

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

# **Transizioni esplosive in processi di percolazione**

**Relatore:**

Prof. Antonio de Candia

**Candidato:**

Francesco Giuseppe Capone  
Matricola N85001093

A.A. 2018/2019

# Indice

Introduzione .....	2
Introduzione alla percolazione ordinaria.....	4
Capitolo 1: Fenomeni esplosivi e loro caratterizzazione .....	7
1.1 Caratterizzazione delle transizioni di fase.....	7
1.2 Grafi di Erdos-Renyi e percolazione su reticoli all-to-all .....	7
1.3 Achlioptas process.....	9
1.4 Product rule: prime analisi .....	10
1.5 Prova matematiche di continuità dell’Achlioptas process e delle l-vertex rules.....	12
Capitolo 2: Fenomeni di scala.....	19
2.1 Teoria di scala per il cluster number .....	19
2.2 Regola di da Costa e suoi esponenti critici.....	20
2.3 Finite size scaling .....	27
2.4 Considerazioni matematiche .....	28
2.5 Finite size scaling per fenomeni esplosivi.....	29
Conclusione.....	33
Appendice .....	35
Bibliografia e sitografia .....	37

# Introduzione

In questo lavoro si vuole analizzare le caratteristiche di alcune particolari transizioni di fase nell'ambito della teoria della percolazione. Nel 2009 Achlioptas *et al.* hanno proposto un nuovo tipo di percolazione, basata su una nuova regola per l'aggiunta di bonds differente da quella usuale. La regola classica prevede che i bond aggiunti al grafo vengano selezionati in maniera del tutto casuale. Viceversa, la nuova regola di Achlioptas prevede che i bond siano aggiunti in modo da favorire l'aggregarsi di cluster di dimensione minore rispetto a quelli di dimensione maggiore. Tale regola di aggiunta dei bond è detta *product rule*, dal momento che la probabilità di aggiunta di un bond è dipendente dal prodotto tra le masse dei cluster tra cui esso viene instaurato. Quello che si è osservato attraverso diverse simulazioni è un certo ritardo della transizione tra le due fasi e una brusca variazione del parametro d'ordine del processo rispetto a piccole variazioni del parametro di controllo alla soglia di percolazione. Fu proposto, allora, che la transizione, contrariamente a quanto avvenisse per la percolazione fin a quel momento nota, fosse un processo discontinuo. Fu coniato, dunque, il termine percolazione esplosiva, per distinguerla da quella ordinaria, che invece presentava i caratteri di una transizione continua. Nell'ultimo decennio c'è stata una grande attenzione nello studio della *product rule* e di alcune sue varianti o generalizzazioni, col fine di caratterizzare in maniera oggettiva la transizione di fase. In questa tesi, l'obiettivo è, quindi, quello di analizzare le principali peculiarità dei fenomeni di percolazione esplosiva. Innanzitutto, sarà fornita una introduzione alla percolazione ordinaria in cui verranno anche richiamati alcuni risultati sulla teoria di scala e sul cluster number. Nel primo capitolo sarà data la caratterizzazione di tali fenomeni: nei paragrafi 1.1-1.2, oltre che fornire le differenze fra transizioni continue e discontinue, verranno introdotti i grafi di Erdos-Renyi e il loro legame con i processi di percolazione su grafi *all-to-all*. In seguito, in 1.3 e 1.4 e sarà presentato l'Achlioptas process con la *product rule* e la *sum rule* proposte da Achlioptas *et al.* nel 2009, con un'analisi fenomenologica delle sue caratteristiche. Solo nell'ultimo paragrafo del capitolo sarà analizzata in maniera rigorosa la caratterizzazione di tutte le transizioni contraddistinte da *l-vertex rules*, le quali includono tra esse la *product rule* e la *sum rule*. Nel secondo capitolo, invece, verranno analizzati i fenomeni di scala di alcuni processi esplosivi. Qui verrà messo l'accento sulle principali differenze nella teoria di scala tra fenomeni ordinari ed esplosivi. In particolare, i paragrafi 2.1 e 2.2 si concentrano sulla teoria di scala per il cluster number, analizzata per una particolare variante della *product rule* e nota come *da Costa rule*. Quest'ultima verrà analizzata in parte attraverso metodi numerici e semi-analitici. La seconda parte

di questo secondo capitolo tratta, invece, della finite size scaling per fenomeni esplosivi, analizzata per la product rule di Achlioptas, la da Costa rule, l'adjacent edge e una variante della product rule su reticolo quadrato bidimensionale. Anche in questi paragrafi (2.3-2.5) l'obiettivo sarà quello di cogliere le analogie tra varie *rules* classificate come esplosive e le differenze con il fenomeno ordinario. Infine, in appendice, si riportano due teoremi sugli spazi di probabilità sfruttati nell'analisi matematica fornita nel primo capitolo.

# Introduzione alla percolazione ordinaria

La teoria della percolazione è una teoria che è stata ampiamente studiata durante il XX secolo, nell'ambito della meccanica statistica e delle transizioni di fase. Supponiamo di considerare un reticolo formato da  $N$  nodi. Siano essi collegabili tra loro attraverso legami, secondo una architettura che dipenderà dal particolare tipo di network che stiamo considerando (*Square Lattice*, *Bethe Lattice*, *Erdős–Rényi network* e altri ancora). Con lo stesso criterio con il quale si possono creare dei collegamenti tra i siti di un reticolo, si introduce il concetto di nodi vicini. A seconda della particolare architettura del network in considerazione, ogni sito avrà un certo numero di siti vicini. In effetti, i due concetti sono simili: ad esempio, considerando lo Square Lattice in 2 dimensioni, possiamo sia utilizzare il concetto di siti vicini, 4 per ogni sito, che il concetto di bonds, per cui ogni nodo è collegabile attraverso 4 legami distinti ad altri nodi del reticolo. Supponiamo, ora, di occupare casualmente una frazione  $t$  dei nodi del reticolo. Ogni nodo è, così, occupato indipendentemente dagli altri. Per cui ci saranno in media  $Nt$  nodi occupati e  $N(1 - t)$  nodi liberi. Ora, insieme di nodi vicini sono detti *clusters*. Introduciamo, ora, la massa  $s_C$  di un generico cluster  $C$ . Essa è uguale al numero di nodi che lo compongono. Dunque, un sito occupato, che non presenta nodi occupati vicini è un cluster di massa  $s = 1$ . Possiamo ora definire il parametro  $S(t)$ , cioè la massa del cluster più massivo nel reticolo in funzione del parametro di controllo  $t$ . Esisterà, dunque, un valore critico  $t_c$  per cui apparirà un cluster delle dimensioni dell'ordine di  $N$ , cioè del reticolo stesso. Un tale cluster è anche detto *percolating cluster* perché percola attraverso l'intero reticolo. In particolare, siamo interessati al valore di  $t_c$  nel limite termodinamico, cioè nel limite in cui  $N \rightarrow \infty$ . La percolazione può essere studiata come *site percolation* in cui il parametro  $t$  è definito come prima. In secondo luogo, la *bond percolation* considera i nodi del network come già occupati, con i legami tra essi "congelati". Qui, il parametro  $t$  è definito in modo leggermente diverso. Supponiamo di occupare casualmente una certa frazione di *open bonds* fra i nodi e di averne in media  $m$ ; i restanti legami sono detti *closed bonds*. In questo caso, dunque, un cluster è un insieme di nodi legati fra loro da *open bonds*. Il parametro di controllo è definito come  $t = m/N$ . Alla luce della definizione di percolazione per siti e percolazione per legami, appare chiaro il perché si sia reso necessario introdurre i concetti distinti di nodi vicini e di bonds. Infatti, la percolazione per siti, che utilizza il concetto di nodi vicini, è caratterizzata, a  $t = 0$ , dall'assenza di cluster, poiché ogni sito risulta libero. Viceversa, nella percolazione per legami, a  $t = 0$ , gli  $N$  nodi risultano già occupati, ma scollegati tra loro e abbiamo, dunque,  $N$  cluster di massa 1. Nonostante, in genere, ogni sito abbia tanti nodi vicini quanti siano i legami che può instaurare con gli altri nodi (come nell'esempio

di Square Lattice), fare questa distinzione ci permette di introdurre due fenomeni differenti. Inoltre, si noti come nella *site percolation* il parametro  $t$  varia tra 0 e 1, mentre nella *bond percolation* esso può variare da 0 ad un valore massimo di  $(N - 1)/2$  (nel caso di grafo *all-to-all*, infatti,  $m$  può arrivare anche al valore  $\binom{N}{2}$ ).

Possiamo ora considerare il fenomeno della formazione di un *percolating cluster* come una transizione di fase, sfruttando la *bond percolation*, utilizzando come parametro di controllo la variabile  $t$ , mentre come parametro d'ordine la funzione  $S(t)$ . Supponiamo di realizzare un grafo di  $N$  nodi, con  $m = 0$  open bonds. Definiamo, inoltre, una variabile temporale discreta, la cui origine è posta in corrispondenza del grafo privo di bonds, dunque all'istante iniziale si ha  $m = 0$ , da cui  $t = 0$ . Nella percolazione classica, ad ogni step temporale è selezionato casualmente un legame chiuso e trasformato in legame aperto, per cui  $m$  aumenta di un'unità, così come la variabile temporale prima definita. Si crea, dunque, una corrispondenza biunivoca tra la variabile temporale ed  $m$  e tra quest'ultima e  $t$ , dunque spesso  $m$  e  $t$  saranno intese come variabili di tempo. È chiaro che qui il significato di  $t$  è analogo a quello prima definito, solo che ora  $m$  non è più il numero medio di open bonds nel grafo, ma il numero effettivo. La transizione fra la fase iniziale e quella finale si ha nel momento in cui la variabile  $m$  raggiunge il valore  $m_c$ , per cui  $t = t_c$ . Osserviamo che nella percolazione classica, la scelta del legame da rendere aperto è del tutto casuale ed indipendente dalle caratteristiche globali del network all'istante in cui esso viene aggiunto. Esistono numerosi altri algoritmi, come l'*Achlioptas process*, che prevedono una selezione competitiva: sono selezionati un numero prestabilito di *closed bonds*, di cui solo uno viene reso *open*, secondo delle regole ben precise.

Tra le grandezze più importanti nella teoria della percolazione troviamo il *cluster number*  $n_s$ , cioè il numero di cluster di massa  $s$  per sito. Osserviamo che ogni cluster di massa  $s$  ha  $s$  nodi equivalenti. Dunque, la probabilità che un nodo del reticolo appartenga a un cluster di massa  $s$  è  $n_s s$ . Allora, se  $t < t_c$ , considerando la *site percolation*, allora si ha che  $t = \sum_s n_s s$ . Per  $t > t_c$  la somma al secondo membro deve essere estesa ai soli cluster di massa finita<sup>1</sup>, e al membro di destra va aggiunta la frazione  $P = S(t)/N$  dei nodi appartenenti ai cluster (o al cluster) di massa infinita. Da ciò, è facilmente intuibile che il valor medio della massa dei cluster è

$$\chi_1 = \frac{\sum_s n_s s^2}{\sum_s n_s s}$$

---

<sup>1</sup> Affinché la somma non diverga.

cioè proporzionale al momento secondo della distribuzione di  $s$ . Quest'ultima relazione è sempre valida, sia per la site che per la bond percolation. Il valore critico  $t_c$  dipende da un gran numero di fattori. In primo luogo, dal tipo di reticolo preso in considerazione, ma anche dall'algoritmo scelto per l'aggiunta di nuovi *open bonds*. Nell'ambito della percolazione classica, conosciamo le soluzioni analitiche per il reticolo di Bethe e per il reticolo unidimensionale<sup>2</sup>, ovvero la catena lineare di siti. La maggior parte dei problemi può essere risolta solo numericamente, attraverso simulazioni al computer. Per questo motivo si è resa necessaria la nascita di una teoria di scala che permettesse di studiare il fenomeno per  $N$  finito. Per comprendere ciò, è necessario introdurre alcuni concetti. Definiamo la funzione di correlazione  $g(r)$  come la probabilità che, assegnato un sito occupato nel reticolo, un generico nodo a distanza  $r$  appartenga allo stesso cluster del nodo assegnato. È possibile definire, dunque, una lunghezza di correlazione:  $\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)}$ . Dunque,  $\xi$  è la distanza media quadratica tra due siti di un cluster. Ci aspettiamo, dunque, che essa diverga per  $t \rightarrow t_c$  secondo una relazione del tipo  $\xi \propto |t - t_c|^{-\nu}$ . Si può mostrare, allora che, per la percolazione classica, ogni grandezza  $X$  di interesse, in prossimità di  $t_c$ , sia del tipo  $X \sim |t - t_c|^\beta$ . Questo è dovuto al fatto che la lunghezza di correlazione diverge. In generale questo tipo di relazione è vera per le transizioni di fase del secondo ordine (cioè continue), attorno al cui punto critico è possibile osservare un'invarianza di scala. Tuttavia, se consideriamo  $N$  finito e abbastanza grande, la relazione è del tipo:

$$X \approx |t - t_c|^\beta F[(t - t_c)N^{\frac{1}{\nu}}]$$

Dove  $F$  è una funzione universale, indipendente da  $N$ .

Alla base delle teorie di scala c'è l'idea che tutte le grandezze che sono definite attraverso una somma al variare della massa  $s$  dei cluster, e che divergono attorno al punto critico  $t_c$ , vedono il maggiore contributo dai cluster il cui raggio medio è dell'ordine di  $\xi$ . Tuttavia, se la somma non diverge a  $t_c$ , il principale contributo alla somma non proviene dai cluster di raggio dell'ordine di  $\xi$ , ma dai cluster con  $s$  piccolo.

---

<sup>2</sup> Isomorfo all'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi.

# Capitolo 1: Fenomeni esplosivi e loro caratterizzazione

## 1.1 Caratterizzazione delle transizioni di fase

Una transizione di fase è continua se il parametro d'ordine che descrive il fenomeno si mostra come una funzione continua al variare dei parametri di controllo. Viceversa, se presenta dei “salti”, possiamo dire che è discontinua. Quest'ultimo tipo di transizione è anche detta del primo ordine, mentre le precedenti sono dette del secondo ordine. Caratteristiche tipiche delle transizioni del primo ordine in termodinamica sono la presenza di un calore latente, la coesistenza delle due fasi del sistema attorno al punto critico e l'irreversibilità del processo, con il presentarsi di cicli di isteresi. Cioè, variando il parametro di controllo  $t$  da un valore  $t_1$  a  $t_2$  e poi successivamente da  $t_2$  a  $t_1$  le due curve descritte dal parametro d'ordine  $S(t)$  in tali processi non coincidono. Esempi di fenomeni del primo ordine sono quelli che descrivono le transizioni fra le fasi della materia, come la fusione o l'ebollizione. Viceversa, le transizioni del secondo ordine sono completamente reversibili. Tra queste troviamo la transizione superconduttiva nei metalli, la transizione ferromagnetica, ma anche la stessa percolazione ordinaria.

Tuttavia, recentemente è stato introdotto un nuovo algoritmo alla base del processo di percolazione, sostanzialmente differente da quello ordinario. Seguendo quest'ultimo, la transizione di fase sembrerebbe essere del primo ordine, a causa della presenza di un improvviso “salto” del parametro d'ordine attorno alla soglia di percolazione. Dunque, durante lo scorso decennio, diversi studi si sono concentrati sul provare la continuità o la discontinuità di tale fenomeno.

Al fine di comprendere l'*Achlioptas process*, l'algoritmo alla base della percolazione esplosiva, saranno introdotti alcuni concetti.

## 1.2 Grafi di Erdos-Renyi e percolazione su reticoli all-to-all

Il modello di Erdos-Renyi è un modello di generazione casuale di grafi appartenenti a una determinata famiglia. Supponiamo di fissare  $N$  nodi e di costruire un grafo collegando tra loro alcuni di essi attraverso  $m$  collegamenti. Osserviamo che, assegnato  $N$ , il numero massimo di legami possibili nel nostro grafo è determinato dalle possibili coppie di nodi  $i$  e  $j$ , con  $i \neq j$ . Dunque,  $M_{max}$  sarà uguale alle combinazioni di  $N$  oggetti presi 2 alla volta, da cui  $M_{max} = \binom{N}{2}$ . Da ciò si ottiene che, fissato  $N$ ,  $0 \leq m \leq \binom{N}{2}$ . Assegnati, dunque,  $N$  ed  $m$ , il modello di Erdos-Renyi permette di generare una famiglia di grafi, sia essa  $G(N, m)$ , ciascuno dei quali caratterizzato da  $N$  nodi e  $m$  collegamenti. Il modello, inoltre, prevede che la probabilità di estrazione dei grafi sia uniforme. I grafi di Erdos-Renyi possono essere ottenuti attraverso processi di percolazione su

reticoli *all-to-all*, in cui ogni nodo del grafo può essere collegato a ciascuno degli altri  $N - 1$ . Supponiamo, infatti, di assegnare  $N$  nodi isolati. Ad ogni step temporale, saranno selezionati casualmente due nodi scollegati del reticolo e saranno collegati tra loro attraverso un *open bond*. Definiamo, come sempre, il parametro di controllo  $t = m/N$ . Osserviamo, dunque, che allo step  $m$ -simo, il nostro reticolo sarà un grafo di Erdos-Renyi con  $N$  nodi ed  $m$  collegamenti, estratto casualmente dalla famiglia  $G(N, m)$ . Osserviamo che la probabilità che due cluster di massa  $s_1$  e  $s_2$  si fondano in un unico cluster più grande, attraverso l'aggiunta di un collegamento, è proporzionale al numero di possibili legami che possono unire i due: ogni nodo del cluster 1, può creare un diverso legame con ognuno degli  $s_2$  nodi del cluster 2. Dunque, il numero di collegamenti possibili per formare tale cluster è  $s_1 s_2$ , cioè il prodotto delle masse. Ovviamente, ciò favorisce l'aggregarsi di cluster di dimensioni maggiori rispetto a quelli di dimensioni minori. Il fenomeno di percolazione nel modello di Erdos-Renyi è stato ampiamente studiato e ha le caratteristiche di una transizione continua, con soglia di percolazione  $t_c = 1/2$ . Si è osservato, infatti, che per  $t < 1/2$  il numero di nodi del cluster più massivo scala col logaritmo di  $N$ , rimanendo trascurabile. Viceversa, per  $t > 1/2$ , la funzione  $S(t)$  risulta lineare in  $t$  e in  $N$ . In particolare, risulta che  $S(t) \approx (4t - 2)N$  per  $t$  poco maggiore di  $t_c$ . Dunque, non sono presenti discontinuità attorno la soglia di percolazione.

Nel corso degli anni sono state proposte alcune versioni modificate del modello di Erdos-Renyi, basate su un modello competitivo nella scelta del collegamento, e non più solo casuale. Ad ogni step temporale, infatti, corrispondono due azioni:

- È casualmente selezionato un set di  $n$  possibili collegamenti tra i nodi, sia esso  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , tra tutti i possibili set di collegamenti (che non siano ancora nello stato *open*);
- In base a una regola prefissata, è selezionato uno dei collegamenti del set ed è reso *open bond*.

È evidente, allora, che per tale tipo di algoritmo le caratteristiche della transizione di fase non siano solo dipendenti dal tipo di grafo scelto, ma anche dalla regola di selezione che si utilizza nello scegliere il legame. In particolare, la prima regola di selezione utilizzata nello studio delle transizioni di fase è una leggera modifica del modello di Erdos-Renyi ed è nota come regola di Bohman e Frieze (BF). Essa prevede che, ad ogni passo, 2 possibili collegamenti,  $e_1$  ed  $e_2$ , siano scelti tra tutti i possibili collegamenti liberi del grafo. La regola di selezione prevede che il collegamento  $e_1$  sia scelto se collega due cluster di dimensione 1, altrimenti è scelto il legame  $e_2$ . In generale, ciò può essere generalizzato dalla *k-bounded-size rule*. In questo processo, selezionati

casualmente  $e_1$  ed  $e_2$ , è scelto il primo se collega due cluster di dimensioni minori o uguali a  $k$ , altrimenti è scelto il secondo. È stato osservato che la  $k$ -bounded-size rule può sia accelerare che decelerare il processo di percolazione. In effetti, lo studio della regola di Bohman e Frieze mostra come la soglia di percolazione sia ritardata rispetto alla percolazione ordinaria di Erdos-Renyi. In ogni caso, sia l'analisi dati di simulazioni al computer che considerazioni matematiche<sup>3</sup> sembrano mostrare che le transizioni sotto qualunque *bounded size rule* siano continue.

### 1.3 Achlioptas process

L'*Achlioptas process* (AP) è un possibile algoritmo nello studio della percolazione, al centro di numerosi studi nel decennio scorso. Esso differisce sia dall'algoritmo della percolazione ordinaria, sia dalla *bounded size rule*, ma si presenta come una modifica della regola tradizionale di Erdos-Renyi. All'istante iniziale, il grafo è composto di  $N$  nodi isolati. Ad ogni step successivo è aggiunto un *open bond* tra una coppia di nodi, in base alla seguente regola:

- Sono selezionate casualmente due coppie di nodi, siano esse  $\{i, j\}$  e  $\{l, m\}$ ;
- Dette  $s_i, s_j, s_l, s_m$  le masse dei cluster a cui appartengono i singoli nodi, sono valutati i prodotti  $s_i s_j$  e  $s_l s_m$ . Viene, dunque, aggiunto un *open bond* tra la coppia di nodi che minimizza il prodotto tra le masse dei cluster a cui appartengono. Se i prodotti coincidono, la coppia a cui aggiungere l'*open bond* è selezionato casualmente tra le due.

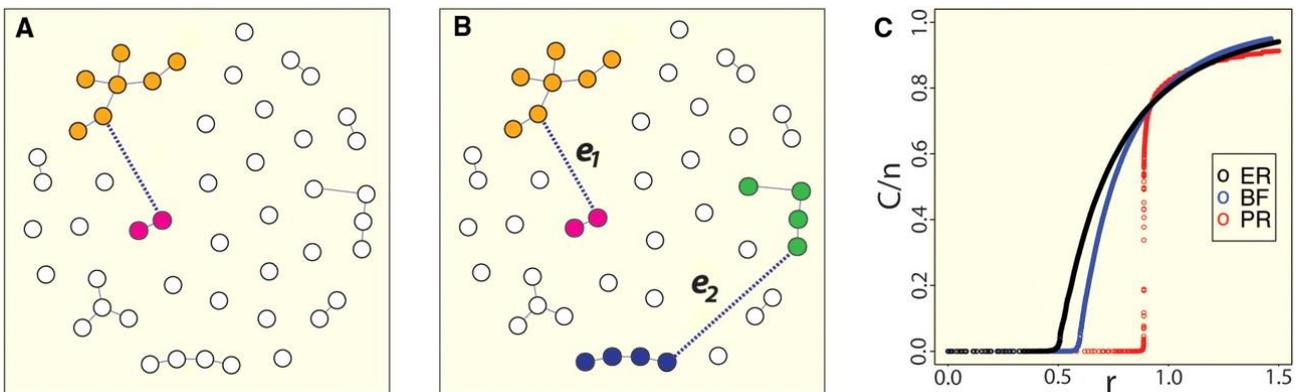


Figura 1: In 1(A) è mostrato l'algoritmo tradizionale, con un open bond aggiunto casualmente. In 1(B) è mostrato un algoritmo di tipo competitivo: la regola di Bohman e Frieze aggiungerebbe  $e_2$ , mentre la product rule sceglierebbe  $e_1$ . In figura 1(C) è mostrato l'andamento del rapporto tra il parametro d'ordine e del numero di nodi totale  $S/N$ , in funzione del parametro di controllo  $t$ . La curva nera è relativa alla regola tradizionale su grafo di Erdos-Renyi (ER), quella blu è relativa alla regola di Bohman e Frieze (BF), la rossa alla product rule (PR). Fonte: D. Achlioptas, R.M. D'Souza, J. Spencer, *Explosive percolation in random networks*, *Science* 323 (5920) (2009) 1453–1455.

In base alle considerazioni fatte nel paragrafo precedente, questo tipo di algoritmo contrasta la formazione di cluster di grandi dimensioni, favorendo, negli istanti iniziali del processo, la

<sup>3</sup> J. Spencer, N. Wormald, *Combinatorica* 27, 587 (2007).

formazione di un gran numero di clusters di piccola o media dimensione. Questa regola è anche meglio nota come *product rule* (PR). In effetti, una variante della PR è la *sum rule* (SR): in tal caso l'open bond è aggiunto tra la coppia di nodi che minimizza la somma tra le masse dei cluster a cui appartengono. Entrambe le regole di selezione tendono a ritardare il processo di percolazione, rispetto al metodo tradizionale. È chiaro che una PR (SR) può anche accelerare il processo, nel caso che il legame venga aggiunto tra la coppia di nodi che massimizza il prodotto (la somma). Tuttavia, l'interesse principale di questo fenomeno è non tanto la variazione, prevedibile, della soglia di percolazione, quanto la classificazione della transizione di fase.

I dati delle simulazioni hanno infatti evidenziato la presenza di una brusca variazione del parametro d'ordine  $S(t)$  intorno alla soglia di percolazione, così da riferirsi a tale fenomeno col nome di *percolazione esplosiva*. In figura 1(C) è possibile osservare le differenze tra le curve che descrivono i vari processi fin qui osservati. Non solo la PR ritarda di molto la soglia di percolazione, ma vi è un andamento evidentemente diverso dalle precedenti, che appaiono a tutti gli effetti come transizioni del secondo ordine. Ci si chiede dunque, se questo fenomeno *esplosivo* potesse essere, invece, del primo ordine.

#### 1.4 Product rule: prime analisi

I primi studi del problema, che portarono a credere questo fenomeno fosse una transizione discontinua, si basano essenzialmente su un'analisi dei dati delle simulazioni al computer. Ricordiamo che il nostro interesse è riguardo al comportamento al limite termodinamico, cioè quando  $N \rightarrow \infty$ , mentre le simulazioni trattano con sistemi in cui il numero di nodi è grande, ma finito. L'analisi di D. Achlioptas, R. M. D'Souza, J. Spencer che verrà qui mostrata è realizzata attraverso lo studio di grafi che variano fino a un massimo di vertici dell'ordine di 64 milioni. Le grandezze che verranno riportate sono frutto di medie su 50 realizzazioni identiche e indipendenti. Supponiamo di considerare il massimo valore di  $m$  per cui il parametro d'ordine  $S < N^{\frac{1}{2}}$ , sia esso  $m_0$ , e il valore minimo di  $m$  per cui  $S > 0.5N$ , sia esso  $m_1$ <sup>(4)</sup>. Essi consideravano il fatto che nelle transizioni continue la quantità  $\Delta = m_1 - m_0$  era estensiva e cioè proporzionale al numero di vertici del reticolo. Infatti, nella percolazione tradizionale ER abbiamo che  $\Delta = 0.193N$ . Viceversa, con la PR si osserva che  $\Delta < 2N^{\frac{2}{3}}$  e che nel limite termodinamico  $\Delta \rightarrow N^{\frac{2}{3}}$ . L'analisi riportata, concluse che, essendo le dimensioni dell'intervallo di tempo inferiori alle dimensioni lineari del reticolo, la comparsa di un *percolating cluster* poteva essere considerata istantanea, poiché si passa da un

---

<sup>4</sup> Il parametro  $m$  è il numero di open bonds presenti nel grafo, e dunque è il parametro temporale, aumentando di un'unità ad ogni fase dell'algoritmo.

valore di  $S/N$  prossimo allo 0<sup>5</sup>, ad uno prossimo ad 1, in un numero inferiore di passi rispetto ad  $N$ . In effetti, le quantità  $t_0 = m_0/N$  e  $t_1 = m_1/N$  convergono entrambe allo stesso valore nel limite termodinamico al valore  $t_c = 0.888 \dots$  (Figura 2), rendendo la quantità  $\Delta/N \rightarrow 0$ . Essendo il parametro di controllo proprio  $t$ , segue che il parametro d'ordine ha una discontinuità per  $t = t_c$ . In generale, in base a questo studio, per classificare la transizione come discontinua, basterebbe

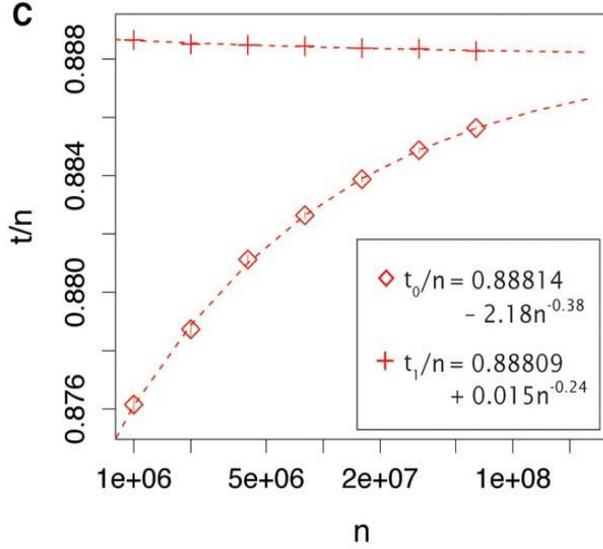


Figura 2 Andamento dei valori di  $m_0/N$  e  $m_1/N$  al variare di  $N$ . Le croci e i quadrati rappresentano i valori medi misurati per le simulazioni ad  $N$  fissato, mentre le linee tratteggiate sono i best fit estrapolati dalle misure. In particolare, si osserva la convergenza delle due curve allo stesso valore limite. Fonte: D. Achlioptas, R.M. D'Souza, J. Spencer, *Explosive percolation in random networks*, *Science* 323 (5920) (2009) 1453–1455.

trovare tre costanti  $A > 0$  e  $\gamma, \beta < 1$  per le quali, posto  $m_0$  il valore massimo per cui  $S < N^\beta$  e  $m_1$  il valore minimo per cui  $S > AN$ , si avesse che  $\Delta < N^\gamma$ . La precedente analisi ha mostrato che scegliendo  $A = 0.5$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  si ottiene un valore di  $\gamma = \frac{2}{3}$  e che dunque soddisfa la relazione precedente.

In figura 3 possiamo osservare le differenze nell'andamento delle curve caratteristiche per i

vari tipi di percolazione. In 3(A) si mostra come in ER ed in BF la quantità  $\Delta$  scali con  $N$ , mostrando la convergenza della curva  $\Delta/N$  vs  $N$  a un valore finito non nullo nel limite termodinamico. Viceversa, la figura 3(B) mostra come in PR la quantità  $\Delta$  scali con  $N^{\frac{2}{3}}$ ,

mostrando, la convergenza di  $\Delta/N^{\frac{2}{3}}$  vs  $N$  al valore di 1 nel limite termodinamico.

Inoltre, è stata osservata una particolare legge di scala per le variabili  $\beta, \gamma$  nella forma:  $\gamma + 1.2\beta = 1.3$  con  $A \in [0.1; 0.6]$ . Questa equazione si è ottenuta sperimentalmente su un numero elevato di simulazioni ed è da intendersi vera entro certi errori. In effetti, confrontando il valore  $\hat{\beta}$  ottenuto ponendo  $\gamma = 2/3$  con il valore  $\beta = 1/2$  si ottiene un errore relativo  $[(\hat{\beta} - \beta)/\beta] \approx 5,6\%$ .

Tuttavia, in questo studio, la mancata osservazione diretta di un fenomeno del primo ordine è dovuto alle fluttuazioni statistiche dei valori limite di  $t_0$  e  $t_1$ , che non permettono di determinare

<sup>5</sup> Nel limite di  $N$  grande, infatti,  $N^{\frac{1}{2}} \ll N$ , da cui  $S/N \rightarrow 0$ .

con assoluta precisione se i due valori coincidano realmente nel limite termodinamico. Ciò sarà proprio il punto di partenza per studi successivi.

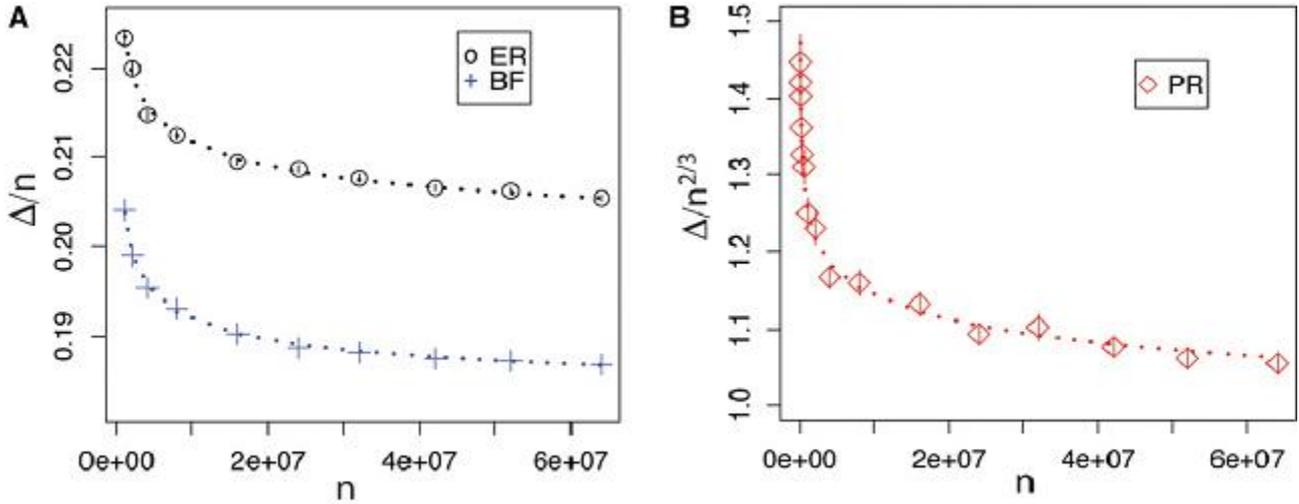


Figura 3: Fonte: D. Achlioptas, R.M. D'Souza, J. Spencer, Explosive percolation in random networks, *Science* 323 (5920) (2009) 1453–1455.

### 1.5 Prova matematiche di continuità dell'Achlioptas process e delle $l$ -vertex rules

In questa sezione si vuole riportare il lavoro di Oliver Riordan e Lutz Warnke<sup>6</sup>, i quali provarono che una generalizzazione dell'*Achlioptas process* fosse in realtà una transizione continua, utilizzando un approccio puramente matematico al problema. Essi si proposero di analizzare la  $l$ -vertex rule: partendo da un insieme iniziale di  $N$  nodi, ad ogni step  $m$ -simo, sono selezionati  $l$  vertici tra quelli del grafo e tra (almeno) una coppia di vertici è realizzato un open bond, attraverso una scelta deterministica oppure casuale. Per non creare confusione con il suo precedente utilizzo, da qui il simbolo  $G^R(m)_{m \geq 0}$  indicherà la successione casuale di grafi realizzata a partire da un insieme di  $N$  nodi, allo step  $m$ -simo, realizzato sulla base della regola  $R$ . Nel seguito l'apice  $R$  sarà ommesso in quanto ci riferiremo a una generica  $l$ -vertex rule, così come sarà sottinteso che  $m \geq 0$ . Col fine di arrivare a provare la continuità di una generica  $l$ -vertex rule è necessario dare alcuni riferimenti matematici del problema. Formalmente, assegnati  $l \geq 2$  e  $N$ , consideriamo la sequenza  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots)$  dove  $\underline{v}_m$  è l'insieme  $(v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{l,m})$  dei vertici del grafo scelti casualmente allo step  $m$ . Ora, dunque,  $G(0)$  è il grafo privo alcun bond, con i soli  $N$  nodi,  $G(m)$  è ottenuto da  $G(m-1) \cup E_m$  dove  $E_m$  è il bond (o i bonds, a seconda della rule che si considera) che viene aggiunto allo step  $m$ -simo. Inoltre, detto  $\Omega$  l'insieme degli  $N$  nodi, definiremo la successione di insiemi  $\mathcal{F}_m$  ciascuno costituito di sottoinsiemi di  $\Omega$  con  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  se  $s < t$ , ovvero una filtrazione. In

<sup>6</sup> O. Riordan, L. Warnke, Explosive percolation is continuous, Institute of Mathematical Statistics: The Annals of Applied Probability (2012).

questo modo riusciamo a costruire uno spazio misurabile  $(\Omega, \mathcal{F}_m)$ . Infine, definiamo una misura  $P$  e lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}_m, P)$ . L'esistenza di tale filtrazione permette, ad ogni passo del processo, di conoscere la "storia" dello stesso. Infatti, la  $\mathcal{F}_m$  richiede che  $\underline{v}_m$  sia  $\mathcal{F}_m$ -misurabile e indipendente da  $\mathcal{F}_{m-1}$  e che anche  $E_m$  sia  $\mathcal{F}_m$ -misurabile. In pratica, ciò garantisce l'impossibilità di creare un open bond tra due vertici di  $\underline{v}_m$  nel momento in cui essi siano già collegati da un open bond allo step  $m - 1$  (o in alcuni modelli tra vertici che sono già nello stesso cluster allo step  $m - 1$ ). L'introduzione di una filtrazione, e dunque di uno spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}_m, P)$  sarà utile in seguito in una dimostrazione, dal momento che sarà sfruttato il teorema di McDiarmid sugli spazi filtrati.

Riordan e Warnke generalizzano, innanzitutto, il concetto di transizione discontinua. Definiamo un evento  $E$  (formalmente una successione  $E_N$ ). Diremo che l'evento  $E$  avviene *with high probability* (whp) se  $P(E) \rightarrow 1$  con  $N \rightarrow \infty$ . Consideriamo ora l'evento  $X(\delta, h_S, h_m)$ . Esso avviene se:

$$\exists m_1, m_2 \mid S(m_1) \leq h_S(N), S(m_2) \geq \delta N, m_2 - m_1 \leq h_m(N)$$

dove ricordiamo che  $S(m)$  è la massa del cluster di dimensioni maggiori allo step  $m$ . Diremo che il processo di percolazione è discontinuo sotto una regola  $R$  se esiste  $\delta$  con  $0 < \delta \leq 1$  ed esistono  $h_m(N) = o(N), h_S(N) = o(N)$  per cui l'evento  $X(\delta, h_S, h_m)$  avviene whp. Infatti, ciò presuppone che esistano  $t_1 = \frac{m_1}{N}, t_2 = \frac{m_2}{N}$  convergenti allo stesso valore di  $t_c$  nel limite termodinamico dal momento che è vero che  $m_2 - m_1 \leq o(N)$ . Dunque, la funzione  $S(t)$  ha discontinuità in  $t_c$ . Proveremo, allora, il seguente teorema:

**Teorema:** Sia  $R$  una  $l$ -vertex rule per qualche  $l \geq 2$ . Sia  $G(m)$  la successione casuale di grafi su  $\{1, 2, \dots, N\}$  associata ad  $R$ . Assegnate due qualsiasi funzioni  $h_m(N), h_S(N)$  che siano  $o(N)$ , e una qualsiasi costante  $\delta$  maggiore di 0 e minore o uguale a 1, la probabilità che l'evento  $X(\delta, h_S, h_m)$  avvenga tende a 0 per  $N \rightarrow \infty$ .

Tale teorema assicura, così, la continuità di ogni  $l$ -vertex rule, tra cui la PR. Prima di passare alla dimostrazione, è necessario presentare due lemmi. Sia  $N_k(m)$  il numero di vertici del grafo  $G(m)$  che costituiscono clusters di massa  $k$ . Sia  $N_{\geq k}(m)$  ( $N_{\leq k}(m)$ ) il numero di vertici del grafo  $G(m)$  che costituiscono clusters di massa almeno (al più)  $k$ .

**Lemma 1:** Fissato  $0 < \alpha \leq 1$ , sia  $C(\alpha)$  l'evento per cui per ogni  $0 \leq m \leq N^2$  e per ogni  $1 \leq k \leq \frac{\alpha}{16 \log N} N$  avviene che (ii)  $S(m + \Delta) > \frac{\alpha}{l^2} N$  con  $\Delta = \left\lceil \frac{4}{\alpha^{l-1}} \frac{N}{k} \right\rceil$ , supposto sia verificato (i)  $N_{\geq k}(m) \geq \alpha N$ . Allora  $P(C(\alpha)) \geq 1 - N^{-1}$ . <sup>(7)</sup>

**Dim:** È necessario mostrare che, assegnati  $m$  e  $k$ , se  $G(m)$  soddisfa  $N_{\geq k}(m) \geq \alpha N$  allora abbiamo che  $S(m + \Delta) > \frac{\alpha}{l^2} N$  avviene con probabilità almeno  $1 - N^{-4}$  (e quindi maggiore di  $1 - N^{-1}$ ). Sia  $W$  l'insieme di tutti i nodi dei cluster di massa almeno  $k$  e siano, dunque,  $\tilde{\alpha} = \frac{|W|}{N} \geq \alpha$  e  $\beta = \tilde{\alpha}/l^2$ . Consideriamo, ora,  $\Delta$  step temporali. A questo, punto, uno step sarà definito “positivo” se (1) tutti i vertici scelti sono contenuti in  $W$  e (2) tutti i vertici si trovano in componenti differenti. Sia  $Z_j$  la funzione indicatrice che lo step  $m + j$  sia positivo. Definiamo allora la funzione:

$$Y_j = \begin{cases} Z_j & \text{se } S(m + j - 1) \leq \beta N \\ 1 & \text{se } S(m + j - 1) > \beta N \end{cases}$$

Dunque,  $Y_j$  è la funzione caratteristica dell'evento positivo se  $S(m + j - 1) \leq \beta N$ , altrimenti è uguale ad 1. Definiamo le quantità  $Z = \sum_{1 \leq j \leq \Delta} Z_j$  e  $Y = \sum_{1 \leq j \leq \Delta} Y_j$ . Ora la probabilità che (1) avvenga e (2) no è, supponendo che  $S(m + j - 1) \leq \beta N$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k^*=k}^{\beta N} \tilde{\alpha}^l \binom{l}{2} \frac{1}{|W|^2} \binom{k^*}{2} \frac{N_{k^*}}{k^*} &\leq \sum_{k^*=k}^{\beta N} \tilde{\alpha}^l \binom{l}{2} \frac{1}{|W|^2} \frac{k^*}{2} N_{k^*} \leq \tilde{\alpha}^l \binom{l}{2} \frac{1}{|W|^2} \frac{\beta N}{2} \sum_{k^*=k}^{\beta N} N_{k^*} = \tilde{\alpha}^l \binom{l}{2} \frac{1}{|W|} \frac{\beta N}{2} \\ &= \tilde{\alpha}^l \binom{l}{2} \frac{1}{\tilde{\alpha} N} \frac{\beta N}{2} \leq \tilde{\alpha}^{l-1} \binom{l}{2} \beta < \frac{\tilde{\alpha}^l}{2} \end{aligned}$$

Da ciò segue che la probabilità che l'evento  $m + j$  sia positivo è almeno  $\tilde{\alpha}^l/2$  (lo si prova facilmente se alla probabilità prima calcolata si aggiunge quella per cui (1) non si verifica, cioè  $1 - \tilde{\alpha}^l$ ). Proprio per questa caratteristica di  $Y_j$ , la funzione  $Y$  è una variabile binomiale, il cui valor medio è almeno  $\Delta \tilde{\alpha}^l/2 \geq 2\tilde{\alpha} N/k$ . Per il teorema di Chernoff segue che:

$$P(Y \leq \tilde{\alpha} \frac{N}{k}) \leq \exp\{-\tilde{\alpha} N/4k\} \leq \exp\{-\alpha N/4k\} \leq N^{-4}$$

Nella prima disequazione si è sfruttato il teorema di Chernoff (vedere appendice). Inoltre, l'ultima disequazione si ottiene maggiorando, sfruttando il valore massimo di  $k$ . Ora, supponiamo che  $S(m + \Delta) \leq \beta N$ , allora si ha  $S(m + j - 1) \leq \beta N \forall j \mid 1 \leq j \leq \Delta$  a causa della monotonia di questa

<sup>7</sup> Cioè  $C(\alpha)$  si verifica se, essendo verificato (i), allora si verifica anche (ii). Dunque,  $P(C(\alpha))$  è la probabilità che si verifichi (ii), supposto sia vero (i), cioè la probabilità condizionata di (ii) rispetto a (i).

funzione. Segue, dunque, che  $Y_j = Z_j \forall j$  e dunque  $Y = Z$ . Ora il numero massimo di clusters in  $W$  ad  $m$  è  $\tilde{\alpha}N/k$ , perché  $|W| = \tilde{\alpha}N$ . Dunque, poiché ad ogni step positivo successivo, almeno due componenti si fondono, il numero di cluster totale in  $W$  diminuisce di un'unità e dopo al massimo  $\tilde{\alpha}N/k$  eventi positivi, questi non sono più possibili. Dunque,  $Y_j$  assume al più  $\tilde{\alpha}N/k$  volte il valore 1, le restanti il valore 0. Segue che  $Y \leq \tilde{\alpha}N/k$ . Poiché quest'ultima è, allora, condizione necessaria alla assunzione  $S(m + \Delta) \leq \beta N$  segue che:

$$P(S(m + \Delta) \leq \beta N) \leq P(Y \leq \tilde{\alpha}N/k) \leq N^{-4}$$

cioè la tesi del lemma.  $\square$

Applicando ciò per  $\alpha = 1, m = 0, k = 1$  si ottiene immediatamente che un cluster di massa proporzionale a  $N$  (almeno  $N/12$ ) appare dopo  $\Delta = 4N$  steps.

È necessario, ora, presentare il seguente lemma:

**Lemma 2:** *Siano fissati  $0 < \alpha \leq 1, D > 0$  e un intero  $B \geq 2$ . Sia, ora,  $M_k^B = N_{\geq k} - N_{\geq Bk}$ , cioè il numero di nodi in cluster di massa maggiore o uguale di  $k$  e minore di  $Bk$ . Sia definito  $L(\alpha, B, D)$  l'evento per cui per ogni  $0 \leq m \leq N^2$  e per ogni  $1 \leq k \leq \min\{\frac{\alpha^2 \exp(-4lBD)}{8l^2 B^2 D} \frac{N}{\log N}, \frac{N}{2B}\}$  avviene che (iv)  $M_k^B(m + \Delta) > [\frac{\alpha}{2B} \exp(-2lBD)]N$  per qualsiasi  $0 \leq \Delta \leq DN/k$ , supposto sia verificato (iii)  $M_k^B(m) \geq \alpha N$ . Allora  $P(L(\alpha, B, D)) \geq 1 - N^{-1}$ . <sup>(8)</sup>*

**Dim:** È necessario mostrare che, fissati  $m$  e  $k$ , se  $G(m)$  soddisfa la condizione  $M_k^B \geq \alpha N$ , allora la probabilità che avvenga  $M_k^B(m + \Delta) > [\frac{\alpha}{2B} \exp(-2lBD)]N$  per ogni  $0 \leq \Delta \leq \tilde{\Delta}$  con  $\tilde{\Delta} = \lfloor DN/k \rfloor$  è almeno  $1 - N^{-4}$ . Siano  $C_1, \dots, C_r$  i cluster di massa compresa tra  $k$  e  $Bk - 1$ . Consideriamo ora  $\tilde{\Delta}$  steps. Diremo che un cluster  $C_i$  è *salvo* se, ad ogni step, nessuno dei suoi vertici è scelto tra gli  $l$  selezionati casualmente sul grafo. La probabilità che il cluster  $C_i$  sia salvo è data da:

$$(1 - |C_i|/N)^{l\tilde{\Delta}} > \exp(-2l\tilde{\Delta}|C_i|/N) \geq \exp(-2lBD)$$

Nella prima disequazione si è sfruttato il fatto che, dal momento che  $|C_i| \leq B/k$ , qualunque dei due valori di  $k$  utilizzato rende  $|C_i|/N$  una successione infinitesima per  $N \rightarrow \infty$  e maggiore di 0 altrimenti. Si è sfruttato, cioè, che  $(1 - 1/x)^{-x} > e$  per  $x > 0$ . Anche nell'ultima disequazione si è

---

<sup>8</sup> Analogamente a nota 7.

sfruttata la maggiorazione di  $|C_i|$ . Ora, sia  $X$  il numero di componenti salve. Dalla disequazione precedente, segue che il valore di aspettazione di  $X$  è  $E[X] \geq \text{rexp}(-2lBD)$ . Ovviamente la  $X$  è una funzione dei vertici selezionati tra gli step  $m+1$  e  $m+\tilde{\Delta}$ , cioè  $X = f(\underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+\tilde{\Delta}})$ . Inoltre, se  $\omega$  e  $\tilde{\omega}$  differiscono solo per una coordinata, segue  $|f(\omega) - f(\tilde{\omega})| \leq l$ , perché con  $l$  vertici posso selezionare al massimo  $l$  cluster. Allora per il teorema di McDiarmid (vedere appendice) si ha che:

$$P(X \leq \text{re}^{-2lBD}/2) \leq \exp\left(-\frac{2[\text{re}^{-2lBD}/2]^2}{\tilde{\Delta}^2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha^2 e^{-4lBD} N}{2l^2 B^2 D k}\right) \leq N^{-4}$$

Infatti, il numero di nodi  $M_k^B \geq \alpha N$  e la massa massima di tali cluster è  $Bk$  da cui si ha che  $r \geq \alpha N/Bk$ . Ciò è stato sfruttato nella seconda disequazione. L'ultima si può provare sostituendo i due possibili valori di  $k$ : se per l'uno la disequazione è evidente, nel momento in cui  $k = \frac{N}{2B}$  la disequazione è valida solo per  $0 \leq D \leq \frac{\alpha^2 e^{-4lBD}}{4l^2 B} \frac{1}{\log N}$ . Tuttavia, si può provare per sostituzione che se  $D > \frac{\alpha^2 e^{-4lBD}}{4l^2 B} \frac{1}{\log N}$  si esce dalla condizione per cui  $k = \frac{N}{2B}$ . Dunque, la disequazione è sempre vera. Supponiamo che  $X > \text{rexp}(-2lBD)/2$ . Poiché ogni componente salva contribuisce almeno con  $k$  al numero di vertici  $M_k^B(m+\Delta)$  allora  $M_k^B(m+\Delta) \geq kX$ . Ora, ricordando il valore minimo di  $r$  si ha che  $M_k^B(m+\Delta) \geq kX > k(\alpha N/Bk)(\text{exp}(-2lBD)/2) = [\frac{\alpha}{2B} \text{exp}(-2lBD)]N$ . Poiché  $X > \text{rexp}(-2lBD)/2$  è, allora, condizione sufficiente a quest'ultima si ha che:

$$P\{M_k^B(m+\Delta) > [\frac{\alpha}{2B} \text{exp}(-2lBD)]N\} \geq P(X > \text{rexp}(-2lBD)/2) > 1 - N^{-4}$$

cioè la tesi del lemma.  $\square$

Sarà data, ora, la prova del teorema:

**Dim. Teorema:** Siano fissati  $h_m(N), h_s(N)$  non negative e  $\delta$ . Basta dimostrare che  $P(X(\delta, h_s, h_m)) \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow \infty$ . Per fare ciò, definiremo un evento  $G(\delta)$  tale che  $P(G) \rightarrow 1$  se  $N \rightarrow \infty$  e che, se  $N$  è maggiore di qualche  $N_0$ , contemporaneamente escluda  $X$ . Introduciamo adesso alcune costanti: siano  $\alpha = \delta/4$ ,  $A = 5/\alpha^{l-1}$ ,  $D = 1, B = \lceil 2Al^2/\delta \rceil$ ,  $\beta = \alpha[\text{exp}(-2lB)]/2B$  e  $K = B^{1+\lceil 1/\beta \rceil}$ . L'importanza di tali valori sarà chiara nel seguito di questa dimostrazione. Ora, sia  $G(\delta)$  l'evento per cui avvengono contemporaneamente  $C(1), C(\delta/4), L(\delta/4, B, D)$ . Per quanto

dimostrato precedentemente si ha che  $P(G) \geq 1 - 3N^{-1} \geq 1 - o(N)$ . Supponiamo di aver fissato  $m \leq 5N$  e  $k \leq K$ . Se  $N$  è abbastanza grande,  $C(\delta/4)$  e  $L(\delta/4, B, D)$  avvengono whp. Per cui avviene che:

$$\text{se (I) } N_{\geq k}(m) \geq \delta/4 N, \text{ allora (II) } S(m + \lfloor AN/k \rfloor) \geq \delta N/4l^2$$

$$\text{se (III) } M_k^B(m) \geq N \delta/4, \text{ allora (IV) } M_k^B(m') \geq \beta N \text{ con } m' = m + N/k$$

Ciò è vero perché se  $N$  è abbastanza grande, i valori massimi di  $k$  affinché valgano i lemmi divergono. Essendo, qui,  $K$  indipendente da  $N$ , siamo certi di soddisfare le condizioni su  $k$ . Analogamente se  $N$  è abbastanza grande, si ha che  $5N \leq N^2$ . Inoltre, osserviamo che in (II) è stato usato  $\lfloor AN/k \rfloor = \lfloor \frac{5}{\alpha^{l-1}} N/K \rfloor$  in luogo di  $\lfloor \frac{4}{\alpha^{l-1}} \frac{N}{k} \rfloor$ . Tuttavia, si può mostrare, utilizzando le proprietà della funzione valore principale che il primo termine è maggiore del secondo, per  $N$  abbastanza grande (e dipendente solo da  $\delta$  e  $l$ ). Per cui, vista la monotonia di  $S(m)$ , la (II) è valida. Supponiamo ora che  $G$  avvenga. Supponiamo esistano  $m^- = \max(m | S(m) \leq h_S(N))$  e  $m^+ = \min(m | S(m) \geq \delta N)$  con  $m^+ - m^- \leq h_m(N)$ . È sufficiente provare che ciò porta a una contraddizione. Infatti, ciò implicherebbe che  $G$  e  $X$  non possono avvenire contemporaneamente e poiché  $G$  accade whp, seguirebbe immediatamente che  $P(X) \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow \infty$ . Proveremo, allora, la contraddizione. Osserviamo che, dal momento che  $N_1(0) = N \geq N$  e che  $C(1)$  accade, allora si ha che  $S(4N) \geq N/l^2$ . Segue, allora, che  $m^- \leq 4N$ . Poiché  $m^+ - m^- \leq h_m(N)$  si ha che  $m^+ \leq 5N$ . Questo è il motivo per cui ci restringiamo all'intervallo  $m \leq 5N$ . Consideriamo ora  $k \leq K/B$  e definiamo  $m_k = m^+ - \delta N / (l^2 k)$ . Questo valore è positivo, perché  $m^+$  è almeno  $4N$  e  $\delta N / (l^2 k)$  è al più  $N$ . Ora, nel passare da  $G(m_k)$  a  $G(m^+)$  sono aggiunti al più  $\binom{l}{2}(m^+ - m_k) \leq \frac{l^2}{2}(m^+ - m_k)$  open bonds al grafo, dunque le componenti con massa al massimo  $k$  di  $G(m_k)$  contribuiscono con al massimo  $k \frac{l^2}{2}(m^+ - m_k) \leq \delta N/2$  nodi a un qualsiasi cluster di  $G(m^+)$ . Ora, il cluster di dimensione maggiore ad  $m^+$  è costituito al massimo dai nodi dei cluster di massa maggiori o uguali a  $k$  dell'istante  $m_k$  più, al massimo, quelli che si sono aggiunti in  $(m^+ - m_k)$  steps cioè  $\delta N/2$ . Segue, dunque che  $S(m^+) \leq N_{\geq k}(m_k) + \delta N/2$ . Segue che:

$$N_{\geq k}(m_k) \geq S(m^+) - \delta N/2 \geq \delta N/2$$

Supponiamo, ora che  $N_{\geq Bk}(m_k) \geq \delta N/4$ . Allora, (I) avviene allo step  $m_k$  con  $Bk \leq K$  invece di  $k$ . Segue che (II) avviene allo step

$$\begin{aligned}
m^* &= m_k + \lfloor AN/Bk \rfloor \leq m_k + AN/Bk = m_k + \frac{A}{k} \frac{N}{\lfloor 2Al^2/\delta \rfloor} \leq m_k + \frac{A}{k} \frac{N}{2Al^2/\delta} = m_k + \frac{\delta}{2l^2k} N = \\
&= m^+ - \frac{\delta}{2l^2k} N = m^+ - \theta(N)
\end{aligned}$$

la quantità  $S(m^*) \geq \delta N/4l^2$ , dove  $\theta(N)$  è una funzione che scala con  $N$ . Dunque, per  $N$  grande  $S(m^*)$  è più grande di  $h_S(N)$  per cui dovrei avere che  $m^* > m^-$ , tuttavia si ha che  $m^* - m^- \leq m^+ - m^- - \theta(N) \leq o(N) - \theta(N)$ . Per  $N$  sufficientemente grande si ha che l'ultimo membro è negativo, da cui  $m^* < m^-$ , il che è assurdo. Da ciò segue che  $N_{\geq Bk}(m_k) \leq \delta N/4$  e da cui segue ancora che  $M_k^B(m_k) = N_{\geq k}(m_k) - N_{\geq Bk}(m_k) \geq N\delta/4$ . Dunque, poiché (III) avviene si ha che  $M_k^B(m^+) > \beta N$  perché  $m^+ = m_k + \delta N/(l^2k) \leq m_k + N/k$ . Questo è valido per  $k = 1, B, B^2, \dots, B^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$ , perché tutti soddisfano la condizione  $k \leq K$ . Osserviamo che ciò porta a un assurdo. Infatti, il numero di nodi a  $m^+$  in cluster di massa minore di  $B^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}$  è uguale al numero di nodi a  $m^+$  in cluster con massa tra 1 e  $B, B$  e  $B^2, \dots, B^{\lfloor 1/\beta \rfloor}$  e  $B^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}$ . Dunque:

$$N_{\leq B^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}}(m^+) = M_1^B(m^+) + M_B^B(m^+) + \dots + M_{B^{\lfloor 1/\beta \rfloor}}^B(m^+) > \lfloor 1/\beta \rfloor \beta N \geq \frac{\beta}{\beta} N = N$$

Ciò è assurdo, perché il numero di nodi nei cluster di massa minore di  $B^{\lfloor 1/\beta \rfloor + 1}$  allo step  $m^+$  risulta maggiore del numero totale di nodi del grafo. Poiché, dunque, nessuna delle condizioni su  $N_{\geq Bk}(m_k)$  sono possibili, l'assurdo è da ricercare nel fatto che l'evento  $X(\delta, h_S, h_m)$  e l'evento  $G(\delta)$  avvengano contemporaneamente. Dunque, per quanto detto precedentemente, si è giunti alla tesi del teorema.  $\square$

Questo teorema, così presentato da Riordan e Warnke, prova la continuità del processo “esplosivo” di Achlioptas e di qualunque altra  $l$ -vertex rule.

## Capitolo 2: Fenomeni di scala

### 2.1 Teoria di scala per il cluster number

È necessario, ora, mostrare le motivazioni che hanno portato nella fase iniziale a interpretare l'Achlioptas process come una transizione di fase discontinua. In una transizione continua, infatti, abbiamo visto che il parametro d'ordine non subisce discontinuità alla soglia di percolazione. Dunque, nel limite termodinamico, senza alcuna discontinuità in  $t = t_c$ , la quantità  $S(t)/N = 0$  per  $t < t_c$ , mentre  $S(t)/N$  è una quantità finita per  $t > t_c$ . Ovviamente, vista la continuità in  $t = t_c$ , possiamo pensare che per  $t$  poco maggiore di  $t_c$  la relazione sia approssimabile a  $S(t)/N = B(t - t_c)^\beta$  con  $\beta > 0$   $B > 0$ . È evidente che valori di  $\beta$  minori di 1, rendono la quantità  $\frac{d}{dt}(S(t)/N)$  divergente per  $t = t_c$ . Inoltre, quanto più  $\beta$  è piccolo, tanto più la variazione di  $S(t)/N$  attorno a  $t_c$  appare brusca, seppur continua. Avendo già provato la continuità, ci aspettiamo di ritrovare un parametro  $\beta$  non nullo, ma molto minore di 1, cosa che giustificherebbe completamente questo insolito comportamento.

Prima di determinare il fattore  $\beta$ , è necessario ricordare alcuni risultati riguardo la teoria di scala per il cluster number  $n_s$ , cioè la densità di cluster di massa  $s$  nel grafo. Chiaramente  $n_s = N_s/(sN)$ <sup>(9)</sup>. In analogia con i risultati per la percolazione ordinaria su Bethe Lattice è stato postulato che, per  $s$  sufficientemente grande,  $n_s(t) = s^{-\tau}h[s(t - t_c)^{1/\sigma}]$ , dove  $h[\ ]$  è una funzione universale,  $\tau$  e  $\sigma$  sono due esponenti critici, il primo detto esponente di Fisher. Nella percolazione ordinaria la funzione universale è nella forma di esponenziale decrescente, e per grafi di Erdos-Renyi è  $h[x] \propto \frac{\exp(-2x)}{\sqrt{2\pi}}$ . Inoltre, è sempre vera la seguente relazione tra i vari esponenti:  $\beta = \frac{\tau-2}{\sigma}$ . I risultati per la percolazione ordinaria su Erdos-Renyi lattice sono identici a quelli su Bethe lattice e in particolare si ottiene che  $\beta = 1, \tau = 5/2, \sigma = 1/2$ . Osserviamo che per  $t = t_c$  si ha che  $n_s(t_c) = s^{-\tau}$ . In generale, è possibile generalizzare questo ragionamento, cioè se una grandezza  $F(s) = s^X$  per  $t = t_c$ , allora per la teoria di scala  $F(s, t) = s^X h_F[s(t - t_c)^{1/\sigma}]$  dove  $h_F$  è ancora una volta una funzione universale.

---

<sup>9</sup> Per uniformità col cap.1 si è usato  $N_s$  come il numero totale in tutto il grafo di nodi in cluster di massa  $s$ . Per questo il cluster number, essendo il numero di cluster di massa  $s$  sul numero totale di nodi, è  $n_s = N_s/(sN)$ : infatti  $N_s/s$  è il numero totale di cluster di massa  $s$  nel grafo.

## 2.2 Regola di da Costa e suoi esponenti critici

Nel 2010 Rui A. da Costa *et al*<sup>10</sup> mostrarono in modo del tutto indipendente dal lavoro di Riordan e Warnke la continuità della PR proposta da Achlioptas, tuttavia attraverso l'analisi numerica e analitica delle equazioni alla base di un algoritmo leggermente diverso. Quest'ultimo prevede che ad ogni step temporale:

- Siano selezionate casualmente due coppie di nodi  $(i, j)$ ,  $(k, l)$  su un grafo  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;
- Da ognuna delle coppie sia scelto il nodo che appartiene al cluster di massa minore e siano tra loro collegati attraverso un open bond.

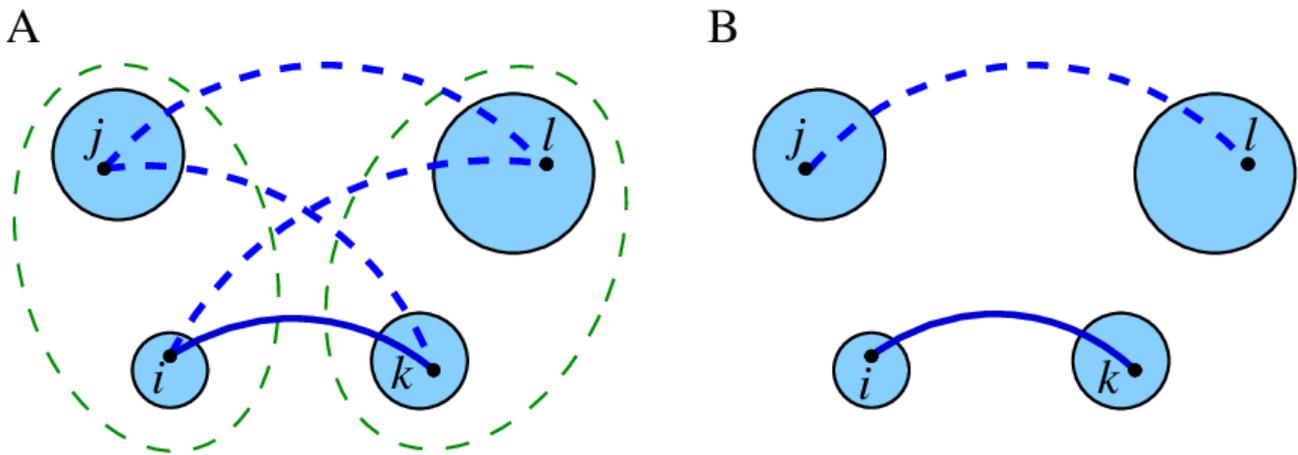


Figura 4: Confronto tra la regola di da Costa (A) e la tradizionale PR di Achlioptas (B). Fonte: R.A. da Costa, S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, *Explosive percolation transition is actually continuous*, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 255701.

Si noti che i collegamenti che possono essere instaurati sono  $il, ik, jl, jk$ . Detto  $p(x, y)$  il prodotto delle masse dei cluster a cui appartengono  $x$  e  $y$ , la coppia scelta è quella che tra le 4 minimizza  $p$ , in base a quanto prescritto dal secondo punto dell'algoritmo. Osserviamo come questo tipo di algoritmo favorisca una transizione a valori di  $t$  maggiori, e quindi più brusca alla soglia di percolazione rispetto alla product rule di Achlioptas. Infatti, quest'ultima seleziona le coppie  $(i, k)$  e  $(j, l)$ , così, i possibili open bond sono solo  $ik$  e  $jl$ . È allora evidente che la nuova regola è più stringente della PR di Achlioptas e favorisce maggiormente rispetto a quest'ultima l'aggregarsi di cluster di piccola dimensione rispetto a quelli di dimensione maggiore. Provando la continuità per la regola di da Costa *et al.* si prova anche la continuità della PR. Tuttavia, avendo già mostrato analiticamente la continuità di ogni *l-vertex rule*, il nostro interesse sta ora nel ricavare gli esponenti critici per questa nuova regola, in modo tale da comprendere le caratteristiche di questi processi esplosivi. Col fine di studiare ciò, consideriamo la quantità  $P(s)$ , cioè la probabilità che un nodo

<sup>10</sup>R.A. da Costa, S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, *Explosive percolation transition is actually continuous*, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 255701.

scelto casualmente si trovi in un cluster di dimensione finita  $s$ , chiaramente si ha che  $P(s) \propto sn_s$ , cioè proporzionale al numero di nodi che si trovano in cluster di massa  $s$ . Sommando su tutti i valori finiti di  $s$ , si ottiene la probabilità che un nodo selezionato casualmente appartenga a un cluster di massa finita. Poiché un nodo può trovarsi nel percolating cluster (di massa infinita nel limite termodinamico) con probabilità  $S(t)/N$ , segue che:

$$\sum_s P(s) + S/N = 1$$

Definiamo, ora, la quantità  $Q(s)$ , cioè la probabilità che selezionando casualmente due nodi nel reticolo, quello che appartiene al cluster di dimensione minore è in un cluster di massa  $s$ . Ovviamente, sommando su tutti i cluster di massa finita si ottiene la probabilità che scegliendo casualmente due nodi, quello che appartiene al cluster di dimensione minore è in un cluster di massa finita, cioè la probabilità che almeno uno dei due nodi sia in un cluster di dimensione finita. Chiaramente, due nodi possono trovarsi contemporaneamente nel percolating cluster con probabilità  $(S/N)^2$ , da cui:

$$\sum_s Q(s) + (S/N)^2 = 1$$

Introduciamo adesso, le quantità  $P_{cum}(s) = \sum_{u \geq s} P(u)$  e  $Q_{cum}(s) = \sum_{u \geq s} Q(u)$ . La prima è la probabilità che un nodo appartenga a un cluster di massa finita e almeno  $s$ , la seconda è la probabilità che selezionati due nodi, quello che appartiene al cluster di dimensioni minori è in un cluster di massa almeno  $s$ . Osserviamo che  $P_{cum}(s) = P(s) + P_{cum}(s+1)$ , con una relazione analoga anche per  $Q_{cum}(s)$ . Esiste un'equazione che lega queste due distribuzioni di probabilità. Infatti, la probabilità che due nodi si trovino in cluster di massa almeno  $s$  (cioè includendo che entrambi possano essere in cluster di massa infinita) è  $Q_{cum}(s) + (S/N)^2$ , tuttavia è anche evidente che questa stessa quantità possa essere scritta come  $[P_{cum}(s) + (S/N)][P_{cum}(s) + (S/N)]$ . Da ciò segue l'equazione:

$$Q_{cum}(s) + (S/N)^2 = [P_{cum}(s) + (S/N)]^2$$

Da ciò segue che, sviluppando il quadrato:

$$Q_{cum}(s) = [P_{cum}(s) + 2(S/N)]P_{cum}(s) \quad (*)$$

Ricordando la proprietà per  $Q_{cum}(s)$  e  $P_{cum}(s)$  e utilizzando nuovamente (\*):

$$\begin{aligned}
Q_{cum}(s) &= Q(s) + Q_{cum}(s+1) = Q(s) - [P_{cum}(s+1) + 2(S/N)]P_{cum}(s+1) \\
&= Q(s) + [P_{cum}(s) - P(s) + 2(S/N)][P_{cum}(s) - P(s)]
\end{aligned}$$

Segue che:

$$Q_{cum}(s) = Q(s) + P_{cum}^2(s) - 2P_{cum}(s)P(s) + P^2(s) + 2(S/N)P_{cum}(s) - 2(S/N)P(s)$$

Sostituendo ora (\*) al primo membro, si ottiene che:

$$Q(s) = -P^2(s) + 2(S/N)P(s) + 2P_{cum}(s)P(s) = [2P_{cum}(s) + 2(S/N) - P(s)]P(s)$$

Dal momento che  $P_{cum}(s) + (S/N)$  è la probabilità che un nodo appartenga a un cluster di massa almeno  $s$ , posso riscriverla attraverso la probabilità che appartenga a un cluster di massa minore di  $s$ , cioè  $P_{cum}(s) + (S/N) = 1 - P(1) - P(2) - \dots - P(s-1)$ . Dunque, in definitiva, l'equazione è:

$$Q(s) = [2 - 2P(1) - 2P(2) - \dots - 2P(s-1) - P(s)]P(s) \quad (2.1)$$

Appare evidente che per conoscere  $Q(s)$  è necessario conoscere la distribuzione di  $P(s')$  per  $s' \leq s$ . Sfrutteremo, inoltre, un'equazione temporale che lega tra loro queste due funzioni:

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = s \sum_{u+v=s} Q(u, t)Q(v, t) - 2sQ(s, t) \quad (2.2)$$

Quest'equazione è abbastanza intuitiva ed è facilmente comprensibile se si tiene a mente la regola di da Costa. Infatti, la prima somma al secondo membro è la probabilità che a  $t$  fissato, selezionate due coppie di nodi, quelli nei cluster di dimensioni minori in ciascuna coppia sono in cluster di dimensioni rispettivamente  $u$  e  $v$ , con  $u + v = s$ . Secondo la regola di da Costa, questa condizione porta alla formazione di un cluster di massa  $s$ . Moltiplicando per gli  $s$  nodi equivalenti, si ottiene dunque la parte positiva del rate di  $P(s)$  all'istante  $t$ . D'altra parte, a ciò va sottratta la probabilità che in almeno una coppia selezionata (su due totali), il nodo appartenente al cluster di massa minore sia in un cluster di massa  $s$ . Infatti, ciò causa la scomparsa di un cluster di massa  $s$  all'istante  $t$ . Analogamente a prima, il fattore  $Q(s, t)$  è moltiplicato per il numero  $s$  di nodi equivalenti nel cluster e per 2, a causa del fatto che ci sono due coppie selezionabili. Dunque, il punto di partenza per il nostro studio sono le equazioni accoppiate (2.1) e (2.2). Verrà dato prima un approccio numerico di tali equazioni, successivamente, sulla base dei risultati ottenuti, si farà un confronto con i risultati analitici. Innanzitutto, infatti, la coppia di equazioni è risolvibile numericamente nel seguente modo: si pone  $s = 1$ , dunque si risolve la prima coppia di equazioni che contiene solo  $P(1, t)$  e  $Q(1, t)$ . Si procede poi con  $s = 2$ , che contiene come incognite solo  $P(2, t)$  e  $Q(2, t)$ , dal

momento che nel passo precedente sono stati determinati i loro valori per  $s = 1$ . Dunque, ad ogni passo,  $s$  è aumentato di un'unità. Lo studio di da Costa ha previsto la risoluzione numerica di tali equazioni fino a un valore massimo di  $s$  di  $10^6$ . In questo modo  $(S(t)/N) \approx 1 - \sum_{s=1}^{10^6} P(s, t)$ , valido nel limite di  $N \rightarrow \infty$ , poiché le equazioni (1) e (2) sono vere nel limite termodinamico. In effetti, i risultati numerici ottenuti da questo tipo di analisi hanno dato come migliore stima del parametro d'ordine al di sopra della soglia di percolazione la relazione  $S(t) = B(t - t_c)^\beta N$ , con  $t_c = 0.923207508(2)$ ,  $\beta = 0.0555(1)$  e  $B = 1.080$ . Ovviamente, oltre che confermare i risultati sulla continuità provati precedentemente, il valore piccolo di  $\beta$  determinato è in accordo con le nostre previsioni. Inoltre, la stessa analisi numerica mostra come gli andamenti di  $P(s, t_c)$  e  $Q(s, t_c)$  siano delle potenze in  $s$ . Ricercando un'analogia con il fenomeno ordinario e ponendo  $n_s(t_c) =$

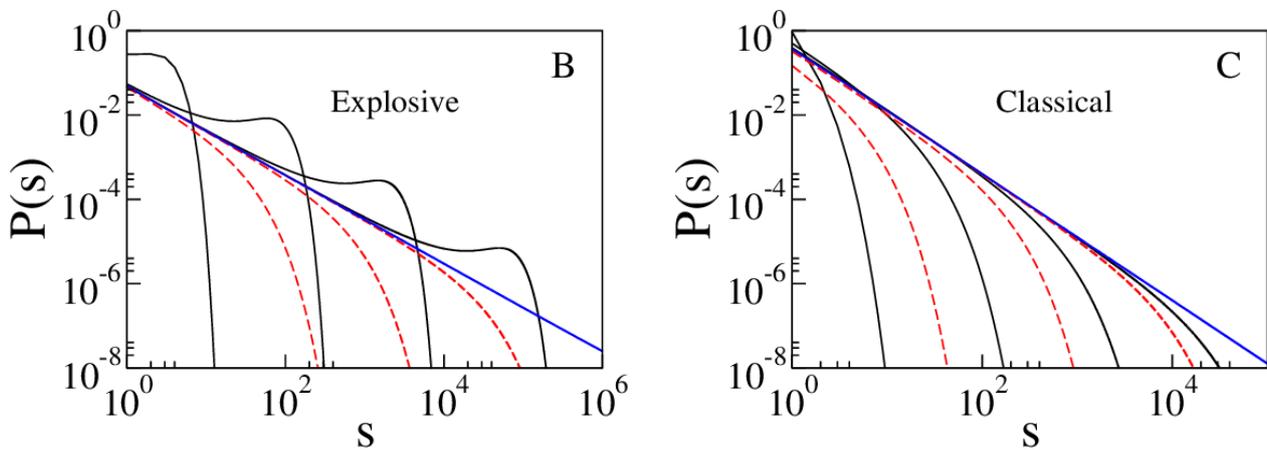


Figura 5: Le curve rappresentano gli andamenti di  $P(s)$  vs  $s$  (grafico semi-log) nel caso esplosivo (B) e classico (C). Le curve in blu, lineari, sono alla soglia di percolazione, quelle in rosso sono valutate a diversi valori di  $t$  per  $t > t_c$ , analogamente quelle in nero, ma per valori di  $t$  maggiori di  $t_c$ . Fonte: R.A. da Costa, S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, *Explosive percolation transition is actually continuous*, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 255701.

$s^{-\tau}$ , per  $s$  grande, e ricordando la proporzionalità tra  $P(s, t)$  e  $n_s(t)$ , si ottiene  $P(s, t_c) \propto s^{1-\tau}$ . Cercando una soluzione in tale forma, segue che  $Q(s, t_c) \propto s^{3-2\tau}$ . Il confronto coi dati sperimentali ottenuti porta ad un valore di  $\tau = 2.04762(2)$ , ben diverso dal risultato di  $5/2$  del fenomeno ordinario. Come si vede in Fig.5, l'evoluzione in  $s$  di  $P(s, t)$  a  $t$  fissato e diverso da  $t_c$  è simile a quello della percolazione classica, nel caso di  $t > t_c$ , ma per  $t < t_c$  le curve presentano andamenti diversi. Al di sotto della soglia di percolazione, infatti, l'andamento in funzione di  $s$  è monotono decrescente per la percolazione classica, mentre presenta un massimo relativo ad  $s$  non nullo per quella esplosiva. Analoghe differenze si trovano nell'evoluzione in  $t$  di tali funzioni ad  $s$  fissato. Esse, infatti, sono in entrambi casi delle curve a campana, ma se per  $s$  grande, il picco è in corrispondenza di  $t_c$  per il fenomeno ordinario, esso si trova sempre per  $t < t_c$  nella transizione esplosiva (Figura 6). In effetti, tali differenze vanno ricercate attraverso l'uso di una teoria di scala. In particolare, l'analisi numerica dei dati per  $t < t_c$  ha portato alla conclusione che si osservano i

comportamenti tipici della classica teoria di scala. Per quanto detto nei paragrafi precedenti, allora, visto l'andamento di  $P$  e  $Q$  a  $t_c$ , possiamo cercare il loro andamento per  $t \leq t_c$  nella forma:

$$P(s, t) = s^{1-\tau} f[s|t - t_c|^{1/\sigma}]$$

$$Q(s, t) = s^{3-2\tau} g[s|t - t_c|^{1/\sigma}]$$

La cosa interessante è che qui le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  non sono esponenziali decrescenti come nel caso ordinario, ma la loro migliore stima è rappresentata da curve gaussiane (Figura 7).

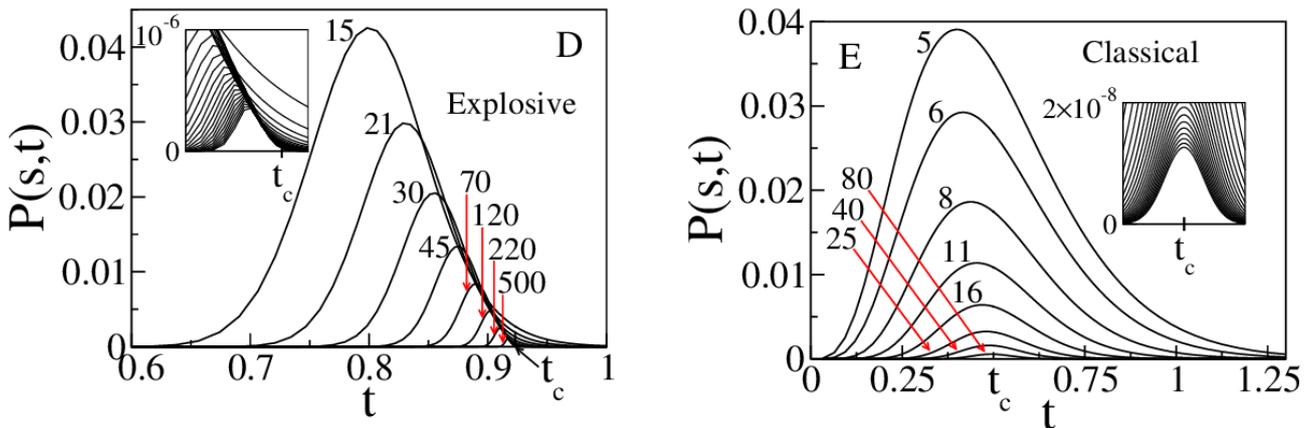


Figura 6: Le curve rappresentano gli andamenti di  $P(s, t)$  vs  $t$  per diversi valori di  $s$ , nel caso esplosivo (D) e nel caso classico (E). I riquadri interni rappresentano gli andamenti di tali curve per  $s$  grande. Fonte: R.A. da Costa, S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, Explosive percolation transition is actually continuous, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 255701.

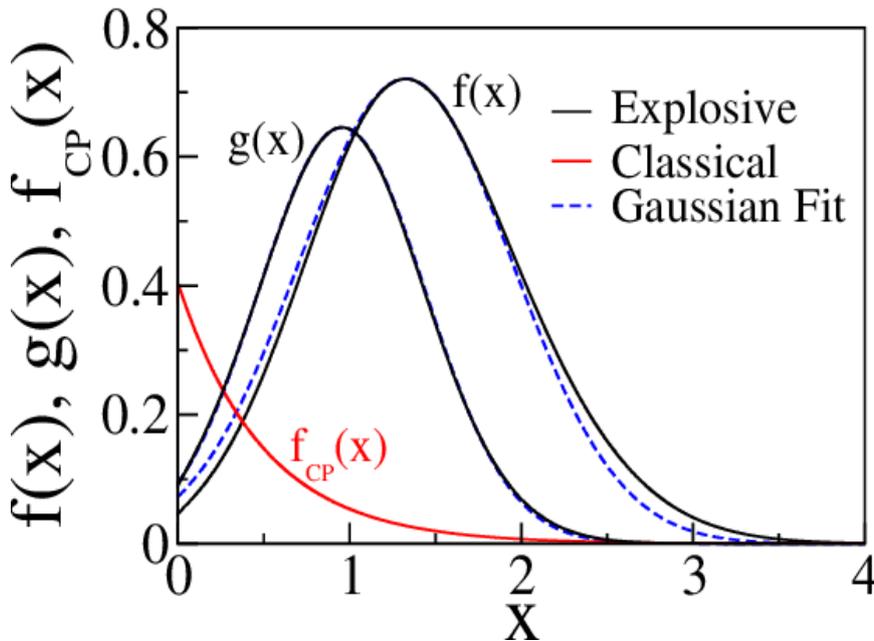


Figura 7: Confronto tra la curva di scala  $f_{CP}(x) = e^{-2x}/\sqrt{2\pi}$  valida per il caso classico (in rosso) e le funzioni di scala  $f(x)$  e  $g(x)$  nel caso esplosivo (in nero). Le linee tratteggiate in blu sono il fit gaussiano per  $f$  e  $g$ . Fonte: R.A. da Costa, S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, Explosive percolation transition is actually continuous, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 255701.

Si vuole, ora, approcciare alle equazioni (2.1) e (2.2) in maniera differente e analitica, alla luce dei risultati appena ottenuti. Introduciamo le seguenti funzioni generatrici:

$$\rho(z) = \sum_s P(s)z^s$$

$$\sigma(z) = \sum_s Q(s)z^s$$

Osserviamo che per quanto scritto in precedenza in questa sezione, si ha che  $\rho(1) = 1 - S/N$  e che  $\sigma(1) = 1 - (S/N)^2$ . In particolare, l'equazione (2.2) può essere scritta in termini delle funzioni generatrici nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [1 - \rho(z, t)] = -\frac{\partial}{\partial \log(z)} [1 - \sigma(z, t)]^2 \quad (2.3)$$

Si possono infatti sostituire le due funzioni generatrici e, dopo pochi calcoli, ottenere entrambi i membri come sviluppo di potenze di  $z$ . Eguagliando i coefficienti di tale sviluppo si ottiene l'eq. (2.2). L'equazione (2.1), è stata scritta in una relazione intermedia nella forma:  $Q(s) = [2P_{cum}(s) + 2(S/N) - P(s)]P(s)$ . Ricordando che  $P_{cum}(s) - P(s) = P_{cum}(s + 1)$ , segue che l'equazione (2.1) è valida anche nella forma:

$$Q(s) = [P_{cum}(s) + P_{cum}(s + 1) + 2(S/N)]P(s)$$

Ora, nella regione al di sopra della soglia di percolazione, è ragionevole pensare che  $P_{cum}(s)$  e  $P_{cum}(s + 1)$  siano trascurabili rispetto a  $(S/N)$ , da cui segue che:

$$Q(s) \approx 2(S/N)P(s) \quad \text{con } t > t_c$$

Segue allora che:  $1 - (S/N)^2 - \sigma(z) = \sigma(1) - \sigma(z) = \sum_s Q(s)(1 - z^s) \approx \sum_s 2(S/N)P(s)(1 - z^s) = [2(S/N)][\rho(1) - \rho(z)] = [2(S/N)][1 - S/N - \rho(z)]$ . Dunque, infine:

$$1 - \sigma(z) \approx 2(S/N) \left[ 1 - \rho(z) - \frac{1}{2}(S/N) \right]$$

Sostituiamo, adesso, quest'ultima nella (2.3), la quale, dunque, al di sopra della soglia di percolazione diventa:

$$\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = 8(S(t)/N)^2 [\rho(z, t) - 1 + \frac{1}{2}(S(t)/N)] \frac{\partial \rho(z, t)}{\partial \log(z)} \quad (2.4)$$

L'analisi di questa equazione sarà di tipo semi-analitico. Infatti, supporremo di partire da alcuni risultati ricavati dall'analisi numerica. Porremo, infatti, come condizione  $P(s, t_c) = f(0)s^{1-\tau}$  e che  $S(t)/N = B(t - t_c)^\beta$ . Qui  $f(0) = 0.04618(2)$  è il valore in  $x = 0$  della funzione di scala per  $P$ , invece  $\tau = 2.04762(2)$ , entrambi ricavati prima numericamente. Risolveremo l'equazione col fine di trovare le relazioni che legano  $\beta$  e  $B$  alle altre grandezze e come verifica dei loro risultati numerici. La condizione iniziale su  $P(s, t_c)$  su  $P$  può essere trasformata in una condizione iniziale  $\rho(z, t_c)$  su  $\rho$ . Già nell'ambito della percolazione ordinaria sono state studiate le condizioni iniziali su funzioni generatrici di leggi di potenza, come lo è la relazione che lega  $P$  a  $s$ . Sfruttando tali risultati<sup>11</sup>, si può scrivere che:

$$1 - \rho(z, t_c) = (-\log(z))^{\tau-2} f(0) \Gamma(2 - \tau) \quad (2.5)$$

Ora, per semplicità, utilizzeremo le variabili ausiliarie  $\epsilon = (t - t_c)^{2\beta+1}$  e  $x = \log(z)$ . Osservando che  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = (2\beta + 1)(t - t_c)^{2\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon}$ , l'equazione (2.4) diventa:

$$(2\beta + 1)(t - t_c)^{2\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} = 8B^2(t - t_c)^{2\beta} \left[1 - \rho - \frac{B}{2}(t - t_c)^\beta\right] \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Sfruttando il fatto che  $(t - t_c)^\beta = [(t - t_c)^{2\beta+1}]^{\beta/2\beta+1} = \epsilon^{\beta/2\beta+1}$ , l'equazione è, in definitiva:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} = \frac{8B^2}{(2\beta + 1)} \left[1 - \rho - \frac{B}{2} \epsilon^{\beta/2\beta+1}\right] \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.6)$$

L'equazione può essere risolta facendo un cambio di variabili. Infatti, la nostra incognita sarà  $x(\rho, \epsilon)$  e non più  $\rho(x, \epsilon)$ . Quindi si avrà che:

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(\rho, \epsilon) = \frac{8B^2}{(2\beta + 1)} \left[1 - \rho - \frac{B}{2} \epsilon^{\beta/2\beta+1}\right]$$

Integrando rispetto ad  $\epsilon$ , si ottiene:

$$x = \log(z) = \frac{8B^2}{(2\beta + 1)} \left[1 - \rho - \frac{B}{2} \frac{\epsilon^{\beta/2\beta+1}}{1 + \beta/2\beta + 1}\right] \epsilon + F(\rho) \quad (2.7)$$

Dove  $F(\rho)$  è la funzione (costante in  $\epsilon$ ) ottenuta in seguito all'integrazione. Il suo valore può essere determinato dalla condizione iniziale. Infatti, per  $t = t_c$ , si ha  $\epsilon = 0$  e dunque:

$$\log(z) = F(\rho(z, t_c))$$

<sup>11</sup> Per una estesa trattazione si rimanda all'appendice K di *Scaling theory and exactly solved models In the kinetics of irreversible aggregation*, F. Leyvraz, *Phys. Rep.* 383, 95 (2003).

Confrontando con l'equazione (2.5), segue:  $F(\rho) = -(1 - \rho)^{1/(\tau-2)} f(0)^{-1/\tau-2} |\Gamma(2 - \tau)|^{-1/\tau-2}$ .

Infine, dunque, l'equazione (2.7) diventa:

$$\log(z) = \frac{8B^2}{(2\beta + 1)} \left[ 1 - \rho - \frac{B}{2} \frac{\epsilon^{\beta/2\beta+1}}{1 + \beta/2\beta + 1} \right] \epsilon - (1 - \rho)^{1/(\tau-2)} f(0)^{-1/\tau-2} |\Gamma(2 - \tau)|^{-1/\tau-2}$$

Ora, ponendo  $z = 1$ , il primo membro è nullo. Ricordando che  $1 - \rho(z = 1) = S/N = B(t - t_c)^\beta$  si ottengono per confronto tra i due addendi le quantità  $B$  e  $\beta$ . In particolare, siamo interessati alla relazione tra  $\beta$  e  $\tau$ . Si ottiene che  $\tau = 2 + \beta/(3\beta + 1)$ . Osserviamo che i valori sperimentali dei due esponenti rispettano correttamente la relazione. Inoltre, sfruttando la relazione tra  $\beta$ ,  $\tau$  e  $\sigma$  si ottiene infine che  $\sigma = 1/(3\beta + 1)$ .

### 2.3 Finite size scaling

Tra le osservazioni che portarono a definire, in un primo momento, la transizione di fase come discontinua ci furono quelle relative alla teoria di scala di alcune grandezze di interesse al variare delle dimensioni lineari del sistema, ovvero del numero  $N$  di nodi del sistema nel caso di grafi di Eros-Renyi. È già stato presentato nell'introduzione che, per una transizione del secondo ordine, una grandezza  $X$  che ha un andamento del tipo  $X \sim (t - t_c)^\alpha$  nel limite termodinamico nell'intorno di  $t_c$ , allora può essere scritta nel limite di  $N$  finito, ma abbastanza grande attraverso la relazione:

$$X \approx (t - t_c)^\alpha F((t - t_c) N^{\frac{1}{\nu}}) \quad (2.8)$$

Dove  $F$  è una funzione indipendente da  $N$  e  $\nu$  è strettamente legato alla lunghezza di correlazione. Si noti che, in generale, questo tipo di relazione permette lo studio delle transizioni del secondo ordine, per sistemi le cui dimensioni sono limitate, cioè nel nostro caso, in grafi il cui numero di nodi è finito. L'utilizzo della teoria di scala permette, dunque, di studiare le transizioni di fase nel momento in cui non vi siano metodi matematici analitici soddisfacenti per trattare il limite termodinamico. Infatti, il suo utilizzo sfrutta i dati sperimentali ottenuti attraverso simulazioni al computer e attraverso i quali si può provare a risalire alle caratteristiche principali del processo. Allora, nell'applicazione pratica di tale teoria, considerando l'equazione (2.8) la grandezza  $X$  è da intendere come valore medio  $\langle X \rangle$  su un certo numero di misure di  $X$  per ogni valore fissato di  $t$  e  $N$ . Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, che  $S/N \approx (t - t_c)^\beta$  per  $t$  poco maggiore di  $t_c$  nel limite termodinamico. La teoria di scala, applicabile alle transizioni continue, e dunque anche ai fenomeni esplosivi qui analizzati, ci porta a scrivere:

$$\langle S/N \rangle \approx (t - t_c)^\beta g((t - t_c) N^{\frac{1}{\nu}}) \quad (2.9)$$

Ovviamente, questo valor medio deve essere compatibile con lo stesso valor medio ottenibile sfruttando la distribuzione  $P_{t,N}(S/N)$  di  $S/N$  a valori fissati di  $t$  e  $N$ . Noti risultati<sup>12</sup> della teoria di scala hanno portato a scrivere tale distribuzione, al valore  $t = t_c$  come:

$$P_{t=t_c,N}(S/N) \approx N^{\beta/\nu} f[(S/N)N^{\beta/\nu}] \quad (2.10)$$

Ora, nell'ambito dei fenomeni del secondo ordine, talvolta la funzione  $f$  si presenta sotto forma di curva con due picchi. Tuttavia, al crescere di  $N$  la valle tra i picchi presente nella funzione  $P$  non supera una certa profondità. Inoltre, per  $N \rightarrow \infty$  la distanza orizzontale tra i picchi tende a 0, così che nel limite termodinamico  $P_{t=t_c,N}(S/N)$  presenta un solo picco. Viceversa, la distribuzione del parametro d'ordine ha delle caratteristiche differenti nel caso di transizione del primo ordine. Infatti, questa presenta due picchi, la cui profondità è maggiore del caso precedente. Inoltre, nel limite termodinamico, le posizioni dei picchi non coincidono, rimanendo, dunque, con due valori più frequenti per il parametro d'ordine. In particolare, questa distanza coincide con il salto del parametro d'ordine al valore critico del parametro di controllo. In genere, i valori per cui si hanno i due massimi sono interpretati come gli stati per cui si ha l'una o l'altra fase termodinamica, mentre i valori nella valle, sono quelli per cui si ha una coesistenza tra le due fasi. Per questo tipo di transizione, dunque, dal valore di  $P_{t=t_c,N}(S/N)$  non è possibile risalire ad un valore di  $\langle S/N \rangle$  che sia compatibile con una teoria di scala, quindi quest'ultima non è applicabile. Ora, alcuni studi iniziali osservarono come la funzione  $P_{t=t_c,N}(S/N)$  fosse caratterizzata da due picchi. La discontinuità della transizione fu giustificata dall'aumentare della profondità della valle tra questi, al crescere di  $N$ . In precedenza, abbiamo provato analiticamente la continuità della transizione. Appare chiaro, dunque, che quanto mostrato non fu sufficiente. Per provare la discontinuità era infatti necessario mostrare il salto del parametro d'ordine, e quindi, per quanto detto prima, mostrare che nel limite termodinamico i due picchi non si sovrapponevano.

## 2.4 Considerazioni matematiche

Prima di approcciare alla ricerca delle funzioni di scala per la percolazione esplosiva, bisogna fare alcune precisazioni matematiche. Infatti, le relazioni (2.9) e (2.10) sono assunte valide per  $N$  abbastanza grande. Tuttavia, in maniera rigorosa, la definizione delle funzioni  $g$  ed  $f$  vanno intese nel limite in cui  $N$  tende all'infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-(\beta/\nu)} P_{t=t_c,N}[(S/N) = zN^{-(\beta/\nu)}] = f(z)$$

<sup>12</sup> Questa relazione di scala per la distribuzione di probabilità del parametro d'ordine attorno al valore critico del parametro di controllo è stata osservata in transizioni del secondo ordine attraverso simulazioni al computer in A. D. Bruce, N. B. Wilding, Scaling fields and universality of the liquid-gas critical point, Phys. Rev. Lett. 68, 193 (1992).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [zN^{-\frac{1}{\nu}}]^{-\beta} \langle S/N \rangle_{(t-t_c)=zN^{-\frac{1}{\nu}}} = g(z)$$

Ora, nel caso di transizione continua, questa convergenza va intesa come convergenza puntuale. Ciò è ovviamente, in linea con l'andamento di  $P_{t=t_c, N}$  osservato nel paragrafo precedente. D'altra parte, se, nel caso di transizione del primo ordine, si provasse ad usare la prima di queste due relazioni, la funzione  $f(z)$  risulterebbe una funzione con due  $\delta$ -picchi. Chiaramente, ricordiamo che in questo caso la convergenza non può essere intesa come convergenza puntuale, poiché non esiste alcuna funzione analitica di tale tipo. Per tale motivo la convergenza è intesa in senso debole, cioè nel senso delle distribuzioni. In questo caso, in genere, non si parla di finite size scaling, che dunque rigorosamente non è utilizzato nel caso delle transizioni del primo ordine. Vedremo che nell'ambito delle transizioni esplosive sarà necessario introdurre una nuova teoria di scala, in cui si assume una posizione intermedia. La convergenza ad  $f$  sarà intesa solo in senso debole, mentre solo per certi intervalli di  $g$  si potrà intendere una convergenza nel senso delle funzioni.

## 2.5 Finite size scaling per fenomeni esplosivi

Verranno ora presentati i risultati ottenuti da P. Grassberger *et al.* nell'ambito dello studio<sup>13</sup> del finite size scaling, per diversi fenomeni esplosivi, varianti della PR di Achlioptas. Essi hanno esaminato l'originale PR su grafi all-to-all, la variante di da Costa, una PR su reticolo quadrato bidimensionale e l'*adjacent edge rule* (AE). In particolare, quest'ultima è basata sul seguente algoritmo, il quale ad ogni passo temporale prevede che<sup>14</sup>:

- Un nodo  $i$  è selezionato casualmente tra gli  $N$  possibili del grafo  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;
- Due nodi  $j$  e  $k$  diversi da  $i$  sono selezionati casualmente tra gli  $N$  possibili del grafo;
- Un open bond tra  $i$  e  $j$  è aggiunto al grafo se la massa del cluster a cui appartiene  $j$  è minore di quella a cui appartiene  $k$ , viceversa è un open bond tra  $i$  e  $k$ .

Sono state effettuate simulazioni su grafi con numero di nodi compresi tra  $2^{10}$  e  $2^{26}$ . Inoltre, i dati qui presentati sono da intendere come valori medi su circa  $10^8$  simulazioni per i valori più piccoli di  $N$ , viceversa, con almeno  $10^4$  nel caso di  $N$  più grande. In particolare, i valori scelti di  $t_c$  per lo studio di  $P_{t=t_c, N}(S/N)$  sono quelli per cui la distribuzione presenta due picchi dello stesso peso, normalizzato ad 1. Essa è, infatti, intuitivamente, una buona stima di  $t_c$ , in quanto la probabilità che il cluster di massa massima sia dell'ordine di  $N$  è uguale a quella per cui esso

<sup>13</sup> P. Grassberger, C. Christensen, G. Bizhani, S.-W. Son, M. Paczuski, Explosive percolation is continuous, but with unusual finite size behavior, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 225701.

<sup>14</sup> Per maggiori dettagli su AE, consultare R. M. D'Souza and M. Mitzenmacher, Local cluster aggregation models of explosive percolation, Phys. Rev. Lett. 104, 195702 (2010).

sia piccolo rispetto ad  $N$ , e quindi è interpretabile come il valore critico del parametro di controllo. In particolare, lo studio di tale distribuzione per diversi valori di  $N$  porta alla conclusione che la valle tra i due picchi diventa sempre più profonda al crescere di  $N$ , ma allo stesso tempo entrambi i picchi tendono a spostarsi verso sinistra lungo l'asse di  $S/N$ . Ciò si osserva per tutti e quattro i modelli analizzati, seppur con qualche differenza. L'AE mostra il più veloce shifting dei picchi e il minore approfondimento della valle tra essi al crescere di  $N$ . L'esatto opposto avviene nel modello di da Costa (Fig. 8). Detta  $(S/N)_{\pm}$  l'ascissa del picco destro (sinistro) di  $P_{t=t_c, N}$ , si osserva un andamento del tipo:

$$(S/N)_{\pm} \sim N^{-\eta_{\pm}}$$

Figura 8: Distribuzione  $P_{t=t_c, N}$  per i diversi algoritmi e per diversi valori di  $N$ . Fonte: P. Grassberger, C. Christensen, G. Bizhani, S.-W. Son, M. Paczuski, Explosive percolation is continuous, but with unusual finite size behavior, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 225701.

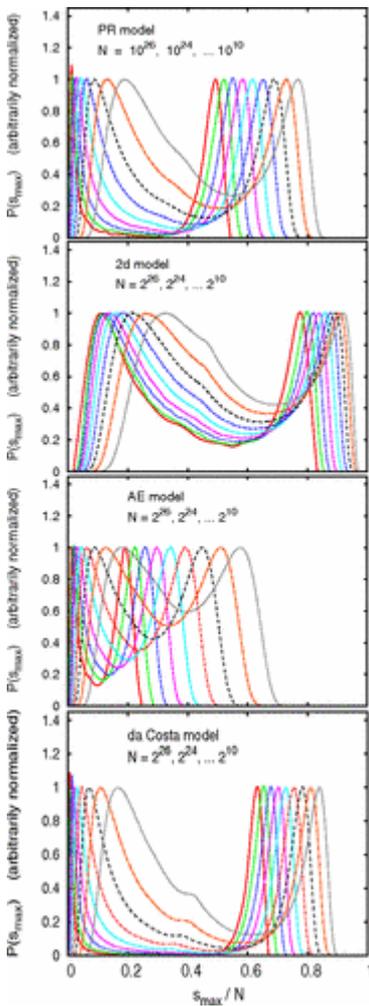
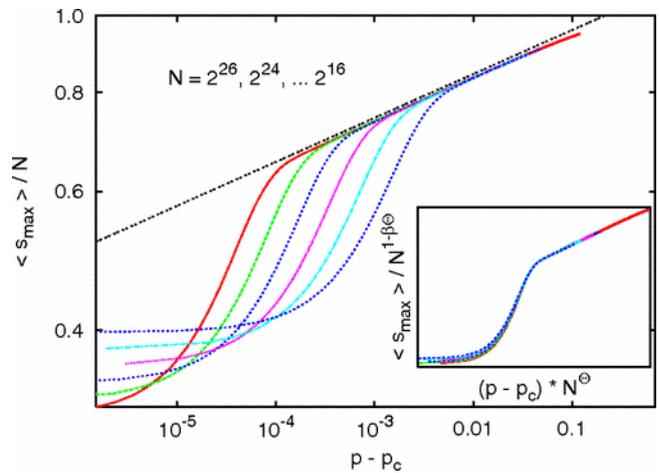


Figura 9: log-log plot delle curve  $\langle S/N \rangle$  in funzione di  $t - t_c > 0$  per differenti valori di  $N$  per il modello da Costa. Notare che per valori di  $\langle S/N \rangle > (S/N)_+$  le curve si schiacciano su  $(t - t_c)^{\beta}$  come previsto. Nel riquadro interno, andamenti della stima di  $g(z)$  ottenuta dai dati sperimentali. Sull'asse delle ascisse  $p - p_c$  corrisponde a  $t - t_c$ . Fonte: P. Grassberger, C. Christensen, G. Bizhani, S.-W. Son, M. Paczuski, Explosive percolation is continuous, but with unusual finite size behavior, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 225701.



In particolare, per tutti e quattro i modelli si osserva  $0 < \eta_+ < \eta_-$ . Dunque, il picco di destra si muove più lentamente verso lo 0 rispetto al picco di sinistra. Allora, in una fase iniziale, al crescere di  $N$ , la distanza tra essi aumenta. Solo per  $N$  abbastanza grande la distanza fra essi diminuisce e tende, dunque, a 0, in base alla relazione appena scritta. Tuttavia, oltre a questa caratteristica che permette di provare la continuità dei processi attraverso i fenomeni di scala, ulteriori osservazioni permettono di introdurre una nuova teoria di scala per i fenomeni esplosivi. Infatti, si osserva che non solo la posizione dei picchi scala con  $N$ , ma anche la loro larghezza. Dunque, poiché nella funzione  $P_{t=t_c, N}(S/N)$  larghezza e posizione dei picchi sono dipendenti da  $N$ , si può pensare di invertire una delle relazioni in  $N$  e ricavare così una dipendenza tra larghezza e posizione dei picchi di  $P_{t=t_c, N}$ . L'idea è quindi quella per cui la funzione  $f$  sia caratterizzata da due picchi separati e la cui forma è indipendente da  $N$ . Definendo  $t_c(N)$  come il valore del parametro di controllo a  $N$  fissato per cui l'area sottesa dai picchi di  $P_{t=t_c(N), N}$  coincide, si osserva la seguente legge di scala:

$$P_{t=t_c(N), N}(S/N) \approx N^{\eta_+} f[(S/N)N^{\eta_+}]$$

Tuttavia, nella definizione di  $f(z)$  deve intendersi una convergenza debole. Infatti, essa è caratterizzata da un  $\delta$ -picco per  $z = 0$  e da un picco destro di larghezza finita centrato attorno a un certo  $z > 0$ . Ci troviamo, dunque, in una situazione intermedia rispetto a quella presentata per le tipiche transizioni del primo ordine e per quelle del secondo ordine. Per utilizzare, dunque, il finite size scaling per i processi esplosivi, è necessario richiedere la meno restrittiva convergenza debole, cioè nel senso delle distribuzioni. Cerchiamo, ora, di capire, come arrivare alle caratteristiche della funzione  $g(z)$ . Osserviamo che, per  $t > t_c(N)$  ci troviamo oltre la soglia di percolazione, per cui gli unici contributi a  $\langle S/N \rangle$  sono dati dal picco di destra, quello di

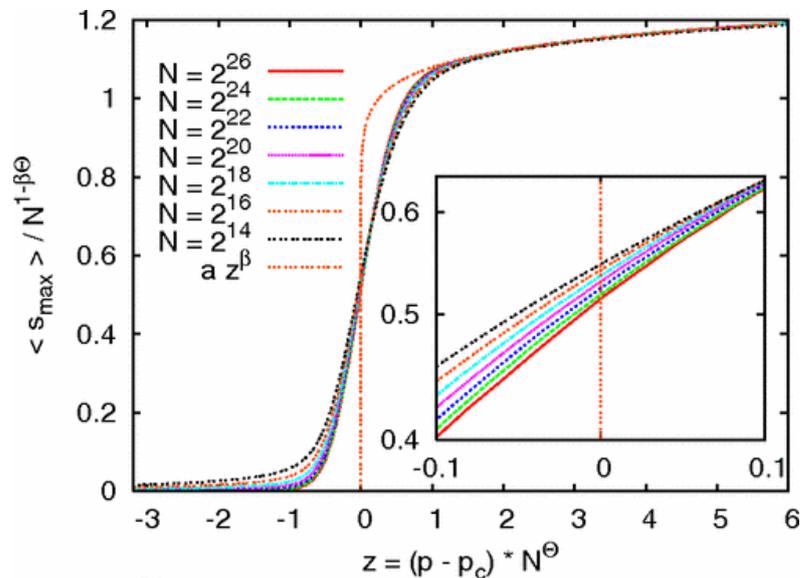


Figura 10: Andamenti della stima di  $g(z)$  ottenuti per diversi valori di  $N$  nel modello da Costa. Qui si è esteso quanto mostrato per Fig. 9 anche a valori negativi di  $z$ . Nel riquadro interno, infittimento attorno a  $z = 0$ , che porta alla conclusione  $g(0) = 0$ . Sull'asse delle ascisse  $(p - p_c)$  è da intendersi come  $(t - t_c)$ . Fonte: P. Grassberger, C. Christensen, G. Bizhani, S.-W. Son, M. Paczuski, Explosive percolation is continuous, but with unusual finite size behavior, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 225701.

larghezza finita. Ovviamente, essendo analogo a ciò che avviene oltre la soglia di percolazione per fenomeni non esplosivi, ci aspettiamo l'andamento classico  $\langle S/N \rangle \sim (t - t_c)^\beta$ . Assumendo le equazioni (2.9) e (2.10) si ottiene  $\theta = 1/\nu = \eta_+/\beta$ . I valori di  $\theta$  così ottenuti sono stati inseriti in Tab.1 come  $\theta_1$ . Questo andamento è ovviamente vero se  $\langle S/N \rangle > (S/N)_+$ . Dalla Figura 9 è possibile osservare le deviazioni da tale potenza per valori in cui, seppur con  $t - t_c > 0$ ,  $\langle S/N \rangle < (S/N)_+$ . Ciò è comunque ben descritto dalla finite size scaling di eq. (2.9), tranne ovviamente nel caso di piccoli valori di  $(t - t_c)N^{\frac{1}{\nu}}$  (Fig. 9). Ora, per  $N$  che tende ad infinito si ha  $g(z = (t - t_c)N^{\frac{1}{\nu}}) = \langle S/N \rangle (t - t_c)^{-\beta}$ . Dunque, un buon modo di studiare l'andamento di  $g(z)$  è quello di valutare l'andamento di  $\langle S/N \rangle (t - t_c)^{-\beta}$  in funzione di  $z = (t - t_c)N^{\frac{1}{\nu}}$ , per diversi valori di  $N$ . Il valore di  $\theta$  scelto in figura è quello per cui il collasso  $\langle S/N \rangle \sim (t - t_c)^\beta$  è il migliore possibile per  $\langle S/N \rangle = (S/N)_+$ . Tale valore è indicato con  $\theta_2$  (riquadro Fig. 9). Concentriamoci ora, su ciò che avviene per  $t < t_c$ . Avendo la funzione  $f(z)$  una delta in  $z = 0$ , deve esserci un valore di  $z_0 \leq 0$  per cui  $g(z)$  al di sotto di esso è identicamente nulla. Osserviamo (Fig. 10) che per  $z \leq -1$ , al crescere di  $N$ , la curva in figura si appiattisce velocemente a 0, per cui  $-1 < z_0 \leq 0$ . Un infittimento dei dati attorno a  $z = 0$  (riquadro Fig. 10) porta alla relazione  $\langle S/N \rangle_{t=t_c} \sim N^{-\eta_0}$  con  $\eta_0 > 0$ . Dunque,  $\langle S/N \rangle_{t=t_c} \rightarrow 0$  e si ha che  $g(0) = 0$ . Segue allora, che  $z_0 = 0$ .

	PR	2d	AE	da Costa
$t_c$	0.888449(2)	0.526562(3)	0.797013(3)	0.923207508
$\eta_+$	0.0402(15)	0.018(2)	0.103(2)	0.0255(8)
$\eta_-$	0.270(7)	0.078(7)	0.228(5)	0.300(5)
$\beta$	0.0861(5)	0.040(2)	0.214(2)	0.0557(5)
$\theta_1$	0.47(2)	0.45(6)	0.48(1)	0.46(2)
$\theta_2$	0.52(1)	0.47(3)	0.51(1)	0.53(1)
$\eta_0$	0.0567(9)	0.0612(8)	0.1113(8)	0.0356(8)

Tabella 1: Tabella riassuntiva delle misure ottenute in questa analisi dalle diverse simulazioni.

# Conclusion

In conclusione, possiamo riassumere quanto osservato nelle seguenti righe. Innanzitutto, dopo aver presentato l'Achlioptas process con la product rule e la sum rule, si è osservato come queste fossero caratterizzate da una transizione di fase brusca, interpretata in un primo momento come transizione discontinua. A supporto di ciò, l'analisi dati di simulazioni al computer in cui si osservano i valori  $t_0$  e  $t_1$  definiti in 1.4 convergere entrambi al valore 0.888 per  $N$  grande. Essi sono rispettivamente il valore massimo del parametro di controllo per cui  $S(t) < N^{1/2}$  e il valore minimo per cui  $S(t) > 0.5N$ . Da ciò sembrava emergere la discontinuità della transizione: per  $N \rightarrow \infty$  si ha infatti che  $S(t_0)/N = 0$  e  $S(t_1)/N > 0.5$  con  $t_0 = t_1$ . Nonostante tale risultato, le fluttuazioni statistiche dei valori  $t_0$  e  $t_1$  non hanno portato a una conclusione certa del problema. Dopo aver dato una definizione rigorosa di transizione discontinua (1.5), abbiamo mostrato matematicamente che non solo l'Achlioptas process portasse a una transizione continua, ma con esso tutte le *l-vertex rules*. Abbiamo mostrato, infatti, che, fissate una qualunque costante  $\delta > 0$  e due arbitrarie funzioni  $h_m(N)$  e  $h_s(N)$  che siano  $o(N)$ , la probabilità di trovare due valori  $m_1$  e  $m_2$  con  $S(m_1) < h_s(N)$ ,  $S(m_2) > \delta N$  e  $m_2 - m_1 < h_m(N)$  tende a 0 nel limite termodinamico. In tal senso, non è possibile trovare due valori  $t_1 = m_1/N$  e  $t_2 = m_2/N$  per cui per  $N \rightarrow \infty$  si ha  $S(t_1)/N = 0$  e  $S(t_2)/N > \delta$  con  $t_1 = t_2$ . Dunque, il primo capitolo si chiude con questo risultato che permette di classificare come continue le transizioni dovute ad ogni tipo di *l-vertex rule*. Il secondo capitolo ha permesso di mettere in luce le motivazioni iniziali che indussero a trattare l'Achlioptas process come transizione di fase discontinua oltre che ad osservare le principali differenze con i processi di percolazione ordinaria nell'ambito dei fenomeni di scala. In 2.2 un'analisi della regola di da Costa ha permesso di determinare le equazioni (2.1) e (2.2) nelle incognite  $P(s, t)$  e  $Q(s, t)$  e di valutare l'evoluzione in  $t$  del processo. In particolare, un approccio numerico alle equazioni ha messo in luce gli andamenti di tali grandezze in funzione, separatamente, di  $s$  e  $t$ . Tale analisi ha permesso di determinare il grafico di  $f(x)$  e  $g(x)$ , rispettivamente funzioni di scala di  $P(s, t)$  e  $Q(s, t)$  per  $t < t_c$ . L'interessante risultato è che queste funzioni sono ben approssimate da curve gaussiane, contrariamente a quanto avviene per la funzione di scala  $f_{CP}(x)$  per  $P(s, t)$  nel caso classico, la quale ha la forma di una funzione esponenziale decrescente. Un successivo approccio analitico alle equazioni (2.1) e (2.2) ha permesso, invece, di trovare la relazione analitica tra gli esponenti critici  $\beta, \nu, \sigma$ . In particolare, l'aver determinato un valore di  $\beta$  positivo, ma minore di 1 e prossimo allo 0 ci ha permesso di comprendere le motivazioni di una brusca (seppur continua) transizione attorno alla soglia di percolazione: in tal modo, essendo  $S(t)/N \sim (t - t_c)^\beta$ , per  $t > t_c$ , si ha che la derivata

destra di  $S(t)/N$  a  $t_c$  diverge, ma la grandezza  $S(t)/N$  rimane continua. Infine, nei paragrafi 2.3-2.5 l'analisi dei fenomeni di scala su grafi di un numero finito di nodi ha portato alla necessità di rimodellare i termini della finite size scaling. In effetti, si è osservato che le funzioni di scala universali sfruttate nelle eq. (2.9) e (2.10) possono essere determinate solo se si ammette non più una convergenza puntuale ad esse, ma una convergenza debole, nel senso delle distribuzioni. Infatti, la funzione  $f(z)$  di eq. (2.10) risulta essere composta di una  $\delta$  in  $z = 0$  e di un picco di larghezza finito centrato in qualche  $z > 0$ . L'interesse è nel fatto che questa condizione è intermedia tra quello che avviene nel caso della percolazione classica, in cui si parla propriamente di finite size scaling, in cui  $f(z)$  è caratterizzata da due picchi di larghezza finita, e tra quanto avviene per le transizioni realmente discontinue, in cui  $f(z)$  è costituita da due picchi  $\delta$ . Avendo definito  $f(z)$  come funzione generalizzata, anche  $g(z)$  ha tali caratteristiche intermedie. Abbiamo osservato che il suo andamento è simile a quello per la percolazione classica, per  $z > 0$ , ma risente del picco  $\delta$  di  $f(z)$  a destra di  $z = 0$  e per questo è identicamente nulla per  $z < 0$ . In conclusione, se il primo capitolo ha messo in luce la caratterizzazione delle *l-vertex rules* come fenomeni continui, il secondo capitolo ha permesso di osservarne le differenze con la percolazione classica nell'ambito dei fenomeni di scala.

# Appendice

In questa appendice saranno enunciati il teorema di Chernoff ed il teorema di McDiarmid sfruttati nel paragrafo 1.5 rispettivamente nella dimostrazione di Lemma 1 e Lemma 2.

**Teorema di Chernoff:** *Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d) che assumono valori tra 0 ed 1. Sia  $p = E[X]$  il valore di aspettazione della variabile  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Allora segue che:*

$$P(X \geq (1 + \delta)p) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{2 + \delta}p\right) \quad \text{con } \delta > 0$$

$$P(X \leq (1 - \delta)p) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{2}p\right) \quad \text{con } 0 < \delta < 1$$

Questo teorema è utilizzato nella dimostrazione di Lemma 1. Innanzitutto, in tal caso le variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite sono le  $Y_j$  e il numero  $n$  di queste variabili è  $\Delta$ .

Inoltre, poiché  $\sum_{j=1}^{\Delta} Y_j = Y$  ed  $E[Y] \geq 2\tilde{\alpha} \frac{N}{k}$ , fissato  $\delta = \frac{1}{2}$ , si ha che:

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq \tilde{\alpha} \frac{N}{k}\right) &= P\left(Y \leq \left[2\tilde{\alpha} \frac{N}{k}\right] \frac{1}{2}\right) \leq P\left(Y \leq \frac{1}{2}E[Y]\right) = P\left(Y \leq \left[1 - \frac{1}{2}\right]E[Y]\right) \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{E[Y]}{8}\right\} \end{aligned}$$

Dove nella prima disequazione si è sfruttato il fatto che  $E[Y] \geq 2\tilde{\alpha} \frac{N}{k}$  unitamente al fatto che se  $a \geq b$ , allora  $P(Y \leq b) \leq P(Y \leq a)$ . Nell'ultima disequazione si è applicato il teorema di Chernoff.

Sfruttando nuovamente il fatto per cui  $E[Y] \geq 2\tilde{\alpha} \frac{N}{k}$ :

$$P\left(Y \leq \tilde{\alpha} \frac{N}{k}\right) \leq \exp\left\{-\frac{E[Y]}{8}\right\} \leq \exp\{-\tilde{\alpha}N/4k\}$$

**Teorema di McDiarmid:** *Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  variabili casuali indipendenti su uno spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$  con  $v_i \in V_i \forall i$  e sia definita una funzione  $f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se esistono  $n$  costanti  $c_1, c_2, \dots, c_n$  per cui si ha che:*

$$\sup_{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n} |f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) - f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n)| \leq c_i$$

Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha che:

$$P(f(v_1, v_2, \dots, v_n) - E[f(v_1, v_2, \dots, v_n)] \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

$$P(f(v_1, v_2, \dots, v_n) - E[f(v_1, v_2, \dots, v_n)] \leq -\varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

Nella dimostrazione di lemma 2 si è sfruttato tale teorema. Infatti, la funzione  $f$  a valori reali di  $\tilde{\Delta}$  variabili, nella forma  $f(\underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+\tilde{\Delta}})$  soddisfa la disequazione  $|f(\omega) - f(\tilde{\omega})| \leq l$ , dove  $\omega$  e  $\tilde{\omega}$  differiscono al più in una coordinata. Segue che  $c_i = l \forall i$ . Inoltre,  $E[f(\omega)] \geq re^{-2lBD}$ . Per cui si ha che:

$$\begin{aligned} P(f(\omega) \leq re^{-2lBD}/2) &= P(f(\omega) \leq [re^{-2lBD} - \frac{re^{-2lBD}}{2}]) \leq P(f(\omega) \leq E[f(\omega)] - \frac{re^{-2lBD}}{2}) \\ &= P(f(\omega) - E[f(\omega)] \leq -\frac{re^{-2lBD}}{2}) \leq \exp\left(-\frac{2\left(\frac{re^{-2lBD}}{2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{\tilde{\Delta}} l^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\left(\frac{re^{-2lBD}}{2}\right)^2}{\tilde{\Delta}l^2}\right) \end{aligned}$$

## Bibliografia e sitografia

- [1] D. S. A. Aharony, Introduction To Percolation Theory, Taylor & Francis, 2003.
- [2] J. A. S. G. I. L. Z. L. I. S.-N. Z. W. Y. Z. S. Boccaletti, «Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization», *Physics Reports*, 2016.
- [3] A. R. P. Erdős, «On Random Graphs. I,» *Publicationes Mathematicae*, 1959.
- [4] R. D. J. S. D. Achlioptas, «Explosive percolation in random networks», *Science*, 2009.
- [5] N. W. J. Spencer, «Birth control for giants», *Combinatorica*, 2007.
- [6] L. W. O. Riordan, «Explosive percolation is continuous», *The Annals of Applied Probability*, 2012.
- [7] F. Leyvraz, «Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation», *Physics Reports*, 2012.
- [8] N. B. W. A. D. Bruce, «Scaling fields and universality of the liquid-gas critical point», *Physical Review Letters*, 1992.
- [9] C. C. G. B. S.-W. S. M. P. P. Grassberger, «Explosive percolation is continuous, but with unusual finite size behavior», *Physical Review Letters*, 2011.
- [10] M. M. R. M. D'Souza, «Local cluster aggregation models of explosive percolation», *Physical Review Letters*, 2010.
- [11] D. Hsu. [Online]. Available: <https://www.cs.columbia.edu/~djhsu/coms4995-s20/lectures/mcdiarmid-notes.pdf>.
- [12] S. D. A. G. J. M. R.A. da Costa, «Explosive percolation transition is actually continuous,» *Physical Review Letters*, 2010.
- [13] M. Goemans, 21 February 2015. [Online]. Available: <http://math.mit.edu/~goemans/18310S15/chernoff-notes.pdf>.