

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Parametrizzazione della Distanza di Luminosità: Serie di Taylor vs Serie di Padé

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello
Dott.ssa Micol Benetti

Candidata:

Anna Chiara Alfano
Matr. N85001063

A.A. 2019/2020

Indice

Introduzione

1. Cosmologia	1
1.1 Principio Cosmologico	1
1.2 Modello Cosmologico Standard Λ CDM	4
1.2.1 Metrica e Dinamica	4
1.2.2 Legge di Hubble	5
1.2.3 Dark Energy e Dark Matter	8
2. Indicatori di Distanza e Cosmografia	10
2.1 Redshift e Blueshift	10
2.2 Scala delle Distanze Cosmologiche	12
2.2.1 Indicatori di Distanze Primari	12
2.2.2 Indicatori di Distanze Secondari	15
2.3 Parametri Cosmografici	18
3. Taylor vs Padé	22
3.1 Serie di Taylor	22
3.2 Serie di Padé	23
3.3 Taylor vs Padé	24
Conclusioni	28
Appendice A	29
Bibliografia	30

Introduzione

La Cosmologia moderna nasce all'inizio del secolo scorso, con l'osservazione della recessione delle galassie e la postulazione della legge di Hubble. Prima delle osservazioni di Hubble la Cosmologia era studiata solo dal punto di vista teorico, alcuni modelli di Universo furono proposti, ad esempio, da *Immanuel Kant* nel 1755 e da *Johann Heinrich Lambert* nel 1761, entrambi supponevano una struttura gerarchica dell'Universo [1].

La corretta descrizione dell'espansione dell'Universo tramite un modello autoconsistente è uno dei principali obiettivi della Cosmologia moderna. Tale modello prende il nome di Modello Cosmologico Standard Λ CDM dove l'acronimo indica i due fluidi principali considerati nella composizione dell'Universo, la costante cosmologica (Λ) e la *cold dark matter* (CDM) ovvero materia oscura "fredda" composta da particelle non-relativistiche. Il Modello Standard è basato sulla Relatività Generale, il principio di espansione e sul Principio Cosmologico. Quest'ultimo assume che l'Universo sia omogeneo ed isotropo, ovvero le quantità fisiche non variano per mezzo di traslazioni e le direzioni sono equivalenti. Il Modello Λ CDM assume una metrica di tipo *Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker* che determina tramite una costante k , la struttura geometrica dell'Universo e tramite il fattore di scala $a(t)$ l'espansione dell'Universo.

Applicando alla metrica *FLRW* le equazioni di campo gravitazionale di Einstein, accoppiate con l'equazione di continuità del tensore energia-impulso e l'equazione di stato per i fluidi cosmologici, è possibile per il Modello Standard descrivere in maniera efficace le osservabili cosmologiche sinora analizzate, prevedendo l'esistenza di una radiazione cosmica di fondo (o *CMBR*) e di strutture a larga scala (ammassi e super-ammassi di galassie).

L'espansione accelerata osservata è spiegata nel contesto del Modello Λ CDM assumendo una costante cosmologica, una forma di energia non addensata in strutture di cui si ignora la natura. Nonostante dunque i successi predittivi del Modello Standard, che riesce inoltre ad inglobare alcune tra le più importanti teorie odierne come la teoria del Big Bang ed il Modello Standard delle Particelle Elementari, rimangono dei punti aperti. Nel caso della dark energy, i cosmologi hanno approcciato il problema sia dal punto di vista teorico (ad esempio studiando modelli con estensione della gravità descritta dalla Relatività Generale), sia dal punto di vista osservativo parametrizzando le osservazioni con la *Cosmografia*. Diversamente dalla Cosmologia, la Cosmografia non ha bisogno di assumere un'equazione di stato per i fluidi che compongono l'Universo e neanche di dimostrare la validità delle equazioni di Einstein su tempi e distanze cosmiche perché essa ne parametrizza l'espansione con una serie cosmografica assumendo solamente il Principio Cosmologico.

Questo lavoro di tesi oltre ad introdurre gli aspetti salienti dell'approccio cosmografico, confronta l'approccio cosmografico standard, che utilizza un'espansione di tipo di Taylor, con un nuovo polinomio recentemente analizzato in letteratura, il polinomio di Padé. L'approssimazione di Padé viene introdotta per poter descrivere le osservazioni spingendosi a *Redshift* (spostamento verso il rosso) molto grandi ($z \gg 1$) l'utilizzo della serie di Taylor non risulta essere efficace, mostrando problemi di convergenza.

La tesi è strutturata come segue: nel primo Capitolo si illustra il Principio Cosmologico, trattando i punti salienti del Modello Cosmologico Standard, tra cui la Metrica e la Dinamica, e ricavando le equazioni fondamentali della teoria. Si tratta inoltre la Legge di Hubble e si introducono le componenti di Dark Energy e Dark Matter come fluidi che compongono il Modello.

Nel secondo Capitolo si elencano e spiegano alcuni strumenti utilizzati dagli astronomi per determinare le distanze delle galassie. Questi strumenti sono: Indicatori di Distanze Primari e Indicatori di Distanze Secondari. I primi hanno validità soltanto entro un certo range di *Redshift* mentre i secondi riescono a trattare valori di *Redshift* più grandi di 0.01 e sono usati per stimare il valore della costante di Hubble. Viene introdotta la cosmografia e i parametri cosmografici ricavati dall'espansione del fattore di scala $a(t)$ presente nella *Metrica di FLRW*.

Nell'ultimo Capitolo si discute l'approccio per parametrizzare la distanza di luminosità spiegando la necessità di introdurre la serie di Padé e confrontando i risultati ottenuti con quelli della cosmografia di Taylor.

Capitolo 1

Cosmologia

In questo primo capitolo si introduce il Principio Cosmologico e si definisce il Modello Cosmologico Standard evidenziando i punti salienti su cui tale modello è basato. Vengono inoltre trattati elementi fondamentali in Cosmologia come la Legge di Hubble e la metrica con cui viene formulato il Modello Cosmologico Standard. Tale modello viene anche denominato Λ CDM, ad indicare i due fluidi principali considerati nella composizione dell'Universo, la costante cosmologica (Λ) e la *cold dark matter* (CDM). Il Modello Λ CDM assume la validità di

- a. Relatività Generale;
- b. Principio Cosmologico;
- c. Materia-Energia come fluido perfetto;
- d. Il paradigma inflazionario;
- e. Dark Energy e Dark Matter;
- f. Modello Standard delle Particelle Elementari;

ed è supportato da diverse evidenze osservative, come:

- g. L'esistenza di strutture a larga scala (super-ammassi e ammassi di galassie);
- h. La radiazione di fondo cosmico;
- i. La recessione delle galassie;

questi elementi sono approfonditi in questo primo capitolo, mentre nella conclusione è data una breve descrizione dei fluidi che compongono il Modello.

1.1 Principio Cosmologico

Il Principio Cosmologico è l'ipotesi secondo la quale l'Universo è spazialmente omogeneo ed isotropo. Per omogeneità si intende che ad ogni istante di tempo dato ogni punto dello spazio appare come qualsiasi altro punto. L'isotropia, invece, afferma che non ci sono direzioni privilegiate nello spazio [2], in termini matematici viene formulato il concetto di omogeneità ed isotropia.

Si definisce inizialmente il sistema di coordinate spazio-temporali da utilizzare nella trattazione: il Sistema di Coordinate Cosmiche Standard. Le coordinate spaziali x^i possono essere “costruite” ponendo l'origine al centro della Via Lattea con gli assi coordinati fissati dalla Via Lattea a generiche galassie. La luminosità apparente è utilizzata per definire la scala delle distanze mentre per definire la coordinata temporale è conveniente utilizzare l'Universo in evoluzione come “orologio” [3].

Considerando che molti campi scalari cosmici sono monotoni decrescenti si sceglie, ad esempio, uno scalare S e si suppone che il tempo di ogni evento sia descritto da una funzione decrescente $t(S)$. In

questa trattazione si considerano campi scalari cosmici fedeli al Modello Λ CDM: quelli in cui l'energia potenziale del campo domina l'epoca attuale in modo tale che rassomigli una costante cosmologica [4]. Le coordinate x, t così definite prendono il nome di *sistema di coordinate cosmiche standard*.

Si suppone di utilizzare il *sistema di coordinate cosmiche standard* per effettuare osservazioni astronomiche, determinando il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$, il tensore energia-impulso $T_{\alpha\beta}$ e tutti gli altri campi cosmici come funzioni delle coordinate cosmiche standard x^α . Si possono considerare anche un ulteriore set di coordinate equivalenti x'^α se e solo se la storia dell'Universo è la stessa sia nel sistema di coordinate x^α sia nel sistema di coordinate equivalenti x'^α . Questo richiede che ogni campo cosmico $g'_{\alpha\beta}(x')$, $T'_{\alpha\beta}(x')$ debba essere funzione delle coordinate x'^α così come ogni campo cosmico $g_{\alpha\beta}(x)$, $T_{\alpha\beta}(x)$ debba essere funzione delle coordinate x^α [3] cosicché ad ogni punto di coordinata y^α si deve avere

$$g_{\alpha\beta}(y) = g'_{\alpha\beta}(y) \quad (1.1.1)$$

$$T_{\alpha\beta}(y) = T'_{\alpha\beta}(y) \quad (1.1.2)$$

La (1.1.1) afferma che la trasformazione di coordinate $x \rightarrow x'$ deve essere un'isometria mentre la (1.1.2) che $T_{\alpha\beta}$ deve essere invariante sotto questa trasformazione. In particolare quest'ultima deve tener conto dello scalare S usato per definire il tempo cosmico standard t .

Essendo S , per definizione, una funzione dipendente esclusivamente dal tempo t la (1.1.2) per S con $y = x'$ si scrive come segue

$$S(t') = S'(x') \equiv S(x) = S(t)$$

ciò permette di affermare che $t' = t$. Quest'ultima uguaglianza afferma che tutti i sistemi di coordinate che sono equivalenti al sistema standard cosmico usano necessariamente il tempo standard cosmico [3], dove per tempo standard cosmico si intende il tempo misurato da un orologio standard comovente [5].

L'assunzione dell'isotropia spaziale può essere formulata come segue: dato un set di sistemi di coordinate $x'^\alpha(x; \theta)$, dipendenti da tre parametri indipendenti θ^n con $n = 1, 2, 3$, questi tre parametri sono equivalenti alle coordinate cosmiche standard avente la stessa origine [3]

$$x'^i(0, t; \theta) = 0$$

L'assunzione che i θ^n siano indipendenti è fatta supponendo che il sistema di riferimento privilegiato di Lorentz in cui l'Universo appare isotropico coincide più o meno con la nostra galassia [3].

Il passo successivo da attuare è definire l'omogeneità. Per omogeneità non si intende la scelta di un qualsiasi oggetto come origine di un sistema di coordinate equivalenti per le nostre coordinate cosmiche standard [3].

Quello che si fa è supporre che ogni punto x^α nello spazio-tempo è su qualche “traiettoria fondamentale” $x^i = X^i(t)$, la quale può essere utilizzata come l’origine di un sistema di coordinate x'^α equivalente al sistema cosmico standard.

Le traiettorie fondamentali $\mathbf{X}(t)$ “riempiono” lo spazio in ogni tempo t , dunque sono determinate da tre parametri indipendenti a^i .

Con ciò si può dire che omogeneità significa che esiste un set di coordinate a tre parametri $\bar{x}'^\alpha(x; a)$ equivalenti alle coordinate cosmiche standard x^α che possiedono l’origine sulla traiettoria $x^i = X^i(t; a)$ [3]. Si può così scrivere

$$\bar{x}'^i(\mathbf{X}(t; a), t; a) = 0$$

Dove $\mathbf{X}(t; a)$ sono le traiettorie degli osservatori per cui l’Universo appare isotropico [3].

Dunque il Principio Cosmologico comporta l’esistenza di due famiglie di trasformazioni di coordinate a tre parametri indipendenti che sono isometrie ai sensi della (1.1.1) e che, in accordo con la condizione $t' = t$, lasciano la coordinata temporale invariata, queste famiglie di trasformazioni sono

$$x \rightarrow x'$$

$$x \rightarrow \bar{x}'$$

L’Universo è dunque definito da uno spazio a quattro dimensioni con sottospazi a tre dimensioni massivamente simmetrici con $t = \text{cost.}$ [3] Per vedere il tutto nel dettaglio si riportano i sei vettori di Killing ottenuti ponendo $\theta^i \rightarrow 0$ e $a^i \rightarrow 0$.

$$\xi_j^i(x) \equiv \frac{\partial x'^i(x; \theta)}{\partial \theta^j}$$

$$\xi_j^i(x) \equiv \frac{\partial \bar{x}'^i(x; a)}{\partial a^j}$$

Si può ora formalizzare il Principio Cosmologico come segue

- (i) Le ipersuperfici con tempo cosmico standard costante sono sottospazi massivamente simmetrici di tutto lo spazio-tempo.

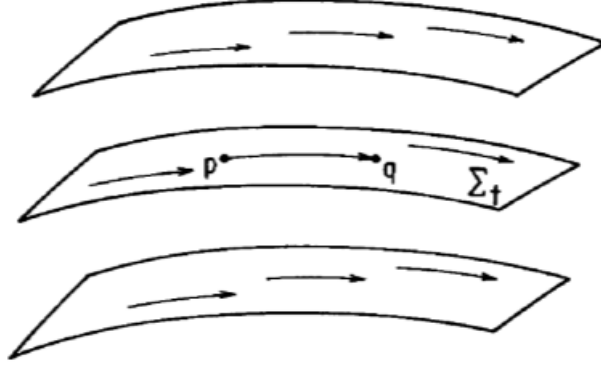


Figura 1 Ipersufici di omogeneità spaziale nello spaziotempo. Per definizione di omogeneità, per ogni istante di tempo t e ogni punto p, q appartenente all'ipersuperficie, esiste un'isometria dello spaziotempo che porta p in q . ([2])

- (ii) Sia la metrica $g_{\alpha\beta}$ che tutti i tensori cosmici come $T_{\alpha\beta}$ sono invarianti rispetto alle isometrie di questi sottospazi [3].

1.2 Modello Cosmologico Standard Λ CDM

1.2.1 Metrica e Dinamica

Per descrivere la dinamica del sistema sono utilizzate le equazioni di Einstein così definite

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (1.2.1.1)$$

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.2.1.2)$$

Nella (1.2.1.1) compare il termine addizionale $\Lambda g_{\alpha\beta}$ che prende il nome di “termine cosmologico”; questo termine venne introdotto da Einstein stesso per rendere statiche le soluzioni. La (1.2.1.2) rappresenta la gauge ed è pari a zero se e solo se ci si trova nelle condizioni di fluido perfetto, ovvero se e solo se

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}p$$

Si deve ora trovare una metrica che tenga conto del Principio Cosmologico e dell'espansione dell'Universo. Questa metrica, formulata nel 1925, viene denominata *metrica FLRW* (*Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker*).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.2.1.3)$$

Dove $a^2(t)$ rappresenta un fattore di scala e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$. Ponendo la metrica all'interno della (1.2.1.1) e tenendo conto della condizione di conservazione dettata dalla gauge si ottengono le equazioni del Modello Cosmologico Standard

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.2.1.4)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \quad (1.2.1.5)$$

$$\varepsilon + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\varepsilon + p) = 0 \quad (1.2.1.6)$$

$$p = \gamma\varepsilon \quad (1.2.1.7)$$

La (1.2.1.4) e la (1.2.1.5) sono date dalle equazioni spazio-tempo delle equazioni di Einstein R_{00} e R_{11} e sono conosciute come *Equazioni di Friedmann*. È bene notare che il termine k che appare nella (1.2.1.5) dà informazioni circa la struttura geometrica dell'Universo, infatti

$$k = \begin{cases} -1 & \text{spazialmente aperto} \\ 0 & \text{spazialmente piatto} \\ 1 & \text{spazialmente chiuso} \end{cases}$$

La ε , invece, rappresenta la densità di materia. Anche il termine $(\varepsilon + p)$ presente nella (1.2.1.6) dà informazioni circa l'Universo, ovvero

$$(\varepsilon + p) < 0 \text{ l'Universo accelera}$$

$$(\varepsilon + p) = 0 \text{ l'Universo è piatto}$$

$$(\varepsilon + p) > 0 \text{ l'Universo decelera}$$

Il fattore di scala $a(t)$ presente nella *metrica FLRW* dice di quanto l'Universo si sta espandendo. La (1.2.1.7) è l'equazione di continuità analoga a $T_{\alpha\beta}$ e dà informazioni sullo stato della materia; l'indice $\gamma = \left(\frac{c_s}{c}\right)^2$ prende il nome di *indice adiabatico* dove c_s è la *velocità del suono*, inoltre $0 \leq \gamma \leq 1$; tale intervallo prende il nome di intervallo di *Zel'dovič*.

1.2.2 Legge di Hubble

Nell'elaborazione del Principio Cosmologico altro punto fondamentale è la recessione delle galassie in base alla legge di Hubble usata per definire l'età in cui è avvenuta l'espansione dell'Universo.

Nel 1929, osservando le stelle Cefeidi nella galassia di Andromeda, Hubble ha determinato che tutte le nebulose seguono la relazione

$$v = H_0 d \quad (1.2.2.1)$$

Dove H_0 è la costante di Hubble. La formula afferma che le galassie che si trovano ad una certa distanza d si allontanano da noi. Tale legge tiene conto del Principio Cosmologico. Misurando, poi, fotometricamente d e spettroscopicamente v Hubble ha scoperto che lo spettro ha uno spostamento delle linee spettrali verso le lunghezze d'onda più alte, ovvero che vi è uno spostamento verso il rosso, il *Redshift*. Questo significa che le galassie si stanno allontanando da noi e che quindi l'Universo è in espansione. Hubble ha determinato la relazione tra *Redshift* e distanze graficando il *Redshift* (z) versus la distanza (d)

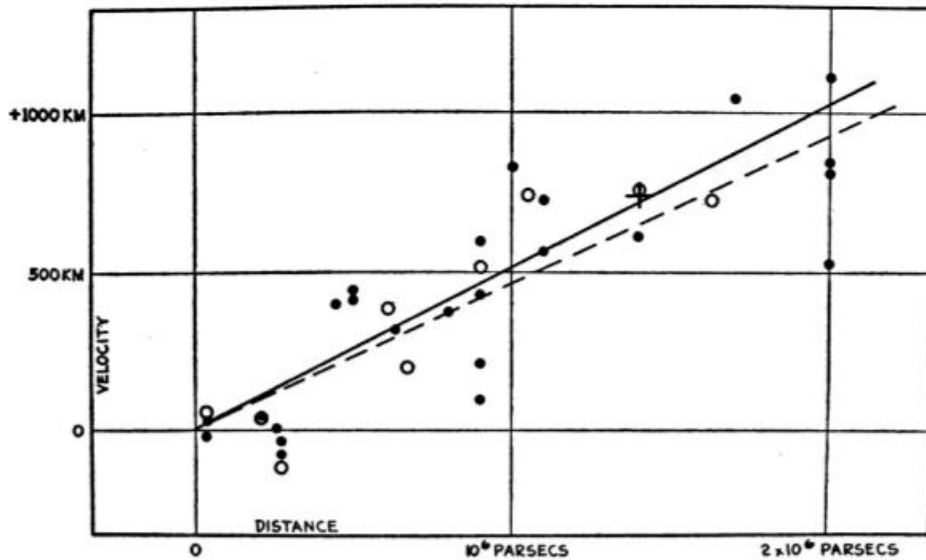


Figura 2 il grafico originale di Hubble di z (ordinata) e d (ascissa) ([6])

determinando la relazione

$$z = \frac{H_0}{c} d \quad (1.2.2.2)$$

Quanto trattato verrà ripreso successivamente nel Capitolo 2.

Usando le equazioni cosmologiche ricavate precedentemente si vuole determinare l'origine dell'espansione, ovvero l'età dell'Universo. Il calcolo che segue non tiene conto della costante cosmologica Λ presente nelle (1.2.1.4) e (1.2.1.5); è stato fatto ciò perché la Λ assume un Universo statico, non in espansione. I calcoli sono fatti assumendo che l'Universo sia spazialmente piatto.

Per prima cosa si sostituisce l'equazione di stato nella (1.2.1.6), ottenendo

$$\dot{\varepsilon} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) (\varepsilon + \gamma \varepsilon) = 0$$

ponendo ε in evidenza e dividendo per ε si ottiene

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) (1 + \gamma)$$

integrando ora ambo i membri si ottiene

$$\varepsilon = \frac{cost}{a^{3(\gamma+1)}} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\gamma+1)}$$

ricordando che k è la costante di curvatura e, considerando il caso in cui l'Universo è spazialmente piatto ($k=0$), la seconda equazione diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

sostituendo il valore di ρ trovato precedentemente e moltiplicando ambo i membri per a^2 si ottiene

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^{3(\gamma+1)} \frac{a^2}{a^{3(\gamma+1)}} \Rightarrow \dot{a} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^{3(\gamma+1)} \frac{a^2}{a^{3(\gamma+1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{da}{dt} a^{\frac{3(\gamma+1)}{2}} = cost$$

da quest'ultima espressione si trova

$$a^{\frac{3}{2}(\gamma+1)} = cost + b$$

ponendo $b = 0$ in modo tale che l'Universo inizi ad un tempo nullo. Si scrive

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}$$

e, ancora

$$a = \widetilde{a}_0 t^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}$$

a seconda del valore di γ ci sono vari “tipi” di materia presente nell'Universo che ne detta la sua espansione e quindi la sua evoluzione. Derivando l'equazione precedente si ottiene

$$\dot{a} = \frac{2}{3(\gamma+1)} t^{-\frac{(1+3\gamma)}{3(\gamma+1)}}$$

rapportando a con la sua derivata si ottiene

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(\gamma+1)t} \quad (1.2.2.3)$$

si può affermare che esiste una distanza D detta *distanza comobile* tale che

$$D = a(t)r \Rightarrow \dot{D} = \dot{a}(t)r$$

e riscrivere la Legge di Hubble come

$$\dot{D} = H_0 D$$

sostituendo $\dot{D}$ e D si ottiene la dipendenza di H_0 con il fattore di scala, una relazione estremamente importante per riscrivere le *Equazioni di Friedmann*

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \quad (1.2.2.4)$$

sostituendo ancora la (1.2.1.4) in quest'ultima espressione si ottiene, alla fine

$$t = \frac{2}{3(\gamma + 1)H_0}$$

che rappresenta il tempo in cui l'espansione è iniziata, ovvero l'età dell'Universo

$$t \simeq 13,7 \text{ Gyears}$$

1.2.3 Dark Energy e Dark Matter

In questa Sezione si introduce l'importanza ed il ruolo della costante cosmologica Λ . Riprendendo le equazioni cosmologiche, andando a confrontare la (1.2.1.4) e la (1.2.1.5) dove compare Λ , si ricava un'espressione per la costante cosmologica. Quest'ultima viene inserita nella (1.2.1.4) ottenendo

$$\Lambda \approx \frac{4\pi G}{c^4} \rho c^2 \approx \frac{4\pi G}{c^2} \rho_0$$

dove con ρ_0 si è indicato il valore attuale di ρ . Sostituendo i valori numeri e esplicitando il tutto in termini di lunghezze si ottiene [7]

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx 3 \cdot 10^{28} \text{ cm} \approx 10^4 \text{ Mpc}$$

Il Modello Cosmologico Standard tiene conto di un Universo spazialmente piatto che sta attualmente subendo una fase di espansione accelerata. Le evidenze in favore di questo modello sono date dal diagramma di Hubble che grafica i *Redshift* in funzione delle velocità di recessione delle galassie. Ancora, l'abbondanza di strutture a larga scala e la frazione di gas presenti in queste strutture vincolano il parametro di densità della materia ad essere $\Omega_M \sim 0.3$, che considera in toto sia il contributo della materia barionica sia quello della materia oscura [7]. Queste osservazioni indicano che per ottenere un Universo con le caratteristiche sopra elencate c'è bisogno di avere due contributi chiamati, rispettivamente, contributo cosmologico e contributo di curvatura spaziale dell'ordine $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ e $\Omega_k \simeq 0.0$ in modo tale da avere

$$\Omega_k + \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$$

Una ulteriore e importante conferma per questo modello viene dallo studio della radiazione di fondo cosmico nel microonde. Nonostante le numerose conferme osservative, il Modello Λ CDM mostra anche diverse lacune, come il fatto che la causa dell'espansione accelerata dell'Universo viene identificata con la presenza di una qualche forma di "energia oscura" (dark energy) che, diversamente

dalla materia barionica ed oscura, non è organizzata in strutture a larga scala, ma ha solo un ruolo “dinamico” nel fluido di Hubble contribuendo ad esso per circa il 70%. La spiegazione più semplice è che questa dark energy sia dovuta alla costante cosmologica Λ , supponendo che il contenuto in materia-energia dell’Universo sia interpretabile come una mistura di costante cosmologica, materia oscura “fredda”, ovvero data da particelle non relativistiche, e da una piccola frazione di materia barionica. Sebbene la maggior parte dei dati raccolti sperimentalmente sia in accordo con questo modello ci sono problemi concettuali come ad esempio quello di considerare Λ come energia del vuoto; il valore in accordo con le osservazioni è di 120 ordini di grandezza più piccolo rispetto a quello delle teorie fondamentali. Per risolvere questo problema, si deve supporre l’esistenza di una qualche entità dinamica che riduca in modo drastico l’energia del vuoto primordiale [7].

Capitolo 2

Indicatori di Distanze e Cosmografia

Questo secondo Capitolo è focalizzato sul concetto di Universo in espansione. Da questo si riprende la trattazione fatta precedentemente analizzando vari metodi per misurare la distanza di oggetti al di fuori della nostra galassia divisi in due categorie: Indicatori di Distanze Primari e Indicatori di Distanze Secondari utilizzati negli anni dagli astronomi per determinare le distanze delle galassie e la scala di distanza in cui tali stime sono valide, con gli Indicatori di Distanze Secondari sono misurati diversi valori della costante di Hubble H_0 a seconda degli indicatori utilizzati. Infine, si introduce e discute l'approccio cosmografico e i parametri cosmografici.

2.1 Redshift e Blueshift

Come precedentemente definito, si ricorda che per *Redshift* (o spostamento verso il rosso) si intende la lunghezza d'onda di una radiazione emessa da un oggetto in allontanamento; per *Blueshift* (o spostamento verso il blu) ci si riferisce, invece, alla lunghezza d'onda di una radiazione emessa da un oggetto in avvicinamento.

Si suppone, come prima cosa, di considerare una particolare linea di assorbimento in cui la lunghezza d'onda, misurata sulla Terra, è λ_{em} . La lunghezza d'onda che si misura per la stessa linea di assorbimento ma nello spettro di una galassia lontana è λ_{ob} [8]; essa, non sarà, in generale, la stessa. Si dice che la galassia possiede un *Redshift* z , dato dalla formula

$$z \equiv \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

quando $z < 0$ si ha un *Blueshift* mentre quando $z > 0$ si ha un *Redshift*. Si è visto che la gran parte delle galassie osservate possiede $z > 0$ [8].

Riprendendo quanto trattato nel Paragrafo 1.2.3 del Capitolo 1 Hubble interpretò i *Redshift* osservati da varie galassie come uno "spostamento" causato dalla loro velocità radiale. Interpretando i *Redshift* come "*Doppler shift*", la legge di Hubble assume la forma della (1.2.2.1)

La formula che lega z con H_0 precisa anche che a seconda del valore della costante di Hubble si ha un *Redshift* o un *Blueshift*, rispettivamente,

$$H_0 > 0 \rightarrow \text{Redshift}$$

$$H_0 < 0 \rightarrow \text{Blueshift}$$

si possono correlare *Redshift* e *Blueshift* anche con il fattore di scala $a(t)$ della metrica di FLRW. Riscrivendo la metrica come

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

e trattando il caso di un raggio di luce che obbedisce all'equazione $d\tau^2 = 0$ si ottiene

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.1.1)$$

Per un raggio di luce che va verso una sorgente distante r decresce al crescere di t , si sceglie dunque il segno meno nella (2.1.1). In questo modo se la luce lascia la sorgente con una coordinata comovente r_1 al tempo t_1 , arriverà all'origine $r = 0$ ad un tempo t_0 , dato da

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Andando a differenziare questa relazione si ottiene

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \quad (2.1.2)$$

la frequenza emessa sarà dunque $\nu_1 = \frac{1}{\delta t_1}$ mentre quella osservata $\nu_0 = \frac{1}{\delta t_0}$. Sostituendo nella (2.1.2) si ottiene

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

Questa espressione viene scritta come

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (2.1.3)$$

se $a(t)$ cresce allora c'è un *Redshift*, se, invece, decresce si ha un *Blueshift*. Per sorgenti vicine si può espandere $a(t)$ come una serie di potenza

$$a(t) \simeq a(t_0)[1 + (t - t_0)H_0 + \dots] \quad (2.1.4)$$

dove H_0 è, come sempre, la costante di Hubble. La (2.1.3) restituisce l'aumento frazionario in lunghezza d'onda, ovvero

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \dots \quad (2.1.5)$$

Per oggetti vicini $t_0 - t_1$ è la distanza corretta d (con $c = 1$) [9], quindi si ritrova così la (1.2.2.2) e tutte le implicazioni ad essa connesse.

2.2 Scala delle Distanze Cosmologiche

Si introducono, in questa sezione, i metodi utilizzati per calcolare le distanze cosmologiche tramite i cosiddetti Indicatori di Distanze, la cui validità è caratterizzata dal *Redshift* che si sta considerando. Come prima cosa si osservano oggetti con z non molto più grande di 0.1, in modo tale da poter non tener conto della curvatura dello spazio-tempo. Quasi tutte le misure relative alle distanze sono basate su misure di distanze di oggetti che si trovano all'interno della nostra galassia, utilizzando uno o più metodi della cinematica classica [9].

2.2.1 Indicatori di Distanze Primari

Prima di trattare gli Indicatori di Distanze Primari si definiscono due metodi per la determinazione della distanza di un oggetto che si trova al di fuori della nostra galassia: se si conosce la sua luminosità assoluta, la si può confrontare con la luminosità apparente, oppure se si conosce il suo diametro, lo si può confrontare con il suo diametro angolare [9]. In aggiunta, la distanza di un oggetto abbastanza vicino a noi può essere determinata misurando la sua parallasse o il suo moto proprio. Le distanze misurate con questi metodi sono gli stessi per oggetti che sono vicini di circa 10^9 *anni luce*.

- **Parallasse Trigonometrica**

La parallasse trigonometrica è un indicatore geometrico. Rappresenta lo spostamento apparente della posizione di un oggetto (ad esempio corpi celesti) nel cielo causato dal moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole. Le prime stelle la cui distanza è stata misurata con questo metodo furono quelle di α *Centauri*, nel 1838 da Friedrich Wilhelm Bessel. Queste stelle sono ad una distanza di circa 1.35 *pc* e 3.48 *pc*, rispettivamente. Questo metodo, prima del lancio del satellite *Hipparcos*, non era utilizzato per trovare distanze di stelle al di fuori dei 30 *pc* a causa dell'atmosfera terrestre. Per stelle sufficientemente luminose, la parallasse può essere misurata con un'accuratezza di $7 \div 9 \cdot 10^{-4}$ *secondo d'arco* [9].

- **Moto Proprio**

Con moto proprio si definisce lo spostamento apparente della posizione di un oggetto nel cielo causato dall'attuale moto dell'oggetto relativo al Sole. In formule

$$\mu = \frac{v_{\perp}}{d}$$

Dove d rappresenta la distanza della sorgente di luce e $v_{\perp}$ è la sua velocità perpendicolare al campo visivo e μ è l'aliquota in *radianti/tempo*. Per il calcolo di μ la difficoltà sta nel trovare $v_{\perp}$; per fare ciò gli astronomi tengono conto della componente v_r della velocità lungo il campo visivo dal "Doppler shift" delle linee spettrali della sorgente. Il problema, però, nasce dal ricavare $v_{\perp}$ tramite misurazioni di v_r . Ciò può essere fatto in vari modi come, ad esempio, utilizzando ammassi in movimento, ovvero ammassi di stelle che si muovono su percorsi

paralleli alla stessa velocità. Un secondo metodo è basato sull'analisi statistica dei "Doppler shift" e dei moti propri di stelle per cui le distanze relative sono conosciute perché, ad esempio, possiedono la stessa luminosità assoluta. Un altro metodo di cui vale la pena accennare è quello dei "Doppler shift" variabili nel tempo utilizzato per la misura di alcune distanze fuori dalla nostra galassia utilizzando il moto di maser (sorgenti di microonde puntiformi) in dischi di gas e polvere in accrezione in orbita intorno a buchi al centro delle galassie [9].

- **Luminosità Apparente**

Il metodo della luminosità apparente è quello più comune per la determinazione delle distanze in cosmologia basato, appunto, sulla luminosità apparente di oggetti di sconosciuta luminosità assoluta. La luminosità assoluta L è definita come l'energia emessa per secondo, mentre, la luminosità apparente l è definita come l'energia ricevuta per secondo per centimetro quadro dell'area ricevente. Se l'energia è emessa isotropicamente allora si può trovare la relazione tra luminosità assoluta e luminosità apparente nella geometria euclidea immaginando che l'oggetto luminoso sia circondato da una sfera il cui raggio è uguale alla distanza d tra l'oggetto e la Terra. In questo modo la luminosità apparente è calcolata come

$$l = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (2.2.1.1)$$

Questa relazione è soggetta, però, a correzioni. Queste correzioni sono scaturite dal fatto che gli astronomi sono soliti riferirsi alla luminosità apparente ed assoluta in termini di magnitudine apparente ed assoluta [9].

La magnitudine apparente (m) è una misura della densità di flusso luminoso che giunge sul punto di osservazione;

La magnitudine assoluta (M) è legata alla luminosità intrinseca della sorgente ed è definita come la magnitudine apparente di una sorgente osservata alla distanza di 10 *parsec* [10].

La (2.2.1.1), allora, può essere riscritta in termini di magnitudine apparente ed assoluta come

$$d = 10^{1+\left(\frac{m-M}{5}\right)} pc \quad (2.2.1.2)$$

dove m rappresenta la magnitudine apparente, M la magnitudine assoluta e d è la distanza in *pc*.

Ci sono differenti tipi di stelle che sono state utilizzate nelle misurazioni delle distanze osservandone la luminosità apparente, se ne riportiamo alcune:

1. Main Sequence (Sequenza Principale)

Sono stelle che bruciano ancora idrogeno nel loro nucleo. Esse obbediscono a una relazione tra colore e luminosità assoluta, entrambe dipendenti dalla massa. Furono scoperte da Ejnar Hertzsprung e da Henry Norris Russel. La luminosità è più grande per stelle blu-bianche e man mano diminuisce per colori tendenti al giallo e al rosso.[8] A seconda della temperatura di queste stelle si utilizza la denominazione $O, B, A, F, G, K, M, R, N, S$ dove la lettera O è utilizzata per stelle molto calde mentre la lettera S per stelle fredde [3]. La forma della Main Sequence è trovata osservando luminosità apparenti e colori di grandi numeri di stelle in ammassi. Con l'avvento del satellite *Hipparcos* la calibrazione della Main Sequence è stata migliorata notevolmente dall'osservazione di colori e luminosità apparenti di circa 100,000 stelle la cui distanza è nota tramite misura della loro parallasse trigonometrica. In questo modo si può utilizzare la (2.2.1.1) per misurare la distanza di ogni stella o galassia in cui è possibile osservare luminosità e colore. Distanze misurate in questo modo di solito prendono il nome di *parallasse fotometriche* [9].

2. Stelle RR Lyrae

Le Stelle RR Lyrae sono stelle variabili che sono state usate come Indicatori di Distanze per decenni. Vengono definite stelle variabili perché la loro luminosità apparente varia con più o meno regolarità nel tempo. Le magnitudini assolute delle Stelle RR Lyrae sono note sia tramite studi statistici del moto proprio e parallassi sia tramite la loro presenza in ammassi globulari, la cui distanza può essere determinata dalla fotometria della Main Sequence. In questo modo è stato trovato che le Stelle RR Lyrae hanno tutte, bene o male, la stessa magnitudine assoluta tra $M_v \simeq 0.2$ e $M_v \simeq 1.0$. Si può così stimare la distanza dalla loro magnitudine apparente. C'è da dire, però, che queste stelle non sono sufficientemente luminose per essere usate a distanza superiori a $3 \cdot 10^5 pc$. Per questo è stata posta molta più attenzione verso le *Cefeidi* [3].

3. Cefeidi

Diversamente dalle RR Lyrae le Cefeidi sono molto luminose e per questa loro caratteristica sono le stelle più importanti usate per la misurazione di distanza al di fuori della nostra galassia. Nel 1912 Henrietta Swan Leavitt scoprì che le Cefeidi nella Piccola Nube di Magellano hanno luminosità apparenti date da una funzione liscia del periodo della variazione in luminosità; la distanza dalla Piccola Nube di Magellano

era però ignota. Avendo misurato le distanze e le luminosità apparenti, e quindi le luminosità assolute, di molte Cefeidi in ammassi aperti fu possibile calibrare la relazione tra il periodo e la luminosità. Queste stelle divennero così “candele standard” che potevano essere usate per misurare la distanza di qualsiasi galassia abbastanza vicina alla Cefeidi. Fu la scoperta di Cefeidi in M31, insieme alla calibrazione di Leavitt, che consentì ad Hubble, nel 1923, di misurare la distanza di M31.

Oggi la forma della relazione periodo-luminosità delle Cefeidi viene derivato dalla Grande Nube di Magellano tenendo conto della relazione tra luminosità assoluta e colore. La calibrazione della luminosità assoluta delle Cefeidi può essere dunque espressa come la misura della distanza dalla Grande Nube di Magellano. Molti metodi, tra cui quello della fotometria illustrata precedentemente in questo Paragrafo, danno quello che per molti anni fu generalmente accettato come il modulo $m - M$ della distanza della Grande Nube di Magellano, ovvero 18.5 mag . Sostituendo questo risultato nella (2.2.1.2) si ottiene una distanza di $5.0 \cdot 10^4 \text{ pc}$. Ci sono state nuove calibrazioni per la relazione periodo-luminosità delle Cefeidi che non tengono conto di quelle presenti nella Grande Nube di Magellano (LMN) che, insieme alle osservazioni di Cefeidi nella LMN possono essere utilizzate per stimare la distanza di questa galassia. In anni recenti il satellite *Hipparcos* ha misurato la parallasse trigonometrica per 223 Cefeidi nella nostra galassia, di cui circa 200 possono essere utilizzate per calibrare la relazione periodo-luminosità, senza tener conto della fotometria della Main Sequence o delle Stelle RR Lyrae [9].

2.2.2 Indicatori di Distanze Secondari

Gli Indicatori di Distanze Primari non sono sufficientemente luminosi per studiare distanze per cui z è più grande di 0.01. Per questi valori sono utilizzati gli Indicatori di Distanze Secondari, che sono più luminosi delle Cefeidi come ad esempio intere galassie o supernove [9]. Per molti anni le Cefeidi sono state utilizzate come Indicatori di Distanze solamente al di fuori di qualche Mpc , ciò limita la loro utilità al Gruppo Locale formato dalla nostra galassia, la nebulosa di Andromeda $M31$ e altre galassie più piccole e ad altri gruppi vicini come $M81$. Ciò non è abbastanza per calibrare distanze ad una popolazione adeguata di galassie o supernove, è necessario utilizzare una varietà di Indicatori di Distanze Intermedi: ammassi globulari, le stelle più luminose nelle galassie, etc. Adesso l’Hubble Space Telescope permette di osservare Cefeidi in un gran numero di galassie a distanze molto più ampie, di circa $30 Mpc$, così da poter calibrare direttamente gli Indicatori di Distanze Secondari senza ricorrere agli Indicatori di Distanze Intermedi [9]. Si citano alcuni di questi Indicatori di Distanze Secondari:

- **Relazione di Tully-Fisher**

La relazione di Tully-Fisher, trovata nel 1977, da R. Brent Tully e da J. Richard Fisher e fu utilizzata per stimare la luminosità assoluta di galassie a spirale. La linea di assorbimento di queste galassie è tipicamente dell’ordine dei 21 cm ampliata poi

dall'effetto Doppler, causato dalla rotazione della galassia. La larghezza della linea W dà indicazioni circa la velocità di massima rotazione della galassia, correlata con la massa della galassia stessa, correlata, quest'ultima, con la sua luminosità assoluta. In un'applicazione di questo approccio è la forma della funzione $L_I(W)$ che dà la luminosità assoluta della banda infrarossa come una funzione di larghezza di linea di circa 21 cm fu trovata da un campione di 555 galassie a spirale in 24 ammassi, molti con $z < 0.01$. Si trovò, inoltre, che $L_I(W) \propto W^3$. La scala complessiva della funzione $L_I(W)$ fu trovata fittandola con le luminosità assolute di 15 galassie a spirale la cui distanza era conosciuta dalle osservazioni delle Cefeidi contenute in esse (utilizzando, dunque, gli Indicatori di Distanze Primari). La costante di Hubble fu così trovata usando la $L_I(W)$ calibrata per trovare le distanze da galassie in 14 ammassi con $0.013 < z < 0.03$ e comparando i risultati con la (2.1.4) [9]. La costante di Hubble trovata fu

$$H_0 = 70 \pm 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

- **Piano Fondamentale**

Consiste nell'osservare che la correlazione tra la velocità orbitale e la luminosità assoluta delle galassie ellittiche dipende dalla luminosità superficiale dell'ammasso, e quindi dalla sua area [9]. Questo metodo stimò il valore della costante di Hubble, trovando

$$H_0 = 78 \pm 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

- **Supernove di tipo Ia**

Si pensa che questo tipo di Supernove si formino dall'esplosione di una nana bianca. L'esplosione di quest'ultima è causata dalla stretta vicinanza in orbita tra essa ed un'altra stella estraendo materia da quest'ultima e accrescendo la sua massa vicino al limite *Chandrasekhar* che rappresenta la massima massa possibile che può essere sopportata dalla pressione di degenerazione degli elettroni. Quando ciò accade la nana bianca diventa instabile ed esplode. L'esplosione della stella porta la sua massa ad essere vicina al limite *Chandrasekhar* cosicché c'è solo una piccola variazione nella sua luminosità assoluta, rendendo questo tipo di Supernove degli ottimi Indicatori di Distanze. Inoltre, quanto più tempo la nana bianca ci mette ad esplodere quanto più alta è la luminosità assoluta. Questa relazione è stata calibrata misurando Supernove di tipo Ia in varie galassie con distanza conosciuta. Dal 1937 al 1999 si trovarono 10 Supernove in galassie la cui distanza fu misurata osservando le Cefeidi contenute in esse. Di queste 6 Supernove furono utilizzate per calibrare la relazione tra luminosità assoluta e tempo di declino. Quest'ultima relazione fu poi utilizzata per calcolare le distanze di 29 Supernove di tipo Ia in galassie con $0.01 < z < 0.1$. Graficando queste distanze con *Redshift* misurati si trovò il seguente valore della costante di Hubble

$$H_0 = 71 \pm 2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

D'altra parte un gruppo guidato da Allan Sandage trovò un valore di H_0 utilizzando sia Supernove di tipo Ia sia la relazione di Tully-Fisher [9]. Il valore trovato, però, risulta molto più basso rispetto a quelli trovati utilizzando tecniche discusse precedentemente in questo Paragrafo

$$H_0 = 62.3 \pm 1.3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

Secondo Sandage e il suo gruppo questa differenza è causata dalla differenza della relazione periodo-luminosità delle Cefeidi usata per misurare le distanze da galassie che hanno supernove utilizzate per calibrare la relazione tra la luminosità assoluta di queste supernove ed il tempo di declino [9].

Si riporta, a titolo illustrativo, una tabella riassuntiva di vari tipi di Indicatori di Distanze Primari e Secondari illustrati in questo paragrafo sia di altri tipi di Indicatori che non sono stati trattati.

Metodo	Scala delle Distanze di Validità	Incertezza Media
Punto Zero: Indicatori di Distanze Geometriche:		
La loro incertezza intrinseca		
Parallasse Trigonometrica	1 kpc	0.1% a 1 pc, 100% a 1 kpc
Ammassi in Movimento	1 kpc	5%
Parallasse Secolare		
Parallasse Statistica		
Indicatori di Distanze Primari:		
Incertezza Intrinseca e Calibrazione dell’Incertezza di Indicatori di Punto Zero		
Fit Main Sequence	~50 pc – 50 kpc	5%
Stelle RR Lyrae	1 Mpc	1 – 5%
Cefeidi	25 Mpc	5%
Indicatori di Distanze Secondari:		
Incertezza Intrinseca e Calibrazione delle Incertezze Precedenti (Indicatori di Punto Zero e Primari)		
Supernove Tipo II (EPM)	100 Mpc	20% (5% – 50%)
Supergiganti Blu più Luminose	15 Mpc	10%
Nove (Metodo MMRD)	20 Mpc	20% (10% sistemi vicini)
Nebulose Planetarie	50 kpc – 20 Mpc	5%
Fluttuazioni della Luminosità Superficiale	5 kpc – 130 Mpc	8%
Ammassi Globulari	50 Mpc	10%
Legge di Tully-Fisher	10 – 500 Mpc	15%
Piano Fondamentale	10 – 250 Mpc	5%
Galassia di Ammassi più Luminosa	10 – 200 Mpc	20%
Supernove di tipo Ia	Fino a ~ 8 Gpc	5 – 15%

2.3 Parametri Cosmografici

I parametri cosmografici sono definiti in un contesto di Modello Cosmologico Standard Λ CDM. È importante sottolineare che, mentre la Cosmologia descrive l'espansione dell'Universo con un modello e necessita quindi di assumere un'equazione di stato per i fluidi che lo compongono, la Cosmografia invece parametrizza l'espansione dell'Universo con una serie cosmografica, assumendo solo il Principio Cosmologico. Questo vuol dire non solo che non viene richiesto di conoscere l'equazione di stato dei fluidi cosmologici, ma anche di non assumere che le equazioni di Einstein siano valide su tempi e distanze cosmiche. Per quanto trattato in questo Capitolo, si considera un Universo a curvatura zero, ovvero piatto.

Espandendo il fattore di scala $a(t)$ in serie di Taylor intorno al tempo t_0 (tempo presente) come fatto precedentemente nel Capitolo (vedi 2.1.4) si ottiene

$$a(t) \sim a(t_0) + a'(t_0)\Delta t + \frac{a''(t_0)}{2}\Delta t^2 + \frac{a'''(t_0)}{3!}\Delta t^3 + \frac{a^{iv}(t_0)}{4!}\Delta t^4 + \frac{a^v(t_0)}{5!}\Delta t^5 + \dots$$

Dove $\Delta t \equiv t - t_0$. Dall'espansione di $a(t)$ si definiscono con poche parole i parametri cosmografici

$$H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (2.3.1. a)$$

$$q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{dt^2} \quad (2.3.1. b)$$

$$j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3a}{dt^3} \quad (2.3.1. c)$$

$$s \equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4a}{dt^4} \quad (2.3.1. d)$$

$$l \equiv \frac{1}{aH^5} \frac{d^5a}{dt^5} \quad (2.3.1. e)$$

Questi parametri sono chiamati, rispettivamente: *Hubble rate* (H), *parametro di decelerazione* (q), *parametro di jerk* (j), *parametro di snap* (s) e *parametro di lerk* (l). Questi parametri vengono anche chiamati *serie cosmografica* (CS). Riscrivendo $a(t)$ in termini della CS si ottiene

$$a(t) \sim 1 + H_0 \Delta t - \frac{q_0}{2} H_0^2 \Delta t^2 + \frac{j_0}{3!} H_0^3 \Delta t^3 + \frac{s_0}{4!} H_0^4 \Delta t^4 + \frac{l_0}{5!} H_0^5 \Delta t^5 \dots,$$

Dove si è normalizzato il fatto di scala a $a(t_0) = 1$ [11].

Si presenta un breve excursus su ogni parametro presente nella *serie cosmografica*:

I. Hubble Rate

Come è stato introdotto nelle sezioni precedenti, l'Hubble rate è data dall'equazione di Friedmann ed è determinata dai fluidi cosmologici e come questi evolvono con il fattore di scala. Il valore H_0 (ovvero l'Hubble rate calcolato oggi) può essere stimato da Indicatori di Distanze ed è un valore positivo, indicazione questa che l'Universo si sta espandendo.

II. Parametro di Decelerazione (q)

Il Parametro di Decelerazione q afferma che ad un tempo specifico, l'Universo sta accelerando o decelerando. Esso, inoltre, offre anche degli indizi circa il fluido cosmologico responsabile per la dinamica del sistema. q può assumere tre valori distinti:

- (i) $q_0 > 0$: mostra un Universo in espansione che subisce una fase di decelerazione. Ciò significa che l'Universo è in fase di contrazione: la materia domina su la dark energy. L'espansione dell'Universo è stata governata dalla materia fino a $z \sim 0.34$, dopo di che la dark energy è risultata il fluido dominante.
- (ii) $-1 < q_0 < 0$: indica un Universo in espansione accelerata. Le osservazioni supportano questo caso e stime recenti del parametro q_0 indicano:
 - 1. $q_0 = -0.64 \pm 0.22$ ottenuto utilizzando il catalogo di SNela di Pantheon combinato ad altre misurazioni cosmologiche ([12])
 - 2. $q_0 = -0.28 \pm 0.49$ ottenuto utilizzando il catalogo di SNe di JLA combinato con altre osservabili cosmologiche ([13])
- (iii) $q_0 = -1$: indica che tutto il bilancio energetico cosmologico è dominato da un fluido di tipo de Sitter, ovvero una componente cosmica con densità di energia costante che non evolve anche se l'Universo è in espansione. Si pensa che un simile fluido possa aver guidato la prima fase della vita del nostro Universo durante la cosiddetta "Inflazione Cosmologica" [11].

III. Parametro di Jerk (j)

Il Parametro di Jerk è collegato al segno di q . Andando a considerare una variazione dell'accelerazione si vede se l'Universo ha o meno attraversato una fase di decelerazione [11]. Questa variazione è collegata a j come segue

$$\frac{dq}{dz} = \frac{j - 2q^2 - q}{1 + z}$$

Ai tempi attuali, però, questa relazione è data da

$$j_0 = \left. \frac{dq}{dz} \right|_0 + 2q_0^2 + q_0$$

E, visto che ci si aspetta $-1 \leq q_0 < -1/2$, allora $2q_0^2 + q_0 > 0$. Così se $q_0 < -1/2$, allora j_0 è collegato con il segno della variazione di q [11]. Si possono così determinare tre casi:

- (i) $j_0 < 0$: l'Universo non mostra alcun allontanamento dalla fase di accelerazione presente.
- (ii) $j_0 = 0$: indica che il parametro di decelerazione tende a valori precisi senza cambiare il suo comportamento per $z \rightarrow \infty$. Nessuna considerazione teorica, però, può supportare o meno questa ipotesi.
- (iii) $j_0 > 0$: implica che l'Universo ha iniziato ad accelerare in un preciso tempo durante la sua evoluzione. Di solito, ci si riferisce al *Redshift* corrispondente con *Redshift di Transizione*, in cui gli effetti della *dark energy* diventano significativi. Come conseguenza $j_0 > 0$ indica la presenza di un ulteriore mezzo cosmologico. Da misure dirette del *Redshift di Transizione* z_{tr} , si evincono dei limiti circa l'equazione di stato della *dark energy*. Il segno di j_0 corrisponde ad un cambiamento delle dinamiche dell'Universo, ad esempio un valore di j_0 positivo ci dice che il parametro di decelerazione dovrebbe cambiare segno quando $z > z_{tr}$ [11].

I parametri di *snap* (s) e di *lerk* (l) non sono trattati perché i dati non supportano il vincolo di questi ordini successivi non avendo informazioni sufficienti.

Un utile trucco in cosmografia è quello di ridimensionare la *serie cosmografica* in termini di H . È possibile dimostrare che se si tiene conto di n coefficienti cosmografici, solamente $n - 1$ di questi coefficienti sono veramente indipendenti. Dalle (2.3.1) si può scrivere

$$H^I = -H^2(1 + q)$$

$$H^{II} = H^3(j + 3q + 2)$$

$$H^{III} = H^4[s - 4j - 3q(q + 4) - 6]$$

$$H^{IV} = H^5[l - 5s + 10(q + 2)j + 30(q + 2)q + 24]$$

Queste espressioni mettono in evidenza la correlazione tra le derivate di H e i parametri della *serie cosmografica*. Tenendo a mente la definizione di *Redshift* cosmologico in termini del tempo cosmico t [11], ovvero

$$\frac{dz}{(1+z)} = -H(z)dt$$

Si può andare a scrivere la distanza di luminosità in uno spazio piatto come

$$d_L = (1 + z)\chi(z) \quad (2.3.2)$$

dove

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

è la distanza comovente percorsa da un fotone da z a noi, a $z = 0$. La (2.3.2) può anche essere scritta come

$$d_L = z d_H(H_0) \widetilde{d}_L(z; q_0, j_0, \dots) \quad (2.3.3)$$

dove

$$d_H(H_0) = 1/H_0$$

e

$$\widetilde{d}_L(z; q_0, j_0, \dots) = 1 + \frac{1 - q_0}{2} z - \frac{1 - q_0(1 + 3q_0) + j_0}{6} z^2 + O(z)$$

La (2.3.3) è applicata a qualsiasi modello cosmologico, in questa trattazione ci limiteremo a vederla nel caso del Modello Cosmologico Standard Λ CDM.

Capitolo 3

Taylor vs Padé

In quest'ultimo Capitolo si illustra un approccio alternativo all'uso dell'espansione in serie di Taylor sfruttando la serie di Padé; si osserva anche il perché si preferisce usare questa serie anziché la serie di Taylor. In particolare si mostra entro quali limiti quest'ultima è valida per la parametrizzazione della distanza di luminosità e quando, invece, si ricorre alla serie di Padé. In ultimo, si discute l'applicazione della serie di Padé nei termini del Modello Cosmologico Standard Λ CDM.

3.1 Serie di Taylor

Si definisce quando una funzione è sviluppabile in serie di Taylor e, successivamente, si osservano vantaggi e svantaggi nell'utilizzare lo sviluppo per la parametrizzazione della distanza di luminosità.

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intervallo (a, b) in $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Il seguente *Criterio di Sviluppabilità in Serie di Taylor* [14] afferma che

Se f è dotata di derivate di ogni ordine in (a, b) ed esistono $ML \geq 0$ tali che

$$|f^k(x)| \leq ML^k \quad \forall x \in (a, b), \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora per ogni $x_0 \in (a, b)$, f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nell'intervallo (a, b) , ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Lo studio viene fatto nelle ipotesi di Universo descritto dal Modello Λ CDM illustrato nel Secondo Paragrafo del Primo Capitolo. In queste ipotesi la dinamica dell'Universo può essere formulata considerando che la *dark energy* evolva come un fluido perfetto con equazione di stato

$$\omega(z) = \frac{P}{\rho} \quad (3.1.1)$$

con P la pressione totale e ρ la densità.

Tenendo quindi conto della *metrica di FLRW* la dinamica dell'Universo è descritta da un termine di materia senza pressione, una densità di *dark energy* in evoluzione barotropica e una curvatura scalare di fuga, ovvero $\Omega_k = 0$. In modo da sviluppare una teoria che predica questo fluido i cosmologi spesso provano a ricostruire la storia dell'espansione dell'Universo parametrizzando la (3.1.1). Un

metodo utilizzato è lo sviluppo di un modello di parametrizzazione indipendente espandendo $\omega(z)$ in una serie di Taylor troncata. Sebbene la serie di Taylor è ampiamente utilizzata per approssimare funzioni conosciute, esse divergono oltre un certo *Redshift* ($z \gg 1$) [11]. Una più sofisticata tecnica è data dalla serie di Padé che mira ad approssimare funzioni per mezzo di un rapporto tra due polinomi: essa offre una migliore approssimazione rispetto alla serie di Taylor troncata.

3.2 Serie di Padé

Per la parametrizzazione della distanza di luminosità a $z \gg 1$ la serie di Taylor troncata porta ad una divergenza della funzione e come questo problema è risolto dalla serie di Padé.

Innanzitutto si definisce la serie di Padé di una generica funzione $f(z)$

$$P_{nm}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$$

Di grado $n \geq 0$ (numeratore) e $m \geq 0$ (denominatore) concorde con $f(z)$ e le sue derivate a $z = 0$. La serie di Padé per n e m fissati è unica fino ad una generale costante moltiplicativa. Come conseguenza, la prima costante al denominatore è posta ad uno, in modo da affrontare questa “libertà” di ridimensionamento. In cosmografia si suppone che la distanza di luminosità d_L sia una serie di Taylor troncata rispetto a z sviluppata intorno a $z = 0$. Si considera di ricostruire una funzione supponendo di conoscere il valore di tale funzione e si definiscono due diverse espansioni approssimate di d_L . La prima per piccoli valori di z (intorno a $z = 0$), la seconda per grandi valori di z (intorno a $1/z=0$) [11]. Queste due distanze di luminosità sono scritte come

$$d_L^0 \sim f_0 + f'_z + \frac{f''}{2} z^2$$

$$d_L^\infty \sim g_0 + g'^{\frac{1}{z}} + \frac{g''}{2} \frac{1}{z^2}$$

In questo modo queste funzioni si comportano come d_L^0 quando $z \sim 0$ e come d_L^∞ quando $z \sim \infty$. In entrambi i limiti le funzioni restano finite (tali limiti sono $z \sim 0$ e $z \sim \infty$). La funzione candidata per interpolare i dati tra questi due limiti è data da una *funzione razionale* in z [11].

Si è quindi capito che il problema principale nella trattazione dello studio di distanze di luminosità è la convergenza che rappresenta un argomento delicato in cosmografia. Da quanto si è già visto il problema della serie di Taylor troncata è correlata al caso in cui si sceglie di voler misurare distanze di luminosità di oggetti che possiedono un *Redshift* molto grande ($z \gg 1$); essendo, inoltre, la serie di Padé una tecnica potente in grado di evitare questo problema e approssimare funzioni con rapporti tra polinomi ci si aspetta che essa possa approssimare la distanza di luminosità per $z \gg 1$ in modo accurato rispetto alla serie di Taylor.

Per superare il problema della convergenza la cosmologia di precisione utilizza diverse ri-parametrizzazioni del *Redshift* in termini di variabili ausiliari (Z_{new}), le quali allargano il raggio di convergenza dell'espansione di Taylor ad una sfera di raggio $Z_{new} < 1$ [11].

Per capire meglio questo ultimo concetto si suppone che i dati giacciono in un intervallo $z \in [0, \infty)$, qualsiasi variabile ausiliaria restringe quest'intervallo in un più rigoroso intervallo (non-divergente).

La costruzione di qualsiasi variabile ausiliare dovrebbe soddisfare alcuni parametri addizionali.

- Deve essere invertibile;
- Dobbiamo essere in grado di passare da z ad essa;
- Non deve divergere qualsiasi sia il valore di z ;
- Ogni parametrizzazione deve comportarsi uniformemente quando l'universo si espande, senza mostrare punti critici;

Le variabili ausiliarie non sono un “salto di qualità” rispetto alla serie di Padé; ciò è dato probabilmente dal fatto che è sconosciuta la forma esatta di Z_{new} [11].

3.3 Taylor vs Padé

Nei paragrafi precedenti si è già accennato al perché la serie di Taylor non vada bene quando si considerano distanze di luminosità con un *Redshift* $z \gg 1$ a causa del problema della convergenza.

In quest'ultimo paragrafo si osservano le differenze tra queste due serie alla luce del Modello Λ CDM.

Il parametro di Hubble per il Modello Λ CDM in caso di Universo piano e trascurando la componente di radiazione è

$$H(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$$

Dove $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ rappresenta la densità di *dark energy*, espressa in termini di costante cosmologica. Integrando d_L la funzione viene graficata sull'intervallo di interesse $z \in [0, 10]$ [11]. Computando differenti serie di Taylor e di Padé per questa funzione e, graficando tutti i risultati, si mostra che l'approssimazione migliora con l'utilizzo di funzioni razionali.

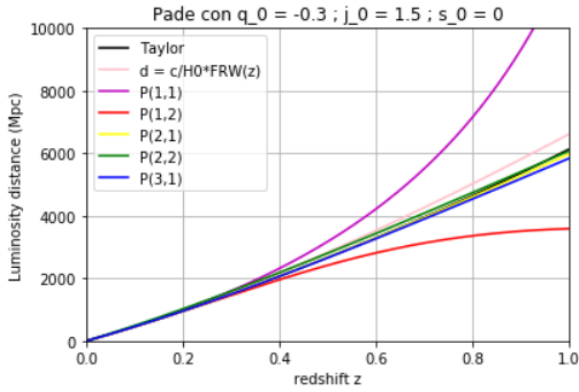


Figura 3.3.1

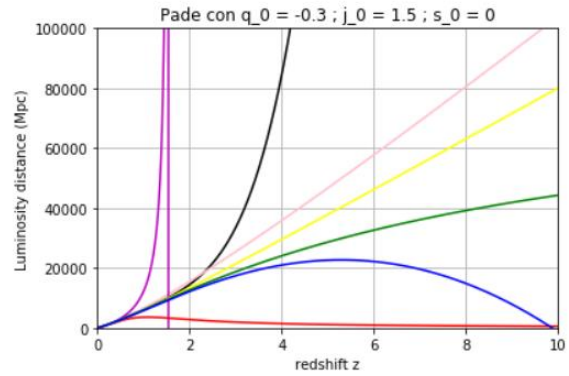


Figura 3.3.2

Figura: andamento della distanza di luminosità in funzione del Redshift (negli intervalli $[0,10]$ a destra, $[0,1]$ a sinistra) per valori arbitrari dei parametri cosmografici. Le diverse linee indicano serie cosmografiche differenti: serie di Taylor (nero), serie di Padé indicati nella legenda. I numeri tra parentesi della serie di Padé indicano gli ordini della serie, vedere Appendice A. Come riferimento indichiamo l'andamento del Modello Λ CDM in rosa.

Nella *Figura 3.3.1* è stato considerato un intervallo di *Redshift* $z \in [0, 1]$. È evidente che per questo intervallo la serie di Taylor è ancora valida per la parametrizzazione della distanza di luminosità.

Nella *Figura 3.3.2*, invece, per gli stessi valori del *parametro di decelerazione* q_0 e del *parametro di jerk* j_0 si mostra un intervallo di *Redshift* più vasto $z \in [0, 10]$ e si vede chiaramente che la serie di Taylor non è più in grado di parametrizzare la distanza di luminosità. Si nota che la serie di Padé è un forte strumento per la parametrizzazione che permette a seconda degli ordini e dei valori cosmografici di descrivere diversi andamenti.

I successivi quattro grafici sono stati costruiti variando il valore di q_0 lasciando invariato j_0 e, viceversa, variando il valore di j_0 lasciando invariato q_0 .

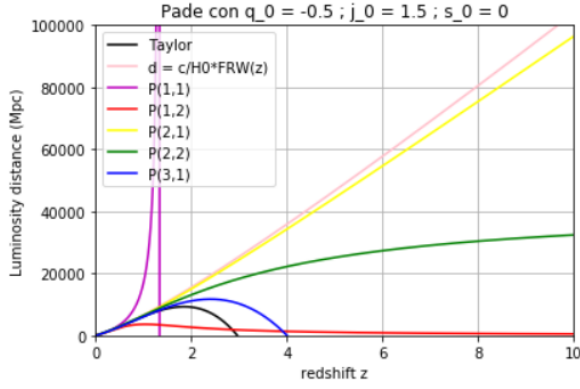


Figura 3.3.3

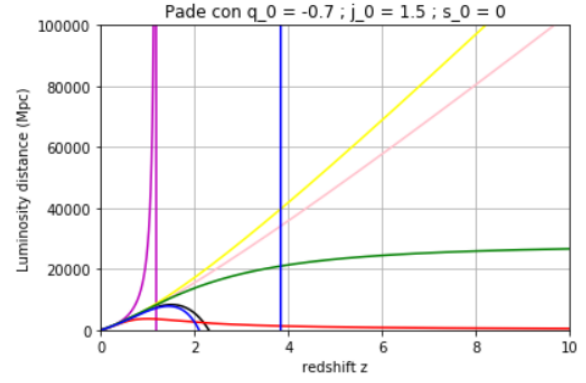


Figura 3.3.4

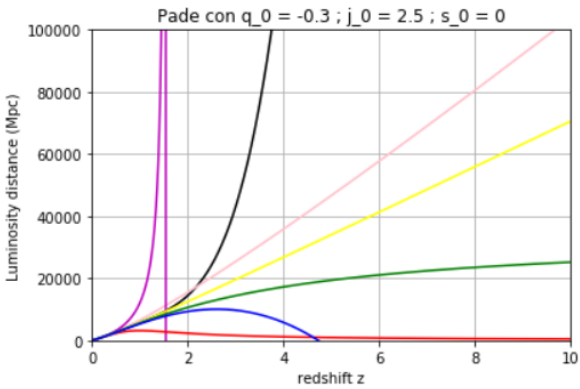


Figura 3.3.5

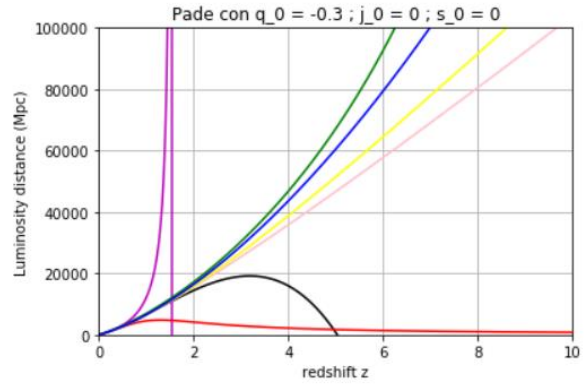


Figura 3.3.6

Figura: andamento della distanza di luminosità in funzione del Redshift per valori arbitrari dei parametri cosmografici. Le diverse linee indicano serie cosmografiche differenti: serie di Taylor (nero), serie di Padé indicate nella legenda. I numeri tra parentesi della serie di Padé indicano gli ordini, vedere Appendice A. Come riferimento indichiamo l'andamento del Modello Λ CDM in rosa.

In questi grafici per i valori cosmografici scelti la serie di Taylor tende a divergere rapidamente per valori di $z \geq 2$ mentre le serie di Padé possono descrivere meglio la distanza di luminosità del Modello Λ CDM per valori opportuni dei parametri cosmografici e del rapporto tra l'ordine del numeratore e denominatore scelto. Infine si nota che P_{11} diverge rapidamente e mostra una discontinuità per i valori cosmografici scelti, questo avviene anche per P_{31} quando si considera un valore di $q_0 > -0.5$. Questi comportamenti rendono questi ordini della serie di Padé non adeguati a descrivere l'espansione dell'Universo.

Nella Figura 3.3.3 e nella Figura 3.3.4 si è variato il valore di q_0 lasciando invariato j_0 . Nel primo grafico (3.3.3) la serie di Padé che approssima l'andamento del Modello Λ CDM è la P_{21} : serie per cui il grado del numeratore è maggiore di 1. Nel secondo grafico (3.3.4) si nota che le serie di Padé si discostano dall'andamento del Modello Standard e che la P_{21} si trova “al di sopra” di quello di Λ CDM. Ciò è dato dal fatto che scegliendo $q_0 = -0.7$ l'Universo accelera più velocemente rispetto al limite del Λ CDM ($q_0 \sim -0.5$).

Nella *Figura 3.3.5* e nella *Figura 3.3.6* si è variato il valore di j_0 mentre si è lasciato invariato il valore di q_0 . In particolare, nel secondo grafico si è utilizzato $j_0 = s_0 = 0$, quindi l'espansione è determinata dal solo parametro di decelerazione. Questo ci permette di apprezzare il ruolo del *parametro di jerk*. Si nota che la serie di Padé che più si avvicina al Modello Standard è la P_{21} , mentre la P_{31} mostra un'inversione di concavità per $j_0 > 0$ (si è testato che questo avviene a Redshift più basso per valori di j_0 crescenti). Ciò implica un Universo non più in accelerazione ma in decelerazione. In generale, un valore di jerk diverso da zero e positivo riduce l'accelerazione di espansione rispetto al caso $j_0 = 0$.

Conclusioni

Prima delle evidenze osservative dell'espansione dell'Universo e la conseguente formulazione della legge di Hubble, la Cosmologia era studiata solo da un punto di vista teorico. Ciò era determinato dalla mancanza di dati che potessero confermare le teorie. Nell'arco di un secolo, la cosmologia moderna si è poi evoluta in cosmologia di precisione, grazie alle numerose osservazioni da satellite e da terra disponibili oggi. Grazie ai numerosi dati, è stato possibile ideare diversi approcci per descrivere l'osservata espansione dell'Universo, come la Cosmografia. Quest'ultima non è una teoria, ma è uno strumento di parametrizzazione dei dati che permette di descrivere l'espansione dell'Universo senza assumere fluidi esotici come la *dark energy*.

In questo lavoro si sono discussi preliminarmente gli strumenti necessari per fornire un quadro generale sulle ipotesi su cui è basata la Cosmografia, ovvero Universo spazialmente piatto, in espansione, omogeneo ed isotropo. Queste ultime due ipotesi sono alla base del Principio Cosmologico discusso nel Capitolo 1 di questa monografia, dove si è inoltre trattato il Modello Λ CDM.

Nella seconda parte della tesi si sono trattati vari metodi (Indicatori di Distanze Primari e Secondari) per la determinazione delle distanze cosmologiche, andando a confrontare varie scale di distanze e la loro validità. Si è visto poi come la Cosmografia risulti essere un approccio per lo studio di distanze di luminosità grazie all'utilizzo della *serie cosmografica* (CS) indipendentemente dal Modello Λ CDM.

Infine si sono discussi gli intervalli di *Redshift* entro cui la serie di Taylor è ottimale per parametrizzare la distanza di luminosità e quelle distanze per le quali devono essere utilizzate serie alternative come la serie di Padé. In conclusione, si sono analizzati a livello grafico alcuni casi in cui si sono variati i valori del *parametro di decelerazione* q_0 e del *parametro di jerk* j_0 sia considerando l'intervallo di *Redshift* di validità per la serie di Taylor sia aumentando tale range per discutere quali ordini della serie di Padé approssimino l'andamento del Modello Λ CDM.

Appendice A

In questa Appendice sono riportati i valori utilizzati per i grafici, la serie di Taylor e le serie di Padé utilizzate nel Paragrafo 3.3 in termini della *serie cosmografica (CS)*.

$$H_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

$$\Omega_M = 0.3 \text{ (frazione di materia, sia ordinaria (7\%) sia oscura (23\%))}$$

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$$

$$T_4 = \frac{zc}{24H_0} [z^3(5j_0(2q_0 + 1) - q_0(3q_0 + 2)(5q_0 + 1) + s_0 + 2 - 4z^2(j_0 - q_0(3q_0 + 1) + 1) - 12(q_0 - 1)z + 24]$$

$$P_{11} = \left(\frac{c}{H_0}\right) [2z(2 + (q_0 - 1)z)^{-1}]$$

$$P_{12} = \left(\frac{c}{H_0}\right) \left[12z \left(12 + 6(q_0 - 1)z + (5 + 2j_0 - q_0(8 + 3q_0))\right)^{-1}\right]$$

$$P_{21} = \left(\frac{c}{H_0}\right) \left[(z(6(q_0 - 1) + z(-5 - 2j_0 + q_0(8 + 3q_0))(-2(3 + z + j_0z) + 2q_0(3 + z + 3zq_0)))^{-1} \right]$$

$$P_{22} = \left(\frac{c}{H_0}\right) \left[(6z(10 + 9z - 6q_0 + q_0^2z + s_0z - 2q_0^2(3 + 7z) - q_0(16 + 19z) + j_0(4 + (9 + 6q_0)z))(60 + 24z + 6s_0z - 2z^2 + 4j_0^2z^2 - 9q_0^4z^2 - 3s_0z^2 + 6q_0^3z(-9 + 4z) + q_0^2(-36 - 114z + 19z^2) + j_0(24 + 6(7 + 8q_0)z + z^2(-7 - 23q_0 + 6q_0^2) + q_0(-96 - 36z + z^2(4 + 3s_0)))^{-1} \right]$$

$$P_{31} = \left(\frac{c}{H_0}\right) [z((24(1 + j_0 - q_0(1 + 3q_0)) + 6(4 + j_0(7 + 8q_0) - q_0(6 + q_0(19 + 9q_0)) + s_0)z + 2 - 4j_0^2 + j_0(7 + (23 - 6q_0)q_0) + q_0(-4 + q_0(-19 + 3q_0(-8 + 3q_0)) - 3s_0)z^2)(24(1 + j_0 - q_0(1 + 3q_0)) + 6(2 + 5j_0(1 + 2q_0) - q_0(2 + 15q_0(1 + q_0)) + s_0)z)^{-1}]$$

Bibliografia

- [1] Malcom S. Longair, *A Brief History of Cosmology, Measuring and Modeling the Universe: Carnegie Observatories Astrophysics Series Volume 2*, Cambridge (UK), Cambridge University Press, 2004.
- [2] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [4] L. Amendola, *Perturbations in a coupled scalar field cosmology*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 312, Issue 3, 2000, Pages 521-53.
- [5] S.E. Rugh, H. Zinkernagel, *On the physical basic of cosmic time*, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, Volume 40, Issue 1, 2009, Pages 1-19.
- [6] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Volume 15, Issue 3, pp. 168-173, 1929.
- [7] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale con applicazioni all'Astrofisica Relativistica e alla Cosmologia*, Liguori Editore, Napoli, 2005.
- [8] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Department of Astronomy The Ohio State University, 2006.
- [9] S. Weinberg, *Cosmology*, OUP Oxford, 2008.
- [10] L. Merola, *Esperimentazioni di Fisica – Ottica*, Editore Liguori, 2004.
- [11] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, O. Luongo, Phys. Rev. D 90, 043531, 2014.
- [12] S. Capozziello, Ruchika and A.A. Sen, *Model Independent constraints on dark energy evolution from low-redshift observations*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 484, 4484, 13, 2019.
- [13] S. Capozziello, R. D'Agostino and O. Luongo, *Extended gravity cosmography*, Int. J. Mod. Phys. D, 28, 1930016, 2019.

[14] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Editore Liguori, Napoli, 2001.