

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
“FEDERICO II”**



**SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE**  
**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Triennale in Fisica*

**Su alcuni problemi del calcolo delle variazioni**

**Relatore:**

Professore Carlo Nitsch

A handwritten signature in black ink, appearing to read "C. Nitsch", is positioned below the name of the relatore.

**Candidato:**

Martina Fuccillo

Matr. N85000879

**Anno Accademico 2019/2020**

# Indice

|          |                                                     |           |
|----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione al Calcolo delle Variazioni</b>     | <b>3</b>  |
| 1.1      | Cenni Storici . . . . .                             | 3         |
| 1.2      | Alcuni esempi di problemi variazionali . . . . .    | 8         |
| 1.2.1    | Brachistocrona . . . . .                            | 8         |
| 1.2.2    | Catenaria . . . . .                                 | 9         |
| 1.2.3    | Formulazione generale . . . . .                     | 10        |
| <b>2</b> | <b>Problema Isoperimetrico nel Piano</b>            | <b>12</b> |
| 2.1      | Introduzione . . . . .                              | 12        |
| 2.2      | I poligoni . . . . .                                | 18        |
| 2.3      | Disuguaglianza isoperimetrica nel piano . . . . .   | 25        |
| 2.3.1    | Problema di Didone . . . . .                        | 25        |
| 2.3.2    | Il caso generale . . . . .                          | 28        |
| <b>3</b> | <b>Principio di Dirichlet</b>                       | <b>30</b> |
| 3.1      | Equazioni alle derivate parziali . . . . .          | 30        |
| 3.2      | Il problema di Dirichlet . . . . .                  | 33        |
| 3.3      | Esistenza del minimo . . . . .                      | 36        |
| <b>4</b> | <b>Metodi Classici del Calcolo delle Variazioni</b> | <b>44</b> |
| 4.1      | Equazione di Eulero-Lagrange . . . . .              | 45        |
| 4.2      | Problema variazionale vincolato . . . . .           | 49        |
| 4.3      | Equazione di Dubois-Reymond . . . . .               | 52        |

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| <i>INDICE</i>                                        | 2         |
| <b>5 Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni</b> | <b>56</b> |
| 5.1 Integrale di Dirichlet . . . . .                 | 57        |
| 5.2 Teorema generale di esistenza . . . . .          | 61        |
| <b>A Spazi i Sobolev</b>                             | <b>66</b> |
| A.1 Nozioni di base . . . . .                        | 66        |
| A.2 Elementi sugli spazi $L^p$ . . . . .             | 69        |
| A.3 Generalità sugli spazi i Sobolev . . . . .       | 73        |

# Capitolo 1

## Introduzione al Calcolo delle Variazioni

### 1.1 Cenni Storici

Il calcolo delle variazioni è un campo dell'analisi matematica che si occupa della ricerca dei punti di minimo e massimo dei funzionali.<sup>1</sup> L'interesse è per le funzioni estremali, cioè quelle che rendono minimo o massimo il valore del funzionale.

Oggi il calcolo delle variazioni procede per metodi diretti, ovvero cercando di mostrare direttamente l'esistenza di minimi per funzionali di tipo integrale attraverso l'applicazione di una generalizzazione del teorema di Weierstrass.<sup>2</sup>

Classicamente invece il fulcro del calcolo delle variazioni era rappresentato dall'equazione di Eulero-Lagrange, che corrisponde ad una condizione di stazionarietà per il funzionale ma che in genere non consente di distinguere tra un minimo, un massimo o altro.

---

<sup>1</sup>un funzionale è una applicazione il cui dominio è un insieme di funzioni, a valori nel campo degli scalari ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). È possibile estendere ad un funzionale le nozioni di limite, continuità e differenziabilità.

<sup>2</sup>teorema di Weierstrass: se  $f$  è continua in un insieme chiuso e limitato allora è dotata di minimo e di massimo ed esiste almeno un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto.

teorema Generalizzato: sia  $f$  continua dallo spazio metrico  $(X, d)$  ad un altro spazio metrico  $(Y, d)$  e  $K$  un insieme compatto di  $X$ , allora l'immagine  $f(K) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$  è un compatto di  $Y$ .

Vista la necessità di studiare, in questa trattazione, le equazioni di Eulero-Lagrange, vediamo innanzitutto come il calcolo delle variazioni si sviluppa parallelamente allo studio delle equazioni differenziali e dunque come la sua nascita sia strettamente legata a quella del calcolo infinitesimale.

I problemi isoperimetrici furono affrontati dagli studiosi già nei tempi antichi, seppur con analisi puramente geometriche. Geometrico fu l'approccio di Galilei ai problemi della curva *brachistocrona* -*curva che congiunge due punti A e B posti su un piano verticale (con quota di A superiore a quella di B) e tale che un grave, con velocità iniziale nulla, cadendo lungo tale curva, vada da A a B nel minor tempo possibile*- e della *catenaria* -*posizione di equilibrio di una catena pesante sospesa agli estremi*-, formulati per la prima volta nel 1638. Nello stesso anno, sempre sotto un aspetto geometrico, Debaune e Descartes proposero il *problema inverso delle tangenti* -*determinare una curva che goda di certe date proprietà relative alla sua tangente*.

Nel 1644 Torricelli ricorse ad un metodo meccanico per determinare la tangente ad una curva, applicò la composizione e la decomposizione dei moti e delle velocità alla determinazione della direzione della velocità, e quindi della tangente, in un punto della traiettoria, dunque enunciò che, conoscendo le leggi con cui variano le componenti della velocità di un punto mobile, è possibile determinare la traiettoria di tale punto. Il problema delle tangenti corrisponde, in generale, all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali. Osserviamo dunque che all'epoca molti dei problemi geometrici e fisici si riducevano a equazioni differenziali, in particolare le questioni di meccanica. Con la formulazione di Fermat (1662) del cosiddetto *principio di Fermat* -*un raggio di luce che si propaga da un punto A ad un punto B, in un mezzo con indice di rifrazione  $\nu(x, y, z)$ , segue il percorso a cui corrisponde un tempo minimo di percorrenza*- comparve un importante strumento di calcolo. Il principio di Fermat fu il primo esempio di legge dinamica espressa in forma di principio variazionale.

Nel 1685 Newton studiò il problema del movimento di un corpo in un mezzo di resistenza e nel 1687 pubblicò i "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", unanimemente considerato una delle più importanti opere della storia della scienza; in essa Newton enunciò le tre leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale. Risolse inoltre il problema delle tangenti, combinando calcolo differenziale e sviluppi in serie senza esibire la soluzione in forma esplicita, ma sotto forma di una serie i cui coefficienti possono essere calcolati uno dopo l'altro.

Contemporaneamente nel 1684 Leibniz pubblicò il de *"Nova Methodus Pro Maximis et Minimis..."*, nel quale espose i principi del calcolo differenziale e introdusse un nuovo potente strumento, l'infinitesimo, risolvendo sia il problema inverso delle tangenti che quello delle quadrature, ovvero del calcolo delle aree.

Huygens, Leibniz e i fratelli Bernoulli nel 1691 risolsero il problema della catenaria dimostrando che è una curva piana iperbolica simile alla parabola, con andamento caratteristico di una corda omogenea, flessibile, anelastica, vincolata agli estremi e lasciata pendere soggetta solo al proprio peso.

Johann Bernoulli nel 1696 risolse il problema della brachistocrona, definendola come la traiettoria tra due punti che verifica il principio di Fermat e nel 1699 sfidò la comunità matematica a fare lo stesso. Ebbe importanti risposte da suo fratello, da Leibniz e dallo stesso Newton.

Nel 1744 Eulero pubblicò *"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive..."*, opera nella quale presenta e risolve certi particolari problemi coniando tra l'altro la maggior parte delle notazioni matematiche tutt'ora in uso. Una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni ed equazioni porta il suo nome, nonché vari altri oggetti matematici. Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Eulero. In questa opera creò le basi di una vera teoria generale, basata su approcci più sistematici.

L'affermarsi della meccanica newtoniana e in particolare della seconda legge del moto, che lega la forza all'accelerazione riducendo la determinazione del moto ad una risoluzione di un sistema di equazioni differenziali, pone queste ultime in una posizione dominante, sia come problema matematico che come strumento di indagine fisica.

Le equazioni variazionali di Eulero sono equazioni differenziali del secondo ordine che furono appunto formulate da Eulero per la prima volta nell'ambito della meccanica newtoniana. In questo contesto classico sono più note con il solo nome di equazioni di Lagrange e possono descrivere un sistema meccanico conservativo e portare alle equazioni del moto.

Furono oggetto di studio da parte di Lagrange nel trattato *"Mécanique analytique"* (1788), nel quale diede anche una riformulazione della meccanica newtoniana. Nella Meccanica Lagrangiana le equazioni del moto sono descritte tramite delle equazioni variazionali di Eulero, dove la funzione scalare argomento è data dall'integrale della funzione Lagrangiana, che rappresenta la differenza tra l'energia cinetica e l'energia

potenziale in ogni punto del percorso seguito durante il moto. Sviluppò il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange -ridurre i punti stazionari di una funzione in più variabili e a più vincoli a quelli della funzione lagrangiana-* e le *equazioni di Eulero-Lagrange -particolare formulazione del secondo principio della dinamica-*. Dunque a Lagrange si deve il metodo delle variazioni, il nuovo e più elegante apparato per risolvere i problemi di calcolo, che Eulero battezzò con l'appropriato nome di *Calcolo Delle Variazioni*.

Nel 1786 anche Legendre si cimentò nel campo del calcolo delle variazioni, ricercando nuove condizioni di estremalità per i funzionali.

Dunque possiamo dire che durante il Seicento e il Settecento le ricerche sulle equazioni differenziali presero due direzioni: una puntò alle applicazioni, soprattutto in meccanica e geometria; l'altra, invece, alla determinazione esplicita delle soluzioni o alla loro espressione sotto forma di integrali.

Tra il 1836 e il 1838 Hamilton e Jacobi si scontrarono sull'utilizzo del calcolo variazionale nella determinazione delle costanti del moto di un sistema dinamico. Il primo sostenne che il moto di un corpo soggetto a varie forze poteva essere descritto da un'unica funzione che soddisfacesse due equazioni differenziali parziali del primo ordine; il secondo affermò che era necessaria solo un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare del primo ordine. Questa prese il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi*.

In questo scenario Weierstrass tornò alla radice del problema e si occupò di ridefinire rigorosamente i fondamenti dell'analisi, arrivando nel 1856 al cosiddetto *teorema di Weierstrass -condizioni sufficienti per l'esistenza degli estremi di funzioni di variabile reale, estendibili anche a funzioni reali definite su spazi topologici e dunque anche su qualsiasi spazio metrico-*.

Nel 1898 Kneser pubblicò un elegante risultato sulla *geodetica -curva di lunghezza minima su una superficie assegnata, di estremi assegnati e giacenti su di essa-*.

Nel 1900 Hilbert fu il primo a risolvere un problema variazionale con metodo diretto, dando dimostrazione completa dell'esistenza del minimo dell'integrale di Dirichlet nella classe delle funzioni che assumono valori prescritti sul contorno di una data regione, assicurando così l'esistenza di una soluzione del *problema di Dirichlet -trovare una funzione che soddisfa una data equazione differenziale alle derivate parziali all'interno di una regione sulla cui frontiera essa assume determinati valori-*. (Vedi Capitolo3)

Nel 1911 Tonelli operò la distinzione conosciuta oggi tra metodi classici (o indiretti) e metodi diretti del calcolo delle variazioni. Con il nome di *"metodi diretti"* si intendono le

tecniche (oggetto di studi dalla seconda metà dell'Ottocento in poi), atte a dimostrare l'esistenza degli estremi dei funzionali, che evitano di coinvolgere equazioni differenziali. (Vedi Capitolo5)

Infine negli anni cinquanta del Novecento De Giorgi risolse nella massima generalità il *Problema Isoperimetrico* -quale insieme rende massimo il volume, a parità di perimetro-. Nel piano (*Didone*), problema noto già nell'antichità, il cerchio massimizza l'area a parità di perimetro; nello spazio la palla massimizza il volume a parità di area di superficie. (Vedi Capitolo2)

## 1.2 Alcuni esempi di problemi variazionali

### 1.2.1 Brachistocrona

Il problema della brachistocrona, ossia della curva del tempo minimo, consiste nel trovare la curva piana che un corpo di massa  $m$ , vincolato a muoversi su di essa e soggetto alla sola forza peso, deve seguire per andare da un punto  $A$  ad un punto  $B$  nel minor tempo possibile.

É facile immaginare che il corpo impiegherà tempi diversi per percorrere cammini diversi. A prima vista potremmo pensare che il cammino più breve sia quello più corto, cioè la geodetica che, nel caso di un moto piano, è il segmento che congiunge i due punti. Soffermandoci possiamo però notare che se facciamo percorrere al corpo un percorso poco più lungo ma con una pendenza maggiore, nel punto di partenza  $A$ , questo acquisterà velocità maggiore e arriverà nel punto finale  $B$  più velocemente.

Siano  $A = (x_0, y_0)$  e  $B = (x_1, y_1)$  i due punti di partenza e di arrivo. Sia  $f(x)$  la funzione il cui grafico, che congiunge  $A$  e  $B$ , rappresenta la traiettoria percorsa. La legge di conservazione dell'energia, nell'ipotesi di velocità iniziale nulla, ci dice che

$$\frac{1}{2}mv^2(x) + mgf(x) = mgf(x_0) = mgy_0, \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

da cui

$$v(x) = \sqrt{2g(f(x_0) - f(x))}.$$

D'altra parte, se con  $s$  si denota l'ascissa curvilinea e con  $t$  il tempo, allora

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

ed uguagliando si ha

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2g(f(x_0) - f(x))}} dx.$$

Se  $T(f)$  è il tempo di percorrenza relativo alla traiettoria  $f$  allora

$$T(f) = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2g(f(x_0) - f(x))}} dx.$$

Il problema è dunque quello di rendere minimo  $T$  al variare di  $f$  in un opportuno spazio di funzioni con la condizione che  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$ .

Si può dimostrare che la soluzione del problema è una cicloide.

### 1.2.2 Catenaria

Il problema della catenaria consiste nel trovare la curva secondo cui si dispone una fune omogenea, flessibile e non estendibile, appesa agli estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.

Siano  $A = (x_0, y_0)$  e  $B = (x_1, y_1)$  le due estremità della fune e sia  $f(x)$  la funzione che ne descrive il profilo. Se  $\rho$  è la densità della fune allora l'energia potenziale dell'elemento infinitesimo di corda sarà

$$dU = \rho g f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Integrando

$$U(f) = \int_{x_0}^{x_1} \rho g f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Il problema è dunque quello di rendere minima  $U(f)$  al variare di  $f$  in un opportuno spazio di funzioni con la condizione che  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$  ed inoltre  $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = L$  (vincolo di lunghezza assegnata della fune).

Si può dimostrare che la soluzione del problema è una curva piana iperbolica, trascendente, di aspetto simile alla parabola, espressa matematicamente tramite il coseno iperbolico.

### 1.2.3 Formulazione generale

Consideriamo un semplice esempio che ci aiuta ad introdurre il problema e la notazione: dobbiamo andare in auto da una città  $A$  ad un'altra città  $B$  che dista  $L$  chilometri, partendo da  $A$  al tempo  $t_0$  per arrivare in  $B$  al tempo  $t_1$ . Supponiamo che il consumo dell'automobile sia proporzionale al quadrato della velocità e chiediamoci come regolare la velocità in modo da rendere minima la spesa.

Scriviamo il problema in termini matematici.

Indichiamo con  $u(t)$  la distanza percorsa al tempo  $t$ , dunque necessariamente

$$\begin{cases} u(t_0) = 0 \\ u(t_1) = L \end{cases} \quad (1.1)$$

La velocità al tempo  $t$  sarà  $u'(t)$ , cioè la derivata di  $u(t)$ .

Bisogna scegliere la funzione  $u(t)$ , soddisfacente le 1.1, in modo tale che il seguente integrale sia il più piccolo possibile

$$\int_{t_0}^{t_1} (u'(t))^2 dt.$$

Si può supporre che il consumo dell'automobile dipenda non solo dalla velocità  $u'$ , ma anche dal tempo  $t$  e dalla posizione  $u$ .

Si ha dunque un problema di *minimizzazione* di un integrale del tipo:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(u(t), u'(t), t) dt \quad (1.2)$$

tra tutte le funzioni  $u(t)$  verificanti le (1.1), con una assegnata funzione  $f(u, u', t)$  di classe  $C^2$  nei suoi argomenti.

In definitiva si deve minimizzare una quantità in cui la variabile è essa stessa una funzione.

Formalizziamo.

Indico con  $T$  l'intervallo  $[t_0, t_1]$  e definisco lo spazio di funzioni continue sulla sua chiusura  $\overline{T}$ , aventi derivata prima continua in  $T$

$$C^1(T) = \{f \in C^0(\overline{T}) : f' \in C^0(T)\}.$$

Definisco la classe di funzioni

$$X = \{u \in C^1(T) : u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}, u(t_1) = u_1 \in \mathbb{R}\}$$

e il funzionale  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(u(t), u'(t), t) dt \quad \forall u \in X.$$

Si pongono i seguenti problemi:

1. ricavare le condizioni necessarie perché una funzione  $u$  che minimizzi  $F$  (Equazioni di Eulero-Lagrange);
2. provare l'esistenza di una  $u \in X$  che minimizzi  $F$ ;
3. provare l'unicità di questa funzione;
4. provare la regolarità di questa funzione.

In questa trattazione vogliamo affrontare, prima attraverso degli esempi particolari, poi in modo generale, i primi due problemi. Nei prossimi capitoli vedremo esempi di applicazioni dei metodi classici, o indiretti, del calcolo delle variazioni, che risolvono il problema 1, e dei metodi diretti, che risolvono i problemi 2 e 3. Metodi classici e metodi diretti del calcolo delle variazioni saranno poi affrontati in tutta generalità nei capitoli conclusivi a loro dedicati.

## Capitolo 2

# Problema Isoperimetrico nel Piano

### 2.1 Introduzione

In matematica con *teorema (o proprietà) isoperimetrico* si indica una classe di proposizioni riguardanti minimi o massimi vincolati di date funzioni, il cui argomento è un insieme, e i cui valori hanno un particolare significato geometrico o fisico.

Presentiamo dei tipici teoremi isoperimetrici:

- Tra tutti i poligoni aventi perimetro e numero di lati assegnati, i poligoni regolari sono quelli che rendono massima l'area, o equivalentemente, tra tutti i poligoni aventi area e numero di lati assegnati, i poligoni regolari sono quelli che rendono minimo il perimetro. (Vedi Paragrafo 2.2)
- Tra tutte le curve chiuse piane che hanno lunghezza assegnata, il cerchio è quella che racchiude la massima area. (Vedi Paragrafo 2.3.1)
- Tra tutti i sottoinsiemi dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  con misura assegnata, la palla ha perimetro minimo. (Non è nostro interesse trattare questo caso più complesso.)

Di notevole interesse è un caso particolare del secondo punto: tra tutte le curve che si trovano in un semipiano e hanno gli estremi sulla frontiera di questo semipiano e la lunghezza assegnata, i semicerchi sono quelle che racchiudono la massima area. Questa è la soluzione del cosiddetto *problema di Didone*. Secondo quanto racconta Virgilio

nell'*Eneide*, la regina Didone, sbarcata sulle coste dell'Africa con l'intenzione di fondare la città di Cartagine, chiese al signore di quei territori di concederle tanta terra quanta potesse essere contenuta in una pelle di bue. Ottenuto il permesso, tagliò la pelle in tante sottilissime strisce e le legò insieme per farne una lunga fune, quindi ne fissò i capi vicino al mare e si impadronì della terra tra la fune ed il mare. Didone aveva formato un semicerchio.

È un classico esempio di problema isoperimetrico relativo che tipicamente consiste nel considerare una varietà riemanniana <sup>1</sup> dotata di bordo e cercare i sottoinsiemi con area prefissata che rendono minimo il perimetro relativo, cioè la lunghezza della loro frontiera.

Il terzo enunciato è il **teorema isoperimetrico** per antonomasia, di cui le due seguenti formulazioni sono equivalenti:

- fra tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  con volume assegnato, trovare quello di perimetro minimo;
- fra tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  con perimetro assegnato, trovare quello di volume massimo.

Tale teorema ha affascinato i matematici fin dai tempi antichi: sembra che già Archimede lo conoscesse, così come Keplero, Galilei e i fratelli Bernoulli. Il problema fu affrontato da Eulero, Legendre, Schwarz, Weierstrass, Steiner, a cui si deve la formulazione delle condizioni necessarie, attraverso il concetto di simmetrizzazione. Dell'inizio del Novecento citiamo i contributi di Hurwitz, Minkowski, Lebesgue, e di Tonelli e De Giorgi per la trattazione del caso  $n$ -dimensionale (con  $n > 2$ ), sviluppatasi in parallelo alla teoria geometrica della misura e del calcolo delle variazioni.

Ad oggi la dimostrazione del teorema isoperimetrico in  $\mathbb{R}^n$  segue dai metodi diretti del calcolo delle variazioni ed è basata su tre concetti principali:

- una corretta definizione di perimetro: funzione a valori non negativi verificante opportune proprietà e definita in un'opportuna classe di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ ;
- una buona topologia nella classe dei sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^n$  tale da avere perimetro inferiormente semicontinuo;

---

<sup>1</sup>una varietà riemanniana è una varietà differenziabile su cui sono definite le nozioni di distanza, lunghezza, curvatura, geodetica e area (o volume).

- la simmetrizzazione di Steiner che trasforma un qualsiasi sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$  in un altro sottoinsieme, simmetrico rispetto ad un iperpiano fissato e con stessa misura del primo insieme, ma perimetro più piccolo.

I primi due punti assicurano che il funzionale perimetro ha un minimo in una classe di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  di misura assegnata; il terzo assicura che il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  il cui perimetro è minimo è una palla.

Per abuso di linguaggio è chiamato problema isoperimetrico un qualsiasi problema di un funzionale d'insieme, una volta che siano stati fissati per tale insieme dei vincoli geometrici. Un tipico esempio, che fa parte ormai del folklore della fisica matematica, è la cosiddetta congettura di Lord Rayleigh, oggi nota come disuguaglianza di Faber-Krahn: il tono più grave tra tutti i tamburi di area assegnata è raggiunto dal tamburo circolare. Il problema è così formulato: sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto limitato di misura assegnata, il primo autovalore  $\lambda^2$  del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda^2 f = 0 & \text{in } U \\ f = 0 & \text{su } \partial U \end{cases} \quad (2.1)$$

è minimo quando  $U$  è una palla.

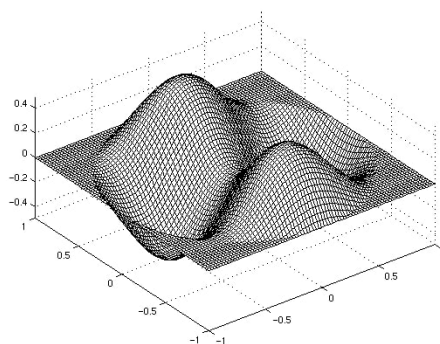


Figura 2.1: Esempio di membrana circolare.

Non daremo una dimostrazione di tale teorema, ma ci limiteremo ad osservare il legame tra l'autovalore  $\lambda$  e la frequenza del tamburo.

In generale, ogni modello differenziale che traduce un problema fisico specifico affianca all'equazione differenziale alle derivate parziali, che esprime le leggi fisiche che governano il sistema in esame, certe particolari condizioni, iniziali o al bordo, che contengono non solo dati del problema, ma esprimono anche ipotesi sul sistema stesso.

Immaginiamo il problema come studio delle piccole oscillazioni di una membrana omogenea e isotropa.

Sia  $u = u(x, y, t)$  la funzione incognita, questa indica la quota, all'istante  $t$ , del punto che a riposo si trova in  $(x, y, 0)$  e si dimostra, in regime elastico, che soddisfa l'equazione delle onde in due variabili spaziali:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

con  $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$ ,  $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$  e  $u_{yy} = \partial^2 u / \partial y^2$ .

Ricordo che  $\sum_i \partial^2 / \partial x_i^2 = \Delta$ .

Imponiamo al problema la condizione al bordo di Dirichlet omogenea e le condizioni iniziali di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, y, t) = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0 \\ u_t(x, y, 0) = v_0 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione differenziale con il metodo delle separazione di variabili: cerchiamo una soluzione  $u$  non identicamente nulla che soddisfa le condizioni al contorno e tale che sia un prodotto in cui la dipendenza da  $x, y$  e  $t$  sia separata

$$u = f(x, y)T(t);$$

sostituiamo  $u$  nell'equazione

$$f(x, y)T''(t) - c^2T(t)\Delta f(x, y) = 0$$

e applichiamo la regola del prodotto

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{\Delta f}{f}.$$

Dato che il membro a sinistra dipende solo da  $t$  e quello a destra solo da  $x$  e da  $y$ , entrambi sono uguali ad una qualche costante  $k$ . Dunque

$$T''(t) = kc^2T(t) \quad , \quad \Delta f(x, y) = kf(x, y)$$

e  $k$  è autovalore di entrambi gli operatori differenziali, con  $T(t)$  e  $f(x, y)$  le rispettive autofunzioni.

Data la condizione al bordo, possiamo affermare che si tratta di risolvere il problema ai limiti:

$$\begin{cases} \Delta f - kf = 0 & \text{in } \Omega \\ f = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Studiando il segno della costante si osserva che non ci sono soluzioni non banali per  $k \geq 0$  poiché  $f$  risulterebbe identicamente nulla, per il *Principio del Massimo Forte*<sup>2</sup> per equazioni ellittiche. Dunque  $k < 0$  è l'unica soluzione accettabile ed esistono due numeri  $A$  e  $B$  tali che:

---

<sup>2</sup>il principio del massimo è una proprietà che caratterizza le soluzioni di alcune equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche e paraboliche. Nel caso in esame il massimo (minimo) di una funzione subarmonica (superarmonica) in una regione è assunto sul bordo di tale regione. Inoltre, in forma forte afferma che se una funzione raggiunge il massimo all'interno della regione allora la funzione è una funzione costante.

$$T(t) = A \sin(\sqrt{k}ct) + B \cos(\sqrt{k}ct).$$

Per comodità è uso porre  $k = -\lambda^2$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .

Si osserva che

$$u(x, y, t) = f_\lambda T_\lambda(t) = f_\lambda(A \sin(c\lambda t) + B \cos(c\lambda t))$$

ovvero che  $\lambda$  è una frequenza di oscillazione della membrana in esame. Dunque il più piccolo autovalore  $\lambda$  per cui il problema 2.1 ha soluzione non banale è il tono fondamentale del tamburo, a tutti gli effetti la "nota musicale" che l'udito umano gli associa.

## 2.2 I poligoni

**Teorema 2.1.** *Tra tutti i poligoni con perimetro e numero di lati fissati, i poligoni regolari sono quelli che massimizzano l'area.*

*Dimostrazione.* Utilizziamo diversi risultati, lemmi e corollari. Diamo innanzitutto la seguente definizione.

**Definizione 2.2.1.** Dato un poligono ad  $n$  lati, area  $A$  e perimetro  $P$  in funzione dei vertici  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , numerati in senso antiorario, sono dati dalle formule

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Area})$$

e

$$P = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \quad (\text{Perimetro})$$

posti  $x_0 = x_n, y_0 = y_n$  e  $a, b$  costanti arbitrarie.

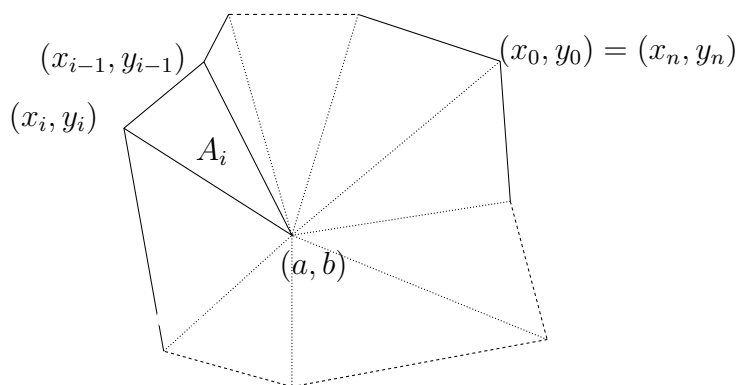


Figura 2.2: Area di un poligono in funzione dei vertici.

Utilizziamo i seguenti risultati.

1. Si vede che:

**Corollario.**

(a) *Tra tutti i poligoni con  $n$  lati e perimetro  $P$  esiste un poligono di area massima, cioè è massimante.*

*Da:*

- *teorema di Weierstrass (una funzione a valori reali, continua in un sottoinsieme compatto di uno spazio a dimensione finita, ammette un massimo e un minimo),*
- *area  $A$  e perimetro  $P$  di un poligono ad  $n$  lati sono funzioni continue dei vertici,*
- *i vertici di un poligono a  $n$  lati, con  $P \leq m$  fissato che contiene un punto dato, appartengono tutti allo stesso disco.*

(b) *Ogni poligono massimante è convesso*<sup>3</sup>.

*Da:*

*Osservazione 2.2.2.* l'involuppo convesso di un poligono ad  $n$  lati con perimetro  $P$  e area  $A$  è un poligono che ha numero di lati  $\leq n$ , perimetro  $\leq P$  e area  $\geq A$ .

2. Si vede che ogni poligono massimante ha tutti i lati di uguale lunghezza;

**Lemma 2.2.** *Tra tutti i triangoli con fissati un lato di lunghezza  $l$  e il perimetro  $P > 2l$ , il triangolo isoscele ha area  $A$  massima.*

*Dimostrazione.* Siano  $z_1, z_2$  gli estremi del lato con lunghezza  $l$  fissata e  $z_3$  il terzo vertice. Fissiamo nel seguente modo il sistema di riferimento cartesiano:

- l'origine è il punto medio del lato che congiunge  $z_1$  con  $z_2$ ;

---

<sup>3</sup>un poligono è detto convesso se ogni segmento che congiunge due vertici qualsiasi è contenuto al poligono stesso. Equivalentemente, presi due punti qualsiasi interni, o appartenenti alla poligonale chiusa che delimita il poligono, il segmento che li unisce deve essere interamente contenuto in esso.

- l'asse delle ascisse contiene il lato di estremi  $z_1$  e  $z_2$ ;
- l'asse delle ordinate è ordinato in modo che il vertice  $z_3$  si trovi nel semipiano  $y \geq 0$ .

Si ha

$$z_1 = (l/2, 0), \quad z_2 = (-l/2, 0), \quad z_3 = (x, y)$$

e

$$y > 0, \quad A = \frac{l}{2}y, \quad P = l + \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2}.$$

Cioè la somma delle distanze del vertice  $z_3$  dai vertici  $z_1$  e  $z_2$  vale  $P - l$ , quindi il punto  $(x, y)$  è vincolato a giacere sull'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(P-l)^2} + \frac{y^2}{P(P-l)^2} = \frac{1}{4}.$$

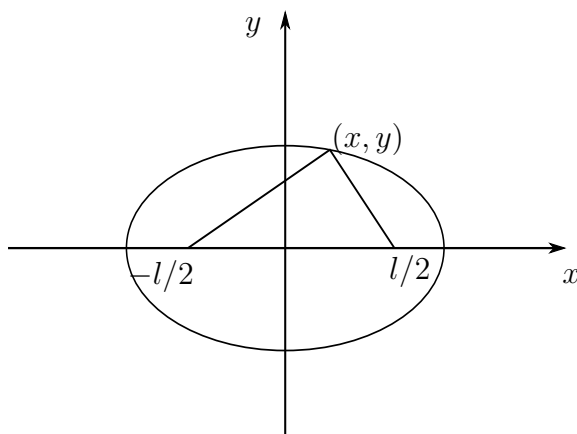


Figura 2.3: Problema isoperimetrico per triangoli con un lato di lunghezza fissata.

Ricavando la  $y$  e sostituendo nella formula dell'area del triangolo otteniamo

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{P(P-l)} \sqrt{1 - \left( \frac{2x}{P-l} \right)^2}.$$

Concludendo,  $A$  è massima se e solo se  $x = 0$ , cioè se e solo se il triangolo è isoscele.  $\square$

Questo lemma implica che tra tutti i poligoni ad  $n$  lati e  $P$  dato, se si ha un poligono convesso massimizzante l'area allora tutti i suoi lati hanno la stessa lunghezza.

Supponiamo infatti per assurdo che due lati del poligono abbiano lunghezza diversa.

Esistono due lati consecutivi, di estremi  $z_{k-1}, z_k$  e  $z_k, z_{k+1}$ , che hanno lunghezza diversa. Teniamo fissi tutti i vertici  $z_i$ ,  $i \neq k$ , e spostiamo  $z_k$  su un'opportuna ellisse, di fuochi in  $z_{k-1}, z_{k+1}$ , fino a fargli raggiungere un opportuno vertice  $z'_k$  di tale ellisse. Ovvero spostiamo  $z_k$  in modo tale che il triangolo di vertici  $z_{k-1}, z_k, z_{k+1}$  conservi un perimetro costante e diventi isoscele. Otteniamo così un altro poligono con uguale perimetro del primo, ma area maggiore, in contraddizione con la proprietà estremante del poligono di partenza.

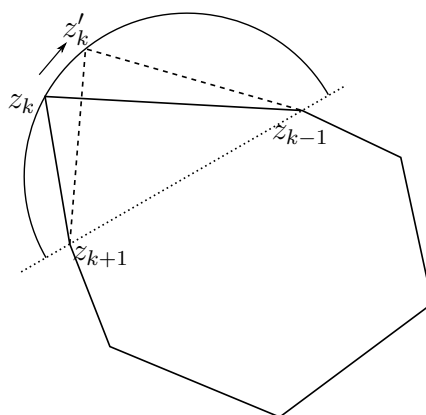


Figura 2.4: Un poligono massimante ha tutti lati uguali.

3. Si vede che ogni poligono massimante ha tutti gli angoli uguali.

**Lemma 2.3.** *Tra tutti i quadrilateri contenuti nel semipiano  $y \geq 0$  con due vertici nei punti  $(-h/2, 0), (h/2, 0)$ ,  $h > 0$  e gli altri tre lati tutti con la stessa lunghezza  $l \geq h/3$ , il trapezio isoscele ha area  $A$  massima.*

*Dimostrazione.* Immaginiamo un sistema meccanico costituito da quattro aste rigide e due guide semicircolari  $C_0, C_1$ . Un sistema del genere è chiamato meccanismo di Watt. Nel sistema di riferimento cartesiano adottato:

- una asta è fissa, di lunghezza  $h$  ed estremi  $z_0 = (-h/2, 0), z_3 = (h/2, 0)$ ;
- le altre tre aste hanno uguale lunghezza  $l$ 
  - una ha vertice fisso in  $z_0$  mentre l'altro, in  $z_1$ , è libero di muoversi lungo la guida  $C_0$ ,
  - un'altra ha un vertice fisso in  $z_1$  mentre l'altro, in  $z_2$ , è libero di muoversi lungo la guida  $C_1$ ,
  - l'ultima ha un vertice in  $z_2$  e l'altro è incernierato in  $z_3$ .
- le due guide sono circolari, di uguale raggio  $l$  e centri in  $z_0$  e  $z_3$

La curva descritta dal punto medio tra  $z_1$  e  $z_2$  è detta curva di Watt.

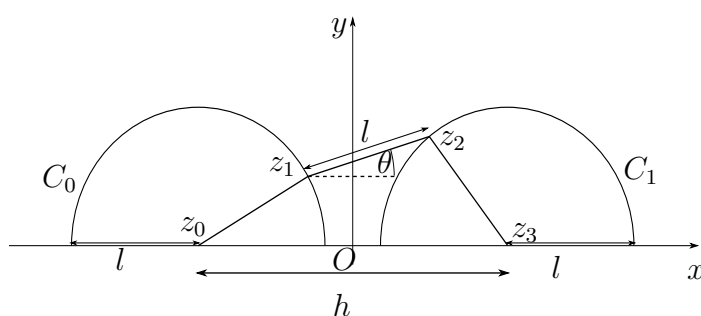


Figura 2.5: Meccanismo di Watt.

Il sistema descritto ha un solo grado di libertà.

Scegliamo l'angolo  $\theta$  come parametro e teniamo conto dei vincoli

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_3| = l, \quad z_2 - z_1 = l e^{i\theta}, \quad z_3 = -z_0 = (h/2, 0).$$

Otteniamo

$$z_1 = \frac{1}{2} [-l e^{i\theta} + i(h - l e^{i\theta})t], \quad z_2 = \frac{1}{2} [l e^{i\theta} + i(h - l e^{i\theta})t]$$

con

$$t^2 + 1 = \frac{4l^2}{h^2 - 2hl \cos \theta + l^2}$$

e

$$\frac{h^2 - 3l^2}{2hl} \leq \cos \theta \leq 1.$$

Vogliamo mostrare che l'area della regione di piano delimitata dalle quattro aste è massima quando  $\theta = 0$ .

Il quadrilatero può essere scomposto nella somma di tre triangoli: il primo con vertici in  $z_0, 0, z_1$ ; il secondo con vertici in  $z_1, 0, z_2$ ; il terzo con vertici in  $z_2, 0, z_3$ . Dunque l'area del quadrilatero è

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{h}{2} (z_1 + z_2) + z_1 \bar{z}_2 \right) \\ &= \frac{1}{4} |h^2 - l^2| \sqrt{\frac{4l^2}{h^2 - l^2 - 2hl \cos \theta} - 1}. \end{aligned}$$

ed è una funzione crescente di  $\theta$  che raggiunge il massimo per  $\cos \theta = 1$ .

Ricordiamo che  $\operatorname{Im}$  è la parte immaginaria del numero complesso  $z$  e  $\bar{z}$  il complesso coniugato di  $z$  e che l'area di un triangolo con vertici in  $0, w, z$  di un piano complesso<sup>4</sup> può essere calcolata con la formula  $A = \operatorname{Im}(w\bar{z}/2)$   $\square$

Questo lemma implica che tra tutti i poligoni convessi ad  $n$  lati e  $P$  dato, se si ha un poligono che massimizza l'area e con lati di eguale lunghezza allora i suoi angoli sono tutti uguali.

Supponiamo infatti per assurdo che due angoli del poligono siano diversi.

Esistono due angoli consecutivi, corrispondenti ai vertici  $z_{k+1}, z_{k+2}$ , diversi. Manteniamo fissi tutti gli altri vertici e muoviamo questi due su un'opportuna curva di Watt, in modo che i lati  $z_k z_{k+1}, z_{k+1} z_{k+2}, z_{k+2} z_{k+3}$  abbiano lunghezza costante, fino a rendere il quadrilatero di vertici  $z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}$  un trapezio isoscele. Ot-

---

<sup>4</sup>il piano complesso è un modo per visualizzare lo spazio dei numeri complessi; può essere pensato come un piano cartesiano modificato, con la parte reale del numero complesso rappresentata sull'asse delle ascisse, chiamato dunque asse reale, e la parte immaginaria sull'asse delle ordinate, chiamato allora asse immaginario.

teniamo così un nuovo poligono di uguale perimetro del primo, ma area maggiore, in contraddizione con la proprietà estremante del poligono di partenza.

□

Il teorema isoperimetrico può essere espresso anche dalla relazione nota con il nome di *disuguaglianza isoperimetrica*: se un poligono ha  $n$  lati, la sua area  $A$  ed il suo perimetro  $L$  soddisfano

$$L^2 \geq 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) A$$

e l'uguaglianza vale se e solo se il poligono è regolare. La successione  $\{n \tan(\pi/n)\}$  decresce e tende a  $\pi$  per  $n \rightarrow \infty$ . Dunque ogni poligono verifica:

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

## 2.3 Disuguaglianza isoperimetrica nel piano

La disuguaglianza isoperimetrica nel piano secondo cui, tra tutte le curve chiuse di lunghezza assegnata il cerchio racchiude la massima area, è espressa dalla disuguaglianza

$$L^2 \geq 4\pi A \quad (2.2)$$

dove  $L$  è la lunghezza della curva considerata e  $A$  l'area che essa racchiude.

### 2.3.1 Problema di Didone

Vediamo prima il caso particolare in cui l'obiettivo è quello di rendere massima l'area del rettangoloide di una funzione positiva  $f$  quando la lunghezza del suo grafico è assegnata. Questo problema prende il nome di problema di Didone.

**Definizione 2.3.1.** Una funzione a valori reali di una variabile reale definita in un intervallo  $[a, b]$  è assolutamente continua se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall [a_i, b_i], i = 1, \dots, n : ]a_i, b_i[ \cap ]a_j, b_j[ \neq \emptyset, \forall i \neq j$$

tale che

$$\sum_i |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon.$$

Vale il seguente

**Teorema 2.4.** Se  $f$  è assolutamente continua in  $[a, b]$ , allora esiste  $f'$  q.o. e, fissato  $x_0 \in [a, b]$ , si ha

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Questo risultato ci consente di applicare nel prossimo teorema la formula di integrazione per parti.

**Teorema 2.5.** *Sia  $f$  assolutamente continua in  $[-r, r]$ ,  $f \geq 0$ , e  $f(r) = 0$ ,  $f(-r) = 0$ ; siano  $L$  la lunghezza del grafico di  $f$ , ovvero*

$$L = \int_{-r}^r \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

*e  $A$  l'area del sottografico di  $f$ , ovvero*

$$A = \int_{-r}^r f(x) dx,$$

*allora risulta*

$$L^2 \geq 2\pi A \tag{2.3}$$

*e vale l'uguaglianza se e solo se il grafico di  $f$  è una semicirconferenza, ovvero*

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \forall x : -r \leq x \leq r. \tag{2.4}$$

*Dimostrazione.* Usando le formule di integrazione per parti sull'area si ha

$$A = - \int_{-r}^r x f'(x) dx.$$

Guardando la seguente disuguaglianza

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{x}{r} f'(x) \geq \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}, \quad \forall x : -r \leq x \leq r, \forall f', \tag{2.5}$$

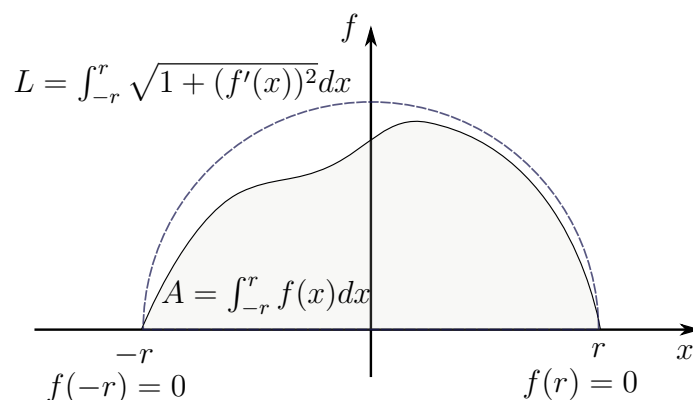


Figura 2.6: Problema di Didone.

possiamo affermare che il primo membro è una funzione strettamente convessa di  $f'(x)$  che presenta il minimo nel punto

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (2.6)$$

il cui valore è dato dal secondo membro della 2.5. Dunque vale il segno di uguaglianza nella 2.5 se e solo se vale la 2.6.

Integrando tutto tra  $r$  e  $-r$  deduciamo che

$$\int_{-r}^r \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + \frac{1}{r} \int_{-r}^r x f'(x) dx \geq \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx,$$

cioè

$$L - \frac{1}{r} A \geq \frac{\pi}{2} r,$$

il che implica

$$L^2 - 2\pi A \geq (L - \pi r)^2. \quad (2.7)$$

Segue immediatamente la 2.3.

Infine se vale l'uguaglianza nella 2.3 essa vale anche nella disuguaglianza 2.7 e in tutte le precedenti, in particolare nella 2.5. Allora dalla 2.6 si ha la 2.4.

□

### 2.3.2 Il caso generale

Prendiamo una generica curva chiusa di lunghezza  $L$  e area  $A$ . Vogliamo dimostrare che

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

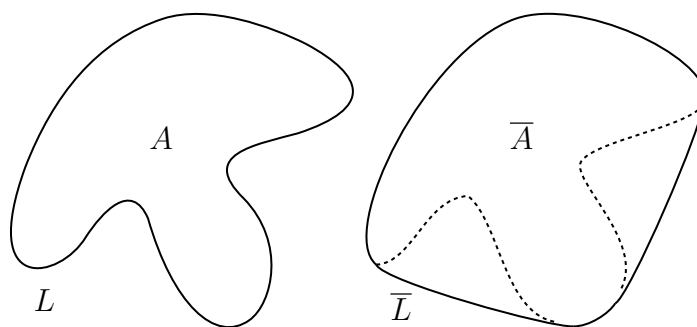


Figura 2.7: Una curva chiusa e il suo inviluppo convesso.

Possiamo considerare l'inviluppo convesso di tale curva così da ottenerne una nuova, di lunghezza  $\bar{L} \leq L$  e area  $\bar{A} \geq A$ . Pertanto per dimostrare che  $L^2 \geq 4\pi A$  è sufficiente dimostrare che

$$\bar{L}^2 \geq 4\pi \bar{A}.$$

Abbiamo ottenuto un insieme convesso di perimetro  $\bar{L}$  e area  $\bar{A}$  che possiamo bisecare (come in Figura 2.8) in modo da suddividere il suo perimetro in due parti uguali. Chiameremo  $A_1$  e  $A_2$  le due aree dei due nuovi insiemi.

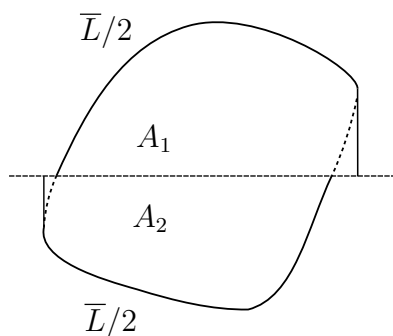


Figura 2.8: Insieme convesso bisecato e reso grafico.

Le due porzioni così ottenute, a meno di aggiungere dei tratti "quasi" verticali che ne riducono ulteriormente il perimetro ed aumentano l'area, hanno il bordo che è grafico di funzioni. Vale dunque la disuguaglianza 2.3 (Problema di Didone) per entrambe:

$$\left(\frac{\bar{L}}{2}\right)^2 \geq 2\pi A_1 \quad , \quad \left(\frac{\bar{L}}{2}\right)^2 \geq 2\pi A_2.$$

Sommando si ha

$$\left(\frac{\bar{L}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{L}}{2}\right)^2 \geq 2\pi(A_1 + A_2)$$

e quindi segue la disuguaglianza cercata  $\bar{L}^2 \geq 4\pi\bar{A}$ .

# Capitolo 3

## Principio di Dirichlet

Un primo approccio ai metodi diretti del calcolo delle variazioni vuole la trattazione, da un opportuno punto di vista, di alcuni problemi al contorno per particolari equazioni.

### 3.1 Equazioni alle derivate parziali

Un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $m$  si dice semi-lineare se in essa le derivate di ordine massimo della funzione incognita  $u(x_1, \dots, x_n)$  figurano linearmente:

$$f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0.$$

La più generale di queste equazioni del primo ordine in  $n$  variabili è:

$$f_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + f_{n+1} = 0,$$

dove le  $f_i$  sono funzioni delle variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

Vediamo ora la più generale delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineare del secondo ordine in  $n = 2$  variabili:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} + Du = f,$$

dove le  $a_{ij}$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e la  $f$  sono funzioni delle due variabili  $x, y$ .

In questo caso l'interesse sta nella ricerca di una soluzione, ossia di un integrale, che sia definita e continua con le sue derivate fino al secondo ordine, in un dato dominio, e verifichi, sulla frontiera di questo dominio, ulteriori condizioni dette condizioni al bordo. Il tipo di tali condizioni dipende dal segno del seguente determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

sul quale è basata una classificazione di questo tipo di equazioni. Infatti se:

- $A > 0$  sono equazioni di tipo ellittico;
- $A < 0$  sono equazioni di tipo iperbolico;
- $A = 0$  sono equazioni di tipo parabolico.

Si definisce equazione alle derivate parziali quasi-lineare il problema

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

dove le  $a_{ij}$  sono funzioni che dipendono da  $x, y, u$  e  $Du$ . Di nuovo, l'equazione è:

- ellittica se  $A > 0$ ;
- iperbolica se  $A < 0$ ;
- parabolica se  $A = 0$ .

Se  $n > 2$ , la matrice  $A_{ij}$  è una matrice simmetrica  $n \times n$ . L'equazione associata si dice ellittica se  $A$  presenta tutti autovalori dello stesso segno, iperbolica se gli autovalori sono tutti non nulli e  $(n - 1)$  hanno lo stesso segno, parabolica se un autovalore è nullo e tutti gli altri sono non nulli e hanno tutti lo stesso segno.

Ecco alcuni esempi notevoli per ciascun caso:

l'equazione di Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  è di tipo ellittico;

l'equazione delle onde  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  è di tipo iperbolico;

l'equazione del calore  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  è di tipo parabolico.

## 3.2 Il problema di Dirichlet

Prendiamo l'*equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0$$

e l'*equazione di Poisson*, anche detta di Laplace non omogenea

$$\Delta u = f.$$

In analisi matematica quest'ultima è un'equazione differenziale alle derivate parziali ellittica, di largo utilizzo in meccanica, termodinamica ed elettrostatica mentre l'*equazione di Laplace* è l'equazione omogenea associata e riveste particolare importanza in fluidodinamica ed elettromagnetismo. Inoltre le sue soluzioni, differenziabili fino al secondo ordine, costituiscono la classe delle funzioni armoniche, che sono funzioni analitiche. Definito il dominio  $\Omega$ , scriviamo l'equazione di Poisson e la sua condizione al bordo

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f & \forall x, y \in \Omega \\ u = g & \forall x, y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Nel caso di  $f = 0$  si ha appunto l'equazione di Laplace.

La condizione al bordo è detta di Dirichlet e si osserva appunto che è di tipo quasi-lineare con  $A = 1, B = 0, C = 1$ , dunque ellittica.

Scriviamo il *problema di Dirichlet* per questa seconda equazione: esso consiste nel cercare una funzione  $u$  che verifichi le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ;  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dunque il problema 3.1 consiste nella determinazione di una funzione incognita di due o

più variabili, che verifichi sia una data equazione alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine, sia una data condizione al bordo del suo dominio.

Supponiamo che le funzioni  $f$  e  $g$  siano molto regolari, ovvero infinitamente differenziabili ( $f, g \in C^\infty(\Omega)$ ) e prolungabili a tutto  $\mathbb{R}^n$  con funzioni altrettanto regolari denotate ancora con  $f$  e  $g$  ( $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ). Supponiamo inoltre che il dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sia limitato. Prendiamo la classe di tutte le funzioni sufficientemente regolari che coincidono con  $g$  su  $\partial\Omega$

$$X = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^1(\Omega) : u = g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Introduciamo il *principio di Dirichlet*: se il problema 3.1 ha una soluzione abbastanza buona, essa minimizza il funzionale  $F$ , definito dalla seguente espressione, in  $X$

$$F(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2fu) dx. \quad (3.2)$$

con  $\nabla = \text{gradiente}$  e  $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$ .

Vale anche il viceversa: se  $F$  ha un minimo in una classe abbastanza ampia di funzioni coincidenti con  $g$  sulla frontiera del loro dominio, la funzione minimizzante è soluzione del problema 3.1.

L'unicità della soluzione del problema 3.1 è dimostrata dalle seguenti proprietà:

- il funzionale 3.2 è convesso<sup>1</sup>;
- i punti critici di un funzionale convesso, differenziabile secondo Fréchet<sup>2</sup> e definito in un sottoinsieme aperto convesso di uno spazio lineare normato, sono esattamente i punti in cui tale funzionale assume valore minimo;

---

<sup>1</sup>la convessità delle funzioni è una proprietà di notevole importanza nei problemi di ottimizzazione, tali funzioni sono tra le più studiate nel calcolo delle variazioni.

Una  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$  ovvero se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sopra del grafico stesso.

<sup>2</sup>siano  $X, Y$  spazi di Banach e  $f, g \in X$ , il funzionale  $F : X \rightarrow Y$  è differenziabile secondo Fréchet se esiste una applicazione lineare limitata  $L : X \rightarrow Y$  tale che  $\lim_{|g| \rightarrow 0} \frac{F(f+g) - F(f) - L(g)}{|g|} = 0$ .

- ogni soluzione  $u$  abbastanza buona dell'equazione di Poisson è un punto critico per il funzionale 3.2 in una classe abbastanza ampia di funzioni sufficientemente regolari che sulla frontiera assumono lo stesso valore di  $u$ , e viceversa; ogni punto critico  $u$  di 3.2, relativo ad una classe di funzioni abbastanza ampia, è una soluzione dell'equazione di Poisson. Dunque possiamo affermare che l'equazione di Poisson è l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale 3.2.

Si hanno come conseguenze i seguenti risultati:

- sia  $\overline{\Omega}$  la chiusura del dominio  $\Omega$ , se  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  (spazio di funzioni in  $C^2(\Omega)$  con derivate di ordine  $\leq 2$  prolungabili con continuità a  $\overline{\Omega}$ ) e  $\Delta u = f$ , allora  $F'(u) = 0$ . Infatti se  $\partial\Omega$  è una superficie liscia, un'integrazione per parti dimostra che  $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \nu \rangle dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) \nu dx$ ,  $\forall \nu \in C_0^\infty(\Omega)$  (spazio di funzioni in  $C^\infty(\Omega)$ , che si annullano al di fuori di un  $\Omega' \subset \Omega$  compatto e sono dette funzioni test), con  $\langle \nabla u, \nabla \nu \rangle = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \nu_{x_i}$  prodotto scalare;
- se  $u$  è abbastanza regolare, ad esempio differenziabile con continuità, e  $F'(u) = 0$ , allora  $u$  è una soluzione dell'equazione di Poisson.

### 3.3 Esistenza del minimo

Dopo aver presentato gli elementi in gioco vogliamo ora provare effettivamente che il funzionale di tipo integrale 3.2 ha un minimo in una opportuna classe di funzioni che soddisfano la condizione al bordo data nel problema di Dirichlet 3.1. La dimostrazione prevede l'utilizzo degli *spazi di Sobolev*. Infatti si dimostra che l'esistenza del minimo di  $F$  si ricava dalla completezza dello spazio di Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $Y$  la classe di funzioni sufficientemente regolari che soddisfano la condizione al bordo di Dirichlet, i cui elementi coincidono con  $g$  in un intorno di  $\partial\Omega$  e appartengono a  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , e cerchiamo l'estremo inferiore del 3.2 in questa classe.

$$g + C_0^\infty(\Omega) = \{u : (u - g) \in C_0^\infty(\Omega)\} = Y;$$

$$\mu = \inf\{F(u) : u \in Y\}.$$

La dimostrazione procede per step.

1. Vogliamo che  $\mu$  sia finito.

Supponiamo  $f \neq 0$  e  $n \geq 3$  la dimensione dello spazio. Poniamo

$$\varphi = u - g, \quad p = 2n/(n+2), \quad q = 2n/(n-2) := 2^*;$$

in queste ipotesi usiamo il seguente risultato, che ci mostra un caso particolare dei teoremi di immersione di Sobolev.

**Lemma 3.1.** *Sia*

$$k_n = 2^{(n-1)/n} [n(n-2)]^{-1/2} \pi^{-2(n+1/n)} [\Gamma(n+1/2)]^{1/n}, \quad (3.3)$$

supponiamo che  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e che  $\text{misura}\{x \in \mathbb{R}^n : |\varphi(x)| > t\} < \infty, \forall t > 0$ . Allora

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx \right)^{2/q} \leq k_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x)|^2 dx$$

e vale l'uguaglianza se e solo se

$$\varphi(x) = (1 + |x|^2)^{(2-n)/2}. \quad (3.4)$$

Ovvero il rapporto tra i due integrali  $\frac{(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx)^{1/q}}{(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x)|^2 dx)^{1/2}}$  ha un valore massimo, individuato dal secondo membro della 3.3 e raggiunto se e solo se vale la 3.4.

Per la disuguaglianza di Hölder e per il lemma 3.1

$$\begin{aligned} F(u) &= F(g) + F(\varphi) + 2 \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi, \nabla g \rangle dx \\ &\geq F(g) + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - 2 \|f\|_p \|\varphi\|_q - 2 \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx} \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - 2 \left( k_n \|f\|_p + \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx} \right) \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx} + F(g). \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un polinomio di secondo grado in  $\sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx}$ .

Quindi la restrizione di  $F$  alla classe di funzioni  $Y$  è inferiormente limitata:

$$F(u) \geq F(g) - \left( k_n \|f\|_p + \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx} \right)^2.$$

2. Scegliamo una successione minimizzante  $\{u_n\}$  di funzioni tali che

$$\{u_n\} \in Y, \quad F(u_n) \rightarrow \mu.$$

La sua esistenza è immediata dalla definizione stessa di estremo inferiore<sup>3</sup>, la sua costruzione invece è più complessa e non è utile ai fini di questa trattazione.

3. Studiamo le proprietà di convergenza delle successioni minimizzanti.

Dalla definizione 3.2 del funzionale  $F$  si ha

$$\frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) - F\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \quad (3.5)$$

che implica

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 dx \leq 2[F(u_n) + F(u_m) - 2\mu].$$

Supposte  $\{u_n\}, \{u_m\}$  successioni minimizzanti, da

$$F(u_n) \rightarrow \mu, \quad F(u_m) \rightarrow \mu$$

segue

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

che implica a sua volta, insieme alla condizione al bordo,

---

<sup>3</sup>sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x = \inf X$ ,  $x \in \mathbb{R}$  se  $x$  è un minorante di  $X$  e se  $\forall y > x$ ,  $y$  non è un minorante di  $X$ , ovvero  $x$  è il più grande minorante dell'insieme.

$$\int_{\Omega} (u_n - u_m)^2 dx \rightarrow 0.$$

Infatti, poiché entrambe le successioni  $\{u_n\}$  e  $\{u_m\}$  appartengono alla classe  $Y$  che è convessa, anche la media  $(u_n + u_m)/2 \in Y$  e allora  $F((u_n + u_m)/2) \geq \mu$  per la definizione di estremo inferiore.

Inoltre  $u_n - u_m \in C_0^\infty(\Omega)$  e vale il

**Lemma 3.2.** *Se  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , allora*

$$\int_{\Omega} (\varphi(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi j_{\nu,1}^2} \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{n}{2} \right) m(\Omega) \right]^{2/n} \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 dx$$

dove  $\nu = \frac{n}{2} - 1$ ;  $j_{\nu,1}$  è il primo zero positivo della funzione di Bessel  $J_\nu$ <sup>4</sup>;

$\Gamma$  è la funzione di Eulero<sup>5</sup> e  $m$  la misura  $n$ -dimensionale.

Dunque afferma che l'estremo inferiore diminuisce se  $\Omega$  è sostituito da una palla  $B$  con la stessa misura di  $\Omega$ .

É provato che le successioni  $\{u_n\}, \{\partial u_n / \partial x_1\}, \dots, \{\partial u_n / \partial x_k\}$  sono successioni di Cauchy in  $L^2(\Omega)$  e per la completezza di  $L^2$  abbiamo che

(a) esiste una funzione  $u \in L^2(\Omega)$  :

$$\|u - u_n\|_2 \rightarrow 0; \quad (3.7)$$

(b) esistono le derivate generalizzate di  $u, \partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_k$  :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_2 \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.8)$$

---

<sup>4</sup>la funzione di Bessel  $J_\nu$  è una soluzione dell'equazione differenziale  $z^2 \frac{d^2 J_\nu}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu}{dz} + (z^2 + \nu^2) J_\nu = 0$ .

<sup>5</sup>la funzione Gamma di Eulero è una particolare funzione che estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi.

La 3.7, la 3.8 e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implicano che  $u$  e  $\partial u/\partial x_i$  sono legate da

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (3.9)$$

Infatti dall'integrazione per parti si ha  $\int \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi dx = - \int u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ , poiché  $\{u_n\}$  regolare e  $\varphi = 0$  vicino a  $\partial\Omega$ .

Inoltre le derivate generalizzate di  $u$  sono univocamente determinate da  $u$ , ovvero  $\partial \varphi_n / \partial x_i \xrightarrow{L^2} \partial u / \partial x_i$  qualunque sia la successione  $\{\varphi_n\} \in C^{\infty}$ , purché  $\varphi \xrightarrow{L^2} u$  e  $\{\partial \varphi_n / \partial x_i\}$  una successione di Cauchy in  $L^2$ .

4. Definiti lo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , delle funzioni  $u \in L^p(\Omega)$  le cui derivate generalizzate del primo ordine  $\partial u / \partial x_i$  appartengono ancora ad  $L^p(\Omega)$  e lo spazio  $W_0^{1,p}(\Omega)$  delle funzioni  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e che si annullano, in senso generalizzato, su  $\partial\Omega$ , possiamo affermare che ogni successione minimizzante  $\{u_n\}$  converge in  $W^{1,2}(\Omega)$  e il suo limite appartiene a  $g + W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Dunque abbiamo allargato la classe di funzioni in gioco e indebolito la condizione al bordo.

**Teorema 3.3.** *Supponiamo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , allora le derivate generalizzate di  $u$  verificano*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad i = 1, \dots, k; \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

*Supponiamo inoltre che  $u \in L^p(\Omega)$  e che esistano  $v_1, \dots, v_k \in L^p(\Omega)$  tali che*

$$\int_{\Omega} v_i \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad i = 1, \dots, k; \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

*allora  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $v_i = \partial u / \partial x_i$ .*

5. Proviamo infine che il limite di una successione minimizzante  $\{u_n\}$  è un punto di minimo per il funzionale  $F$ .

Innanzitutto vediamo che  $F$  è continuo in  $g + W_0^{1,2}(\Omega)$  rispetto alla topologia di  $W^{1,2}(\Omega)$ . Dalla definizione 3.2 di  $F$  e dalle disuguaglianze di Chauchy-Schwarz e Hölder, con  $1/p + 1/q = 1$ , abbiamo che

$$|F(u) - F(v)| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx} \left( \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} + \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx} \right) + 2\|f\|_p \|u - v\|_q.$$

Supponendo  $q = 2n/(n-2)$ ,  $u, v \in g + W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $k_n$  definita dalla 3.3, allora

$$\|u - v\|_q \leq k_n \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx}.$$

Poichè  $u - v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e questo spazio è identificabile con  $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ , se  $\varphi \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\exists \{\varphi_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

e dunque

$$\int |\nabla \varphi_n|^2 dx \rightarrow \int |\nabla \varphi|^2 dx$$

per la definizione di derivate generalizzate.

Per il lemma di Fatou <sup>6</sup> si ha

---

<sup>6</sup>il lemma di Fatou stabilisce una disuguaglianza tra l'integrale di Lebesgue del limite inferiore di una successione di funzioni e il limite inferiore degli integrali di queste funzioni:  
 $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf \int f_n dx$

$$\int |\varphi|^q dx \leq \liminf \int |\varphi_n|^q dx,$$

per il lemma 3.1 si ha

$$\|\varphi_n\|_q \leq k_n \sqrt{\int |\nabla \varphi_n|^2 dx}$$

e dunque possiamo affermare che

$$\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_q \leq k_n \sqrt{\int |\nabla \varphi|^2 dx}.$$

Abbiamo provato un caso particolare del seguente teorema di Sobolev

**Teorema 3.4.** *Se  $n \geq 3$  e  $q = 2n/(n-2)$  allora  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  è immerso con continuità in  $L^q(\mathbb{R}^n)$  e la disuguaglianza precedente vale  $\forall \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ .*

In conclusione se  $u, v \in g + W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $p = 2n/(n+2)$  allora

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)| \leq & \left( 2k_n \|f\|_p + \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx} \right) \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx} \end{aligned}$$

e  $F$  è continuo.

Questa continuità e la definizione di  $W_0^{1,p}(\Omega)$  come chiusura di  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  implicano che

$$\inf\{F(v) : v \in g + C_0^\infty(\Omega)\} = \inf\{F(v) : v \in g + W_0^{1,2}(\Omega)\}$$

e, se  $u$  è il limite di una successione minimizzante  $\{u_n\}$ ,

$$F(u) = \mu.$$

Dunque  $F$  ha un minimo nella classe di funzioni  $g + W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Si può riassumere tutto nel seguente

**Teorema 3.5.** *Supponiamo  $n \geq 3$ ;  $p = 2n/(n+2)$ ;  $f \in L^p(\Omega)$ ;  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ , allora  $F$  ammette minimo nella classe  $g + W_0^{1,2}(\Omega)$ . Il punto di minimo è unico, in quanto  $F$  è strettamente convesso.*

□

## Capitolo 4

# Metodi Classici del Calcolo delle Variazioni

Vogliamo studiare esistenza e unicità del problema

$$\inf\{F(u) : u \in C^1([a, b]), u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad (4.1)$$

con il funzionale definito da

$$F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx,$$

dove

$$f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

I cosiddetti metodi classici consistono nel trovare il valore  $\bar{x} \in X$  che soddisfa  $F'(\bar{x}) = 0$  e quindi studiare le derivate di  $F$  per determinare la natura del punto critico  $\bar{x}$ : se sia un punto di massimo assoluto o di minimo assoluto, se sia un estremo locale o un punto di sella.

## 4.1 Equazione di Eulero-Lagrange

Vogliamo ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx}[f_p(\bar{u}(x), \bar{u}'(x), x)] = f_u(\bar{u}(x), \bar{u}'(x), x) \quad (4.2)$$

con  $x \in [a, b]$ ;  $f = f(u, p, x)$ ;  $f_u = \partial f / \partial u$ ;  $f_p = \partial f / \partial u'$ , che dovrebbe soddisfare qualsiasi minimizzante  $\bar{u} \in C^2([a, b])$  di 4.1.

In generale la soluzione dell'equazione 4.2 non necessariamente è un minimizzante di 4.1, può anche solo essere un punto stazionario per il funzionale  $F$ .

Tuttavia se il funzionale è convesso per ogni  $x \in [a, b]$ , allora ogni soluzione della 4.2 è naturalmente un minimo per 4.1.

**Teorema 4.1.** Sia  $f = f(u, p, x)$ ,  $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  
 $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$  e

$$\inf_{u \in X} \left\{ F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx \right\} = m \quad (4.3)$$

1. se la 4.3 ammette un minimo  $\bar{u} \in X \cap C^2([a, b])$ , allora necessariamente vale la 4.2, cioè

$$f_{pp}(\bar{u}, \bar{u}', x) \bar{u}'' + f_{up}(\bar{u}, \bar{u}', x) \bar{u}' + f_{xp}(\bar{u}, \bar{u}', x) = f_u(\bar{u}, \bar{u}', x)$$

dove  $f_u = \partial f / \partial u$ ;  $f_{pp} = \partial^2 f / \partial u'^2$ ;  $f_{up} = \partial^2 f / \partial u \partial u'$ ;  $f_{xp} = \partial^2 f / \partial x \partial u'$ .

2. Inversamente se  $\bar{u}$  soddisfa la 4.2 e  $f$  è convessa  $\forall x \in [a, b]$ , allora  $\bar{u}$  è un minimizzante di 4.3.
3. Inoltre se  $f$  è strettamente convessa  $\forall x \in [a, b]$ , allora il minimizzante di 4.3, se esiste, è unico.

*Dimostrazione.* Per comodità d'ora in poi chiamiamo  $T$  l'intervallo  $[a, b]$ .

1. Sia  $\bar{u}$  un punto di minimo tra tutti gli elementi di  $X$ , allora  $F(\bar{u}) \leq F(\bar{u} + \lambda\varphi)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\varphi \in C^1(T) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .  
Se chiamiamo  $G(\lambda) = F(\bar{u} + \lambda\varphi)$  avremo  $G \in C^1(T) : G(0) \leq G(\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$  e deduciamo che per  $\lambda = 0$

$$\frac{d}{d\lambda}G(0) = \frac{d}{d\lambda}F(\bar{u} + \lambda\varphi) \Big|_{\lambda=0} = 0$$

e quindi

$$\int_a^b [f_p(\bar{u}, \bar{u}', x)\varphi' + f_u(\bar{u}, \bar{u}', x)\varphi] dx = 0.$$

Questa espressione integrale è chiamata *forma debole dell'equazione di Eulero-Lagrange*.

Integrando per parti:

$$\int_a^b \left[ -\frac{d}{dx}f_p(\bar{u}, \bar{u}', x) + f_u(\bar{u}, \bar{u}', x) \right] \varphi dx = 0,$$

$\forall \varphi \in C^1(T), \varphi(a) = \varphi(b) = 0$  e dunque vale la 4.2.

2. Sia  $\bar{u}$  una soluzione della 4.2 con al bordo  $\bar{u}(a) = \alpha, \bar{u}(b) = \beta$ ; se  $f$  è convessa per ogni  $x \in T$ , allora per ogni  $u \in X$

$$f(u, u', x) \geq f(\bar{u}, \bar{u}', x) + f_u(\bar{u}, \bar{u}', x)(u - \bar{u}) + f_p(\bar{u}, \bar{u}', x)(u' - \bar{u}').$$

Integrando

$$F(u) \geq F(\bar{u}) + \int_a^b [f_u(\bar{u}, \bar{u}', x)(u - \bar{u}') + f_p(\bar{u}, \bar{u}', x)(u' - \bar{u}')] dx;$$

poiché  $u(a) - \bar{u}(a) = u(b) - \bar{u}(b) = 0$ , integrando per parti il secondo termine dell'integrale

$$F(u) \geq F(\bar{u}) + \int_a^b \left[ f_u(\bar{u}, \bar{u}', x) - \frac{d}{dx} f_p(\bar{u}, \bar{u}', x) \right] (u - \bar{u}) dx.$$

Infine dalla 4.2,  $F(u) \leq F(\bar{u})$ .

3. Siano  $u, v \in X$  soluzioni della 4.3, esse devono necessariamente essere uguali. Definiamo  $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$  e osserviamo che anche  $w \in X$ . Per la convessità di  $f$

$$\frac{1}{2}f(u, u', x) + f(v, v', x) \geq f(w, w', x)$$

e quindi

$$m = \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) \geq F(w) \geq m.$$

Avremo

$$\int_a^b \left[ \frac{1}{2}f(u, u', x) + \frac{1}{2}f(v, v', x) - f(w, w', x) \right] dx = 0$$

e poiché l'integrando, per la stretta convessità del funzionale, è positivo a meno che  $u = v, u' = v'$ , concludiamo che  $u \equiv v$ .

□

**Proposizione 4.1.1.**

- *Il teorema appena enunciato non da alcun risultato di esistenza.*
- *Se  $F$  non è convesso, allora la soluzione di 4.2 non è necessariamente un punto di minimo assoluto per 4.3, può essere anche un massimo o un minimo locale, ed è chiamata punto stazionario per  $F$ .*
- *Il teorema può essere generalizzato dai seguenti casi:*
  - *se  $u$  è un vettore,  $u : T \rightarrow \mathbb{R}^N$  q.o.,  $N > 1$  e dunque l'equazione di Eulero-Lagrange diventa un sistema di equazioni differenziali ordinarie;*
  - *se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n > 1$  e dunque l'equazione di Eulero-Lagrange è una equazione differenziale alle derivate parziali;*
  - *se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $n > 1$ ,  $N > 1$  e dunque l'equazione di Eulero-Lagrange diventa un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali;*
  - *se  $f = f(u, u', \dots, u^n, x)$  e dunque l'equazione di Eulero-Lagrange è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine;*
  - *se si hanno delle altre condizioni al bordo del tipo  $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$ ;*
  - *se si hanno vincoli integrali del tipo  $\int_a^b g(u, u', x)dx = 0$ .*

## 4.2 Problema variazionale vincolato

Consideriamo un generico intervallo aperto  $]a, b[$ , che indico con  $I$ , contenuto in  $\mathbb{R}$  e il funzionale

$$F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx.$$

Cerchiamo le funzioni  $u \in C_0^1(T)$  minimizzanti  $F$  che verificano

$$G(u) = \int_a^b g(u(x), u'(x), x) dx = 0$$

dove  $g$  è una funzione sufficientemente regolare. Le condizioni necessarie per cui  $u$  risolva il problema con questa condizione corrispondono alla condizione integrale di Eulero e a quella differenziale.

Supponiamo che  $\bar{u}$  sia un minimo, prendiamo due funzioni  $v_1, v_2 \in C_0^1(T)$  e una coppia di numeri reali  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ .

Definisco  $u_\lambda = \bar{u} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  e  $u'_\lambda = \frac{d}{dx} u_\lambda$  tali che

$$G(u_\lambda) = 0;$$

$$F(u_\lambda) = \int_a^b f(u_\lambda, u'_\lambda, x) dx$$

con

$$F(u_\lambda) \geq F(\bar{u})$$

e jacobiano

$$J = \left( \frac{\partial G(u_\lambda)}{\partial \lambda_i} \right)_{\lambda=0} \quad i = 1, 2.$$

Si verifica

$$(J_1^2) + (J_2^2) \geq 0.$$

Per adesso non consideriamo il caso dell'uguaglianza e supponiamo che  $J_1$  non si annulli.

Scriviamo  $\lambda_1$  in funzione di  $\lambda_2$  in un intorno  $|\lambda| < \delta$  :  $\lambda_1 = \varphi(\lambda_2)$ , allora  $[\varphi'(\lambda_2)]_{\lambda_2=0} = -J_2/J_1$  e per  $\lambda_2 = 0$  si ha  $\varphi(\lambda_2) = 0$ . Poiché  $u$  è minimizzante e dalla definizione di jacobiano

$$\left[ \frac{d}{d\lambda_2} F(u_{\varphi(\lambda_2), \lambda_2}) \right]_{\lambda=0} = 0$$

$$\left[ -\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F(u_\lambda) \frac{J_2}{J_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} F(u_\lambda) \right]_{\lambda=0} = 0$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} F(u_\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_2} G(u_\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda_2} F(u_\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_1} G(u_\lambda) \right]_{\lambda=0} = 0.$$

Quest'ultima equazione, soddisfatta anche se sullo jacobiano vale la condizione di uguaglianza, è equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F(u_\lambda)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F(u_\lambda)}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial G(u_\lambda)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial G(u_\lambda)}{\partial \lambda_2} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{per } \lambda = 0. \quad (4.4)$$

Implica che esiste un vettore non nullo  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  tale che

$$\mu_1 \left[ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \right]_{\lambda=0} + \mu_2 \left[ \frac{\partial G}{\partial \lambda_1} \right]_{\lambda=0} = 0$$

$$\mu_1 \left[ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right]_{\lambda=0} + \mu_2 \left[ \frac{\partial G}{\partial \lambda_2} \right]_{\lambda=0} = 0.$$

Esplicitando queste espressioni e ricordando la combinazione lineare definita su  $u_\lambda$

$$\int_a^b \left[ \mu_1 \left( v_1 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} + v_1' \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u'} \right) + \mu_2 \left( v_1 \frac{\partial g(\bar{u})}{\partial u} + v_1' \frac{\partial g(\bar{u})}{\partial u'} \right) \right] dx = 0$$

$$\int_a^b \left[ \mu_1 \left( v_2 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} + v_2' \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u'} \right) + \mu_2 \left( v_2 \frac{\partial g(\bar{u})}{\partial u} + v_2' \frac{\partial g(\bar{u})}{\partial u'} \right) \right] dx = 0.$$

- Se la matrice indicata nella 4.4 è nulla, le componenti di  $\mu$  possono essere scelte arbitrariamente e la funzione  $u$  soddisfa le equazioni di Eulero relative alle funzioni  $f$  e  $g$ ;
- se la matrice è 1 le componenti sono determinate da un fattore moltiplicativo e una delle due espressioni esplicite scritte sopra è soddisfatta per ogni  $v \in C_0^1(T)$ .

Dunque la condizione necessaria perché  $u$  sia un minimizzante per un problema variazionale vincolato è che questa funzione soddisfi l'equazione di Eulero integrale per il funzionale  $H(u) = \mu F(u) + G(u)$  dove, in questo caso, sono scelte arbitrariamente  $\mu_2 = 1, \mu_1 = \mu$ .

### 4.3 Equazione di Dubois-Reymond

Vediamo che ogni minimizzante  $\bar{u}$  di 4.1 soddisfa una nuova diversa espressione dell'equazione di Eulero-Lagrange, spesso chiamata *equazione di DuBois-Reymond*: per ogni  $x \in T$  vale la seguente equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}[f(\bar{u}, \bar{u}', x) - f_p(\bar{u}, \bar{u}', x)\bar{u}'] = f_x(\bar{u}, \bar{u}', x). \quad (4.5)$$

Questa riscrittura è particolarmente utile quando la funzione  $f$  non dipende esplicitamente dalla variabile  $x$ . Quindi avremo un integrale primo della 4.2 del tipo

$$f(\bar{u}, \bar{u}') - f_p(\bar{u}, \bar{u}')\bar{u}' = \text{cost.}$$

**Teorema 4.2.** Sia  $f = f(u, p, x)$ ,  $f \in C^2(T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  
 $X = \{u \in C^1(T) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$  e

$$\inf_{u \in X} \left\{ F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x), x) dx \right\} = m \quad (4.6)$$

Se  $u \in X \cap C^2(T)$  è un minimizzante per 4.6, allora per ogni  $x \in T$  vale la 4.5.

*Dimostrazione.* Esistono due diverse dimostrazioni: la prima è molto elementare ed utilizza l'equazione di Eulero-Lagrange mentre la seconda è più difficoltosa.

1. Per qualsiasi  $u \in C^2(T)$

$$\frac{d}{dx}[f(u, u', x) - f_p(u, u', x)u'] = f_x(u, u', x) + \left[ f_u(u, u', x) - \frac{d}{dx}f_p(u, u', x) \right] u'.$$

Per il teorema 4.1 sappiamo che ogni  $u$  che minimizza 4.5 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange, dunque combinando la 4.2 con la 4.5 otteniamo il risultato.

2. Vogliamo operare un cambio di variabili dipendenti.

Dati  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(T)$ ,  $\lambda = (2\|\varphi'\|_\infty)^{-1}$ , riscrivo la variabile  $p$

$$p(x, \varepsilon) = x + \varepsilon \lambda \varphi(x) = y.$$

Vediamo che  $\forall |\varepsilon| \leq 1$ ,  $p(\cdot, \varepsilon) : T \rightarrow T$  è un diffeomorfismo<sup>1</sup> con  $p(a, \varepsilon) = a$ ,  $p(b, \varepsilon) = b$ ,  $p_x(x, \varepsilon) > 0$ .

Sia  $\xi$  l'inversa della variabile  $x$ :  $\xi(\cdot, \varepsilon) : T \rightarrow T$ , allora q.o.

$$p(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon) = y.$$

Dunque da

$$\begin{cases} x = y - \varepsilon \lambda \varphi(\xi(y, \varepsilon)) \\ \xi(y, \varepsilon) = y - \varepsilon \lambda \varphi(x) \end{cases}$$

deriviamo prima rispetto a  $y$

$$\begin{aligned} p_x(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon) \xi_y(y, \varepsilon) &= 1 \rightarrow \xi_y(y, \varepsilon) = \frac{1}{p_x(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon)} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon \lambda \varphi'(y - \varepsilon \lambda \varphi(x))} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon \lambda \varphi'(y) + O(\varepsilon^2)} \\ &= 1 - \varepsilon \lambda \varphi'(y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>un diffeomorfismo è una funzione tra due varietà differenziabili  $C^1$  con la sua inversa.

poi rispetto a  $\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 p_x(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon)\xi_\varepsilon(y, \varepsilon) + p_\varepsilon(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon) &= 0 \rightarrow \xi(y, \varepsilon) = -\frac{p_\varepsilon(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon)}{p_x(\xi(y, \varepsilon), \varepsilon)} \\
 &= -\frac{\lambda\varphi(\xi(y, \varepsilon))}{1 + \varepsilon\lambda\varphi(\xi(y, \varepsilon))} \\
 &= -\frac{\lambda\varphi(y) + O(\varepsilon)}{1 + O(\varepsilon)} \\
 &= [-\lambda\varphi(y) + O(\varepsilon)][1 - O(\varepsilon)] \\
 &= -\lambda\varphi(y) + O(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

L'espressione  $O(\varepsilon)$  sta per una funzione  $f$  tale che  $|f(\varepsilon)/\varepsilon|$  è limitata in un intorno di  $\varepsilon = 0$ .

Preso in  $u$  un minimo per la 4.5,

$$u^\varepsilon(x) = u(p(x, \varepsilon));$$

operando il cambio di variabile  $p(x, \varepsilon) = y$  risulterà

$$\begin{aligned}
 F(u^\varepsilon) &= \int_a^b f(u^\varepsilon(x), (u^\varepsilon)'(x), x) dx \\
 &= \int_a^b f(u(p(x, \varepsilon)), u'(p(x, \varepsilon)), x) p_x(x, \varepsilon) dx \\
 &= \int_a^b f(u(y), u'(y)/\xi_y(y, \varepsilon), \xi(y, \varepsilon)) \xi_y(y, \varepsilon) dx.
 \end{aligned}$$

Chiamando  $g(\varepsilon)$  la funzione sotto integrale nell'ultima espressione otteniamo

$$g'(\varepsilon) = \xi_{y\varepsilon}f + \left[ f_x\xi_\varepsilon - \frac{\xi_{y\varepsilon}}{\xi_y^2} u'f_p \right],$$

$$g'(0) = \lambda(-f_x\varphi + (u'f_p - f)\varphi').$$

Dall'ipotesi che  $u$  sia un minimo per la 4.5 e che  $u^\varepsilon \in X$  avremo  $F(u^\varepsilon) \geq F(u)$  e quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= \lambda \int_a^b \{-f_x(u(x), u'(x)x)\varphi(x) + \\ &\quad + [u'(x)f_p(u(x), u'(x), x) - f(u(x), u'(x), x)]\varphi'(x)\}dx \\ &= \lambda \int_a^b \{-f_x(u(x), u'(x), x)\} + \\ &\quad + \frac{d}{dx}[-u'(x)f_p(u(x), u'(x), x) + f(u(x), u'(x), x)]\varphi(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni il teorema è dimostrato.

□

## Capitolo 5

# Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni

Vogliamo studiare esistenza e unicità del problema

$$\inf \left\{ F(u) = \int_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x), x) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m$$

dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme aperto;  $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(u, p, x)$ ;  
 $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ , ovvero  $u, u_0 \in W^{1,p}$ ,  $u - u_0 \in W_0^{1,p}$ .

**Proposizione 5.0.1.** *Il fatto che  $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$  significa che  $u = u_0$  su  $\partial\Omega$ .*

Questo è il problema fondamentale del calcolo delle variazioni e se sono soddisfatte le due seguenti ipotesi principali, ha soluzione  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$

1. *convessità*:  $p \rightarrow f(u, p, x)$  è convesso per ogni coppia  $(u, x) \in \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$ ;
2. *coercività*: esistono  $p > q \geq 1$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha_1 > 0$ , tali che

$$f(u, p, x) \geq \alpha_1 |p|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (u, p, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}.$$

Entrambe queste ipotesi sono soddisfatte dall'integrale di Dirichlet.

## 5.1 Integrale di Dirichlet

L'integrale di Dirichlet ha come funzione integranda

$$f(u, p, x) = \frac{1}{2}|p|^2.$$

**Teorema 5.1.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera lipschitziana, sia  $u_0$  una funzione in  $W^{1,2}(\Omega)$ , il problema*

$$\inf \left\{ F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx : u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) \right\} = m \quad (5.1)$$

*ammette una e una sola soluzione  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  che soddisfa l'equazione di Laplace in forma debole, ovvero*

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (5.2)$$

*Viceversa, se  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}$  è soluzione debole dell'equazione di Laplace, allora è un minimizzante per il problema 5.1.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione presentata consta di due parti principali con vari passaggi intermedi e di una terza parte che mette in accordo le prime due.

### 1. Esistenza

(a) *compattezza:* il fatto che  $u_0 \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) \Rightarrow 0 \leq m \leq F(u_0) < \infty$ .

Sia  $u_n \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  una successione minimizzante per la 5.1, significa che

$$F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf\{F(u)\} = m.$$

Dalla disuguaglianza di Poincaré possiamo trovare le costanti  $c_1, c_2 > 0$ :

$$\sqrt{2F(u_n)} = \|\nabla u_n\|_2 \geq c_1 \|u_n\|_{1,2} - c_2 \|u_0\|_{1,2}.$$

Dal fatto che  $\{u_n\}$  è minimizzante e  $m < \infty$  diciamo che  $\exists c_3 > 0$ :

$$\|u_n\|_{1,2} \leq c_3.$$

Possiamo dedurre che esiste una funzione  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  e una sottosuccessione che chiamiamo ancora  $\{u_n\}$ :

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in } W^{1,2}.$$

- (b) *semicontinuità inferiore*: indipendentemente dal fatto che  $\{u_n\}$  sia una successione minimizzante, il funzionale  $F$  è debolmente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in  $W^{1,2}(\Omega)$ , ovvero

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in } W^{1,2} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(\bar{u}).$$

- (c) Combinando i due passi precedenti e partendo dal fatto che  $\{u_n\}$  sia una successione minimizzante,  $F(u_n) \rightarrow \inf\{F(u)\} = m$ , e inferiormente semicontinua,  $\liminf F(u_n) \geq F(\bar{u})$ : deduciamo che  $F(\bar{u}) = m$ , dunque  $\bar{u}$  è un minimo per la 5.1.

2. *Unicità*

Assumiamo che esistano  $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) : F(\bar{u}) = F(\bar{v}) = m \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ . Definiamo  $\bar{w} = (\bar{u} + \bar{v})/2$ ,  $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ . Essendo convessa la funzione  $p \rightarrow |p|^2$  possiamo affermare che anche  $\bar{w}$  è un minimizzante

$$m \leq F(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}F(\bar{u}) + \frac{1}{2}F(\bar{v}) = m$$

e implica

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2}|\nabla \bar{u}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla \bar{v}|^2 - \left| \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2} \right|^2 \right] dx = 0.$$

Sempre per la convessità, l'integrando è non negativo e l'integrale è 0 solo se

$$\frac{1}{2}|\nabla \bar{u}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla \bar{v}|^2 - \left| \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2} \right|^2 = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Per la stretta convessità di  $p \rightarrow |p|^2$  si ottiene che  $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$  q.o. in  $\Omega$ , e, poiché le due funzioni coincidono sulla frontiera di  $\Omega$ , otteniamo l'unicità  $\bar{u} = \bar{v}$  q.o. in  $\Omega$ .

3. *Equazione di Eulero-Lagrange*

Prendiamo arbitrariamente  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ; da  $\bar{u} + \varepsilon\varphi \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $\bar{u}$  minimizzante per 5.1 abbiamo

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) &\leq F(\bar{u} + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla \bar{u} + \varepsilon\nabla \varphi|^2 dx \\ &= F(\bar{u}) + \varepsilon \int_{\Omega} \langle \nabla \bar{u}, \nabla \varphi \rangle dx + \varepsilon^2 F(\varphi). \end{aligned}$$

Ricaviamo

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\bar{u} + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

che è esattamente la 5.2.

4. Inversamente: se  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  soddisfa la 5.2 allora è necessariamente un minimizzante di 5.1. Sia  $u \in u_0 + W_0^{1,2}$  una qualsiasi funzione e  $\varphi = u - \bar{u}$ , allora  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$\begin{aligned} F(u) &= F(\bar{u} + \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \bar{u} + \nabla \varphi|^2 dx \\ &= F(\bar{u}) + \int_{\Omega} \langle \nabla \bar{u}, \nabla \varphi \rangle dx + F(\varphi) \geq F(\bar{u}) \end{aligned}$$

ed il secondo termine è 0 in accordo con la 5.2 e l'ultimo è non negativo.

□

**Proposizione 5.1.1.**

- Il fatto che  $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$  significa che  $u = u_0$  su  $\partial\Omega$ ;
- Se la soluzione  $\bar{u}$  risulta essere regolare, cioè in  $W^{2,2}(\Omega)$ , allora la 5.2 può essere integrata per parti ottenendo

$$\int_{\Omega} \Delta \bar{u}(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Con il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni si ha  $\Delta \bar{u} = 0$  q.o. in  $\Omega$ .

## 5.2 Teorema generale di esistenza

**Teorema 5.2.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato con frontiera lipschitziana e sia  $f = f(u, p, x)$ ,  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega)$  la funzione che soddisfa le seguenti ipotesi*

1.  $\forall (u, x) \in \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$  allora  $p \rightarrow f(u, p, x)$  è convessa ;
2. esistono  $p > q \geq 1$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha_1 > 0$  :

$$f(u, p, x) \geq \alpha_1 |p|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (u, p, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}.$$

*Dato il problema*

$$\inf \left\{ F(u) = \int_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x), x) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m \quad (5.3)$$

dove  $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$  con  $F(u_0) < \infty$ , allora esiste  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$  che minimizza il problema 5.3. Inoltre, se  $(u, p) \rightarrow f(u, p, x)$  è strettamente convesso per ogni  $x \in \overline{\Omega}$ , allora il minimizzante è unico.

*Dimostrazione.* La dimostrazione che vogliamo presentare necessita di rafforzare le ipotesi.

Assumiamo che  $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega})$  e riformuliamo le ipotesi, che saranno soddisfatte dalla funzione  $f(u, p, x) = f(p) = |p|^2/2$ :

1.  $(u, p) \rightarrow f(u, p, x)$  è convesso  $\forall x \in \overline{\Omega}$ ;
2. esistono  $p > 1$  e  $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha_1 > 0$  :

$$f(u, p, x) \geq \alpha_1 |p|^p + \alpha_3 \quad \forall (u, p, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega};$$

3. esiste una costante  $\beta \geq 0$  :  $\forall (u, p, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}$

$$|f_u(u, p, x)|, |f_p(u, p, x)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |p|^{p-1})$$

dove  $f_p = (f_{p_1}, \dots, f_{p_n})$ ,  $f_{p_i} = \partial f / \partial p_i$  e  $f_u = \partial f / \partial u$ .

La dimostrazione consta di due parti principali.

### 1. Esistenza

(a) *compatezza*: dalla seconda ipotesi abbiamo

$$-\infty < m \leq F(u_0) < \infty.$$

Sia  $u_n \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$  una successione minimizzante per la 5.3, allora q.o.

$$m + 1 \geq F(u_n) \geq \alpha_1 \|\nabla u_n\|_p^p - |\alpha_3| M(\Omega)$$

e quindi esiste una  $\alpha_4 > 0 : \|\nabla u_n\|_p \leq \alpha_4$ .

Dalla disuguaglianza di Poincaré possiamo trovare le costanti  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 > 0$ :

$$\alpha_4 \geq \|\nabla u_n\|_p \geq \alpha_5 \|u_n\|_{1,p} - \alpha_6 \|u_0\|_{1,p}, \quad \|u_n\|_{1,p} \leq \alpha_7.$$

Deduciamo che esiste una funzione  $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$  e una sottosuccessione  $\{u_n\}$ :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u} \quad \text{in } W^{1,p}.$$

(b) *semicontinuità inferiore*: indipendentemente dal fatto che  $\{u_n\}$  sia una successione minimizzante, il funzionale  $F$  è debolmente semicontinuo inferiormente, ovvero

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } W^{1,p} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(\bar{u}).$$

Infatti poiché  $f \in C^1(\Omega)$  ed è convessa, si ha:

$$\begin{aligned} f(u_n, \nabla u_n, x) &\geq f(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x) + f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)(u_n - \bar{u}) + \\ &\quad + \langle f_p(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x), \nabla u_n - \nabla \bar{u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dalla terza ipotesi e dal fatto che  $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$  si ha che

$$f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x) \in L^q(\Omega) \quad \text{e} \quad f_p(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x) \in L^q(\mathbb{R}^n, \Omega) \quad (5.5)$$

con  $q = p/(p-1) : 1/p + 1/q = 1$ .

Essendo  $\beta_1$  una costante,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)|^q dx &\leq \beta^q \int_{\Omega} (1 + |\bar{u}|^{p/q} + |\nabla \bar{u}|^{p/q})^q dx \\ &\leq \beta_1 (1 + \|\bar{u}\|_{1,p}^p) < \infty \end{aligned}$$

e usando la disuguaglianza di Hölder, per  $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ , abbiamo che

$$f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)(u_n - \bar{u}), \langle f_p(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x), \nabla u_n - \nabla \bar{u} \rangle \in L^1(\Omega).$$

Integrando la 5.4 otteniamo

$$\begin{aligned} F(u_n) &\geq F(\bar{u}) + \\ &+ \int_{\Omega} [f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)(u_n - \bar{u}) + \langle f_p(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x), \nabla u_n - \nabla \bar{u} \rangle] dx. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Poiché  $u_n - \bar{u} \rightharpoonup 0$  in  $W^{1,p}$ , cioè  $u_n - \bar{u} \rightharpoonup 0$  in  $L^p$  e  $\nabla u_n - \nabla \bar{u} \rightharpoonup 0$  in  $L^p$ , e valgono le 5.5, dalla definizione di convergenza debole in  $L^p$  deduciamo che

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)(u_n - \bar{u}) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle f_p(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x), \nabla u_n - \nabla \bar{u} \rangle dx = 0. \end{aligned}$$

Perciò, tornando alla 5.6, otteniamo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(\bar{u}).$$

- (c) combinando i due passi precedenti e partendo dal fatto che  $\{u_n\}$  sia una successione minimizzante,  $F(u_n) \rightarrow \inf\{F(u)\} = m$ , e inferiormente semi-continua,  $\liminf F(u_n) \geq F(\bar{u})$ : deduciamo che  $F(\bar{u}) = m$ , cioè q.o.  $\bar{u}$  è un minimo per la 5.3.

## 2. Unicità

Questa parte della dimostrazione è uguale alla seconda parte della dimostrazione del teorema della sezione precedente.

Assumiamo che esistano  $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) : F(\bar{u}) = F(\bar{v}) = m \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$ . Definiamo  $\bar{w} = (\bar{u} + \bar{v})/2$ ,  $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ . Essendo convessa la funzione  $(u, p) \rightarrow f(u, p, x)$  possiamo affermare che anche  $\bar{w}$  è un minimizzante

$$m \leq F(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}F(\bar{u}) + \frac{1}{2}F(\bar{v}) = m$$

e implica

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{f(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x)}{2} + \frac{f(\bar{v}, \nabla \bar{v}, x)}{2} - f(\bar{w}, \nabla \bar{w}, x) \right] dx = 0.$$

La convessità di  $(u, p) \rightarrow f(u, p, x)$  implica che l'integrando è non negativo, mentre l'integrale è 0 solo se

$$\frac{1}{2}f(\bar{u}, \nabla \bar{u}, x) + \frac{1}{2}f(\bar{v}, \nabla \bar{v}, x) - f(\bar{w}, \nabla \bar{w}, x) = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Per la stretta convessità di  $(u, p) \rightarrow f(u, p, x)$  si ottiene che  $\bar{u} = \bar{v}$  e  $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$  q.o. in  $\Omega$ , e dunque l'unicità  $\bar{u} = \bar{v}$  q.o. in  $\Omega$ .

□

# Appendice

## Spazi i Sobolev

### A.1 Nozioni di base

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e  $B(x_0, r)$  la palla aperta di raggio  $r$  e centro  $x_0 \in \Omega$ , ovvero

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Introduciamo gli spazi vettoriali  $C^m(\Omega)$  e  $C^\infty(\Omega)$  di funzioni  $f$  definite su  $\Omega$ , a valori in  $\mathbb{R}$ , rispettivamente *derivabili con continuità  $m$  volte e infinitamente derivabili* e  $C_0^\infty(\Omega)$  lo spazio vettoriale delle  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  a supporto compatto in  $\Omega$ .

Abbiamo ora bisogno di dare alcune definizioni:

**Definizione A.1.1.** Il *supporto* di una funzione è la chiusura dell'insieme dei punti del dominio in cui questa non si annulla:

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

**Definizione A.1.2.** Una funzione si dice a *supporto compatto* se il suo supporto è un sottoinsieme compatto del suo insieme di definizione, cioè se:

$$\forall \{U_i\}_{i \in I} \text{ famiglia di sottoinsiemi aperti di } \Omega : \bigcup_{i \in I} U_i \supseteq \text{supp} f,$$

$$\exists J \subset I, J \text{ finito}, : \bigcup_{i \in J} U_i \supseteq \text{supp} f.$$

**Definizione A.1.3.** Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

**Definizione A.1.4.** Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio vettoriale, reale o complesso, sul quale è definito un prodotto interno tale che, data  $d$  la distanza indotta da questo prodotto interno, lo spazio metrico  $(H, d)$  è completo.

**Definizione A.1.5.** Per ogni  $p$  tale che  $1 \leq p \leq \infty$ , lo spazio  $L^p(\Omega)$  delle funzioni  $f$  a  $p$ -esima potenza sommabile, o equivalentemente delle classi di equivalenza di  $f$   $p$ -integrabili uguali quasi ovunque in  $\Omega$  è definito come

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile e con } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}.$$

Ricordiamo che ad ogni  $f$  è possibile associare la classe di equivalenza di tutte le funzioni equivalenti a  $f$ , dunque indichiamo una classe di equivalenza con un suo qualsiasi rappresentante  $f$ . Definiamo su  $L^p$  la *norma*

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{con } 1 \leq p < \infty.$$

Uno spazio  $L^p$  dotato di tale norma è uno spazio di Banach.

Se  $p = 2$ ,  $L^2$  è uno spazio di Hilbert il cui prodotto scalare è dato da:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Per studiare il caso con  $p = \infty$  introduciamo:

**Definizione A.1.6.** Una funzione  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *essenzialmente limitata* se  $\exists k > 0 : |f(x)| < k$  q-o in  $\Omega$ .

Considerando lo spazio vettoriale di queste funzioni possiamo definire la norma infinito, cioè per  $p = \infty$ :

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{k \geq 0 : |f(x)| \leq k \text{ quasi ovunque in } \Omega\} \equiv \text{essup}|f|.$$

**Definizione A.1.7.** Il *supporto essenziale* di una funzione  $f \in L^p$  è il complementare del più grande aperto  $\Omega$  in cui la funzione è nulla quasi ovunque

$$\text{supp } f = \mathbb{R}^n / \Omega \text{ con } \Omega = \bigcup A, \quad \{A \subset \mathbb{R}^n, A \text{ aperto, : } f(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in A\}.$$

Dunque:

**Definizione A.1.8.**  $L^\infty(\Omega)$  è lo spazio delle classi di funzioni essenzialmente limitate rispetto alla relazione di equivalenza quasi ovunque in  $\Omega$  (con la norma definita sopra è uno spazio di Banach)

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile e con } \text{esssup}|f| < +\infty\}.$$

Inoltre

**Definizione A.1.9.** Una funzione misurabile  $f$  si dice *localmente integrabile* su  $\Omega$  se è integrabile su ogni  $K$  compatto strettamente contenuto in  $\Omega$

$$\forall K \subset \Omega, K \text{ compatto} \quad \int_K |f(x)| dx < \infty.$$

$L^1_{loc}(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni localmente integrabili.

**Osservazione A.1.10.**  $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$  e  $C^m(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Notazione** Chiamiamo *multi-indice di derivazione* un elemento  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  :

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e definiamo

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

e dunque

$$D^\alpha = (D_{x_1}^{\alpha_1}, \dots, D_{x_n}^{\alpha_n}) \quad \text{con} \quad D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

## A.2 Elementi sugli spazi $L^p$

**Teorema (DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER).** Se  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (cioè  $q$  è l'indice duale di  $p$ ) e se  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  allora

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|fg\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Teorema (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE O DI MINKOWSKI).** Se  $f, g \in L^p(\Omega)$  allora

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Teorema (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ).** Se  $p = q = 2$  allora

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

**Teorema (DI RIESZ).** Denotato  $(L^p)'$  lo spazio duale di  $L^p$ , questo può essere identificato anche con  $L^q$  dove  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  con  $1 \leq p < \infty$ .

Più precisamente se  $\varphi \in (L^p)'$  con  $1 \leq p < \infty$  allora  $\exists! g \in L^q$  tale che

$$\langle \varphi; f \rangle = \varphi(f) = \int_{\Omega} g(x)f(x)dx \quad \forall f \in L^p \quad e \quad \|g\|_q = \|\varphi\|_{(p)}.$$

Il risultato è falso se  $p = \infty$  e quindi  $q = 1$ .

**Proposizione A.2.1.**  $L^p(\Omega)$  è separabile (ammette basi numerabili) se  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposizione A.2.2.**  $L^p(\Omega)$  è riflessivo<sup>1</sup> se  $1 < p < \infty$ .

**Altri risultati sugli spazi duali:**  $(L^2)' = L^2$ ,  $(L^1)' = L^\infty$ ,  $(L^1) \subset (L^\infty)'$ .

---

<sup>1</sup>uno spazio vettoriale normato  $X$  si dice riflessivo se  $\forall y \in X'' \exists x(y) \in X : \forall z \in X' \rightarrow \langle y, z \rangle = \langle z, x(y) \rangle$  e  $\|y\|_{X''} = \|x(y)\|_X$ .

**Teorema (COMPLETEZZA DEGLI SPAZI  $L^p(\Omega)$ ).** Dato  $1 \leq p \leq \infty$ , sia  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  una successione di Cauchy in  $L^p(\Omega)$  allora

$$\exists ! f \in L^p(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

ed

$$\exists \{f_{n_k}\} \text{ sottosuccessione di } \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty,$$

che converge <sup>2</sup> in  $L^p$  con le proprietà:

- $|f_{n_k}(x)| \leq F(x) \quad \forall k \text{ e q.o. } x \in \Omega$ , con  $F(x) \in L^p(\Omega)$  non negativa;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ q.o. } x \in \Omega$  (convergenza puntuale <sup>3</sup> quasi ovunque).

**Teorema (DENSITÀ DI  $C_0^\infty$  IN  $L^p$ ).** Le funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto in  $\Omega$  (che certamente appartengono a  $L^p(\Omega)$  per ogni  $p$ ) sono dense in  $L^p(\Omega)$ . Dunque si dice che, dato  $1 \leq p < \infty$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$ .

Più precisamente se  $f \in L^p(\Omega)$  allora  $\exists f_n \in C_0^\infty$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Ora poniamo la nostra attenzione sulla nozione di convergenza nello spazio  $L^p$ . L'idea naturale di convergenza, chiamata *convergenza forte* è quella indotta dalla norma  $\|\cdot\|_p$ . Spesso però abbiamo bisogno di una nozione di convergenza più debole, detta *convergenza debole*.

**Definizione A.2.1.** Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto

se  $1 \leq p \leq \infty$ , una successione di funzioni  $f_n$  si dice convergere *fortemente* a  $f$  in  $L^p(\Omega)$ , in simboli  $f_n \rightarrow f$  o equivalentemente  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ , se:

$$f_n, f \in L^p(\Omega) \text{ e se } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

<sup>2</sup>la convergenza in  $L^p$  viene da:  $\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p$

<sup>3</sup>una successione di funzioni  $f_n : X \rightarrow Y$  converge puntualmente ad un'altra funzione  $f : X \rightarrow Y$  se:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ , in simboli  $f_n \rightarrow f$

**Definizione A.2.2.** Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto

- se  $1 \leq p < \infty$ , una successione di funzioni  $f_n$  si dice convergere *debolmente* a  $f$  in  $L^p(\Omega)$ , in simboli  $f_n \rightharpoonup f$ , se:

$$f_n, f \in L^p(\Omega) \text{ e se } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f_n(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega);$$

- se  $p = \infty$ , una successione di funzioni  $f_n$  si dice convergere *debolmente \** a  $f$  in  $L^\infty(\Omega)$ , in simboli  $f_n \xrightarrow{*} f$ , se:

$$f_n, f \in L^\infty(\Omega) \text{ e se } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f_n(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

(Si parla di  $f_n \xrightarrow{*} f$  invece di  $f_n \rightharpoonup f$  poiché il duale di  $L^\infty$  è strettamente più grande di  $L^1$ , tuttavia formalmente le due convergenze hanno la stessa forma).

**Proposizione A.2.3.** *Il limite, sia forte che debole, è unico.*

**Teorema A.1.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato*

*valgono le seguenti proprietà*

- se  $f_n \xrightarrow{*} f$  in  $L^\infty(\Omega)$ , allora  $f_n \rightharpoonup f$  in  $L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p < \infty$ ;
- se  $1 \leq p \leq \infty$  e se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$ , allora  $\|f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p$ ;
- se  $1 \leq p < \infty$  ( $p = \infty$ ) e se  $f_n \rightharpoonup f$  in  $L^p(\Omega)$  ( $f_n \xrightarrow{*} f$  in  $L^\infty(\Omega)$ ), allora esiste una costante  $k > 0 : \|f_n\|_p \leq k$  e  $\|f\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p$ ;
- se  $1 < p < \infty$  ( $p = \infty$ ) e se esiste una costante  $k > 0 : \|f_n\|_p \leq k$ , allora esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_i}\} : f_{n_i} \rightharpoonup f$  in  $L^p(\Omega)$  ( $f_{n_i} \xrightarrow{*} f$  in  $L^\infty(\Omega)$ ) (tale risultato è falso per  $p = 1$  in quanto lo spazio  $L^1$  non è riflessivo);
- sia  $1 \leq p \leq \infty$  e  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$ , allora esistono una sottosuccessione  $f_{n_i}$  e una funzione  $g \in L^p(\Omega) : f_{n_i} \rightarrow f$  q.o. e  $|f_{n_i}| \leq g$  q.o.

**Teorema (DI RIEMANN-LEBESGUE).** Sia  $1 \leq p \leq \infty$  e siano  $f, g \in L^p(\Omega)$  dove  $\Omega = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ . Posto che  $g$  sia estesa per continuità da  $\Omega$  a  $\mathbb{R}^n$  e definite le quantità

$$f_n(x) = g(nx) \quad e \quad \bar{g} = \frac{1}{\text{media}(\Omega)} \int_{\Omega} g(x) dx$$

allora  $f_n \rightharpoonup \bar{f}$  in  $L^p(\Omega)$  se  $1 \leq p < \infty$  e  $f_n \xrightarrow{*} \bar{f}$  in  $L^\infty(\Omega)$ .

**Definizione A.2.3.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , diciamo che  $f \in L^p_{loc}(\Omega)$  spazio delle funzioni localmente integrabili, se  $f \in L^p(\Omega')$  per ogni aperto compatto  $\Omega'$  contenuto in  $\Omega$  (q.o.  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  e  $\overline{\Omega'}$  è compatto).

**Teorema (LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI).** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

allora  $f = 0$  q.o. in  $\Omega$ .

**Corollario.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \quad \text{con} \quad \int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$$

allora  $f = \text{costante}$  q.o. in  $\Omega$ .

### A.3 Generalità sugli spazi i Sobolev

Vogliamo ora presentare alcuni spazi di funzioni che generalizzano gli spazi  $L^p(\Omega)$  e studiare le proprietà di funzioni  $f$  che siano non solo integrabili fino ad un certo ordine, ma le cui derivate siano a loro volta integrabili.

Per iniziare è necessario ridefinire il concetto di *derivata* per estenderlo a funzioni (o meglio, a classi di funzioni) di  $L^p(\Omega)$  mantenendo la validità dell'integrazione per parti.

**Definizione A.3.1.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , una funzione  $f \in L^1_{loc}$  ammette *derivata debole* di ordine  $\alpha$  multi-indice se:  $\forall |\alpha| \leq m, \exists f^\alpha \in L^1_{loc} : \forall \varphi \in C_0^\infty$ ,

$$\int f^\alpha(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

Notiamo che la definizione di derivata debole è un caso particolare del concetto generale di derivata di distribuzione, dunque spesso le derivate deboli vengono anche chiamate *derivate distribuzionali* o *derivate nel senso delle distribuzioni*.

**Proposizione A.3.1.** Se la derivata di  $f$  di ordine  $\alpha$  esiste, essa è unica.

**Proposizione A.3.2.** Se  $f \in C^1$  allora il concetto classico di derivata e quello di derivata debole coincidono. In generale se  $f \in C^m(\Omega)$  allora  $f^\alpha = D^\alpha f$  per  $|\alpha| \leq m$ .

**Proposizione A.3.3.** La derivata  $D^\alpha f$  può esistere anche se non esistono le derivate di ordine minore (stretto) di  $|\alpha|$ .

**Definizione A.3.2.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , una funzione  $f \in L^p(\Omega)$  ammette *derivata forte* di ordine  $\alpha$  multi-indice in  $L^p$  fino all'ordine  $m \in \mathbb{N}$  se esiste la successione

$$\{f_n\} \subset C^m(\Omega) : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

e  $\forall |\alpha| \leq m$  la successione  $\{D^\alpha f_n\}$  è di Cauchy in  $L^p$ , per cui esistono funzioni

$$f^\alpha \in L^p(\Omega) : \|D^\alpha f_n - f^\alpha\|_p \rightarrow 0$$

e queste sono le derivate forti di ordine  $\alpha$  di  $f$ .

**Proposizione A.3.4.** Se  $f \in L^p(\Omega)$  ha derivate forti in  $L^p(\Omega)$  fino all'ordine  $m$ , allora ha derivate deboli in  $L^p(\Omega)$  fino all'ordine  $m$ , e queste derivate coincidono.

Possiamo ora definire gli spazi di Sobolev.

Utilizziamo prima il concetto di derivata debole.

**Definizione A.3.3.** Dati  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $1 \leq p \leq \infty$ , lo *spazio di Sobolev*  $W^{m,p}(\Omega)$  è lo spazio vettoriale delle funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  con derivate deboli  $D^\alpha f$  in  $L^p(\Omega)$  fino all'ordine  $m \in \mathbb{N}$ :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \in \mathbb{N}^n, \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

Dotato della seguente norma, che prende il nome di *norma di Sobolev*, è uno spazio di Banach:

$$\|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p};$$

per  $p = \infty$  la norma diventa

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \{\|D^\alpha f\|_\infty\}.$$

Se  $p = 2$ , lo spazio  $W^{m,2}(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx;$$

per  $m = 1$  il prodotto scalare diventa

$$\langle f, g \rangle_{1,2} = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx + \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle dx.$$

**Proposizione A.3.5.**  $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ .

**Proposizione A.3.6.**  $W^{m,p}(\Omega)$  è

- separabile se  $1 \leq p < \infty$ ;
- uniformemente convesso e riflessivo se  $1 < p < \infty$

**Teorema (DI MILMAN).** *Uno spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.*

**Proposizione A.3.7.** *Abbiamo che:*

- per  $m = 0$ ,  $\|f\|_{m,p} = \|f\|_p$  e per abuso di linguaggio  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ;
- per  $m = 1$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  ha norma:

$$\|f\|_{1,p} = (\|f\|_p^p + \|\nabla f\|_p^p)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{1,\infty} = \max\{\|f\|_\infty, \|\nabla f\|_\infty\} \quad \text{se } p = \infty.$$

Per  $1 \leq p < \infty$  indichiamo con  $W_0^{m,p}(\Omega)$  la chiusura di  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  e, per  $p = \infty$ , avremo  $W_0^{m,\infty}(\Omega) = W^{m,\infty}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega)$ .

Per  $1 \leq p < \infty$  e se  $m = 1$  indichiamo con  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la chiusura di  $C_0^m(\Omega)$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  e, per  $p = \infty$ , avremo  $W_0^{1,\infty}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$ .

**Proposizione A.3.8.** *Inoltre per  $1 \leq p < \infty$  e  $m = 1$ :*

- se  $\Omega$  è limitato,  $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$  sarà tale che  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $f = 0$  su  $\partial\Omega$ ;
- si può scrivere anche  $f \in f_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$  e significa che:

$$f, f_0 \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } f - f_0 \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

- se  $\Omega$  è limitato e  $1 \leq p < \infty$ , valgono le seguenti inclusioni:

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega);$$

- in generale, per  $1 \leq p < \infty$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$  e  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ;
- approssimativamente si può dire che  $W^{1,p}$  è un'estensione di  $C^1$ .

Analogamente usiamo il concetto di derivata forte.

**Definizione A.3.4.** Dati  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $p < \infty$ , lo spazio di Sobolev  $H^{m,p}(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  con derivate forti  $D^\alpha f$  in  $L^p(\Omega)$  fino all'ordine  $m \in \mathbb{N}$ .

Lo spazio  $H^{m,p}(\Omega)$  è uno spazio di Banach con la norma di Sobolev ed uno spazio di Hilbert se  $p = 2$ .

Valgono le seguenti inclusioni:

$$C^m(\overline{\Omega}) \subset H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Dunque  $H^{m,p}(\Omega)$  è definito come il completamento dello spazio  $C^m(\Omega)$  (o come la chiusura di  $C^m(\overline{\Omega})$  in  $W^{m,p}(\Omega)$ ).

Per  $p \leq 1$  indichiamo con  $H_0^{m,p}(\Omega)$  la chiusura di  $C^m_0(\Omega)$  in  $H^{m,p}(\Omega)$  (o equivalentemente la chiusura di  $C^m_0(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$ ) ed anch'esso è uno spazio di Banach con la norma di Sobolev e uno spazio di Hilbert per  $p = 2$ .

Valgono le seguenti inclusioni :

$$C^m_0(\Omega) \subset H_0^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$$

poichè  $C^m_0(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ .

**Proposizione A.3.9.**  $H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Più in generale vale  $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$  per ogni  $\Omega$  e per  $1 \leq p < \infty$ , anche se non è nota una condizione necessaria e sufficiente su  $\Omega$  perchè valga questa uguaglianza in tutta generalità.

Riportiamo a tal proposito un risultato sufficientemente generale:

**Definizione A.3.5.** Un dominio lipschitziano, o a frontiera lipschitziana, è un sottoinsieme aperto e connesso di uno spazio euclideo la cui frontiera è sufficientemente regolare, cioè può essere pensato localmente come il grafico di una funzione lipschitziana.

Formalizziamo.

Siano  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato e  $\partial\Omega$  la sua frontiera. Allora  $\partial\Omega$  è definita

frontiera lipschitziana e  $\Omega$  dominio lipschitziano se:

$$\forall x \in \partial\Omega, \exists B(x, r) \text{ e una mappa } h : B(x, r) \rightarrow Q$$

tali che:

- $h$  sia una biezione (relazione binaria tra due insiemi tale che ad ogni elemento del primo corrisponda uno e un solo elemento del secondo e viceversa);
- $h$  e  $h^{-1}$  siano entrambe lipschitziane, cioè  $h \in C^m(\overline{\Omega})$  e  $h^{-1} \in C^m(\overline{B})$ ;
- $h(Q_+) = B \cap \Omega$ , dove  $Q_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in Q : x_n > 0\}$ ;
- $h(Q_0) = B \cap \partial\Omega$ , dove  $Q_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in Q : x_n = 0\}$ .

Abbiamo denotato con  $B(x, r) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$  la sfera  $n$ -dimensionale di raggio  $r > 0$  e centro  $x$  e con  $Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$  la sfera unitaria.

**Teorema A.2.** *Sia  $\Omega$  un dominio con frontiera di Lipschitz, cioè di classe  $C^{0,1}$ , allora gli spazi di Sobolev coincidono.*

**Proposizione A.3.10.** *Se  $h$  e  $h^{-1} \in C^{m,\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , si dice che  $\Omega$  è un sottoinsieme aperto limitato con frontiera  $C^{m,\alpha}$ .*

*Se  $h$  e  $h^{-1}$  sono solo in  $C^{0,1}$ , si dice che  $\Omega$  ha frontiera di Lipschitz.*

Assumiamo dunque che, per  $p < \infty$ , gli spazi  $W^{m,p}(\Omega)$  e  $H^{m,p}(\Omega)$  coincidano e concludiamo enunciando alcuni importanti risultati di densità e inclusione degli spazi di Sobolev.

**Teorema A.3.** *Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto,  $1 \leq p < \infty$  e  $m \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ :*

- *le funzioni  $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$  sono dense in  $W^{m,p}(\Omega)$ ;*
- *se  $\Omega$  è un dominio lipschitziano allora anche  $C^\infty(\overline{\Omega})$  è denso in  $W^{m,p}(\Omega)$ ;*
- *Data la densità di  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  se  $1 \leq p < \infty$ , se  $m = 0$  allora  $H_0^{0,p}(\Omega) = H^{0,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$  ovvero gli spazi di Sobolev coincidono.*

**Teorema (TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato a frontiera lipschitziana:*

1. *se  $1 \leq p < n$  allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*], \text{ con } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$p^* = \frac{np}{n-p} > p.$$

*Più precisamente  $\forall q \in [1, p^*], \exists c = c(\Omega, p, q) : \|f\|_q \leq c\|f\|_{1,p}, \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$*

2. *se  $p = n$  allora*

$$W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

*Più precisamente  $\forall q \in [1, +\infty), \exists c = c(\Omega, q) : \|f\|_q \leq c\|f\|_{1,n}, \forall f \in W^{1,n}(\Omega).$*

3. *se  $p > n$  allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall \alpha \in [0, 1 - n/p].$$

*Più precisamente  $\exists c = c(\Omega, p) : \|f\|_\infty \leq c\|f\|_{1,p}, \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$*

**Teorema (TEOREMA DI IMMERSIONE DI RELICH).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato a frontiera lipschitziana:*

1. *se  $1 \leq p < n$  allora l'immersione di  $W^{1,p}$  in  $L^q$  è compatta,  $\forall q \in [1, p^*];$*

2. *se  $p = n$  allora l'immersione di  $W^{1,n}$  in  $L^q$  è compatta,  $\forall q \in [1, +\infty);$*

3. *se  $p > n$  allora l'immersione di  $W^{1,p}$  in  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  è compatta,  $\forall 0 \leq \alpha < 1 - n/p.$*

*In particolare, per  $1 \leq p \leq \infty$ , l'immersione di  $W^{1,p}(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  è compatta.*<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>la nozione di immersione compatta ( $\subset\subset$ ), esprime l'idea che un insieme sia ben contenuto in un altro. In  $(X, T)$  spazio topologico con  $V, W \subset X, V \subset\subset W$ , se:  $V \subseteq \overline{V} \subseteq \overset{\circ}{W}$  e  $\overline{V}$  compatto; per  $X \subseteq Y$  spazi normati,  $X \subset\subset Y$  se:  $\exists c : |x|_Y \leq c|x|_X, \forall x \in X$ , cioè  $X$  è immerso continuamente in  $Y$ , e se qualsiasi insieme limitato in  $X$  è precompatto in  $Y$ , cioè qualsiasi successione in  $X$  ha una sottosuccessione di Cauchy nella norma in  $Y$ .

Nell'esporre questi ultimi teoremi e si è fatto uso di altre particolari funzioni:

**Definizione A.3.6.** Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : 0 < \alpha \leq 1$ . La condizione di Hölder <sup>5</sup>, generalizzazione della condizione di Lipschitz <sup>6</sup>, per una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è soddisfatta se:

$$\exists k > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha \quad \text{su } x \neq y; x, y \in \Omega$$

La funzione  $f$  si dice hölderiana.

**Definizione A.3.7.**  $C^{m,\alpha}(\Omega)$  è lo spazio di Hölder o delle funzioni  $\alpha$ -hölderiane l'insieme delle funzioni che, con le loro derivate fino all'ordine  $m$  soddisfano la condizione di Hölder con esponente  $\alpha$

$$C^{m,\alpha} = \{f \in C^m(\Omega) : |f|_\alpha < \infty\}$$

$|f|_\alpha = \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$  su  $x \neq y; x, y \in \Omega$  è la seminorma.

È uno spazio vettoriale topologico.

$C^{0,\alpha}(\Omega)$  è l'insieme delle funzioni continue e limitate in  $\Omega$  con seminorma  $\alpha$  finita.

$C^{0,1}(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni lipschitziane in  $\Omega$ .

Un'altra importante proprietà degli spazi di Sobolev è data dal seguente risultato.

**Teorema (DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ).** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto limitato e  $1 \leq p \leq \infty$ , allora  $\exists c = c(\Omega, p) > 0$  :

$$\|f\|_p \leq c \|\nabla f\|_p, \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o equivalentemente

$$\|f\|_{1,p} \leq c \|\nabla f\|_p, \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

<sup>5</sup>ricordiamo la catena di inclusioni per funzioni definite su un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$ : differenziabilità con continuità  $\subseteq$  continuità lipschitziana  $\subseteq$   $\alpha$ -hölderianità  $\subseteq$  continuità uniforme  $\subseteq$  continuità

<sup>6</sup>una  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , continua sul compatto  $K \subset \mathbb{R}$  è lipschitziana se:  
 $\exists k > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in K$

*Osservazione A.3.8.*

- Per evitare di avere funzioni  $f$  costanti che implicano  $\nabla f = 0$  e quindi renderebbero la disuguaglianza di Poincaré falsa, bisogna imporre che sia  $f = 0$  su  $\partial\Omega$ , partendo dall'ipotesi che  $f \in W_0^{1,p}$ .
- Un'altra formulazione della disuguaglianza di Poincaré è la seguente:

**Teorema (DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ-WIRTINGER).** *se  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un aperto connesso, con frontiera lipschitziana, e se*

$$f_\Omega = \frac{1}{\text{media}\Omega} \int_\Omega f(x) dx,$$

*è la media integrale di  $f$ , allora*

$$\exists c = c(\Omega, p) > 0 : \|f - f_\Omega\|_p \leq c \|\nabla f\|_p, \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$$

# Bibliografia

- [1] Colesanti Andrea; Salani Paolo; Talenti Giorgio, *Un'Introduzione al Calcolo delle Variazioni: Teoria ed Esercizi*, (2016), Unione Matematica Italiana, Bologna.
- [2] Dacorogna Bernard, *Introduction to the Calculus of Variations*, (2009), Imperial College Press, Londra.
- [3] Esposito Giampiero, *From Ordinary to Partial Differential Equations*, (2017), Springer, Berlino.
- [4] Figari Rodolfo, *Appunti del corso di Metodi Matematici Per La Fisica*, (A.A.2017-2018),  
Università Degli Studi Di Napoli "Federico II",  
Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini", Napoli.
- [5] Giusti Enrico, *Analisi Matematica II*, (2003), Bollati Boringhieri, Torino.
- [6] Goldstine Herman Heine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, (1980) , Springer Verlag, New York.