psi_n = \hbar\omega n\psi_n + \frac{\hbar\omega}{2}\psi_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n = E_n\psi_n$$
(1.13)

Gli autovalori di \hat{H} sono quindi della forma

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1.14}$$

Si calcolano i commutatori di N con $a \in a^{\dagger}$

$$[N, a] = -a$$

$$[N, a^{\dagger}] = a$$
(1.15)

Si studia l'azione di N su $a\psi_n \in a^{\dagger}\psi_n$. Vale

$$Na\psi_n = (n-1)a\psi_n$$

$$Na^{\dagger}\psi_n = (n+1)a^{\dagger}\psi_n$$
(1.16)

Cioè $a\psi_n$ è autostato di N con autovalore (n-1) e $a^{\dagger}\psi_n$ è autostato di N con autovalore (n+1).

Vale quindi

$$\begin{aligned} a\psi_n &= c_1\psi_{n-1} \\ a^{\dagger}\psi_n &= c_2\psi_{n+1} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Si ottengono c_1 e c_2 dalla richiesta di normalizzazione degli autostati di N. Si ottiene $c_1 = \sqrt{n}$ e $c_2 = \sqrt{n+1}$. Vale quindi

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

$$a^{\dagger}\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$
(1.18)

Inoltre $n \ge 0$ e $n \in N$. In conlusione, lo spettro degli autovalori di N è formato da un set di interi non negativi, cioè l'energia di oscillatore armonico in meccanica quantistica è quantizzata e può assumere solo valori discreti. Si nota che il più basso valore possibile per l'energia (corrispondete allo stato fondamentale n = 0) non è zero, ma $\frac{\hbar\omega}{2}$.

1.2 Soluzione con il metodo analitico

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per l'oscillatore armonico nella rappresentazione delle coordinate è

~ -

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x)$$
(1.19)

Si definiscono le variabili

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$\xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x$$
(1.20)

L'equazione in termini di queste variabili diventa

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\epsilon - \xi^2)\psi(\xi) = 0$$
 (1.21)

Per trovare una soluzione di questa equazione differenziale, si studia il suo andamento asintotico. Per valori di ξ grandi, tali da trascurare ϵ , l'equazione diventa

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2\psi = 0 \tag{1.22}$$

L'andamento asintotico della funzione deve essere del tipo

$$\psi(\xi) \sim \xi^n e^{\pm \frac{\xi^2}{2}} \tag{1.23}$$

Siccome si cercano soluzioni che siano a quadrato integrabile, si scarta la funzione con l'esponenziale positivo e si cerca una soluzione del tipo

$$\psi(\xi) = H(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$
(1.24)

Sostituendo questa soluzione, l'equazione (1.21) diventa un'equazione del secondo ordine per il polinomio $H(\xi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 H(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi \frac{\mathrm{d}H(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + (\epsilon - 1)H(\xi) = 0$$
(1.25)

Questa equazione ammette come soluzione i polinomi di Hermite, ricavabili dalla formula

$$H_n(\xi) = N_n(-1)^n e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} e^{-\xi^2}$$
(1.26)

dove la costante moltiplicativa è data da

$$N_n = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.27}$$

con $a = \left(\frac{m\omega}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$. A questo risultato si arriva provando la soluzione in forma di serie di potenze

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \,\xi^j$$
 (1.28)

Si dimostra facilmente che l'equazione (1.25) ammette soluzione solo se $\epsilon = 2n + 1$. Gli ϵ sono quantizzati, dunque le energie sono quantizzate e valgono

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{1.29}$$

Le figure 1.1 e 1.2 mostrano, rispettivamente, l'andamento lungo la coordinata spaziale x delle autofunzioni corrispondenti ai primi 7 livelli energetici e l'associata densità di probabilità.



Figura 1.1: Andamento delle autofunzioni $\psi_n(x)$, n = 0, 1, ..., 7. Immagine tratta dalla pagina Wikipedia "Quantum Harmonic Oscillator".



Figura 1.2: Andamento delle densità di probabilità $|\psi_n(x)|^2$, n = 0, 1, ..., 7. Immagine tratta dalla pagina Wikipedia "Quantum Harmonic Oscillator".

Capitolo 2

Stati coerenti

2.1 Definizione e proprietà

Gli stati coerenti¹ $|\alpha\rangle$ dell'oscillatore armonico sono definiti a partire dalla seguente equazione agli autovalori per l'operatore di distruzione *a*:

$$a \left| \alpha \right\rangle = \alpha \left| \alpha \right\rangle \tag{2.1}$$

La precedente equazione è stata scritta impiegando il noto formalismo bra-ket introdotto da Dirac. In tale formalismo, l'autostato *n*-simo che diagonalizza il problema di oscillatore armonico quantistico sarà d'ora in avanti indicato secondo la seguente notazione: $\psi_n \equiv |n\rangle$. È facile dimostrare che l'equazione che definisce gli stati $|\alpha\rangle$ è risolta dallo sviluppo negli autostati seguente:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$
(2.2)

Infatti

$$a |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle =$$

= $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle =$
= $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} |m\rangle = \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle =$
= $\alpha |\alpha\rangle$ (2.3)

¹Il nome *stati coerenti* fu introdotto per la prima volta da Glauber in merito alla sua trattazione degli stati quasi-classici della radiazione elettromagnetica [3].

Osservando che il generico autostato $|n\rangle$ può ottenersi a partire dallo stato di vuoto $|n = 0\rangle \equiv |0\rangle$ attraverso la ripetuta applicazione dell'operatore di creazione

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{2.4}$$

possiamo riscrivere l'espressione (2.2) come segue:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^{\dagger})^n |0\rangle$$
(2.5)

Ricordando che le funzioni di operatori sono definite a partire dal loro sviluppo in serie di Taylor, si ottiene immediatamente

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{\dagger}} |0\rangle \tag{2.6}$$

Osservando che

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = (1 - \alpha^* a + ...) |0\rangle = |0\rangle$$
 (2.7)

possiamo anche scrivere

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{\dagger}} e^{-\alpha^* a} |0\rangle \equiv D(\alpha) |0\rangle$$
(2.8)

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il *Displacement operator* $D(\alpha)$ [4], definito come segue:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{\dagger}} e^{-\alpha^* a}$$
(2.9)

Il lemma di Baker-Hausdorff afferma che, se il commutatore di due operatori A e B commuta con ciascuno di essi, cioè vale

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$
(2.10)

allora vale

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} (2.11)$$

Gli operatori di distruzione e creazione $a e a^{\dagger}$ verificano le ipotesi del lemma. Applicando il lemma all'operatore $D(\alpha)$ nella forma dell'equazione (2.9), otteniamo per esso l'espressione equivalente

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^{\intercal} - \alpha^* a} \tag{2.12}$$

Pertanto vale

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^{\dagger} - \alpha^* a} |0\rangle \tag{2.13}$$

Si dimostrano facilmente che valgono le seguenti proprietà:

- $D^{\dagger}(\alpha) = D(-\alpha)$
- $D^{\dagger}(\alpha) = D^{-1}(\alpha)$

Osserviamo inoltre che vale

$$[a, D(\alpha)] = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} [a, e^{\alpha a^{\dagger}} e^{-\alpha^* a}] = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} [a, e^{\alpha a^{\dagger}}] e^{-\alpha^* a} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} [a, a^{\dagger}] \alpha e^{\alpha a^{\dagger}} e^{-\alpha^* a} = \alpha D(\alpha)$$
(2.14)

Per dimostrare la precedente uguaglianza abbiamo impiegato le seguenti proprietà notevoli del calcolo operatoriale:

- [A, BC] = [A, B]C + B[A, C]
- $[A, f(A^{\dagger})] = [A, A^{\dagger}] \frac{\partial f}{\partial A^{\dagger}}$

dove A, B, C sono 3 generici operatori e f rappresenta una generica funzione analitica.

Passiamo ora in rassegna alcune proprietà notevoli degli stati coerenti, introdotti all'inizio di questa sezione:

• Sia $|\beta\rangle$ uno stato coerente di autovalore β , cioè valga: $a |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle$. Vale allora

 $aD(\alpha) |\beta\rangle = D(\alpha)a |\beta\rangle + \alpha D(\alpha) |\beta\rangle = (\alpha + \beta)D(\alpha) |\beta\rangle$

cioè $D(\alpha) |\beta\rangle$ è a sua volta autostato dell'operatore distruzione (cioè è a sua volta uno stato coerente) di autovalore $\alpha + \beta$.

• Sia $\langle N \rangle_{\alpha}$ la media dell'operatore numero valutata sul generico stato coerente α . Vale allora

$$\langle N \rangle_{\alpha} = \langle \alpha | a^{\dagger} a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha = |\alpha|^2$$

• Valutiamo la proiezione del generico stato coerente $|\alpha\rangle$ sul generico autostato dell'Hamiltoniana $|n\rangle$:

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Possiamo pertanto asserire che la probabilità che, trovandosi il sistema nello stato coerente $|\alpha\rangle$, una misura dell'energia restituisca il valore $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ risulta

$$P_n(\alpha) = \left| \langle n | \alpha \rangle \right|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}$$
(2.15)

I valori dell'energia sono perciò distribuiti secondo una poissoniana di valor medio $|\alpha|^2$.

• Ricordano le espressioni delle osservabili posizione ed impulso in termini degli operatori creazione e distruzione, si dimostra immediatamente che gli stati coerenti obbediscono al principio di indeterminazione di Heisenberg, verificandolo al minimo dell'indeterminazione permessa, cioè vale

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \tag{2.16}$$

dove $\Delta \hat{x} \in \Delta \hat{p}$ rappresentano il grado di incertezza sulle osservabili posizione ed impulso.

Per questa ragione, gli stati coerenti sono anche detti "stati ideali".

• Vogliamo ora ricavare l'analogo della relazione di completezza

$$\sum_{n} |n\rangle\!\langle n| = 1$$

per gli stati coerenti. Cominciamo col valutare il proiettore $|\alpha\rangle\langle\alpha|$:

$$|\alpha\rangle\!\langle\alpha| = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle\!\langle n|$$

Valutiamo ora il seguente integrale:

$$\int\,d^2\alpha\,|\alpha\rangle\!\langle\alpha|$$

dove il dominio di integrazione è esteso all'infinità di valori complessi assumibili dalla variabile $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$. Svolgiamo il calcolo alla luce del seguente cambio di variabili:

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$$

Siamo ricondotti allora a valutare

$$\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{+\infty} d|\alpha| |\alpha| |\alpha\rangle \langle \alpha| =$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{+\infty} d|\alpha| e^{-|\alpha|^{2}} \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{|\alpha|^{m+n+1}}{\sqrt{m!n!}} e^{i(m-n)\theta} |m\rangle \langle n|$$

Ricordando che $\int_0^{2\pi} d\theta \, e^{i(m-n)\theta} = 2\pi \delta_{mn}$, perveniamo a

$$2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{0}^{+\infty} d|\alpha| \, |\alpha|^{2n+1} e^{-|\alpha|^2} \, |n\rangle \langle n|$$

Ricordando che

$$\int_{0}^{+\infty} d|\alpha| |\alpha|^{2n+1} e^{-|\alpha|^2} = \frac{n!}{2}$$

otteniamo in definitiva

$$\int d^2 \alpha \, |\alpha \rangle \! \langle \alpha | = \pi$$

Ricaviamo pertanto che la relazione di completezza degli stati coerenti può scriversi

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \left| \alpha \right\rangle \!\! \left\langle \alpha \right| = 1 \tag{2.17}$$

• Mostriamo ora che gli stati coerenti costituiscono un set di stati mutuamente non ortogonali:

$$\begin{split} \langle \alpha | \beta \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{*n} \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} = e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^* \beta}{2}} \end{split}$$

Come caso particolare, notiamo che, se $\alpha = \beta$, si ritrova la condizione di normalizzazione. Osserviamo tuttavia che

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \alpha^* \beta - \alpha \beta^*)} = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Ciò significa che $|\alpha\rangle \in |\beta\rangle$ diventano "sempre più ortogonali" via via che i valori di $\alpha \in \beta$ si allontanano reciprocamente sul piano complesso. A tal proposito, si parla degli stati coerenti come di un set di stati *overcomplete*, alludendo all'esistenza di una proprietà di completezza senza ortogonalità tra gli stessi stati.

• L'espressione della funzione d'onda $\psi_{\alpha}(x)$, associata allo stato coerente $|\alpha\rangle$, definito dall'equazione $a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, può essere ottenuta agevolmente proiettando l'equazione agli autovalori sull'autobra dell'operatore posizione $\langle x |$:

$$\langle x|a|\alpha\rangle = \langle x|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{p}|\alpha\rangle = \alpha\psi_{\alpha}(x)$$
 (2.18)

dove $\psi_{\alpha}(x) \equiv \langle x | \alpha \rangle$. Ricordando che vale

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$$

essendo $|x\rangle \in |x'\rangle$ due generici autostati dell'operatore posizione \hat{x} , perveniamo alla seguente equazione differenziale per $\psi_{\alpha}(x)$:

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\psi_{\alpha}(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{\alpha}(x) = \alpha\psi_{\alpha}(x)$$
(2.19)

L'equazione precedente può essere risolta mediante l'usuale metodo di separazione delle variabili. Si perviene al seguente risultato:

$$\psi_{\alpha}(x) = N e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2} \tag{2.20}$$

dove $N = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ è il fattore di normalizzazione ed abbiamo posto $x_0 = \alpha \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$.

Si osserva pertanto che nella rappresentazione delle posizioni lo stato coerente ha una forma funzionale che rievoca l'ampiezza gaussiana associata allo stato fondamentale, sebbene nel caso dello stato coerente la gaussiana risulti traslata (di una quantità in generale complessa). Questa analogia ci aiuta a comprendere che gli stati coerenti non sono in generale autostati dell'Hamiltoniana (come si può rigorosamente provare, d'altronde, osservando che \hat{H} e l'operatore distruzione non commutano), se non nel caso $\alpha = 0$, in cui si ritrova lo stato associato al numero quantico fondamentale n = 0.

• Gli stati coerenti non sono autostati della simmetria discreta di parità (inversione spaziale) P: infatti, l'operatore parità e l'operatore distruzione anticommutano, dal momento che $P\hat{x} = -\hat{x}P$ e $P\hat{p} = -\hat{p}P$.

2.2 Coerenza negli stati coerenti

In questa sezione esibiremo alcuni risultati che caratterizzano l'evoluzione temporale di uno stato coerente, mostrando in che senso tale evoluzione può essere efficacemente descritta come *coerente*.

Per valutare l'evoluzione temporale di uno stato coerente, dal momento che l'Hamiltoniana del sistema non dipende dal tempo, applichiamo l'operatore di evoluzione temporale nella forma $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ all'espressione data all'istante

t = 0 dalla (2.2):

$$e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} |\alpha\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} |n\rangle =$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega nt} |n\rangle =$$
(2.21)
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha(t)\rangle$$

Il calcolo precedente rivela che lo stato coerente evolve rimanendo uno stato coerente; l'evoluzione temporale ha modificato semplicemente l'autovalore dell'operatore distruzione che identificava lo stato:

$$\alpha \to \alpha(t) \equiv \alpha e^{-i\omega t} \tag{2.22}$$

Questo è un primo argomento da esibire a favore della *coerenza* di tali stati. Come ulteriore evidenza, vogliamo ora mostrare che gli stati coerenti rappresentano "la migliore riproduzione" (quantomeccanica) dell'oscillatore armonico classico. A tal fine, valutiamo come evolvono nel tempo i valori medi delle osservabili posizione ed impulso. All'istante iniziale (t = 0), per l'osservabile \hat{x} si ha

$$\langle \hat{x} \rangle_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | a + a^{\dagger} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}(\alpha) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha| \cos(\phi_{\alpha}) \quad (2.23)$$

dove abbiamo raccolto la fase ϕ_{α} del numero complesso $\alpha = |\alpha|e^{i\phi_{\alpha}}$, mentre per l'osservabile \hat{p} si ha

$$\left\langle \hat{p} \right\rangle_{\alpha} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left\langle \alpha | a - a^{\dagger} | \alpha \right\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im}(\alpha) = \sqrt{2\hbar m\omega} |\alpha| \sin(\phi_{\alpha})$$
(2.24)

Ad un istante successivo t > 0, per l'osservabile \hat{x} si ha

$$\langle \hat{x} \rangle_{\alpha(t)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha(t) | a + a^{\dagger} | \alpha(t) \rangle =$$

= $\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}(\alpha(t)) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha| \cos(\phi_{\alpha} - \omega t)$ (2.25)

mentre per l'osservabile \hat{p} si ha

$$\langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle \alpha(t) | a - a^{\dagger} | \alpha(t) \rangle =$$

= $\sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im}(\alpha(t)) = \sqrt{2\hbar m\omega} |\alpha| \sin(\phi_{\alpha} - \omega t)$ (2.26)

Ricordando che $\cos(\phi_{\alpha} - \omega t) = \cos(\phi_{\alpha})\cos(\omega t) + \sin(\phi_{\alpha})\sin(\omega t)$, si ottiene subito la legge di evoluzione del valore medio della posizione:

$$\langle \hat{x} \rangle_{\alpha(t)} = \langle \hat{x} \rangle_{\alpha} \cos(\omega t) + \frac{\langle \hat{p} \rangle_{\alpha}}{m\omega} \sin(\omega t)$$
 (2.27)

Ricordando che $\sin(\phi_{\alpha} - \omega t) = \sin(\phi_{\alpha})\cos(\omega t) - \cos(\phi_{\alpha})\sin(\omega t)$, si ottiene la legge di evoluzione del valore medio dell'impulso:

$$\langle \hat{p} \rangle_{\alpha(t)} = \langle \hat{p} \rangle_{\alpha} \cos(\omega t) - m\omega \langle \hat{x} \rangle_{\alpha} \sin(\omega t)$$
 (2.28)

Il moto previsto dalle leggi della meccanica classica per un oscillatore armonico (soggetto ad una forza di richiamo di intensità direttamente proporzionale allo spostamento x(t)) è ben noto ed è quello che risolve l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 (2.29)$$

L'equazione precedente è banalmente risolta da una combinazione lineare di funzioni oscillanti alla frequenza ω :

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
(2.30)

dove $A \in B$ sono due costanti da determinare attraverso la conoscenza delle condizioni iniziali. L'impulso si ottiene derivando la legge del moto una volta rispetto al tempo e moltiplicando per la massa dell'oscillatore m.

Se l'oscillatore si trova all'istante t = 0 in corrispondenza del punto x_0 con velocità v_0 , è facile ricavare:

$$\begin{cases}
A = x_0 \\
B = \frac{v_0}{\omega}
\end{cases}$$
(2.31)

Si ottiene, in definitiva, nel caso classico:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ p(t) = m v_0 \cos(\omega t) - m \omega x_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$
(2.32)

Le equazioni (2.32), che descrivono l'evoluzione dei parametri del moto classico, manifestamente richiamano nella forma l'evoluzione prevista per i valori medi delle corrispondenti osservabili quantomeccaniche in uno stato coerente (equazioni (2.27) e (2.28)). In tal senso, gli stati coerenti mostrano nuovamente un'intrinseca forma di coerenza.

Naturalmente, i precedenti risultati sull'evoluzione dei valori medi delle osservabili del moto potevano essere dedotti in maniera equivalente nella rappresentazione di Heisenberg, dove le osservabili evolvono nel tempo secondo la ben nota *equazione del moto di Heisenberg*, mentre gli stati restano "congelati" nel tempo, cioè non si ha evoluzione rispetto allo stato iniziale.

Un approccio più elegante, che proponiamo nel seguito, fa uso invece del *teorema di Ehrenfest* per l'evoluzione dei valori medi. Il teorema afferma che, se un'osservabile A non dipende esplicitamente dal tempo, il suo valore medio evolve secondo l'equazione

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left\langle \left[A, \hat{H} \right] \right\rangle$$
 (2.33)

Osservando che vale

$$\left[\hat{x},\hat{H}\right] = i\hbar\frac{\hat{p}}{m}$$

ed inoltre

$$\left[\hat{p}, \hat{H} \right] = -i\hbar m \omega^2 \hat{x}$$

dalla diretta applicazione del teorema perveniamo al seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -m\omega^2 \langle \hat{x} \rangle \end{cases}$$
(2.34)

Il sistema può essere agevolmente disaccoppiato eseguendo una seconda derivazione rispetto al tempo. Risolvendo per $\langle \hat{x} \rangle$, si ottiene

$$\frac{d^2 \langle \hat{x} \rangle}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{d \langle \hat{p} \rangle}{dt} = -\omega^2 \langle \hat{x} \rangle \tag{2.35}$$

L'equazione ottenuta ha la stessa forma dell'equazione del moto classico; la sua soluzione pertanto sarà

$$\langle \hat{x} \rangle (t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$
 (2.36)

dove le costanti $A \in B$ vanno nuovamente ottenute imponendo che le condizioni iniziali siano correttamente realizzate.

Integrando direttamente l'equazione per $\langle \hat{p} \rangle (t)$ si ottiene

$$\langle \hat{p} \rangle (t) = -m\omega A \sin(\omega t) + m\omega B \cos(\omega t)$$
 (2.37)

Il risultato finale nuovamente rafforza l'idea intuitiva di *coerenza*, relativa agli stati dell'oscillatore armonico presi in esame in questo lavoro, sviluppata in questa sezione.

Capitolo 3

Stati coerenti e funzioni di distribuzione

Questo capitolo contiene il risultato centrale del presente lavoro. Verrà infatti dimostrato che è possibile collegare il formalismo dell'operatore densità alle funzioni di distribuzione attraverso le proprietà degli stati coerenti fin qui esaminate e che quindi le due descrizioni, formalmente differenti, sono del tutto equivalenti sul piano fisico. Ci soffermeremo nella fattispecie sulle funzioni di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*) \in Q(\alpha, \alpha^*)$, che verranno introdotte non appena avremo recuperato i principali risultati, utili ai fini statistici, che discendono direttamente dalla definizione dell'operatore densità.

3.1 Operatore densità

Non sempre accade che lo stato quantistico di un sistema fisico sia descrivibile attraverso un'unica rappresentazione teorica in termini di funzione d'onda (e, quindi, di ket di stato nel formalismo di Dirac). In alcuni casi il sistema fisico si trova, infatti, in una *miscela statistica* di stati. Il concetto di miscela non va confuso con quello di sovrapposizione quantistica di stati, che discende direttamente dalla proprietà di linearità dell'equazione di Schrödinger. Per chiarire le idee, consideriamo il generico stato di un sistema di spin $\frac{1}{2}$ ($\hbar = 1$):

$$|\psi\rangle = c_{\uparrow} |\uparrow\rangle + c_{\downarrow} |\downarrow\rangle \tag{3.1}$$

dove $c_{\uparrow} e c_{\downarrow}$ sono due numeri complessi che, soddisfacendo la condizione di normalizzazione $|c_{\uparrow}|^2 + |c_{\downarrow}|^2 = 1$, rappresentano l'ampiezza di probabilità con cui, rispettivamente, gli stati $|\uparrow\rangle e |\downarrow\rangle$ (autostati della componente z dell'operatore di spin) definiscono lo stato $|\psi\rangle$ del sistema. Tale stato individua un'orientazione ben precisa dello spin del sistema, che può essere ottenuta risolvendo le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} c_{\uparrow} = \cos\left(\theta/2\right) \\ c_{\downarrow} = e^{i\phi}\sin\left(\theta/2\right) \end{cases}$$
(3.2)

dove $\theta \in \phi$ rappresentano, rispettivamente, l'angolo polare ed azimutale che la direzione dello spin individua. Lo stato caratterizzato dall'espressione (3.1) costituisce, in tal senso, uno stato puro. Ci chiediamo ora se esista una rappresentazione formale per caratterizzare stati di spin la cui orientazione spaziale risulta non ben definita. Questi stati costituiscono le cosiddette *miscele* e la loro caratterizzazione si estende, come si può intuire, anche a stati diversi da quelli di spin [5]. In virtù dell'argomento precedente, ci rendiamo subito conto che la rappresentazione fin qui adoperata, attraverso la quale è sempre possibile incapsulare tutta l'informazione relativa allo stato quantistico del sistema in un singolo ket di stato, risulta insoddisfacente. Riprendendo l'esempio degli stati di spin, qualsiasi ket di stato sarà univocamente associabile ad una direzione nello spazio tridimensionale. Si introduce allo scopo l'operatore densità. Per fissare le idee, consideriamo un fascio atomico (all'interno del quale il singolo atomo è caratterizzato da spin totale $\frac{1}{2}$) il cui 40% degli atomi costituenti sia riconducibile alla rappresentazione $|\uparrow\rangle$ ed il rimanente 60% alla rappresentazione $|\downarrow\rangle$. L'operazione statisticamente più interessante è rappresentata a questo punto dal calcolo del valore medio della componente z dello spin. Nel nostro calcolo, conoscendo in partenza la composizione della miscela, vorremmo che in qualche maniera il contributo derivante dalla presenza nella miscela dello stato $|\uparrow\rangle$ "pesasse" diversamente da quello apportato da $|\downarrow\rangle$: nella fattispecie, vorremmo che nel calcolo venissero rispettate le proporzioni di composizione della miscela stessa. In altri termini, vorremmo che il risultato potesse scriversi, in pieno accordo con la previsione intuitiva:

$$\langle S_z \rangle = 0.4 \left(\frac{1}{2}\right) + 0.6 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}$$
 (3.3)

Questo suggerisce che l'operatore densità ρ , che è lo strumento di cui ci serviamo per descrivere miscele statistiche di stati, nel caso della miscela sopra descritta debba essere definito nel modo seguente:

$$\rho = 0.4 \left|\uparrow\right\rangle\!\!\left\langle\uparrow\right| + 0.6 \left|\downarrow\right\rangle\!\!\left\langle\downarrow\right| \tag{3.4}$$

e che il valor medio di S_z , calcolato rispetto alla miscela, si possa calcolare efficacemente come:

$$\langle S_z \rangle = \operatorname{Tr}(\rho S_z) \tag{3.5}$$

Ci si riferisce ai valori 0.4 = 40/100 e 0.6 = 60/100 con l'espressione "percentuali di occupazione". La rappresentazione matriciale dell'operatore densità definito nella (3.4) risulta, nella base degli stati $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.4 & 0\\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

In riferimento alla rappresentazione matriciale, si parla più specificamente di *matrice densità*. Se la miscela presa in esame risulta costituita da $N \ge 2$ stati $|\alpha_i\rangle$, caratterizzati dalle percentuali di occupazione w_i (i = 1, 2, ..., N), l'operatore densità associato a tale miscela si scriverà nella forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} w_i \left| \alpha_i \right\rangle \!\! \left\langle \alpha_i \right| \tag{3.7}$$

Naturalmente, affinché l'interpretazione probabilistica possa essere garantita, deve valere $\sum_{i=0}^{N} w_i = 1$.

Il valor medio di una generica osservabile A, tale che $A |a_l\rangle = a_l |a_l\rangle$, calcolato rispetto alla miscela (3.7), se valutato come

$$\langle A \rangle = \operatorname{Tr}(\rho A) \tag{3.8}$$

risulterà proprio

$$\langle A \rangle = \operatorname{Tr} \left[\sum_{i=0}^{N} w_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| A \right] = \sum_l \sum_{i=0}^{N} w_i \langle a_l |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i |A|a_l\rangle = = \sum_l \sum_{i=0}^{N} w_i \langle a_l |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i |a_l\rangle a_l = \sum_l \sum_{i=0}^{N} w_i |\langle a_l |\alpha_i\rangle|^2 a_l$$
(3.9)

Vale la pena osservare che l'operatore densità è hermitiano, come risulta evidente dalla definizione generale (3.7). Inoltre, l'operatore densità soddisfa la seguente condizione di normalizzazione:

$$\operatorname{Tr}(\rho) = \sum_{l} \sum_{i=0}^{N} w_{i} \langle a_{l} | \alpha_{i} \rangle \langle \alpha_{i} | a_{l} \rangle = \sum_{l} \sum_{i=0}^{N} \langle \alpha_{i} | a_{l} \rangle \langle a_{l} | \alpha_{i} \rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} w_{i} \langle \alpha_{i} | \alpha_{i} \rangle = \sum_{i=0}^{N} w_{i} = 1$$
(3.10)

dove abbiamo usato la completezza della base individuata dagli autostati $\{|a_l\rangle\}$ dell'osservabile A. Dal punto di vista operatoriale, alla luce della

definizione (3.7), l'operatore densità è individuato dalla somma pesata degli operatori di proiezione sui vari stati puri che compongono la miscela. Questo ci suggerisce che una particolare miscela possa essere "scomposta" negli stati puri costituenti secondo la (3.7) e l'esempio seguente mostra che tale scomposizione può essere condotta in modi alternativi. Consideriamo a tal fine un fascio atomico con orientazione dello spin ($|\mathbf{S}| = \frac{1}{2}$) completamente casuale. Si parla a tal proposito di fascio *completamente non polarizzato*, per richiamare il formalismo con cui si descrivono gli stati di polarizzazione della luce¹. Tale fascio può riguardarsi, in prima battuta, come una miscela statistica costituita dagli stati di spin $|\uparrow\rangle \in |\downarrow\rangle$ con pesi uguali ($w_{\uparrow} = w_{\downarrow} = 0.5$). L'operatore densità che descrive tale miscela può dunque scriversi

$$\rho = 0.5 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0.5 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
(3.11)

Nulla vieta di riguardare il fascio considerato come una miscela statistica costituita dagli stati $|S_x+\rangle$ e $|S_x-\rangle$, autostati della componente xdell'operatore di spin, distribuiti all'interno della miscela stessa con la medesima percentuale di occupazione ($w_+ = w_- = 0.5$): non sussiste alcuna ragione fisica, infatti, in virtù della quale l'asse individuato lungo la direzione z debba essere privilegiato. Questo porta ad una riscrittura dell'operatore densità in termini degli stati $|S_x+\rangle \in |S_x-\rangle$:

$$\rho = 0.5 \left| S_x + \right\rangle \left\langle S_x + \right| + 0.5 \left| S_x - \right\rangle \left\langle S_x - \right| \tag{3.12}$$

Ricordando che

$$\begin{cases} |S_x+\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ |S_x-\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

nella base degli autostati di S_z si trovano immediatamente le seguenti rappresentazioni matriciali:

$$|S_x + \rangle \langle S_x + | = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

¹L'analogia con gli stati di polarizzazione della luce può essere tracciata in maniera ancora più profonda: in questo senso, gli stati di *polarizzazione completa* della luce, descritti formalmente dai *vettori di Jones*, vettori colonna a 2 componenti complesse, sono associabili agli stati quantistici puri, mentre gli stati di *polarizzazione parziale* o *non polarizzazione*, descritti formalmente dai *vettori di Stokes*, vettori colonna a 4 componenti reali, sono riconducibili alle miscele statistiche.

$$|S_x - \rangle \langle S_x - | = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

In definitiva ritroviamo

$$\rho = 0.5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
(3.13)

che è consistente con la rappresentazione matriciale (3.11) individuata pensando alla miscela in termini di $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Come ci aspettiamo che si verifichi in un sistema di spin ad orientazione completamente casuale (che non privilegia, quindi, alcuna direzione), i valori medi delle componenti x,y e z dell'operatore di spin risultano nulle: vale infatti

$$\operatorname{Tr}(\rho S_x) = \operatorname{Tr}(\rho S_y) = \operatorname{Tr}(\rho S_z) = 0 \tag{3.14}$$

Naturalmente, tutto il formalismo relativo all'operatore densità fin qui sviluppato ingloba il "caso notevole" di uno stato puro. La rappresentazione di uno stato puro $|\psi\rangle$ in termini di operatore densità risulterà banalmente

$$\rho = |\psi\rangle\!\langle\psi| \tag{3.15}$$

cioè l'operatore densità ha la forma dell'operatore di proiezione sullo stato puro specificato. Da ciò ricaviamo immediatamente che, limitatamente al caso di uno stato puro, l'operatore densità esibisce la proprietà di *idempotenza*, cioè vale

$$\rho^2 = \rho \tag{3.16}$$

o, equivalentemente,

$$\rho(\rho - 1) = 0 \tag{3.17}$$

Nel caso di uno stato puro $|\psi\rangle$, esisterà di certo una base (quella che completa ortogonalmente $|\psi\rangle$) in cui la matrice densità assume la forma

$$\rho = \operatorname{diag}(0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ..., 0) \tag{3.18}$$

vale a dire che, nella base che contiene lo stato $|\psi\rangle$, l'operatore assume una rappresentazione matriciale diagonale, con l'unico elemento non nullo sito proprio in corrispondenza dello stato $|\psi\rangle$. Da ciò ricaviamo un ulteriore risultato che vale nel caso di uno stato puro: vale infatti in tal caso

$$\operatorname{Tr}(\rho^2) = 1 \tag{3.19}$$

Nel caso più generale, d'altronde, come possiamo intuire decomponendo l'operatore densità nella base in cui risulta diagonale, vale la condizione meno stringente

$$\operatorname{Tr}(\rho^2) \le 1 \tag{3.20}$$

Come ultimo obiettivo, ci poniamo di determinare l'evoluzione temporale delle miscele statistiche: avendo ricondotto la loro rappresentazione all'operatore densità e, quindi, ai singoli stati puri costituenti la miscela, ci aspettiamo che l'evoluzione temporale dell'intera miscela sia determinata unicamente dall'evoluzione temporale dei singoli ket di stato $|\alpha_i\rangle$ (l'ipotesi fondamentale è che, se la miscela resta indisturbata, non variano le percentuali di occupazione w_i). Se all'istante iniziale t = 0 l'operatore densità associato alla miscela si scriveva nella forma:

$$\rho(0) = \sum_{i=0}^{N} w_i \left| \alpha_i(0) \right\rangle \! \left\langle \alpha_i(0) \right| \tag{3.21}$$

 $|\alpha_i(0)\rangle\langle \alpha_i(0)|$ indicando il ket di stato $|\alpha_i\rangle\langle \alpha_i|$ all'istante iniziale, ad un istante di tempo successivo (t > 0) avremo

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i |\alpha_i(t)\rangle \langle \alpha_i(t)|$$
(3.22)

Ricordando che $|\alpha_i(t)\rangle = U |\alpha_i(0)\rangle$, U indicando l'evolutore temporale definito a partire dall'Hamiltoniana del sistema, otteniamo dunque

$$\rho(t) = U \sum_{i=0}^{N} w_i |\alpha_i(0)\rangle \langle \alpha_i(0)| U^{\dagger} = U\rho(0)U^{\dagger}$$
(3.23)

In definitiva, concludiamo che l'operatore densità evolve "al contrario" rispetto all'evoluzione prevista dall'equazione del moto di Heisenberg per gli operatori: ciò discende dall'aver implicitamente sviluppato il nostro formalismo relativo all'operatore densità nell'usuale rappresentazione di Schrödinger, dal momento che ρ è stato definito attraverso ket e bra di stato nella rappresentazione di Schrödinger [5].

3.2 Funzioni di distribuzione

Una maniera equivalente di caratterizzare le miscele statistiche prevede l'utilizzo delle funzioni di distribuzione.

Sia $O(a, a^{\dagger})$ un generico operatore definito a partire dall'azione "elementare" degli operatori distruzione e creazione:

$$O(a,a^{\dagger}) = \sum_{m} \sum_{n} c_{mn} a^{\dagger m} a^{n} + d_{mn} a^{m} a^{\dagger n}$$
(3.24)

Sfruttando ripetutamente la regola di commutazione $[a, a^{\dagger}] = 1, O(a, a^{\dagger})$ può essere sempre riscritto nella forma:

$$O(a, a^{\dagger}) = \sum_{m} \sum_{n} c'_{mn} a^{\dagger m} a^{n} \equiv O_N(a, a^{\dagger})$$
(3.25)

oppure nella forma

$$O(a, a^{\dagger}) = \sum_{m} \sum_{n} c''_{mn} a^{m} a^{\dagger^{n}} \equiv O_A(a, a^{\dagger})$$
(3.26)

Ci riferiremo all'ordinamento degli operatori di creazione e distruzione nella forma dell'equazione (3.25) come all'*ordine normale* (in ogni termine della somma le potenze dell'operatore creazione precedono le potenze dell'operatore distruzione), mentre parleremo di *ordine antinormale* se ci riferiremo alla forma dell'equazione (3.26).

Supponiamo che il nostro sistema fisico sia formalmente descritto dall'operatore densità ρ . In associazione all'ordine normale degli operatori si definisce la funzione di distribuzione

$$P(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr}\left[\rho\,\delta(\alpha^* - a^{\dagger})\delta(\alpha - a)\right] \tag{3.27}$$

dove α ed α^* sono due numeri complessi e δ indica la funzione delta di Dirac, definita in senso distribuzionale. La funzione di distribuzione così definita viene detta distribuzione di Glauber-Sudarshan o più semplicemente distribuzione P.

Valutiamo la seguente quantità:

$$\int d^{2}\alpha \sum_{m,n} P(\alpha, \alpha^{*}) c'_{mn} \alpha^{*m} \alpha^{n} \equiv \int d^{2}\alpha P(\alpha, \alpha^{*}) O_{N}(\alpha, \alpha^{*}) =$$

$$= \sum_{m,n} c'_{mn} \operatorname{Tr} \left[\rho \int d^{2}\alpha \, \delta(\alpha^{*} - a^{\dagger}) \delta(\alpha - a) a^{*m} \alpha^{n} \right] = \sum_{m,n} c'_{mn} \operatorname{Tr} \left(\rho a^{\dagger m} a^{n} \right) =$$

$$= \operatorname{Tr} \left(\rho \sum_{m,n} c'_{mn} a^{\dagger m} a^{n} \right) = \operatorname{Tr} \left(\rho O_{N}(a, a^{\dagger}) \right) = \left\langle O_{N}(a, a^{\dagger}) \right\rangle$$
(3.28)

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo richiamato la proprietà (3.8). Osserviamo che l'azione integrale delle δ preserva l'ordine normale degli operatori. Il calcolo precedentemente sviluppato mostra che il valor medio di un operatore $O(a, a^{\dagger})$ scritto secondo l'ordine normale può essere ottenuto valutando il seguente integrale:

$$\int d^2 \alpha \, P(\alpha, \alpha^*) O_N(\alpha, \alpha^*) \tag{3.29}$$

In tal modo, un calcolo operatoriale viene ricondotto ad una semplice espressione numerica, dal momento che $O_N(\alpha, \alpha^*)$ rappresenta una funzione scalare (non operatoriale), che formalmente si ottiene a partire da $O_N(a, a^{\dagger})$ tramite le sostituzioni:

$$\begin{cases} a \longrightarrow \alpha \\ a^{\dagger} \longrightarrow \alpha^* \end{cases}$$
(3.30)

In associazione all'ordine antinormale degli operatori si definisce la funzione di distribuzione

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr}\left[\rho\,\delta(\alpha - a)\delta(\alpha^* - a^{\dagger})\right] \tag{3.31}$$

La funzione di distribuzione così definita viene detta distribuzione di Husimi o più semplicemente distribuzione Q.

Valutiamo la seguente quantità:

$$\int d^2 \alpha \sum_{m,n} Q(\alpha, \alpha^*) c''_{mn} \alpha^m \alpha^{*n} \equiv \int d^2 \alpha \, Q(\alpha, \alpha^*) O_A(\alpha, \alpha^*) =$$
$$= \sum_{m,n} c''_{mn} \operatorname{Tr} \left[\rho \int d^2 \alpha \, \delta(\alpha - a) \delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \alpha^m \alpha^{*n} \right] = \sum_{m,n} c''_{mn} \operatorname{Tr} \left(\rho a^m a^{\dagger n} \right) =$$
$$= \operatorname{Tr} \left(\rho \sum_{m,n} c''_{mn} a^m a^{\dagger n} \right) = \operatorname{Tr} \left(\rho O_A(a, a^{\dagger}) \right) = \left\langle O_A(a, a^{\dagger}) \right\rangle$$
(3.32)

Il calcolo precedente mostra che il valor medio di un operatore $O(a, a^{\dagger})$ scritto secondo l'ordine antinormale può essere ottenuto valutando il seguente integrale:

$$\int d^2 \alpha \, Q(\alpha, \alpha^*) O_A(\alpha, \alpha^*) \tag{3.33}$$

che, come già visto nel caso dell'ordine normale, riconduce il calcolo ad una semplice espressione numerica.

Data una generica funzione $f(\beta, \beta^*)$, la quantità

$$F(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \, e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} f(\beta, \beta^*) \tag{3.34}$$

è detta Trasformata di Fourier di $f(\beta, \beta^*)$ (valutata nel punto α). La definizione (3.34) può essere opportunamente invertita. Moltiplichiamo ambo i membri della (3.34) per $e^{-\beta'^*\alpha+\beta'\alpha^*}$:

$$e^{-\beta'^*\alpha+\beta'\alpha^*}F(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\beta \, e^{\beta^*\alpha-\beta\alpha^*}e^{-\beta'^*\alpha+\beta'\alpha^*}f(\beta,\beta^*)$$

Decomponendo ciascun esponente complesso a secondo membro in parte reale e parte immaginaria ($\alpha = \alpha_x + i\alpha_y, \beta = \beta_x + i\beta_y, \beta' = \beta'_x + i\beta'_y$), si ottiene

$$e^{-\beta'^*\alpha+\beta'\alpha^*}F(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta_x \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta_y \ e^{-2i\alpha_x(\beta_y-\beta_y')} e^{2i\alpha_y(\beta_x-\beta_x')} f(\beta,\beta^*)$$

Integrando ambo i membri nelle variabili (reali) α_x e α_y e ricordando che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_x \, e^{-2i\alpha_x(\beta_y - \beta'_y)} = \pi \delta(\beta_y - \beta'_y)$$

е

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_y \, e^{2i\alpha_y(\beta_x - \beta'_x)} = \pi \delta(\beta_x - \beta'_x)$$

otteniamo in definitiva

$$f(\beta',\beta'^*) = \int d^2 \alpha \, e^{-\beta'^* \alpha + \beta' \alpha^*} F(\alpha,\alpha^*)$$

e, quindi, rinominando $\beta'\equiv\beta$

$$f(\beta, \beta^*) = \int d^2 \alpha \, e^{-\beta^* \alpha + \beta \alpha^*} F(\alpha, \alpha^*)$$
(3.35)

Diremo che $f(\beta, \beta^*)$ è l'Antitrasformata di Fourier di $F(\alpha, \alpha^*)$ (valutata nel punto β).

Ci chiediamo a questo punto in che modo l'operatore densità sia riconducibile alle funzioni di distribuzione. Verifichiamo che, se $P(\alpha, \alpha^*)$ è la distribuzione P che caratterizza statisticamente lo stato del sistema fisico preso in esame, l'operatore densità associato ρ si scriverà

$$\rho = \int d^2 \alpha P(\alpha, \alpha^*) \left| \alpha \right\rangle \!\! \left\langle \alpha \right| \tag{3.36}$$

$$P(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr} \left[\rho \,\delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \delta(\alpha - a) \right] =$$

$$= \operatorname{Tr} \left[\int d^2 \alpha' \, P(\alpha', \alpha'^*) \, |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \, \delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \delta(\alpha - a) \right] =$$

$$= \int d^2 \alpha' \, P(\alpha', \alpha'^*) \operatorname{Tr} \left[|\alpha'\rangle \langle \alpha'| \, \delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \delta(\alpha - a) \right] =$$

$$= \int d^2 \alpha' \, P(\alpha', \alpha'^*) \operatorname{Tr} \left[\delta(\alpha - a) \, |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \, \delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \right] =$$

$$= \int d^2 \alpha' \, P(\alpha', \alpha'^*) \delta(\alpha - \alpha') \delta(\alpha^* - \alpha'^*) \operatorname{Tr} \left(|\alpha\rangle \langle \alpha| \right) = P(\alpha, \alpha^*)$$

Attraverso l'equazione (3.36) è immediato ottenere ρ a partire da $P(\alpha, \alpha^*)$. È possibile anche seguire la strada inversa. Cominciamo col valutare

$$\langle -\beta |\rho|\beta \rangle = \int d^2 \alpha \, P(\alpha, \alpha^*) \, \langle -\beta |\alpha \rangle \, \langle \alpha |\beta \rangle$$

dove $|\beta\rangle$ è lo stato coerente di autovalore β . Ricordando che vale

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta}{2}}$$

otteniamo

$$\langle -\beta |\rho|\beta \rangle = \int d^2 \alpha \, P(\alpha, \alpha^*) \, e^{-|\alpha|^2} e^{-|\beta|^2} e^{-\beta^* \alpha + \beta \alpha^*} =$$
$$= e^{-|\beta|^2} \int d^2 \alpha \, e^{-\beta^* \alpha + \beta \alpha^*} \, \left[P(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} \right]$$

Deduciamo pertanto che la quantità $P(\alpha, \alpha^*)e^{-|\alpha|^2}$ rappresenta la trasformata di Fourier della funzione $e^{|\beta|^2} \langle -\beta |\rho|\beta \rangle$. In virtù della formula di inversione, otteniamo

$$P(\alpha, \alpha^*)e^{-|\alpha|^2} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \, e^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*} e^{|\beta|^2} \left\langle -\beta |\rho|\beta \right\rangle$$

In definitiva

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2\beta \, e^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*} e^{|\beta|^2} \left\langle -\beta |\rho|\beta \right\rangle \tag{3.37}$$

Dall'equazione (3.36) ricaviamo due proprietà notevoli relative alla funzione di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*)$:

1. Tr
$$(\rho) = \int d^2 \alpha P(\alpha, \alpha^*) \operatorname{Tr} (|\alpha\rangle\!\langle \alpha|) = \int d^2 \alpha P(\alpha, \alpha^*) = 1$$

2. $\rho = \rho^{\dagger} \Rightarrow P(\alpha, \alpha^*) = P^*(\alpha, \alpha^*)$

Discutiamo alcuni casi notevoli di applicazione delle funzioni di distribuzione [4]. Ci chiediamo quale sia la rappresentazione di uno stato coerente $|\alpha_0\rangle$ in termini della funzione $P(\alpha, \alpha^*)$. L'operatore densità associato si scriverà semplicemente $\rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$. Ricordando la (3.37), siamo ricondotti a calcolare:

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2\beta \, e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} e^{|\beta|^2} \left\langle -\beta |\alpha_0\rangle \left\langle \alpha_0 |\beta \right\rangle =$$
$$= \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2\beta \, e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} e^{|\beta|^2} e^{-|\alpha_0|^2} e^{-|\beta|^2} e^{-\beta^* \alpha_0 + \beta \alpha_0^*} = \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\alpha^* - \alpha_0^*)$$
(3.38)

La radiazione elettromagnetica emessa da un corpo nero, che si trova all'equilibrio termico a temperatura T, può essere descritta dal seguente operatore densità:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta H})} \tag{3.39}$$

dove $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B essendo la costante di Boltzmann, e $H = \hbar \omega (a^{\dagger} a + \frac{1}{2})$. Esplicitando ρ si ottiene

1.

$$\rho = \frac{e^{-\beta\hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right)}}{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle n | e^{-\beta\hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right)} | n \rangle} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega a^{\dagger}a}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega a^{\dagger}a} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega a^{\dagger}a})e^{-\beta\hbar\omega a^{\dagger}a} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega a^{\dagger}$$

Passiamo ora a valutare il valore di aspettazione $\langle N \rangle$ (pensando all'emissione di radiazione elettromagnetica da parte del corpo nero in termini di fotoni, $\langle N \rangle$ viene a rappresentare il numero medio di fotoni emessi):

$$\langle N \rangle = \operatorname{Tr}\left(a^{\dagger}a\rho\right) = \operatorname{Tr}\left[\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega m}(a^{\dagger}a) |m\rangle\langle m|\right] =$$

$$= (1 - e^{-\beta\hbar\omega})\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega m} m = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega(r+1)}(r+1) =$$

$$= (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega r} + (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega r}r =$$

$$= \frac{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}\frac{d}{d\epsilon}\sum_{r=0}^{+\infty} e^{\epsilon r}\Big|_{\epsilon=-\beta\hbar\omega} =$$

$$= e^{-\beta\hbar\omega} + (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}\frac{d}{d\epsilon}\frac{1}{1 - e^{\epsilon}}\Big|_{\epsilon=-\beta\hbar\omega} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \equiv N_{BE}(\omega)$$

Come ci aspettiamo, il valor medio del numero di fotoni emessi segue la distribuzione N_{BE} di Bose-Einstein (essendo i fotoni particelle bosoniche). Osservando che

$$\frac{\langle N \rangle^m}{(1+\langle N \rangle)^{m+1}} = (1-e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega m}$$

possiamo riscrivere l'operatore densità (3.39) associato al sistema fisico considerato nella forma seguente:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\langle N \rangle^m}{(1+\langle N \rangle)^{m+1}} |m\rangle \langle m|$$
(3.41)

Per ottenere la distribuzione $P(\alpha,\alpha^*)$ associata, dobbiamo innanzitutto valutare

$$\langle -\beta |\rho|\beta \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle N \rangle^n}{(1+\langle N \rangle)^{n+1}} \langle -\beta |n\rangle \langle n|\beta \rangle$$

Ricordando che $\langle n|\beta\rangle=\frac{e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\beta^n}{\sqrt{n!}},$ si ottiene

$$\langle -\beta |\rho|\beta \rangle = \frac{e^{-|\beta|^2}}{1+\langle N \rangle} e^{-|\beta|^2/\left(1+\frac{1}{\langle N \rangle}\right)}$$

Resta dunque da calcolare

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \frac{1}{1 + \langle N \rangle} \int d^2\beta \, e^{-|\beta|^2 / \left(1 + \frac{1}{\langle N \rangle}\right)} e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} = \frac{1}{\pi \, \langle N \rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle N \rangle}} \quad (3.42)$$

È interessante eseguire il calcolo per $\langle N \rangle$ sul generico stato del sistema fisico descritto per mezzo della funzione di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*)$:

$$\langle N \rangle = \int d^2 \alpha \, P(\alpha, \alpha^*) \alpha^* \alpha = \int d^2 \alpha \, P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^2 \tag{3.43}$$

Valutiamo ora seguendo lo stesso approccio $\langle N^2 \rangle$. Per poter adoperare la funzione di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*)$, $N^2 = a^{\dagger}aa^{\dagger}a$ dev'essere prima ordinato secondo l'ordine normale. Osserviamo che si ha

$$a^{\dagger}aa^{\dagger}a = a^{\dagger}(1+a^{\dagger}a)a = a^{\dagger}a^{\dagger}aa + a^{\dagger}a$$

Ricaviamo pertanto che

$$\left\langle N^{2}\right\rangle = \int d^{2}\alpha P(\alpha, \alpha^{*}) |\alpha|^{4} + \int d^{2}\alpha P(\alpha, \alpha^{*}) |\alpha|^{2} = \int d^{2}\alpha P(\alpha, \alpha^{*}) |\alpha|^{4} + \left\langle N\right\rangle$$
(3.44)

Valutiamo la varianza associata all'osservabile:

$$\Delta N^{2} = \langle (N - \langle N \rangle)^{2} \rangle = \langle N^{2} \rangle - \langle N \rangle^{2} =$$

$$= \langle N \rangle + \int d^{2} \alpha P(\alpha, \alpha^{*}) |\alpha|^{4} - \left(\int d^{2} \alpha P(\alpha, \alpha^{*}) |\alpha|^{2} \right)^{2} =$$

$$= \langle N \rangle + \left\langle \left(|\alpha|^{2} \right)^{2} \right\rangle - \left\langle |\alpha|^{2} \right\rangle^{2} = \langle N \rangle + \Delta \left(|\alpha|^{2} \right)^{2} =$$

$$= \langle N \rangle + \int d^{2} \alpha P(\alpha, \alpha^{*}) \left[|\alpha|^{2} - \left\langle |\alpha|^{2} \right\rangle \right]^{2}$$
(3.45)

L'espressione a cui siamo giunti riveste un'importanza fondamentale. Nel caso di uno stato coerente $|\alpha_0\rangle$, ricordando la (3.38):

$$\Delta N^2 = \langle N \rangle \tag{3.46}$$

In virtù del risultato (3.46), gli stati coerenti vengono detti stati poissoniani. Tuttavia è possibile trovare stati per i quali vale $\Delta N^2 < \langle N \rangle$ (sub-poissoniani) e stati per i quali vale invece $\Delta N^2 > \langle N \rangle$ (super-poissoniani). Gli stati stazionari $|n\rangle$, ad esempio, risultano stati sub-poissoniani. Per tale classe di stati, essendo $[|\alpha|^2 - \langle |\alpha|^2 \rangle]^2 \ge 0$, è necessario ammettere che, affinché si abbia $\Delta N^2 < \langle N \rangle$, $P(\alpha, \alpha^*)$ risulti < 0 in qualche regione del piano complesso. Questo comporta che, in generale, la funzione di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*)$ non è definita positiva. Quando ciò accade, non è possibile fornire un'interpretazione classica alla funzione di distribuzione di distribuzione che la funzione di distribuzione di distribuzione

 $Q(\alpha, \alpha^*)$ risulta sempre definita positiva. Infatti:

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \operatorname{Tr} \left[\rho \,\delta(\alpha - a) \delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \right] =$$

$$= \operatorname{Tr} \left[\rho \,\delta(\alpha - a) \frac{1}{\pi} \int d^2 \beta \, |\beta\rangle \langle\beta| \,\delta(\alpha^* - a^{\dagger}) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 \beta \, \operatorname{Tr} \left[\rho \,\delta(\alpha - \beta) \, |\beta\rangle \langle\beta| \,\delta(\alpha^* - \beta^*) \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Tr} \left(\rho \, |\alpha\rangle \langle\alpha| \right) = \qquad (3.47)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \,\langle n|\rho|\alpha\rangle \,\langle \alpha|n\rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \,\langle \alpha| \, |n\rangle \langle n| \,\rho \, |\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \,\langle \alpha|\rho|\alpha\rangle$$

Ricordando la (3.7), si ottiene immediatamente

$$\frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N} w_i | \langle \alpha | \alpha_i \rangle |^2 \ge 0$$
(3.48)

In definitiva, è possibile fornire un'interpretazione classica ai sistemi descritti attraverso la funzione di distribuzione $Q(\alpha, \alpha^*)$. Dall'equazione precedente si ricava inoltre che la funzione di distribuzione $Q(\alpha, \alpha^*)$ è reale. Vale inoltre

$$\int d^2 \alpha \, Q(\alpha, \alpha^*) = \int d^2 \alpha \, \frac{1}{\pi} \operatorname{Tr}\left(\rho \, |\alpha\rangle\!\langle\alpha|\right) = \operatorname{Tr}\left[\rho\left(\frac{1}{\pi}\int d^2 \alpha \, |\alpha\rangle\!\langle\alpha|\right)\right] = \operatorname{Tr}\rho = 1$$

È interessante osservare in che modo sono connesse le funzioni di distribuzione $P(\alpha, \alpha^*) \in Q(\alpha, \alpha^*)$. Ricordando che $\rho = \int d^2 \alpha' P(\alpha', \alpha'^*) |\alpha'\rangle \langle \alpha'|$, otteniamo

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha' P(\alpha', \alpha'^*) |\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2$$

In definitiva:

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha' P(\alpha', \alpha'^*) e^{-|\alpha - \alpha'|^2}$$
(3.49)

Come ultimo esempio, individuiamo l'espressione della funzione $Q(\alpha, \alpha^*)$ per uno stato puro $|n\rangle$:

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}$$
(3.50)

che rappresenta la ben nota funzione di distribuzione di Poisson.

Conclusioni

Il problema dell'oscillatore armonico costituisce uno dei pochi casi in cui, sia classicamente che quantisticamente, è possibile esibire una soluzione esatta. Come si può intuire, tale problema nasce in meccanica, dove esempi ben noti sono rappresentati da un pendolo semplice (nell'approssimazione di piccole oscillazioni) e da un punto materiale vincolato ad una molla. Tale soluzione, tuttavia, interessa diversi campi della fisica. A livello classico, si possono esibire altri esempi in cui la fisica del sistema considerato può ricondursi alla presenza di un'interazione di tipo elastico (eventualmente si può pensare di definire una "molla efficace", se il sistema mostra per altre ragioni fisiche una risposta oscillante alla sollecitazione esterna). Un esempio particolarmente interessante è l'oscillazione (eventualmente risonante) di un circuito RLC. A livello quantistico, la quantizzazione del campo elettromagnetico e la quantizzazione dei modi di vibrazione all'interno di un solido esteso rappresentano due casi in cui l'oscillazione "vera" del sistema può immaginarsi come il risultato di una ben precisa sovrapposizione di modi elementari di oscillazione, riconducibili ad oscillazioni di tipo armonico. In questo senso, i fotoni per il campo elettromagnetico ed i fononi per il campo vibrazionale si avvicinano molto all'idea "classica" di molle che rispondono linearmente ad una debole perturbazione esterna e si mettono in oscillazione.

Questa tesi si è concentrata su alcuni aspetti del problema nella sua versione quantomeccanica. In particolare, questo lavoro ha caratterizzato una nota classe di stati dell'oscillatore armonico quantistico, gli stati coerenti (che non sono in generale soluzioni dell'equazione di Schrödinger associata) e si è servito delle proprietà legate a tali stati per ottenere risultati relativi a due speciali funzioni di distribuzione quantomeccaniche, utili ai fini della caratterizzazione di alcuni stati che descrivono il sistema fisico preso in esame.

Bibliografia

- [1] Messiah, Albert. "Quantum Mechanics" (2000).
- [2] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu, and Franck Laloe. "Quantum Mechanics, volume 1. Hermann and John Wiley & Sons." Inc., Paris (1977).
- [3] R.J. Glauber. "Coherent and incoherent states of radiation field." Phys. Rev. 131 (1963) 2766-2788
- [4] Scully, Marlan O., and M. Suhail Zubairy. "Quantum optics." Cambridge University Press (1999)
- [5] Sakurai, Jun John, and Jim Napolitano. "Modern quantum mechanics". Vol. 185. Harlow: Pearson, 2014.