UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

La Cosmologia quantistica: la ricerca di una legge per le condizioni iniziali dell'Universo

Relatore:
Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:
Giuseppe Meluccio
Matr. $N85001204$

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La Cosmologia quantistica è una branca della Fisica teorica che si pone il problema della nascita dell'Universo e quindi delle condizioni iniziali da cui discende la sua evoluzione. Lo studio viene effettuato applicando i principi della teoria quantistica alla descrizione classica dell'Universo fornita dalla Cosmologia relativistica.

Una teoria cosmologica può essere considerata efficace e autoconsistente se, oltre alla dinamica evolutiva, si descrivono le condizioni iniziali dalle quali avrebbe avuto origine l'Universo osservato. La difficoltà di questo compito, di carattere sperimentale quanto teorico, è dovuta principalmente al fatto che l'Universo – inteso come la totalità delle entità fisiche e dei fenomeni naturali – è un sistema fisico assolutamente speciale: si tratta, innanzitutto, di un sistema *unico*, di cui non è possibile studiare e osservare altre copie; per giunta, esso non può essere sottoposto a esperimenti controllati e riproducibili 'dall'esterno', ma solo a osservazioni 'dall'interno'. In altre parole, il sistema che è oggetto di studio della Cosmologia, ossia l'Universo *nel suo insieme*, è empiricamente inaccessibile. Questa fondamentale limitazione non solo sussiste per principio, ma è anche aggravata dalla problematicità di reperire dati sperimentali di qualsiasi tipo circa l'Universo nel suo complesso – e ciò è dovuto solo in parte ai limiti tecnologici odierni.

La singolarità del sistema studiato in Cosmologia comporta inoltre una variazione del concetto di predizione rispetto a quello comunemente adottato negli altri campi della Fisica: una predizione cosmologica è una conclusione fatta su eventi del passato a partire da osservazioni nel presente o, viceversa, una volta formulate opportune ipotesi sul passato, una conclusione sulle conseguenze che esse avranno nel presente. Una predizione cosmologica, ovviamente, può riguardare anche eventi del futuro, ma tipicamente in tal caso presenta il grande inconveniente di non poter essere verificata con test osservazionali su adeguate scale temporali. Per quanto detto, si può affermare che a livello metodologico la Cosmologia è l'opposto della Termodinamica: mentre in Termodinamica si inferiscono le proprietà di un dato sistema fisico ignorando volutamente i dettagli microscopici della sua composizione, in Cosmologia si studiano i 'dettagli' di oggetti macroscopici, quali le galassie, per dedurre le caratteristiche di un sistema ignoto nella sua totalità.

Oltre a ciò, non potendo essere oggetto di misure esterne da parte di un apparato di misura classico, il sistema Universo presenta una difficoltà intrinseca anche se studiato mediante la Meccanica quantistica, in quanto l'interpretazione standard della teoria attribuisce un ruolo speciale all'osservazione del sistema e all'osservatore che compie misure su di esso. Ma perché è possibile adottare il formalismo e i concetti della Meccanica quantistica nello studio del sistema *grande* per definizione? e perché mai farlo, in ogni caso? La risposta è fornita dal Modello standard della Cosmologia, secondo cui l'Universo si è espanso partendo da uno stato di dimensioni straordinariamente piccole e condizioni fisiche estreme. D'altronde, la teoria quantistica è di primaria importanza nelle dinamiche microscopiche di particelle, atomi, molecole, solidi, stelle di neutroni, buchi neri ecc. e non c'è motivo per aspettarsi che questa rilevanza debba cessare a una certa scala: se i regimi sono sufficientemente 'microscopici' ed energetici, gli effetti quantistici possono essere significativi anche su scale cosmologiche. Questo è vero almeno una volta nella storia dell'Universo: nei primi istanti del Big Bang, in cui la Relatività generale prevede una singolarità. Inoltre, sebbene con lo scenario dell'Universo inflazionario si riescano a dirimere alcune delle criticità del modello del Big Bang, la quantità di inflazione, i dettagli delle fluttuazioni di densità generate e, soprattutto, l'occorrenza stessa dell'inflazione risultano essere fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali dell'Universo. A differenza dell'accezione ordinaria con cui vengono intese le condizioni al contorno, ossia come quelle condizioni circostanziali che permettono di prevedere lo svolgersi di un evento ogni volta che esso può essere osservato e descritto mediante appropriate equazioni differenziali, quella delle condizioni iniziali per l'evoluzione dell'Universo può essere considerata una vera e propria legge fondamentale della natura per via dell'unicità di questo sistema fisico, che non si può osservare né riprodurre. Mentre in Meccanica quantistica le condizioni iniziali vengono determinate dalla preparazione esterna del sistema fisico, nel caso della Cosmologia quantistica non esiste nulla di esterno all'Universo, sicché le condizioni iniziali cosmologiche vanno postulate, in qualche modo, come una legge fisica indipendente; peraltro, dalle condizioni iniziali dell'Universo discendono, in un certo senso, alcune delle stesse leggi fisiche, se non altro quelle fenomenologiche ricavate osservando l'Universo così come si presenta ai giorni nostri – ebbene, come ormai è prassi nella Fisica moderna, una legge fondamentale della natura va formulata nel dominio quantistico.

In termini quantomeccanici, il sistema Universo va caratterizzato con un vettore di stato che comprenda tutte le informazioni utili a conoscere il sistema: da ciò nasce l'idea della *funzione d'onda dell'Universo*. In linea di principio, questa funzione d'onda dovrebbe contenere le risposte a tutte le domande che si possono porre sull'Universo, sennonché le condizioni necessarie a specificarla e la procedura con cui trarre informazioni da essa non sono ancora capite appieno. Gli obiettivi principali del programma della Cosmologia quantistica sono allora due: la descrizione del corretto vettore di stato dell'Universo e la comprensione delle condizioni iniziali del sistema, che hanno consentito di 'selezionare' tale stato tra tutti quelli in teoria possibili; si può quindi interpretare la funzione d'onda dell'Universo come un'ampiezza di probabilità da cui ricavare predizioni sul risultato di osservazioni fatte a grande scala. Per poter determinare tale ampiezza di probabilità, occorre in primis disporre di una teoria della Dinamica, che in questo caso è la Relatività generale. Si procede poi a ricavare un'equazione che sia l'analogo di quella di Schrödinger, nota come equazione di Wheeler-DeWitt: questa equazione deve essere soddisfatta dalla funzione d'onda dell'Universo. L'equazione di Wheeler-DeWitt avrà in generale tante soluzioni, per cui, al fine di avere potere predittivo, è necessario imporre delle condizioni al contorno atte a selezionare un'unica soluzione; il principio guida seguito per individuare il vettore di stato dell'Universo è quello utilizzato di norma in Cosmologia, ossia un vettore di stato può essere considerato corretto solo se è in grado di predire le caratteristiche dell'Universo attualmente osservate. A tal proposito è d'uopo stabilire una regola per interpretare la funzione d'onda dell'Universo: si propone di interpretare un picco della funzione d'onda come una predizione relativa a determinate proprietà delle osservabili del sistema e la mancanza di un picco della funzione d'onda come una predizione relativa all'assenza di certe altre proprietà. Lo scopo della Cosmologia quantistica è dunque quello di descrivere un percorso che parta da una teoria quantistica delle condizioni iniziali cosmologiche e giunga a un universo classico avente il potenziale di evolvere in uno simile a quello in cui viviamo.

L'idea più notevole della Cosmologia quantistica è forse quella secondo cui l'Universo si sarebbe originato *ex nihilo* attraverso un processo di tunnel quantistico – evento che, tra l'altro, potrebbe risolvere il problema della singolarità iniziale nel modello del Big Bang. Tramite l'approssimazione WKB è possibile, in particolare, calcolare la probabilità che si verifichi siffatta nascita spontanea dell'Universo.

Infine, il principio di indeterminazione insito nel formalismo della Meccanica quantistica si riflette in Cosmologia quantistica nella concezione radicale di uno spaziotempo di natura quantomeccanica, cioè soggetto a fluttuazioni quantistiche e quindi non continuo e ben definito come in Fisica classica: a scale piccolissime di distanze e tempi, lo spaziotempo va pensato come vago, 'schiumoso'. Anche lo spaziotempo, proprio come la traiettoria, è quindi un concetto approssimato che risulta valido nelle teorie quantistiche solo nel limite classico. La predizione più importante che una teoria quantistica della Cosmologia deve essere capace di fare, pertanto, è l'emergenza dello spaziotempo classico, in quanto l'Universo osservato è governato, con grande accuratezza, da leggi classiche: tale fenomeno dipende dalle condizioni al contorno scelte per la funzione d'onda dell'Universo e avviene soltanto in determinate circostanze.

Capitolo 2

Il Modello standard della Cosmologia

2.1 La necessità di una teoria quantistica della cosmogenesi

La Cosmologia fisica è basata sui concetti della teoria della Relatività generale, del principio cosmologico, della teoria del Big Bang, della radiazione cosmica di fondo. Ad oggi il cosiddetto *Modello Lambda-CDM* viene considerato il Modello standard della Cosmologia; si tratta di una parametrizzazione della Cosmologia relativistica del Big Bang che, impiegando il paradigma inflazionario per l'espansione cosmica, assume che l'Universo contenga tre tipi di materia-energia:

1. la materia ordinaria, descritta dal Modello standard delle particelle;
2. la materia oscura fredda;
3. l'energia oscura, associata alla costante cosmologica Λ.

Il Modello Lambda-CDM riesce a fornire una buona spiegazione di alcune proprietà importanti dell'Universo, quali l'esistenza della radiazione cosmica di fondo, la struttura a grande scala nella distribuzione delle galassie e l'abbondanza osservata degli elementi chimici.

Il principio cosmologico, secondo cui l'Universo è omogeneo e isotropo su scale sufficientemente grandi (figura 2.1), riveste un ruolo cruciale nella Cosmologia relativistica: esso risulta essere valido su scale dell'ordine di grandezza di almeno 10^8 anni luce [4] e viene implementato formalmente mediante la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker; da questa discendono le equazioni di Friedmann, con cui si determina l'evoluzione di un universo omogeneo e isotropo

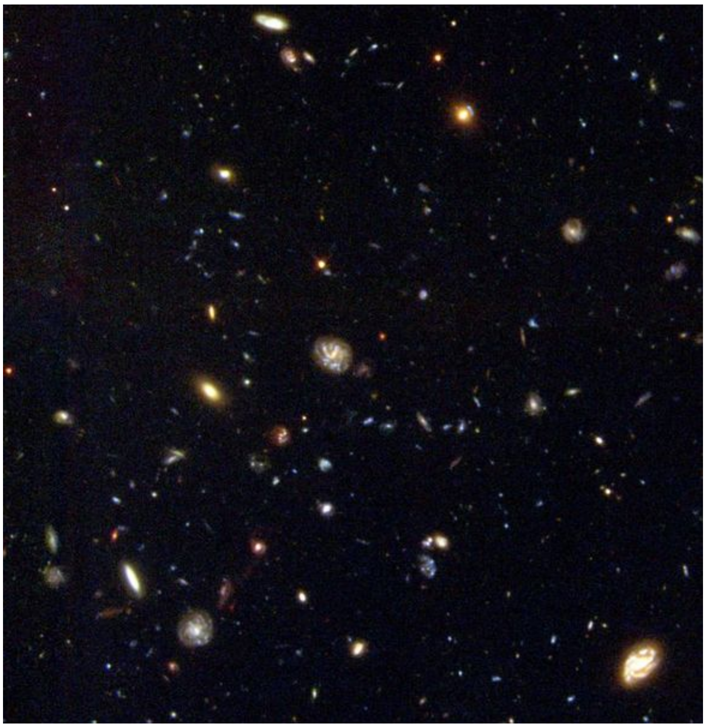

Figura 2.1 Immagine dell'Hubble Deep Field South, in cui risalta l'omogeneità a grande scala dell'Universo.

attraverso il formalismo della Relatività generale. Tutto ciò consente di formulare la teoria del Big Bang, che descrive l'espansione dell'Universo a partire da uno stato iniziale caratterizzato da valori estremamente alti di temperatura, densità e curvatura. La teoria del Big Bang riesce a riprodurre alcune caratteristiche dell'Universo osservato, ma non spiega un certo numero di proprietà importanti, quali la sua piattezza e l'origine delle fluttuazioni di densità necessarie per la formazione delle strutture a grande scala. Questi problemi possono essere risolti facendo ricorso allo scenario dell'Universo inflazionario, che adotta campi di materia quantizzati in un contesto classico di gravitazione per delineare una fase di espansione cosmica estremamente rapida, avviata una frazione minuscola di secondo dopo la singolarità del Big Bang e necessaria per capire come abbia fatto l'Universo a raggiungere le dimensioni attuali; ad esempio, è possibile ottenere un corretto spettro delle fluttuazioni di densità assumendo che i campi di materia comincino in un particolare stato quantistico.

Seppure al momento non esistano apparentemente osservazioni per cui è tassativo ricercare una spiegazione di Cosmologia quantistica, va anche detto che i modelli del Big Bang e dell'Inflazione non forniscono una descrizione completa della storia dell'Universo: la questione delle condizioni iniziali – e quindi della nascita dell'Universo – viene sostanzialmente ignorata. In merito, risultano limpide le parole di Peebles:

> L'essenza della teoria del Big Bang sta nel fatto che l'Universo si sta espandendo e raffreddando. Si noti che non ho detto nulla a proposito di un'"esplosione" – la teoria del Big Bang descrive come il nostro Universo si evolve, non come ha avuto inizio.

La teoria del Big Bang non spiega, nello specifico, ciò che è avvenuto nell'era di Planck, ossia nei primi $\sim 10^{-43}$ s di vita dell'Universo, intervallo di tempo noto come tempo di Planck t_{P} e definito come $t_{\mathrm{P}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ (nel SI);[1] inoltre, risulta inaccettabile la previsione di una singolarità matematica associata alle grandezze fisiche nell'istante iniziale in cui si genera lo spaziotempo.[2] Ripercorrendo indietro nel tempo l'evoluzione dell'Universo, infatti, si ha che la densità della materia e la curvatura dello spaziotempo diventano dell'ordine di grandezza della scala di Planck, che è caratterizzata dalla lunghezza di Planck $l_{\mathrm{P}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35}$ m e dalla massa di Planck $m_{\mathrm{P}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{-8}$ kg (nel SI). A questa scala ci si aspetta che gli effetti di Gravità quantistica diventino importanti e, poiché la gravità è la forza dominante su scale cosmologiche, la Cosmologia quantistica va fondata su una teoria quantistica della gravità; al momento, tuttavia, non si riscontra un consenso sulla struttura e sui principi di una teoria di Gravità quantistica.[3] L'auspicio è quindi che una teoria quantistica della gravità riesca a inglobare la Relatività generale e a risolvere i problemi insiti nel modello del Big Bang, proprio come è stata una teoria quantistica, nel secolo scorso, a 'salvare' i modelli atomici dalle singolarità dell'Elettrodinamica classica. La Cosmologia quantistica, in cui sia i campi di materia sia il campo gravitazionale sono quantizzati, risulta essere pertanto l'ambiente naturale in cui affrontare il problema delle condizioni iniziali dell'Universo. A dire il vero, comunque, lo sviluppo della Cosmologia quantistica non è motivato soltanto da una questione di completezza, ma mira anche a delucidare alcune proprietà che il modello cosmologico standard non riesce a giustificare, come la causa della fase inflazionaria oppure dell'omogeneità e dell'isotropia dell'Universo osservato – peculiarità che, in effetti, non sono affatto banali o 'tipiche'. Quello delle condizioni al contorno cosmologiche è

[1] Salvo dove esplicitamente indicato, nel testo verranno utilizzate le unità naturali: $c = \hbar = 1$.

[2] Per giunta, alcuni modelli che impiegano l'energia oscura per spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'Universo prevedono delle singolarità anche nel *futuro* [3].

[3] Al riguardo, si possono distinguere due approcci principali: la quantizzazione diretta della teoria della Relatività generale e la Teoria delle stringhe; mentre la prima si propone di costruire una descrizione quantistica consistente del campo gravitazionale, la seconda ha l'ambizione di unificare tutte le interazioni fondamentali in un'unica teoria quantistica.

dunque un problema tutt'altro che marginale: mentre è certamente vero che, come risultato dell'inflazione, l'Universo osservato sarebbe potuto sorgere da una classe di condizioni iniziali molto più ampia di quella del modello del Big Bang, è certamente falso pensare che *qualsiasi* stato iniziale possa andar bene – si potrebbe scegliere infatti uno stato quantistico iniziale per la materia che non conduce al corretto spettro delle fluttuazioni di densità e, ancor più, si potrebbero scegliere delle condizioni iniziali per cui l'inflazione stessa non avviene proprio.

L'Universo in cui viviamo è governato da leggi che sono fondamentalmente di natura quantistica. In accordo con il principio di corrispondenza, le leggi della Fisica classica che si osservano ordinariamente sono ottenute da quelle della Meccanica quantistica nel limite di $h \to 0$, dove h è la costante di Planck. Per una particella ciò si traduce nel fatto che la lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = h/p$ (dove p è la quantità di moto della particella) è piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema fisico in cui essa si trova: se la scala delle lunghezze del sistema fisico è molto più grande di quella della lunghezza d'onda della particella, le leggi classiche sono sufficienti per descriverne accuratamente lo stato, in quanto gli effetti quantomeccanici sono trascurabili; diversamente, le leggi classiche risultano inadeguate e si manifestano fenomeni di carattere prettamente quantistico. Nel modello cosmologico del Big Bang, il sistema Universo è inizialmente di dimensioni enormemente piccole,[4] per cui per un breve ma importante periodo l'approssimazione delle teorie classiche non può essere applicata al sistema fisico e gli effetti quantistici predominano. Sono proprio le leggi classiche, d'altra parte, che prevedono la singolarità del Big Bang e che quindi perdono di potere predittivo in riferimento ai primi istanti di vita dell'Universo: la teoria della Cosmologia quantistica propone dunque che la cosmogenesi, ovvero l'origine dell'Universo, sia dovuta a processi di natura quantistica.

2.2 La Cosmologia relativistica

La teoria della Relatività generale è l'impalcatura formale e concettuale in cui è inquadrata la Cosmologia moderna: l'Universo viene descritto come una varietà quadridimensionale chiamata *spaziotempo* (con tre dimensioni spaziali e una temporale), la cui geometria è determinata dalla distribuzione di materia ed energia secondo le equazioni di campo di Einstein.

La geometria dello spaziotempo è descritta dall'elemento di linea ds, che corrisponde alla separazione tra due punti dello spaziotempo, detti anche eventi, che si trovano a una distanza infinitesima. Lo spaziotempo piatto della Relatività ristretta, che a rigore esiste solo in assenza di materia ed energia, è descritto

[4] Secondo alcuni modelli [1], all'epoca di Planck l'Universo sarebbe stato di ben quaranta ordini di grandezza più piccolo di un protone.

dall'elemento di linea della seguente relazione:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.1}$$

che in coordinate sferiche diventa:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\big) \tag{2.2}$$

In presenza di materia, la geometria piatta dello spaziotempo viene distorta – "la materia dice allo spaziotempo come incurvarsi" – e l'elemento di linea diventa più complicato; nella forma più generale, si ha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{2.3}$$

dove è stata usata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti e $g_{\mu\nu}(x)$ è un tensore simmetrico di rango due detto *metrica*, le cui dieci componenti indipendenti sono funzioni delle quattro coordinate dello spaziotempo. La metrica e, quindi, la curvatura vengono determinate risolvendo le equazioni di Einstein – dieci equazioni alle derivate parziali accoppiate e non lineari – che mettono in relazione la geometria dello spaziotempo alla massa-energia:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ descrive la geometria dello spaziotempo ed è funzione della metrica e delle sue prime due derivate spaziotemporali; il termine di sorgente $T_{\mu\nu}$ è detto tensore energia-impulso e rappresenta la distribuzione di materia ed energia. Le equazioni di campo di Einstein sono le equazioni dinamiche della Cosmologia, ovverosia le equazioni del moto per la geometria dell'Universo.

Il più semplice elemento di linea che implementa il principio cosmologico è quello di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\big)\right] \tag{2.5}$$

Questa metrica descrive un universo omogeneo e isotropo nel senso che da uno qualsiasi dei suoi punti e osservando lungo una qualunque direzione si ottiene sempre una descrizione equivalente dello spaziotempo. Confrontando la (2.5) con la (2.2) si notano solo due differenze: la parte della metrica contenente i quadrati delle differenze delle coordinate spaziali è moltiplicata per il quadrato del *fattore di scala* $a(t)$ e il denominatore del termine dr^2 è diverso dall'unità. Il fattore di scala è una misura delle dimensioni dell'Universo, è una funzione soltanto del tempo ed è l'unica funzione non determinata che compare nella (2.5). La curvatura

Figura 2.2 Rappresentazione delle coordinate comoventi nel corso dell'espansione di un universo FLRW: le galassie sono fisse nelle proprie posizioni, ma la distanza propria tra di esse aumenta.

dell'Universo è stabilita invece dal valore del *parametro di curvatura* k, che può assumere tre valori distinti: un universo FLRW ha curvatura negativa, nulla (piatta) o positiva rispettivamente per $k = -1$, $k = 0$ e $k = +1$. Il valore del parametro di curvatura non è noto con certezza e va dedotto dalle osservazioni astronomiche. Le coordinate r, θ e ϕ sono dette comoventi, in quanto 'seguono' l'evoluzione dello spaziotempo: all'aumentare del fattore di scala, l'Universo si espande e la distanza propria Δs^2 tra due punti spaziotemporali cresce, mentre le coordinate di tali eventi non cambiano; in pratica, in un universo FLRW le galassie lontane hanno coordinate fisse e si allontanano da noi non perché si muovono 'all'interno' dello spaziotempo (moto proprio o peculiare), bensì perché lo spaziotempo stesso si espande e 'trascina' con sé le galassie, in un moto detto anche flusso di Hubble (figura 2.2). La legge di Hubble afferma che, vista da una particolare galassia, qualsiasi altra galassia appare in allontanamento con una velocità proporzionale alla sua distanza:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.6}$$

dove a è la distanza propria, $\dot{a}$ è la velocità di recessione e H, il parametro di Hubble, è una funzione del tempo il cui valore attuale H_0 è detto costante di Hubble. La velocità di recessione delle galassie viene stimata in base al *redshift* della radiazione che esse emettono.

Con le coordinate FLRW si realizza un *fogliettamento* dello spaziotempo quadridimensionale: fissata una topologia $\mathbb{R} \times \mathbb{M}^3$ dello spaziotempo, in ogni istante di tempo in $\mathbb{R}$ esiste un'ipersuperficie tridimensionale del genere spazio di topologia $\mathbb{M}^3$ e al variare del parametro costituito dalla variabile temporale si ha una famiglia di ipersuperfici del genere spazio, tutte omogenee e isotrope; questo insieme di ipersuperfici forma lo spaziotempo. L'analogo bidimensionale

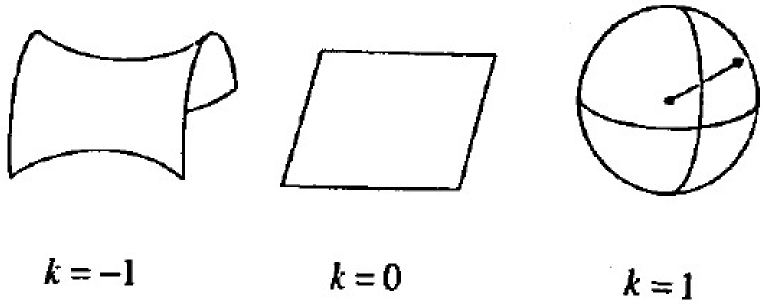

Figura 2.3 Analoghi bidimensionali di universi FLRW. Soltanto le superfici bidimensionali hanno significato, mentre la terza dimensione in cui sono immerse non ha un'esistenza fisica ed è adoperata puramente per scopi illustrativi.

dei tre tipi possibili di universi FLRW è mostrato in figura 2.3.[5] In un particolare istante di tempo (una singola 'foglia' del fogliettamento), la geometria spaziale può essere aperta e infinita, come nel caso della superficie a sella ($k = -1$) e della superficie piatta ($k = 0$), oppure chiusa e finita, come nel caso della superficie sferica ($k = +1$); il raggio della superficie sferica è il fattore di scala $a(t)$: al crescere nel tempo del fattore di scala, l'universo (bidimensionale) si 'gonfia' come un palloncino. È errato, inoltre, pensare che esista un "centro dell'Universo", ove sarebbe avvenuto il Big Bang e da cui le galassie si starebbero allontanando: l'espansione cosmica avviene infatti *ovunque* nello spaziotempo.

2.3 L'evoluzione classica dell'Universo

Il requisito di metrica omogenea e isotropa impone che la dinamica di un universo FLRW sia determinata da un tensore energia-impulso avente la forma di un fluido perfetto:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu} \tag{2.7}$$

per cui la materia viene caratterizzata da due funzioni, la densità di massa-energia $\rho(a)$ e la pressione $p(a)$ (u^{μ} è la quadrivelocità del fluido); in particolare, in un sistema di riferimento inerziale comovente con il fluido, il tensore energia-impulso diventa:

$$T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p) \tag{2.8}$$

[5]Anche se impossibili da visualizzare, le geometrie tridimensionali che descrivono l'Universo si comportano esattamente allo stesso modo delle corrispondenti rappresentazioni bidimensionali.

In questo caso, le equazioni di Einstein indipendenti sono due e vengono dette equazioni di Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 - k \tag{2.9}$$

e:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a \tag{2.10}$$

Derivando la (2.9) rispetto al tempo e sostituendo nella (2.10), si ottiene l'equazione di continuità:

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3}{a}(\rho + p) \tag{2.11}$$

Tipicamente le equazioni (2.9) e (2.11) vengono assunte come le equazioni dinamiche della teoria del Big Bang. Per determinare le tre funzioni non note $a(t)$, $\rho(a)$ e $p(a)$ c'è bisogno di una terza equazione, l'equazione di stato della materia:

$$p = p(\rho) \tag{2.12}$$

Una particolare importanza è rivestita da due configurazioni della materia, ossia il fluido di radiazione elettromagnetica e la polvere incoerente; le loro equazioni di stato possono essere scritte in modo conciso come segue:

$$p(\rho) = \frac{\gamma}{3}\rho, \quad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{radiazione} \\ 0 & \text{polvere} \end{cases} \tag{2.13}$$

Sostituendo l'equazione di stato (2.13) nell'equazione di continuità (2.11), si ottiene il comportamento della densità di massa-energia in un universo FLRW:

$$\rho(a) = \rho(a_i)\left(\frac{a_i}{a}\right)^{\gamma+3} \tag{2.14}$$

dove a_i è il valore del fattore di scala a un arbitrario tempo di riferimento. Inserendo le equazioni (2.13) e (2.14) nelle equazioni di Einstein (2.9) e (2.10), si ottiene:

$$\dot{a}^2 = \frac{\text{cost.}}{a^{\gamma+1}} - k \tag{2.15}$$

e:

$$\ddot{a} = -\frac{\text{cost.}}{a^{\gamma+2}} \tag{2.16}$$

L'evoluzione di un universo FLRW può essere determinata dall'analisi delle equazioni (2.15) e (2.16). Innanzitutto, l'equazione (2.16) implica la decelerazione dell'espansione cosmica, per qualunque valore di k. Per un universo a curvatura negativa ($k = -1$), il secondo membro dell'equazione (2.15) non si annulla mai, ovvero $\dot{a}^2$ è sempre positivo, per cui – sapendo che adesso è $\dot{a} > 0$ – si conclude

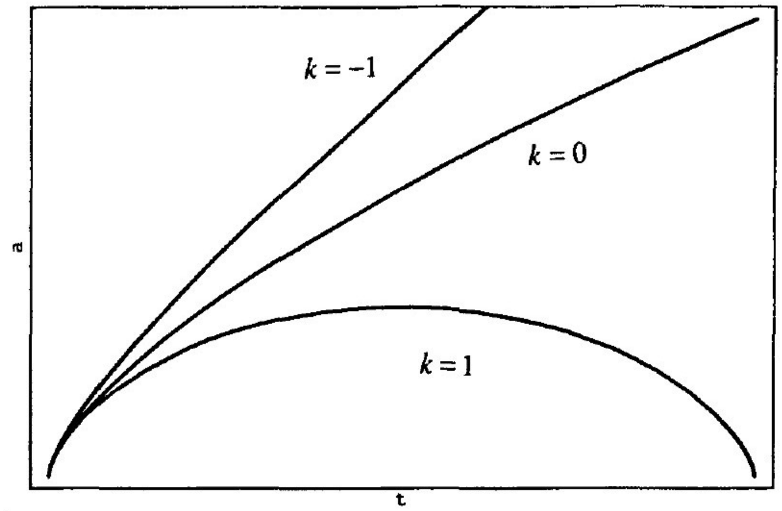

Figura 2.4 La dipendenza temporale del fattore di scala $a(t)$ in un universo FLRW.

che l'universo si espande per sempre. In un universo piatto ($k = 0$), $\dot{a}^2$ si annulla solo nel limite di $a \to \infty$, quindi similmente l'universo si espande per sempre. Nel caso di un universo chiuso ($k = +1$), invece, l'espansione avviene fino al momento in cui si ha $\dot{a} = 0$, istante in cui l'universo inizia a collassare per via del valore negativo di $\ddot{a}$. Il comportamento del fattore di scala nei tre casi è mostrato nel grafico 2.4.

Capitolo 3

L'approssimazione WKB

3.1 L'effetto tunnel quantistico

Tra i fenomeni più interessanti e particolari della Meccanica quantistica vi è l'effetto tunnel: in termini generali, si tratta dell'assegnare una probabilità non nulla a uno stato che si trova in una configurazione classicamente proibita – l'effetto tunnel è quindi una peculiarità del mondo quantistico; per illustrarlo, si consideri l'esempio di una barriera di potenziale unidimensionale a 'gradino'.

In Meccanica classica, l'evoluzione del sistema è determinata dalla soluzione, soggetta ad adeguate condizioni iniziali, delle equazioni del moto, ossia un insieme di equazioni differenziali del secondo ordine (o di coppie di equazioni differenziali del primo ordine) per ogni grado di libertà del sistema. Tali equazioni possiedono un integrale primo, l'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \tag{3.1}$$

che è una costante del moto. La soluzione di questa equazione differenziale del primo ordine può essere ottenuta immediatamente integrando:

$$t(x) - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} \tag{3.2}$$

dove i limiti fisici del moto, cioè i valori ammissibili per x, sono definiti dagli estremi del moto, in cui l'energia potenziale uguaglia l'energia totale, $V(x) = E$, e l'energia cinetica si annulla, $T = 0$. Per una particella con energia totale $E < V_0$ incidente da sinistra su una barriera rettangolare di potenziale alta V_0 (figura 3.1), l'estremo del moto è rappresentato proprio dall'inizio della barriera di potenziale, da cui la particella viene respinta, tornando così indietro. La barriera di potenziale

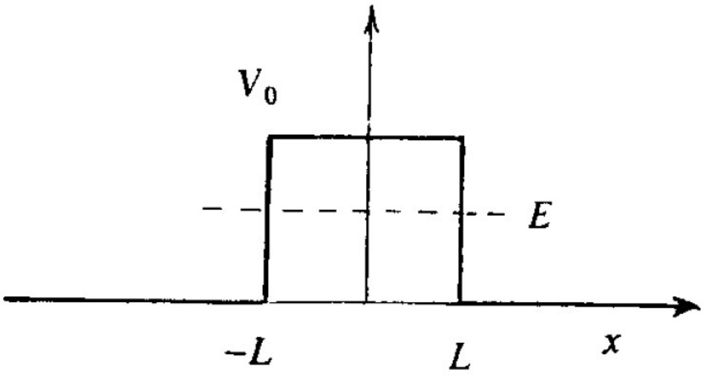

Figura 3.1 Una barriera di potenziale rettangolare unidimensionale, di ampiezza $2L$ e altezza $V_0 > E$.

delinea quindi una regione proibita al moto della particella: secondo le leggi classiche è impossibile trovare la particella entro o oltre la barriera.

L'analisi quantomeccanica del sistema restituisce un risultato diverso. La particella è descritta da una funzione d'onda $\psi(x)$ che soddisfa l'equazione di Schrödinger stazionaria:[1]

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\right\}\psi(x) = 0 \tag{3.3a}$$

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases} \tag{3.3b}$$

Nella regione a sinistra della barriera ($x < -L$), la soluzione ψ_{S} rappresenta un'onda piana che approccia la barriera da sinistra (con ampiezza normalizzata all'unità) e un'onda piana che viene riflessa verso sinistra: $\psi_{\mathrm{S}} = e^{ikx} + Re^{-ikx}$; nella regione a destra della barriera ($x > L$) si ha invece soltanto un'onda piana trasmessa: $\psi_{\mathrm{D}} = Te^{ikx}$. In entrambi i casi, il numero d'onda è $k \equiv \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$. Nella regione centrale classicamente proibita ($|x| \leq L$), la funzione d'onda ψ_{C} è costituita invece da esponenziali crescenti e decrescenti: $\psi_{\mathrm{C}} = Ae^{Kx} + Be^{-Kx}$, dove $K \equiv \hbar^{-1}\sqrt{2m(V_0 - E)}$. Poiché la probabilità di trovare la particella tra x e $x + dx$, secondo la regola di Born, è data dal quadrato del valore assoluto della funzione d'onda $|\psi(x)|^2$, la teoria quantistica predice un comportamento differente da quello classico: esiste una probabilità non nulla di trovare la particella dall'altro lato della barriera, come se essa riuscisse ad attraversare la regione proibita attraverso un 'tunnel'. Utilizzando le correnti di probabilità, risulta che

[1] In questo capitolo è conveniente utilizzare le unità del SI.

la probabilità P che si verifichi l'effetto tunnel è pari a $|T|^2$; nel caso di barriera spessa, in cui $KL \gg 1$ e $V_0 \gg E$, applicando le condizioni di continuità in $\pm L$ si ottiene:

$$P = |T|^2 \sim e^{-4KL} \tag{3.4}$$

La probabilità che la particella venga trasmessa al di là della barriera di potenziale è dunque esponenzialmente soppressa.

3.2 Il limite classico della teoria quantistica

In generale, l'equazione di Schrödinger unidimensionale (3.3a) può essere risolta in modo esatto soltanto per alcuni casi particolari del potenziale $V(x)$; per potenziali di forma arbitraria bisogna ricorrere allora a un metodo di approssimazione. Se il potenziale è "lentamente variabile", ad esempio, è possibile applicare l'approssimazione semiclassica o WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), che fornisce una descrizione del sistema quantistico nel limite classico in cui gli effetti prettamente quantomeccanici risultano trascurabili.

Per studiare la condizione di applicabilità dell'approssimazione WKB, si consideri la seguente argomentazione. In Ottica classica, la riflessione dei raggi luminosi al passaggio in un mezzo con indice di rifrazione variabile è trascurabile – e quindi si può assumere che non ci sia riflessione – quando l'indice di rifrazione è lentamente variabile; ciò accade, in particolare, se la lunghezza d'onda cambia di una piccola frazione all'interno di una distanza pari alla lunghezza d'onda stessa. La variazione di lunghezza d'onda $\delta\lambda$ che occorre in un distanza δx è:

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x \tag{3.5}$$

Ponendo $\delta x = \lambda$, si trova che la condizione per l'assenza di riflessioni apprezzabili è:

$$|\delta\lambda| = \left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}\lambda\right| \ll \lambda \Rightarrow \left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right| \ll 1 \tag{3.6}$$

Esattamente la stessa trattazione si applica alle onde di elettroni che incontrano una barriera di potenziale. Dal momento che in questo caso la lunghezza d'onda è quella di De Broglie, $\lambda = \frac{h}{p}$, la condizione per l'assenza dell'onda riflessa è:

$$\left|\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right| = \left|\frac{h}{p^2}\frac{\partial p}{\partial x}\right| \ll 1 \tag{3.7}$$

Sostituendo $p^2 = 2m|E - V|$, risulta:

$$\frac{hm\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|}{(2m|E-V|)^{\frac{3}{2}}} \ll 1 \Rightarrow \frac{\lambda\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|}{2|E-V|} \ll 1 \tag{3.8}$$

In sostanza, i requisiti per l'assenza dell'onda riflessa sono un potenziale che varia lentamente rispetto alla posizione e un'energia cinetica $T = E - V$ non troppo piccola. Pertanto, ogniqualvolta la variazione del potenziale entro una distanza pari alla lunghezza d'onda di De Broglie è piccola rispetto all'energia cinetica, i fenomeni caratteristici della Meccanica quantistica, dovuti alla natura ondulatoria del sistema, non sono apprezzabili e la descrizione semiclassica dell'approssimazione WKB risulta efficace; l'approssimazione WKB non risulta applicabile, in particolare, nelle vicinanze dei punti di inversione del moto classico, punti in cui si ha $p = 0$.

Dalla relazione (3.7) si può osservare che l'applicabilità dei concetti classici richiede che la costante di Planck h sia molto più piccola della quantità $p^2\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|^{-1}$. L'ampio campo di validità della Fisica classica, dunque, non è altro che una conseguenza del fatto che h è molto piccola rispetto agli standard ordinari del mondo in cui viviamo. A titolo esemplificativo, si può immaginare un mondo in cui h assume un valore molto più grande: un mondo del genere potrebbe esibire effetti quantomeccanici anche a scale macroscopiche.

3.3 Espansione asintotica della funzione d'onda

Nel limite classico in cui la condizione (3.7) è soddisfatta, l'approssimazione WKB sfrutta la variazione lenta della lunghezza d'onda per assumere che la funzione d'onda ψ non sia molto diversa rispetto al caso in cui il potenziale $V(x)$ è costante:

$$\psi = \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right), \quad p = \sqrt{2m(E - V_0)} \tag{3.9}$$

Può essere conveniente riscrivere tale funzione d'onda nella forma:

$$\psi = \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \tag{3.10}$$

dove S è una funzione (in generale complessa) di x. Se $V(x)$ è pressoché costante, ci si aspetta che S sia quasi uguale a px, ma per ottenere una stima migliore si può approssimare S come una serie di potenze di $\hbar$:

$$S \equiv S_0(x) + \hbar S_1(x) + \frac{\hbar^2}{2} S_2(x) + \dots \tag{3.11}$$

I primi termini di questa espansione restituiscono una buona approssimazione solo se i rapporti $\frac{\hbar S_1}{S_0}$, $\frac{\hbar}{2}\frac{S_2}{S_1}$ ecc. sono piccoli, in quanto nel caso di un potenziale costante è noto che $S_0 = px$ e S_1, S_2 ecc. sono tutti nulli. In definitiva, poiché l'espansione richiede che $\hbar$ sia piccola, è chiaro che questa approssimazione risulta appropriata solamente nel limite classico.

Si può mostrare [2] che la serie (3.11) non converge, ma è un'espansione asintotica della funzione S. Questo significa che, dato un numero finito di termini, è sempre possibile trovare un valore di $\hbar$ così piccolo che la differenza tra questa somma finita e il vero valore di S è arbitrariamente piccola; tuttavia, aggiungendo più termini alla serie, essa potrebbe iniziare a divergere dal vero valore di S. In generale, dunque, è meglio considerare solo uno o due termini nell'espansione e quindi applicarla in quei casi in cui i restanti termini sono piccoli.

Per calcolare S, si inserisce la funzione d'onda (3.10) nell'equazione di Schrödinger (3.3a):

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 - i\hbar\frac{d^2S}{dx^2}\right] + [V(x)-E]\right\}\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + [V(x)-E] - \frac{i\hbar}{2m}\frac{d^2S}{dx^2} = 0 \quad (3.12)$$

A questo punto si sostituisce l'espansione (3.11) e si raccolgono i termini in base alla potenza di $\hbar$ per cui sono moltiplicati; il risultato (fino al secondo ordine in $\hbar$) è:

$$0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 + [V(x)-E] + \frac{\hbar}{m}\left(\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_1}{dx} - \frac{i}{2}\frac{d^2S_0}{dx^2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_2}{dx} + \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 - i\frac{d^2S_1}{dx^2}\right] \quad (3.13)$$

L'equazione trovata deve essere soddisfatta indipendentemente dal valore di $\hbar$ e pertanto il coefficiente di ogni potenza di $\hbar$ deve annullarsi; ciò conduce al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 + V(x) - E = 0 \quad (3.14a)$$
$$\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_1}{dx} - \frac{i}{2}\frac{d^2S_0}{dx^2} = 0 \quad (3.14b)$$
$$\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_2}{dx} + \left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 - i\frac{d^2S_1}{dx^2} = 0 \quad (3.14c)$$

Queste equazioni possono essere risolte in successione: la prima equazione definisce S_0 in termini di $V(x)-E$, la seconda definisce S_1 in termini di S_0, la terza definisce S_2 in termini di S_1 e S_0 ecc. Le soluzioni della (3.14a) e della (3.14b) sono rispettivamente:

$$S_0 = \pm \int_{x_0}^{x} p(x')\,dx', \quad p(x) \equiv \sqrt{2m[E - V(x)]} \tag{3.15a}$$

$$S_1 = \frac{i}{2} \ln \frac{\partial S_0}{\partial x} + \text{cost.} \tag{3.15b}$$

Poiché S_1 è un logaritmo di $\frac{\partial S_0}{\partial x}$, questo termine non è, in generale, piccolo rispetto a S_0, quindi entrambi S_0 e S_1 vanno conservati; i termini di ordine superiore, invece, sono piccoli se $V(x)$ è una funzione sufficientemente liscia e lentamente variabile. Ciò significa che, nell'approssimazione semiclassica, l'espansione asintotica della funzione d'onda va arrestata al primo ordine in $\hbar$.

Per studiare il caso della penetrazione di una barriera di potenziale, si assuma $V(x) > E$. La soluzione dell'approssimazione WKB all'ordine più basso in $\hbar$ è costituita allora da funzioni esponenziali:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt[4]{2m[E - V(x)]}} \left\{ A \exp\left[\int_{x_0}^{x} \sqrt{2m[V(x') - E]}\, \frac{dx'}{\hbar} \right] + \right.$$
$$\left. B \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \sqrt{2m[V(x') - E]}\, \frac{dx'}{\hbar} \right] \right\} \tag{3.16}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie; questa funzione d'onda è soluzione dell'equazione (3.14a), che rappresenta un'approssimazione valida della (3.12) solo se è soddisfatta la condizione:

$$\hbar \left| \frac{d^2 S}{(dS)^2} \right| \ll 1 \tag{3.17}$$

In prima approssimazione, in base alla (3.15a), tale condizione può essere riscritta come:

$$\hbar \left| \frac{d^2 S/dx^2}{(dS/dx)^2} \right| \approx \hbar \left| \frac{dp/dx}{p^2} \right| = \left| \frac{d\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)}{dx} \right| \ll 1 \tag{3.18}$$

a conferma del risultato (3.7) sull'applicabilità dell'approssimazione semiclassica, ottenuto in precedenza in modo euristico. Per conformità con la notazione adottata all'inizio di questo capitolo, infine, la (3.16) può essere espressa come segue:

$$\psi \propto \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left[\pm i \int_{x_0}^{x} k(x')\,dx' \right], \quad k \equiv \hbar^{-1} \sqrt{2m[E - V(x)]} \tag{3.19}$$

Questa trattazione mostra che, chiaramente, il fenomeno della penetrazione di una barriera non vale soltanto nel caso di un potenziale rettangolare, bensì può occorrere con potenziali di qualsiasi forma.

3.4 Formule di connessione e probabilità di penetrazione di una barriera di potenziale

Per trattare il problema della penetrazione di una barriera in cui sia valida l'approssimazione WKB, bisogna determinare come connettere le soluzioni nella regione dove $V(x) > E$ con quelle nelle regioni in cui $E > V(x)$. In generale, è questo un calcolo assai difficile da svolgere, che tipicamente può essere effettuato solamente mediante metodi numerici. Una situazione che consente di ottenere un risultato analitico è quella in cui il potenziale, in un intorno del punto x_0 di inversione del moto classico, è ivi approssimabile come una linea retta, con una pendenza pari a quella che la curva di potenziale ha in x_0.

Sia $p_1 \equiv \sqrt{2m[V(x)-E]}$ e $p_2 \equiv \sqrt{2m[E-V(x)]}$. Nel caso in cui la barriera di potenziale è alla destra di $x = x_0$, le formule di connessione per una funzione d'onda esponenziale decrescente sono:

$$\frac{2}{\sqrt{p_2}}\cos\left(\int_x^{x_0} p_2\,\frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{p_1}}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1\,\frac{dx'}{\hbar}\right) \tag{3.20}$$

e le formule di connessione per una funzione d'onda esponenziale crescente sono:

$$\frac{1}{\sqrt{p_2}}\sin\left(\int_x^{x_0} p_2\,\frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) \rightleftarrows -\frac{1}{\sqrt{p_1}}\exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1\,\frac{dx'}{\hbar}\right) \tag{3.21}$$

Analogamente, nel caso in cui la barriera di potenziale è alla sinistra di $x = x_0$, le formule di connessione per una funzione d'onda esponenziale decrescente sono:

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}}\exp\left(-\int_x^{x_0} p_1\,\frac{dx'}{\hbar}\right) \rightleftarrows \frac{2}{\sqrt{p_2}}\cos\left(\int_{x_0}^{x} p_2\,\frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.22}$$

e le formule di connessione per una funzione d'onda esponenziale crescente sono:

$$-\frac{1}{\sqrt{p_1}}\exp\left(\int_x^{x_0} p_1\,\frac{dx'}{\hbar}\right) \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{p_2}}\sin\left(\int_{x_0}^{x} p_2\,\frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.23}$$

Affinché l'approssimazione WKB possa essere applicata al problema della penetrazione di una barriera, è necessario che il potenziale non cambi troppo rapidamente; inoltre, con riferimento alla figura 3.2, affinché possano essere applicate le formule di connessione è necessario che la barriera sia sufficientemente spessa e alta, cosicché si abbia $\int_b^a p_1 \frac{dx}{\hbar} \gg 1$. Se queste condizioni sono soddisfatte, si possono utilizzare le formule di connessione per calcolare la probabilità di penetrazione della barriera. Supponendo di avere un'onda incidente da sinistra (regione I), in parte essa verrà riflessa e in parte verrà trasmessa a destra della barriera

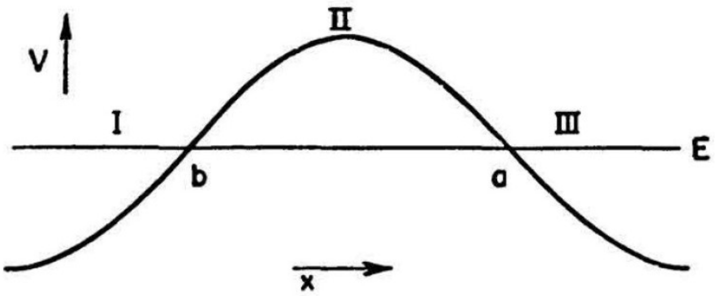

Figura 3.2 Barriera di potenziale di forma generica. Il potenziale $V(x)$ varia lentamente rispetto alla coordinata x e l'energia E individua i punti a e b di inversione del moto classico.

(regione III); nella regione III, pertanto, ci sarà solo l'onda trasmessa, che in base alla soluzione (3.19) dell'approssimazione WKB è esprimibile come:

$$\psi_{\mathrm{III}} \approx \frac{A}{\sqrt{p_2}} \exp\left(i \int_a^x p_2 \frac{dx'}{\hbar} - i\frac{\pi}{4}\right) \tag{3.24}$$

dove il fattore $-\pi/4$ viene incluso per convenienza nell'applicare le formule di connessione.[2] Conviene poi porre suddetta funzione d'onda nella forma:

$$\psi_{\mathrm{III}} \approx \frac{A}{\sqrt{p_2}}\left[\cos\left(\int_a^x p_2 \frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\int_a^x p_2 \frac{dx'}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3.25}$$

e quindi applicare le formule di connessione (3.22) e (3.23), in quanto la barriera di potenziale si trova sulla sinistra:

$$\psi_{\mathrm{II}} \approx \frac{A}{\sqrt{p_1}}\left[\frac{1}{2}\exp\left(-\int_x^a p_1 \frac{dx'}{\hbar}\right) - i\exp\left(\int_x^a p_1 \frac{dx'}{\hbar}\right)\right] \tag{3.26}$$

Il passo successivo è quello di applicare le formule di connessione per trovare la funzione d'onda nella regione I, in cui la barriera si trova sulla destra; conviene pertanto prima porre ψ_{II} in una forma conveniente per questo caso:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{II}} \approx \frac{A}{\sqrt{p_1}}\bigg[\frac{1}{2}\exp&\left(-\int_b^a p_1 \frac{dx}{\hbar} + \int_b^x p_1 \frac{dx'}{\hbar}\right) \\ &- i\exp\left(\int_b^a p_1 \frac{dx}{\hbar} - \int_b^x p_1 \frac{dx'}{\hbar}\right)\bigg]\end{aligned} \tag{3.27}$$

[2]Poiché A è una costante complessa, il fattore di fase potrebbe essere inglobato in A.

e quindi applicare le formule di connessione (3.20) e (3.21):

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{I}} \approx -\frac{A}{\sqrt{p_2}}\bigg[\frac{1}{2}\exp\bigg(-\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg)\sin\bigg(\int_x^b p_2\,\frac{dx'}{\hbar}-\frac{\pi}{4}\bigg) \\
+ 2i\exp\bigg(\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg)\cos\bigg(\int_x^b p_2\,\frac{dx'}{\hbar}-\frac{\pi}{4}\bigg)\bigg] \\
= -\frac{iA}{\sqrt{p_2}}\bigg\{\exp\bigg[-i\bigg(\int_b^x p_2\,\frac{dx'}{\hbar}+\frac{\pi}{4}\bigg)\bigg]\bigg[\exp\bigg(\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg) \\
-\frac{1}{4}\exp\bigg(-\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg)\bigg] + \exp\bigg[i\bigg(\int_b^x p_2\,\frac{dx'}{\hbar}+\frac{\pi}{4}\bigg)\bigg]\bigg[\exp\bigg(\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg) \\
+\frac{1}{4}\exp\bigg(-\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg)\bigg]\bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Il coefficiente di trasmissione T, ovvero la probabilità P di penetrazione della barriera, è perciò:

$$
T \approx \bigg[\exp\bigg(\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg) + \frac{1}{4}\exp\bigg(-\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg)\bigg]^{-2} \tag{3.29}
$$

Poiché per ipotesi si ha $\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar} \gg 1$, allora l'esponenziale negativo nell'espressione di T può essere trascurato rispetto all'esponenziale positivo; pertanto:

$$
T \approx \exp\bigg(-2\int_b^a p_1\,\frac{dx}{\hbar}\bigg) \tag{3.30}
$$

Si osservi che, nel caso di un potenziale V costante, la stima (3.30) ottenuta con l'approssimazione WKB restituisce correttamente il risultato (3.4) discusso per una barriera di potenziale rettangolare.

Capitolo 4

La quantizzazione canonica della gravità

4.1 L'equazione di Wheeler-DeWitt

Il più semplice modello di cosmogenesi quantistica è quello in cui dal 'nulla' si origina spontaneamente un universo vuoto e con geometria chiusa. Poiché soltanto un universo chiuso può nascere mediante effetto tunnel quantistico [1], infatti, si pone $k = +1$; come mostrato da Guth [11], inoltre, un universo inizialmente vuoto è tutto ciò che occorre, giacché lo scenario inflazionario è in grado di spiegare la creazione della materia nelle prime fasi dell'evoluzione dell'universo: per questo si considera come unico contributo alla densità di massa-energia ρ la densità di energia del vuoto ρ_{vac}, che è costante. L'invarianza di Lorentz del vuoto, ossia il principio relativistico per cui il tensore energia-impulso (2.8) del vuoto deve essere lo stesso in ogni sistema di riferimento localmente inerziale, implica che sia:

$$p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}} \tag{4.1}$$

in quanto, essendo la metrica di Minkowski l'*unico* tensore di rango due invariante per trasformazioni di Lorentz, il tensore energia-impulso deve essere proporzionale a tale metrica. Così facendo, l'equazione (2.11) risulta banalmente soddisfatta.

È consuetudine definire la costante cosmologica Λ come:

$$\Lambda \equiv 8\pi G \rho_{\text{vac}} \tag{4.2}$$

per cui Λ può essere intesa come l'energia di punto zero del campo gravitazionale. Secondo la Relatività generale, pertanto, è proprio la pressione negativa della costante cosmologica a causare l'espansione accelerata dell'Universo.

Per quanto detto, l'equazione di Einstein (2.9) assume la seguente forma:

$$\dot{a}^2 - \frac{\Lambda}{3}a^2 + 1 = 0 \tag{4.3}$$

La soluzione di questa equazione, a patto che $\rho(a)$ sia costante o lentamente variabile, mostra che inizialmente l'Universo si espande in modo esponenziale:

$$a(t) = a_0 \cosh\left(\frac{t}{a_0}\right), \quad a_0 \equiv \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \tag{4.4}$$

È questa l'epoca inflazionaria di Guth, un periodo straordinariamente breve di espansione straordinariamente rapida dello spaziotempo: quando l'Universo ha 10^{-34} s, per un periodo di $\sim 10^{-30}$ s la densità di energia del vuoto è sufficientemente costante da far espandere l'Universo di un fattore $\sim 10^{50}$.[1]

Accettata l'ipotesi che la natura sia intrinsecamente quantistica, la *quantizzazione* è l'attività matematica formale con cui si tenta di svelare le leggi quantistiche che governano l'Universo a un livello fondamentale, partendo dall'intuizione fisica sviluppata nel tempo osservando e descrivendo il mondo nel limite classico di grandi numeri quantici. In altre parole, generalmente non si dispone di una teoria quantistica *a priori*, ma solo di un sistema di leggi classiche che fornisce il punto di riferimento per una formulazione consistente delle leggi quantistiche di base – è questa l'essenza del principio di corrispondenza.

Per quantizzare la cosmologia FLRW si segue la procedura di quantizzazione canonica. Se il potenziale del sistema dipende soltanto dalle coordinate, l'hamiltoniana $\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p})$ corrisponde semplicemente all'energia totale E espressa come funzione delle coordinate e dei momenti coniugati. Nel caso semplice di un sistema unidimensionale, l'hamiltoniana ha la forma:

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = E \tag{4.5}$$

Rimpiazzando la coordinata x e il suo momento coniugato canonico p con i rispettivi operatori nello spazio delle coordinate:

$$x \to \hat{x} \equiv x \tag{4.6a}$$

$$p \to \hat{p} \equiv -i\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.6b}$$

è quindi possibile costruire l'operatore hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$. L'energia E è sostituita con il corrispondente operatore:

$$E \to \hat{E} \equiv i\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.7}$$

[1] A parte che per questo periodo di espansione esponenziale all'inizio della storia dell'Universo, i modelli inflazionari risultano identici alla teoria standard del Big Bang.

e l'equazione del moto quantistica che si ricava, ovvero l'equazione di Schrödinger, è ottenuta facendo agire questi operatori su una funzione d'onda $\psi(x,t)$ dello spazio di Hilbert:

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(x,t) \equiv \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}(x)\right]\psi(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{4.8}$$

L'equazione di Einstein (4.3) ha la stessa forma dell'hamiltoniana di una particella con energia nulla la cui posizione è descritta dalla coordinata a; nello specifico, il primo membro consiste di due termini, un termine di 'energia cinetica' proporzionale al quadrato della 'velocità' $\dot{a}$ e un termine di 'energia potenziale' funzione soltanto della coordinata a. Applicando la procedura di quantizzazione canonica, si ha:

$$a \to \hat{a} \equiv a \tag{4.9a}$$

$$p_a \to \hat{p}_a \equiv -i\frac{\partial}{\partial a} \tag{4.9b}$$

A questo punto, le equazioni di Einstein quantistiche possono essere ricavate attraverso il principio di Hamilton. L'azione gravitazionale $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ di Einstein-Hilbert è quella funzione della metrica e delle sue prime due derivate la cui variazione dà le equazioni di campo di Einstein, che sono quindi le equazioni di Eulero-Lagrange dell'azione $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$. Nel caso di un universo FLRW chiuso, tale azione ha la forma:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{G}} = \int \mathcal{L}_{\mathrm{G}}\, dt \equiv \frac{3\pi}{4G}\int \left[-a\dot{a}^2 + a\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right] dt \tag{4.10}$$

da cui segue che il momento coniugato p_a è:

$$p_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G}a\dot{a} \tag{4.11}$$

L'equazione di Einstein (4.3) può essere allora riscritta nella forma:

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0 \tag{4.12}$$

che, effettuando la quantizzazione,[2] diventa:

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]\Psi(a) = 0 \tag{4.13}$$

[2] Si sorvola sulla questione dell'ordinamento degli operatori, in quanto essa non influisce sui successivi calcoli dell'approssimazione semiclassica.

L'equazione (4.13) è nota come equazione di Wheeler-DeWitt e la sua soluzione, $\Psi(a)$, è detta funzione d'onda dell'Universo. Nella derivazione dell'equazione di Wheeler-DeWitt è stato imposto $k = +1$, scelta che esprime la forma sferica e chiusa della geometria spaziale tridimensionale e che la caratterizza attraverso una sola funzione, il fattore di scala $a(t)$; pertanto, in questo caso, l'argomento della funzione d'onda di Wheeler-DeWitt è un'unica funzione. In generale, però, l'argomento della funzione d'onda di Wheeler-DeWitt è un'intera metrica, descritta da un certo insieme di funzioni; ciò significa che, a parte che in questo caso particolarmente semplice di geometria spaziale massimamente simmetrica, la funzione d'onda dell'Universo è in realtà un funzionale sullo spazio infinito dimensionale di tutte le possibili geometrie spaziali tridimensionali dotate di metrica $h_{ij}(\vec{x})$, una varietà nota come *superspazio*: ogni punto del superspazio rappresenta una geometria tridimensionale.[3] La figura 4.1 aiuta a visualizzare la struttura del superspazio: ciascuna delle cinque geometrie spaziali A, B, C, D ed E rappresentate in alto a sinistra corrisponde a un singolo punto nel superspazio. Come illustrato in alto a destra, un 'taglio' di tipo spazio attraverso lo spaziotempo classico, come A, descrive una configurazione spaziale in un dato istante. Poiché il fogliettamento dello spaziotempo può essere effettuato in modi diversi, non è obbligatorio limitarsi alla famiglia di tagli A, B, C, D ed E individuata da un particolare parametro temporale: B' è un esempio di questa libertà di scelta. Tutte le possibili geometrie tridimensionali ottenibili con un taglio di tipo spazio attraverso lo spaziotempo giacciono su una singola superficie nel superspazio – una 'foglia' di storia – e uno spaziotempo diverso, cioè una soluzione differente delle equazioni di campo di Einstein, corrisponde a una superficie diversa nel superspazio. Il tempo è quel parametro affine lungo la foglia di storia che individua le configurazioni spaziali assunte dall'Universo nel corso della sua evoluzione.

Se mediante opportuni vincoli di simmetria si restringe l'insieme delle possibili geometrie tridimensionali di Ψ, la funzione d'onda di Wheeler-DeWitt diventa un funzionale su un sottospazio del superspazio, chiamato *minisuperspazio*; qualora la classe delle geometrie tridimensionali venga sufficientemente limitata, il minisuperspazio può essere anche finito dimensionale. Nel caso in esame, quindi, $\Psi(a)$ è una funzione definita su un minisuperspazio unidimensionale che è la semiretta $0 < a < \infty$. In termini generali, invece, si può indicare la funzione d'onda dell'Universo come:

$$\Psi[\Sigma, h_{ij}(\vec{x}), \Phi(\vec{x})] \tag{4.14}$$

[3]Nello specifico [25], il superspazio contiene $(\infty^3)^{\infty^3}$ geometrie tridimensionali, ossia classi di equivalenza di metriche $h_{ij}(\vec{x})$ tridimensionali che si possono trasformare l'una nell'altra per diffeomorfismo: per ciascuno degli ∞^3 punti $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ dello spazio, in un sistema di coordinate che diagonalizza la metrica $h_{ij}(\vec{x})$, ci sono tre componenti indipendenti della metrica e quindi ∞^3 metriche possibili.

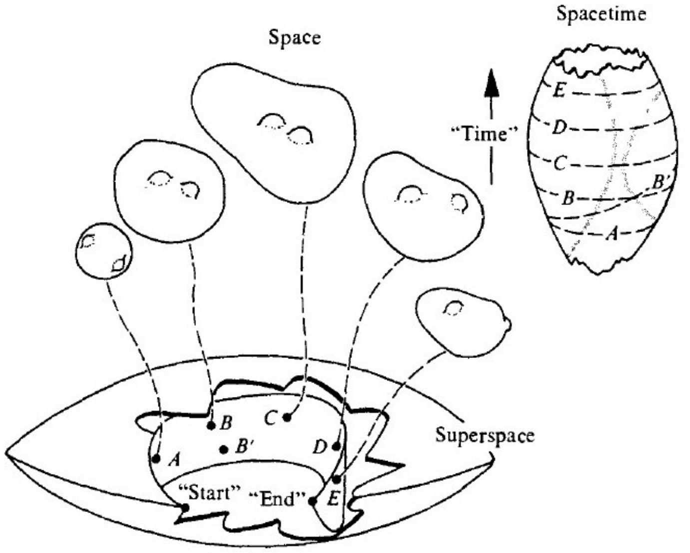

Figura 4.1 Raffigurazione del superspazio e dello spaziotempo.

dove Σ è un'ipersuperficie spaziale dotata della metrica tridimensionale $h_{ij}(\vec{x})$, mentre $\Phi(\vec{x})$ è la configurazione del campo di materia. Il risultato di questo approccio è la *geometrodinamica quantistica*, la cui equazione centrale è appunto l'equazione di Wheeler-DeWitt; con una notazione breve, questa equazione si può esprimere nella forma:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0 \tag{4.15}$$

dove $\hat{\mathcal{H}}$ denota l'hamiltoniana completa del campo gravitazionale (descritto dalla metrica tridimensionale) e di ogni altro campo di natura diversa.

4.2 Lo spaziotempo quantistico

La Relatività generale è una teoria parametrizzata in cui il tempo, al pari delle coordinate spaziali, è solamente un'etichetta dei gradi di libertà del sistema, senza un effettivo significato fisico. Questa caratteristica si riflette in una peculiarità dell'equazione di Wheeler-DeWitt: essa non contiene alcun parametro temporale classico. Il motivo è dovuto al fatto che, proprio come il concetto classico di traiettoria perde di significato in Meccanica quantistica, così qui il concetto classico di spaziotempo viene meno – resta soltanto lo spazio tridimensionale. Nel formalismo dello spaziotempo fogliettato, infatti, il tempo è una variabile che individua una famiglia di ipersuperfici spaziali nel superspazio e l'equazione di Wheeler-DeWitt, che può essere pensata come un'equazione delle onde nel superspazio, implementa la dinamica quantistica specificando la propagazione della funzione d'onda dell'Universo da un'ipersuperficie a un'altra: la geometria tridimensionale dello spazio contiene già in se stessa l'informazione sulla sua collocazione nello spaziotempo quadridimensionale. Si pensi, per confronto, alla rappresentazione di Schrödinger in Meccanica quantistica, in cui la funzione d'onda si propaga nello spazio e ivi si evolve rispetto al tempo: il tempo non è una variabile dinamica (anzi è la sola osservabile a cui non è associato un operatore nello spazio di Hilbert), bensì un semplice parametro, rispetto a cui il sistema si evolve. Per converso, si può affermare che la funzione d'onda di Wheeler-DeWitt non si evolve e che il tempo è una variabile non fondamentale nella descrizione del sistema Universo. In Cosmologia quantistica, dunque, si pone inevitabilmente il cosiddetto *problema del tempo*, che in questo scenario risulta collegato inoltre all'assenza di operatori di proiezione, di un'evoluzione unitaria della funzione d'onda, di uno spazio di Hilbert ecc.: anche questi concetti, che eppure hanno un'importanza cardinale nella Meccanica quantistica ordinaria, non sono imprescindibili e risultano appropriati soltanto se è ben definita una nozione di tempo.

Nella Meccanica classica la traiettoria di una particella è determinata dalla conoscenza della posizione $x(t)$ e del suo momento coniugato $p(t)$. In Meccanica quantistica x e p vengono sostituiti dagli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e, poiché questi non commutano, ciò implica una relazione di indeterminazione tra le corrispondenti osservabili. Le fluttuazioni quantistiche della posizione e dell'impulso vietano una conoscenza precisa di entrambi, rendendo vago, 'sfocato' il concetto di traiettoria classica; da questo si conclude che il concetto di traiettoria perde di significato al di fuori del dominio della Fisica classica. Nel modello di Cosmologia FLRW, in modo analogo, con la procedura di quantizzazione canonica sono stati scelti degli operatori per cui vale la relazione di commutazione canonica $[\hat{a}, \hat{p}_a] = i$, per cui la relazione di indeterminazione:

$$\Delta a \Delta p_a \geq \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

risulta soddisfatta. Ciò comporta l'impossibilità di specificare simultaneamente, con precisione arbitraria, sia il fattore di scala a sia la velocità $\dot{a}$ (poiché $p_a \propto \dot{a}$); svanisce, di conseguenza, la nozione di spaziotempo, in quanto per descriverne il fogliettamento è necessario conoscere sia a sia $\dot{a}$.

Quanto detto è vero in generale, non solo nel modello di minisuperspazio analizzato. Una 'traiettoria' nel superspazio, in cui ogni punto rappresenta una geometria spaziale, è una geometria quadridimensionale, cioè uno spaziotempo. La teoria quantistica proibisce la specificazione simultanea della coordinata del superspazio e del suo momento coniugato canonico, che esprime la rapidità con cui varia la geometria spaziale nel tempo; alla scala di Planck, le fluttuazioni quantistiche della geometria spaziale e della sua rapidità di variazione nel tempo impediscono quindi la definizione di una traiettoria precisa nel superspazio e pertanto anche lo spaziotempo è vago, 'sfocato', indefinito: si parla perciò di *schiuma spaziotemporale* o *schiuma quantistica* [24], per evidenzare il fatto che è la stessa geometria quadridimensionale dello spaziotempo che fluttua. In definitiva, poiché la traiettoria nel superspazio non è ben definita, lo spaziotempo va considerato come un concetto puramente classico e, dunque, approssimato. A tal proposito, così si è espresso Wheeler [18]:

> Queste considerazioni rivelano che i concetti di spaziotempo e di tempo stesso non sono delle idee primarie nella struttura della teoria fisica, bensì secondarie. Questi concetti sono validi nell'approssimazione classica. A ogni modo, essi non hanno significato né applicazione nelle circostanze in cui gli effetti di geometrodinamica quantistica diventano importanti. Bisogna allora rinunciare alla visione della natura per cui ogni evento, passato, presente o futuro, occupa una posizione predefinita nel grande catalogo chiamato spaziotempo, in cui l'intervallo spaziotemporale tra qualsiasi coppia di eventi è fissato in eterno. Non c'è alcuno spaziotempo, non c'è alcun tempo, non c'è un 'prima', non c'è un 'dopo'. La domanda sul cosa succede 'dopo' non ha senso.

4.3 Condizioni al contorno e funzioni d'onda del minisuperspazio

L'equazione di Wheeler-DeWitt (4.13) è identica all'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale per una particella di mezza massa unitaria ed energia nulla, soggetta al potenziale:

$$\hat{V}(a) = \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4}\right) \tag{4.17}$$

mostrato nel grafico 4.2. La regione al di sotto della barriera, $0 < a < a_0$, è classicamente proibita per una particella con energia nulla, mentre la regione a destra, $a \geq a_0$, è permessa. Pertanto, il modello di universo FLRW quantizzato è matematicamente equivalente a un semplice problema unidimensionale di Meccanica quantistica non relativistica, in cui la 'particella' nella posizione a rappresenta un universo con tale valore del fattore di scala.

Per determinare la funzione d'onda del minisuperspazio, ossia la funzione d'onda di un universo FLRW, e quindi selezionare una particolare soluzione dell'equazione di Wheeler-DeWitt, bisogna specificare le condizioni al contorno. Le due proposte principali sono:

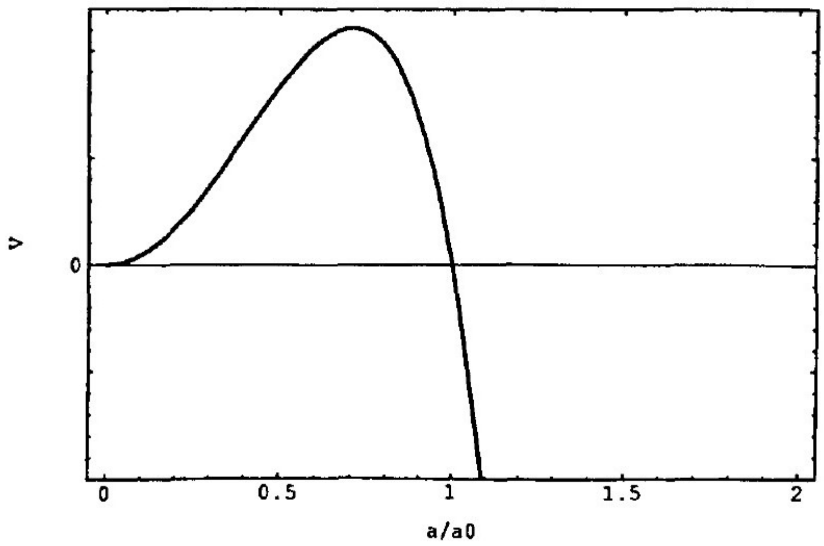

Figura 4.2 Il potenziale $V(a/a_0)$ dell'equazione di Wheeler-DeWitt. Per semplicità è stato posto $a_0^2 = G$.

1. la condizione per cui nella regione classicamente permessa è presente soltanto un'onda uscente; questa scelta definisce la *funzione d'onda di tunnelling* $\Psi_{\rm T}$ di Vilenkin;

2. la condizione per cui nella regione classicamente permessa sono presenti quantità uguali di onda uscente e onda entrante; questa scelta definisce la *funzione d'onda senza confini* $\Psi_{\rm HH}$ di Hartle e Hawking.

La condizione al contorno della funzione d'onda di tunnelling sembra la più naturale per considerare la nascita di un universo in espansione mediante effetto tunnel. In base alla (3.19), la soluzione semiclassica che descrive un'onda puramente uscente è:

$$\Psi_{\rm T}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt[4]{-V(a)}} \exp\left(-i \int_{a_0}^{a} \sqrt{-V(a')}\, da' + i\frac{\pi}{4}\right) \tag{4.18}$$

dove il fattore $\pi/4$ è stato esplicitato per convenienza nell'applicare le formule di connessione dell'approssimazione WKB (trattandosi di un fattore di fase, potrebbe essere assorbito nella normalizzazione della funzione d'onda). Si osservi che è stata scelta la soluzione corrispondente a un momento negativo: in virtù dell'espressione (4.11) di p_a, è questa la soluzione che rappresenta un universo in espansione. Applicando le formule di connessione (3.22) e (3.23) ed effettuando le integrazioni, si trova che la soluzione al di sotto della barriera è:

$$\Psi_{\mathrm{T}}(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{K(a)}}\left\{\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right.$$
$$\left.+\, i\exp\left[\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} \tag{4.19}$$

con:

$$K(a) \equiv \frac{3\pi}{2G}a\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.20}$$

mentre la soluzione nella regione classicamente permessa è:

$$\Psi_{\mathrm{T}}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}}\exp\left[-i\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(\frac{a^2}{a_0^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4.21}$$

con:

$$k(a) \equiv \frac{3\pi}{2G}a\left(\frac{a^2}{a_0^2}-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.22}$$

Per quanto riguarda la funzione d'onda senza confini di Hartle e Hawking, analogamente si trova:

$$\Psi_{\mathrm{HH}}(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{K(a)}}\exp\left[-\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4.23}$$

e:

$$\Psi_{\mathrm{HH}}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}}\cos\left[\frac{\pi}{2G}a_0^2\left(\frac{a^2}{a_0^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4.24}$$

In entrambi i casi, la funzione d'onda dell'Universo è oscillante nella regione classicamente permessa ed esponenziale in quella classicamente proibita (grafico 4.3). La funzione d'onda di tunnelling, che è complessa, contiene solo una componente uscente – dove per "uscente" si intende che il segno della fase è definito dall'inizio – e rappresenta un universo FLRW in espansione; la funzione d'onda senza confini, che invece è reale, consta sia di una componente uscente sia di una entrante (anche se non è possibile dire quale è quale) e pertanto assegna una probabilità non nulla alla possibilità di avere un universo che si contrae. Le condizioni al contorno di tunnelling e senza confini attuano essenzialmente una restrizione dei modi presenti nella regione classicamente permessa: la Ψ_{HH} impone che non ci siano contorni, in particolare quello per $a \to 0$; la Ψ_{T}, invece, propone che la funzione d'onda sia costituita solamente da modi uscenti, in analogia, ad esempio,

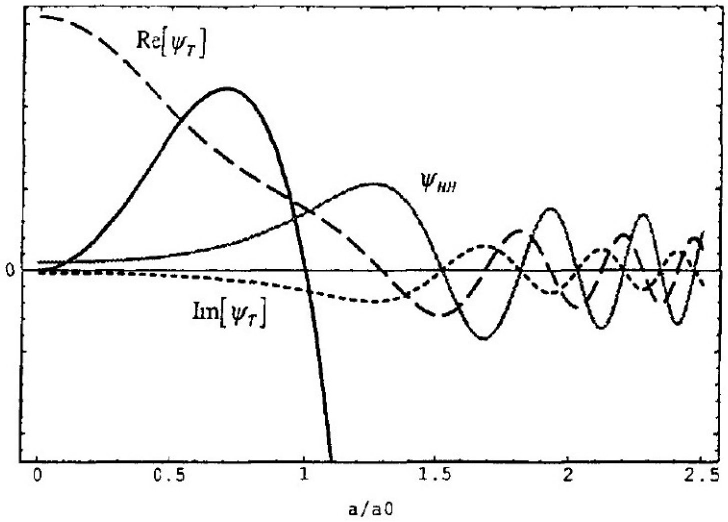

Figura 4.3 La funzione d'onda di tunnelling e la funzione d'onda senza confini, sovrapposte al potenziale (4.17). La linea continua è la Ψ_{HH}, quella tratteggiata è $\mathrm{Re}[\Psi_{\mathrm{T}}]$ e quella punteggiata è $\mathrm{Im}[\Psi_{\mathrm{T}}]$.

con il processo del decadimento α in Meccanica quantistica. Queste condizioni al contorno, inoltre, sono applicabili a modelli di Cosmologia quantistica più generali rispetto a quello semplice qui trattato; sono applicabili, in particolare, anche a modelli di universi non vuoti, in cui sono presenti diverse tipologie quantizzate di materia. Sulla base di questi modelli è stato discusso [12] che, se si studia la probabilità di avere una fase inflazionaria nell'Universo primordiale, mentre la funzione d'onda di tunnelling sembra favorire l'occorrenza di tale fase, quella senza confini sembra sfavorirla; in ogni caso, si tratta di una questione ancora aperta e, a dirla tutta, anzidette proposte di condizioni al contorno non sono affatto le uniche possibili.

Dal momento che lo spazio delle configurazioni, cioè il superspazio, è infinito dimensionale, il formalismo completo della Cosmologia quantistica è molto difficile da implementare nella pratica. Alla luce del principio cosmologico, in Cosmologia classica è possibile restringere l'analisi alla regione di superspazio nell'immediata vicinanza dell'omogeneità e dell'isotropia; in sostanza, si comincia studiando delle metriche omogenee e isotrope per poi introdurre delle perturbazioni inomogenee in tali metriche. L'Universo osservato non è descritto infatti da metriche perfettamente omogenee: vi sono deviazioni locali dall'omogeneità, come indicato dalla distribuzione delle galassie e degli ammassi di galassie; la formazione di queste strutture a grande scala può essere spiegata come il risultato della crescita di piccole perturbazioni di densità, che il modello inflazionario riconduce alle fluttuazioni quantistiche primordiali del vuoto.

In Cosmologia quantistica si fa lo stesso. Più precisamente, in genere si comincia prendendo in considerazione una classe di modelli in cui tutti i gradi di libertà della metrica e dei campi di materia, eccetto un numero finito, sono 'congelati' (solitamente ciò viene fatto imponendo la condizione di omogeneità dei campi): sono questi i modelli di minisuperspazio, caratterizzati dal fatto che il loro spazio delle configurazioni, cioè appunto il minisuperspazio, è finito dimensionale; ciò consente di ridurre un problema di Teoria dei campi a un problema di Meccanica quantistica. La restrizione al minisuperspazio genera però delle difficoltà nel contesto della teoria quantistica, ad esempio perché l'assunzione che molti dei modi e dei momenti dei campi siano nulli in modo identico viola il principio di indeterminazione. In aggiunta, non è noto se la restrizione al minisuperspazio costituisca o meno un'effettiva approssimazione sistematica della teoria completa. L'approccio più cauto è quindi quello di considerare i modelli di minisuperspazio non come una sorta di approssimazione, bensì come dei *toy model* che conservano alcuni aspetti della teoria completa, mentre ne evitano altri, permettendo così di esaminare in modo 'isolato' certe caratteristiche della teoria completa. Eppure non va perso di vista lo scopo principale della Cosmologia quantistica, che resta pur sempre quello di produrre delle predizioni cosmologiche riguardanti un sistema fisico, l'Universo, che è enormemente complesso: è possibile comunque argomentare [12] a favore del valore di alcuni aspetti dei toy model che sarebbero in grado di superarne le restrizioni intrinseche, riuscendo così a fornire informazioni utili e predizioni al pari della teoria completa.

4.4 La cosmogenesi quantistica

In relazione al modello di minisuperspazio discusso in questo capitolo, l'idea della cosmogenesi quantistica può essere illustrata come segue: la 'particella' nella posizione $a = 0$ – ovvero un universo FLRW di dimensione nulla o, in effetti, il 'nulla' cosmologico – può penetrare la barriera di potenziale dell'equazione di Wheeler-DeWitt per mezzo dell'effetto tunnel quantistico, apparendo nella posizione $a = a_0$; questo evento di tunnelling rappresenta un universo FLRW di dimensione finita a_0 – e quindi *non* singolare – originatosi spontaneamente grazie a un processo quantomeccanico. L'equazione di Wheeler-DeWitt, nella sua forma generale (4.15), suggerisce inoltre che l'energia totale dell'Universo sia nulla, caratteristica che appare consistente con l'idea di una creazione dal 'nulla', ossia da uno stato privo di spaziotempo e di materia-energia.

Scegliendo la funzione d'onda di tunnelling Ψ_{T} e facendo ricorso alle relazioni (3.30) e (4.17), si ottiene la probabilità P che avvenga suddetta cosmogenesi quantistica:

$$P \equiv |\langle \mathrm{FLRW}(a_0)\,|\,\mathrm{nulla}\rangle|^2 \approx \exp\left[-\frac{3\pi}{G}\int_0^{a_0} a\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} da\right] \tag{4.25}$$

Calcolando l'integrale e sostituendo il valore di a_0, risulta infine:

$$P(\rho_{\text{vac}}) \approx \exp\left(-\frac{3}{8G^2\rho_{\text{vac}}}\right) \tag{4.26}$$

I valori permessi della densità ρ_{vac} dipendono dai dettagli della Teoria quantistica dei campi impiegata per descrivere la materia e le sue interazioni. Tuttavia, affinché sia valida l'approssimazione semiclassica, è necessario avere $\rho_{\text{vac}} \ll \rho_{\text{P}}$, dove $\rho_{\text{P}} \equiv m_{\text{P}}/l_{\text{P}}^3 = \frac{c^5}{\hbar G^2} \sim 10^{97}$ kg/m^3 è la densità di Planck (nel SI); pertanto, si può porre $\rho_{\text{vac}} \equiv \alpha\rho_{\text{P}}$ e richiedere che sia $\alpha \ll 1$. In un modello più realistico [22] in cui la densità di energia del vuoto ρ_{vac} viene sostituita dal potenziale $V(\phi)$ di un certo campo scalare ϕ, se $V(\phi)$ è una funzione lentamente variabile di ϕ, allora le ipotesi dell'approssimazione WKB fanno sì che si ritrovi in automatico il risultato precedente:

$$P[V(\phi)] \approx \exp\left[-\frac{3}{8G^2V(\phi)}\right] \tag{4.27}$$

Si presenta a questo punto il problema del come interpretare la probabilità P e in generale le probabilità relative al sistema Universo. In questa situazione, infatti, non si può applicare l'interpretazione di Copenaghen secondo cui un osservatore determina il collasso della funzione d'onda del sistema osservato mediante l'atto della misura, in quanto per definizione non può esistere un osservatore esterno al sistema Universo. Il problema fu notato per primo da Everett, il quale sviluppò una formulazione della Meccanica quantistica, la cosiddetta interpretazione a molti mondi, in cui la funzione d'onda evolve in modo continuo, senza mai collassare. Più di recente, il lavoro di Gell-Mann e Hartle [9] ha condotto all'idea delle *storie decoerenti*, secondo cui la Meccanica quantistica assegna probabilità alle storie *possibili* dell'Universo; molte sono le caratteristiche che rendono questo approccio idoneo alla Cosmologia quantistica: si applica specificamente a sistemi chiusi; non assume una separazione a priori tra dominio classico e dominio quantistico (e quindi, ad esempio, tra osservatore macroscopico e sistema microscopico); non fa affidamento sulle nozioni di misura o di osservazione; si focalizza sulle storie possibili del sistema piuttosto che su eventi che avvengono in un singolo istante di tempo. Alla luce di questa proposta, il risultato (4.26) può essere interpretato asserendo che P è la probabilità che si verifichi la storia in cui un universo FLRW chiuso e con densità di energia del vuoto ρ_{vac} si origina spontaneamente dal 'nulla', per poi procedere a evolversi secondo le leggi quantistiche.

Hartle, in particolare, ha suggerito [15] il seguente criterio per applicare le regole della Meccanica quantistica nell'ambito della Cosmologia quantistica:

> Se la funzione d'onda Ψ è sufficientemente piccata attorno a una certa regione dello spazio delle fasi, prediciamo che verranno osservate le correlazioni tra le osservabili che caratterizzano questa regione. Se Ψ è piccola in alcune regioni, prediciamo che l'osservazione delle correlazioni che caratterizzano tali regioni è preclusa. Quando Ψ non è né piccola né sufficientemente piccata, non facciamo alcuna predizione.

Questa prescrizione, detta *criterio minimale di Hartle*, indica un modo per comprendere il significato delle probabilità nella teoria della Cosmologia quantistica, in cui le regole della Meccanica quantistica vanno applicate a un *singolo* sistema e non, come avviene secondo l'interpretazione di Copenaghen, a un insieme di sistemi (osservatori e osservati); l'anomala mancanza del carattere statistico nelle predizioni deriverebbe, secondo Hartle, proprio dal fatto che l'Universo nel suo insieme non è un sistema standard. Si consideri il seguente esempio: dato il valore misurato della costante di Hubble H_0 e della densità di massa, una 'buona' funzione d'onda per l'Universo dovrebbe essere piccata attorno a una storia in cui la distribuzione delle galassie è consistente con quella che oggi si osserva; è importante sottolineare che la funzione d'onda non predice il valore specifico di H_0 o le posizioni specifiche delle galassie, bensì una particolare *correlazione* tra queste osservabili.

Ritornando al risultato (4.26) sull'origine quantistica dell'Universo, con il criterio minimale di Hartle è possibile darne la seguente interpretazione: essendo la probabilità P una funzione monotona crescente del parametro ρ_{vac}, si desume che tale correlazione tra la densità del vuoto e la cosmogenesi quantistica indica che l'Universo osservato è probabilmente quello la cui evoluzione corrisponde al più alto valore possibile della densità del vuoto – e questa è proprio la condizione iniziale giusta per conseguire lo scenario inflazionario.

4.5 L'interpretazione a molti mondi della Meccanica quantistica

L'interpretazione della funzione d'onda dell'Universo è, in sostanza, il modo con cui si specificano le conseguenze osservazionali per lo stato dell'Universo descritto da tale entità matematica – è un modo per fare predizioni. Nel tentativo di interpretare in modo consistente la struttura e i risultati della Cosmologia quantistica, si riscontrano due problemi principali: l'assenza di uno spazio di Hilbert e l'assenza del significato statistico del concetto di probabilità. Finora non si è riusciti a risolvere la prima questione in quanto il prodotto scalare dello spazio delle soluzioni dell'equazione di Wheeler-DeWitt non è definito positivo e l'inconveniente delle probabilità negative non può essere superato attraverso schemi di seconda quantizzazione – come avvenuto in passato per il problema delle antiparticelle, che ha portato all'elaborazione della Teoria quantistica dei campi –, poiché la Relatività generale, che si cerca di quantizzare in Gravità quantistica, è già in partenza una teoria di campo. Per quanto riguarda la seconda questione, invece, essa è legata alla difficoltà del ricondurre il significato statistico della funzione d'onda dell'Universo alla teoria standard della misura, dovuta alla scuola di Copenaghen.

Molte proposte sull'interpretazione della teoria si focalizzano allora sull'unicità del sistema Universo al fine di presentare una risoluzione non standard del problema. Tra queste teorie rientra l'interpretazione a molti mondi (MWI, *Many-Worlds Interpretation*), elaborata inizialmente da Everett [8] e poi sviluppata in particolare da DeWitt [7]. Secondo la MWI, esiste un unico Universo contenente moltissimi mondi, che sono mutuamente isolati e non osservabili; l'Universo, inoltre, è descritto da un'unica entità fisica fondamentale: la funzione d'onda dell'Universo. Pur non disponendo di una definizione rigorosa di mondo, si può assumere che un mondo indichi la totalità dei corpi macroscopici, esistenti in un stato definito e descritto da leggi classiche. All'interno di un mondo, ogni osservatore è cosciente dell'esistenza del suo mondo solamente, cioè non ha percezione degli altri mondi. In realtà, ogni volta che avviene un esperimento il cui risultato è determinato da leggi quantistiche – non è necessario che ciò avvenga in un laboratorio o che sia controllato da un apparato sperimentale – *tutti* i possibili risultati dell'esperimento si verificano, ciascuno in un mondo separato; in seguito, il mondo in cui è avvenuto l'esperimento si suddivide in un certo numero di altri mondi, pari al numero di risultati possibili, e in ciascuno di essi l'osservatore misura un risultato diverso. Secondo questa logica, un mondo definito in un certo istante di tempo corrisponde quindi a un unico mondo in un momento nel passato, ma a una moltitudine di mondi in un momento nel futuro.

L'interpretazione di Copenaghen non stabilisce le caratteristiche che un evento deve avere affinché costituisca un'osservazione; nel migliore dei casi, perciò, tale teoria è incompleta, in quanto non specifica quando vale la legge per cui l'evoluzione del sistema è continua, cioè l'equazione di Schrödinger, e quando vale quella per cui l'evoluzione è discontinua, ossia il collasso della funzione d'onda. Questi due processi non sembrano essere riconducibili l'uno all'altro e, per giunta, differiscono in modo cruciale rispetto al carattere deterministico o casuale dei fenomeni naturali. In particolare, non è chiaro come un apparato sperimentale, soggetto alle leggi quantistiche come qualsiasi altro corpo, possa introdurre siffatta discontinuità nell'atto della misura, anziché evolvere in modo continuo come prescritto dall'equazione di Schrödinger.

Il vantaggio principale della MWI sta nel fatto che essa risolve il problema della misura della Meccanica quantistica – semplicemente sopprimendolo: l'Universo è descritto matematicamente da una funzione d'onda che evolve secondo l'equazione di Schrödinger (o la sua generalizzazione relativistica) in modo regolare e deterministico, senza mai collassare; non c'è discontinuità nel processo evolutivo della funzione d'onda in quanto si verificano tutti i possibili eventi che essa ammette e non soltanto uno (quello che, secondo il postulato di von Neumann dell'interpretazione di Copenaghen, verrebbe ottenuto in modo genuinamente casuale attraverso il collasso della funzione d'onda). L'apparato di misura classico non riveste quindi alcun ruolo speciale all'interno della teoria, bensì, al pari di qualunque oggetto macroscopico, evolve secondo le leggi quantistiche.

A livello formale, lo stato quantistico $|\Psi\rangle$ dell'Universo può essere decomposto in una sovrapposizione di termini $|\psi_i\rangle$ relativi a mondi distinti:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i \, |\psi_i\rangle \tag{4.28}$$

Mondi diversi corrispondono a stati in cui almeno un oggetto è descritto in modo differente dalle leggi classiche e stati diversi corrispondono a vettori ortogonali; pertanto, mondi diversi corrispondono a stati ortogonali e, assumendo che la funzione d'onda dell'Universo sia normalizzata, si ha:

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = 1 \tag{4.29}$$

Alla base della decomposizione in mondi vi è il concetto comune di un mondo formato da oggetti presenti in posizioni e stati ben definiti ("definiti" sulla scala della nostra abilità di misurare le grandezze fisiche); la funzione d'onda $|\psi_i\rangle$ dell'i-esimo mondo è costituita infatti dal prodotto tensoriale degli stati quantistici $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ ecc. corrispondenti agli oggetti rilevanti nella descrizione macroscopica del mondo, moltiplicata per lo stato quantistico $|\Phi\rangle$ di tutto ciò che non viene considerato come tale:

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \, |\phi_B\rangle \ldots |\Phi\rangle \tag{4.30}$$

Ad esempio, se A è un sistema su cui si effettua una misura e B è l'apparato sperimentale con cui si fa ciò, dalle espressioni (4.28) e (4.30) si evince che l'Universo nel suo complesso è una sovrapposizione di mondi in cui occorrono, separatamente, tutti i possibili risultati di una misura: nella funzione d'onda dell'Universo diventano entangled il sistema A, che viene a trovarsi in un certo stato, e l'apparato B, che ha misurato tale stato, e in ogni singolo mondo si verifica un risultato diverso. Quando, all'interno di un particolare mondo, viene osservato un certo esito dell'esperimento, allo sperimentatore semplicemente *capita* di trovarsi nel mondo in cui si è verificato proprio quel risultato. Per via dell'entanglement tra

Figura 4.4 Visualizzazione dell'esperimento mentale del gatto di Schrödinger secondo la MWI: l'evento quantistico del rilascio di una sostanza radioattiva provoca la suddivisione del mondo in due mondi separati e non interagenti, uno in cui il gatto nella scatola è vivo (perché il decadimento non è avvenuto) e uno in cui il gatto nella scatola è morto (perché il decadimento è avvenuto); pertanto, prima ancora che un osservatore esterno possa constatare l'esito dell'evento aprendo la scatola, l'animale è sia vivo sia morto, ma in due mondi diversi.

osservatore e sistema osservato, in seguito all'atto della misura a nessuno dei due oggetti può essere ascritto uno stato assoluto e ben definito, bensì l'uno può essere descritto solo in relazione allo stato in cui si trova l'altro: è questo il principio della *relatività degli stati*. In seguito a una misura, la coppia di stati dell'osservatore e dell'osservato procede nella sua evoluzione deterministica indifferente a ciò che accade negli altri mondi, proprio *come se* fosse avvenuto il collasso della funzione d'onda; in virtù del principio del rasoio di Ockham, quindi, risulta lecito rimuovere completamente dalla teoria il postulato di von Neumann. Nel caso dell'esperimento mentale del gatto di Schrödinger, per esempio, la separazione dei mondi in cui il gatto è vivo o morto avviene *prima* che l'osservatore apra la scatola; esisteranno allora due mondi del tutto identici se non per lo stato con cui viene descritto il gatto: in uno dei due mondi, una volta aperta la scatola, un osservatore attesterà la morte del gatto, mentre nell'altro mondo lo stesso osservatore scoprirà che l'animale è ancora vivo (figura 4.4).

Nonostante tutti i mondi siano, a un fissato istante di tempo, della stessa dimensione e nonostante ogni osservatore cosciente di questi mondi si senta 'reale' allo stesso modo, c'è un senso in cui alcuni mondi sono più 'esistenti' di altri: ci si può riferire a questo concetto designandolo come la *misura dell'esistenza* di un mondo. La misura dell'esistenza μ_i di un mondo è definita semplicemente come:

$$\mu_i \equiv |\alpha_i|^2 \tag{4.31}$$

e può essere anche espressa come il valore di aspettazione di $\hat{P}_i$, l'operatore di proiezione sullo spazio degli stati quantistici corrispondenti al valore effettivo di tutte le variabili fisiche che descrivono l'i-esimo mondo:

$$\mu_i \equiv \left\langle \Psi \middle| \hat{P}_i \middle| \Psi \right\rangle \tag{4.32}$$

In sostanza, a tutti i mondi è associata una diversa misura di esistenza, espressa dal peso con cui essi compaiono nella funzione d'onda dell'Universo (4.28), seppur in ciascuno gli oggetti siano ben definiti e descritti allo stesso modo da leggi classiche. Questo concetto permette di comprendere facilmente come la MWI possa essere consistente con i principi di conservazione delle grandezze fisiche. Si consideri per esempio la conservazione dell'energia: ciascun mondo contiene la stessa energia totale, ma non per questo l'energia totale dell'Universo aumenta a dismisura al moltiplicarsi dei mondi; in ogni mondo, infatti, tale energia esiste con un peso μ_i e pertanto essa, tenendo a mente la condizione (4.29), risulta essere anche la quantità di energia totale presente nell'Universo.

Essendo una teoria deterministica, la MWI non è basata su alcun concetto di probabilità. Sotto questo aspetto, la stessa definizione classica di probabilità sembra essere priva di senso; si consideri per chiarezza questo esempio: se si effettua un esperimento con due risultati possibili, A con probabilità 1/3 e B con probabilità 2/3, non ha senso chiedersi qual è la probabilità che in seguito all'esperimento si verifichi A piuttosto che B, siccome entrambi i risultati avverranno *con certezza*, anche se in mondi diversi. Eppure, per via dell'identico formalismo matematico della MWI e dell'interpretazione di Copenaghen, non c'è motivo per aspettarsi che l'esperienza di un osservatore in un mondo della MWI debba essere diversa da quella dello stesso osservatore in un universo contenente un unico mondo. Il concetto della misura dell'esistenza rappresenta allora la base per introdurre l'esperienza della probabilità – o meglio di un'*illusione* di probabilità – nella MWI, in quanto è possibile ricondurla alla misura di probabilità caratteristica dell'interpretazione di Copenaghen. Per far ciò, si formula il seguente:

Postulato della probabilità (o regola di Born-Vaidman)**.** Un osservatore dovrebbe stabilire la sua probabilità soggettiva del risultato di un esperimento quantistico in proporzione alla misura dell'esistenza totale di tutti i mondi in cui si realizza tale risultato.

Tornando all'esempio precedente, prima che gli osservatori diventino coscienti del risultato dell'esperimento, essi potranno dire che la probabilità di ottenere

A piuttosto che B è pari a 1/3, ossia la misura relativa dell'esistenza del mondo A, sia che si trovino nel mondo A sia che si trovino in quello B: entrambi gli osservatori possiedono infatti la stessa informazione circa l'esperimento e possono formulare la loro predizione probabilistica del risultato sulla base dell'ignoranza soggettiva del trovarsi, in seguito all'esperimento, in un mondo piuttosto che nell'altro. Questa interpretazione, seppur non universalmente accettata, mira a risolvere i due problemi principali associati al concetto di probabilità nella MWI: il problema dell'incoerenza, che domanda perché si dovrebbe assegnare in primo luogo una probabilità a eventi che alla fine avverranno sicuramente in un qualche mondo, e il problema quantitativo, che domanda perché le probabilità vadano assegnate proprio secondo la regola di Born. A tutt'oggi sono state proposte diverse soluzioni, tra cui quelle di tipo frequentista e di teoria della decisione, ma nessuna viene riconosciuta come corretta o completa.

Pur avendo una motivazione e uno scopo indipendenti dalle applicazioni, la MWI risulta essere confacente ai problemi concettuali della Cosmologia quantistica. In questo contesto, infatti, la MWI fornisce una soluzione naturale non solo al problema dell'interpretazione del concetto di probabilità, ma anche alla questione dell'osservatore: non occorre alcun osservatore esterno al sistema per determinare il risultato di un evento quantistico, quindi l'Universo può evolversi regolarmente secondo l'equazione di Schrödinger, proprio come qualunque sistema fisico. Inoltre, il significato delle probabilità assegnate al sistema Universo nel suo insieme, sebbene le misure su di esso vengano effettuate esclusivamente dal suo interno, è legato alla misura dell'esistenza dei mondi in cui l'Universo si suddivide in seguito a ogni evento quantistico che si verifica.

4.6 L'emergenza dello spaziotempo classico

Affinché la funzione d'onda dell'Universo descriva correttamente l'Universo attuale, essa deve essere in grado di predire che lo spaziotempo è classico quando l'Universo è molto grande. Per comprendere in cosa consista, nel quadro della Cosmologia quantistica, una predizione di spaziotempo classico, si osservi innanzitutto che ci sono almeno due requisiti che devono essere soddisfatti per poter ritenere classico un sistema quantistico:

1. la funzione d'onda deve predire che le variabili canoniche sono fortemente correlate in accordo con leggi classiche o, in altre parole, la funzione d'onda deve essere molto piccata attorno a una o più configurazioni classiche;

2. gli effetti dell'interferenza quantomeccanica tra tali configurazioni distinte devono essere trascurabili, ossia deve avvenire una decoerenza delle possibili configurazioni.

Per chiarire entrambi i requisiti si può analizzare un semplice esempio della Meccanica quantistica: gli stati coerenti di un oscillatore armonico unidimensionale. Si tratta di pacchetti d'onda $\psi(x,t)$ fortemente piccati attorno a una singola traiettoria classica $\bar{x}(t)$, aventi la seguente forma:

$$\psi(x,t) = e^{ipx} \exp\left\{-\frac{[x-\bar{x}(t)]^2}{\sigma^2}\right\} \tag{4.33}$$

Una soluzione dell'equazione di Schrödinger di questo tipo predice un comportamento classico del sistema nel senso che, misurando in diversi istanti di tempo la posizione della particella, la si troverebbe in media lungo la traiettoria $\bar{x}(t)$.
Nel caso di una soluzione dell'equazione di Schrödinger data da una sovrapposizione di più stati coerenti, ognuno relativo a una traiettoria classica $\bar{x}_n(t)$ distinta, si ha:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n e^{ip_n x} \exp\left\{-\frac{[x-\bar{x}_n(t)]^2}{\sigma^2}\right\} \tag{4.34}$$

Si potrebbe pensare che questa funzione d'onda descriva un comportamento classico e che la probabilità di trovare la particella lungo la traiettoria $\bar{x}_n(t)$ sia pari a $|c_n|^2$; tale affermazione presenta però un intoppo: a un certo punto nel futuro alcuni dei pacchetti d'onda potrebbero incontrarsi e interferire, rendendo impossibile parlare di una traiettoria classica ben definita per la particella. Per poter ascrivere un'evoluzione classica alla particella occorre quindi che l'interferenza tra i diversi stati sia assente o comunque trascurabile.

Per quanto riguarda lo sviluppo della Cosmologia quantistica, nel ricercare l'emergenza dei comportamenti classici è naturale provare a costruire l'analogo degli stati coerenti per la funzione d'onda dell'Universo. Ciò è abbastanza difficile da realizzare, ma è stato fatto per alcuni modelli semplici. Poiché la funzione d'onda non dipende dal tempo in modo esplicito, l'analogo degli stati coerenti è dato da funzioni d'onda del tipo:

$$\Psi(\vec{x}) = e^{i\phi(\vec{x})} \exp\left[-f^2(\vec{x})\right] \tag{4.35}$$

dove $f(\vec{x}) = 0$ è l'equazione di una singola traiettoria classica nel minisuperspazio. Ad esempio, in un modello bidimensionale la funzione d'onda sarà una cresta molto piccata nel minisuperspazio lungo una singola traiettoria classica. Funzioni d'onda di questo tipo, tuttavia, non sono molto comuni in Cosmologia quantistica perché necessitano di condizioni al contorno molto particolari; ciononostante, consentono di evidenziare una caratteristica importante delle funzioni d'onda che predicono lo spaziotempo classico: esse sono piccate attorno a un'*intera* storia. Inoltre, sebbene la funzione d'onda originale non contenga un parametro che svolge il ruolo del tempo, può emergere una nozione di tempo per alcuni tipi di funzioni d'onda, come la (4.35): si può identificare il tempo proprio con il parametro affine lungo le storie attorno a cui la funzione d'onda è piccata (nel caso della (4.35) nell'esempio precedente, il tempo corrisponde quindi alla distanza lungo la cresta). Il tempo e, più in generale, lo spaziotempo sono pertanto dei concetti derivati e non fondamentali, appropriati soltanto per certe regioni dello spazio delle configurazioni e dipendenti fortemente dalle condizioni iniziali cosmologiche.

Anche il requisito della decoerenza può essere soddisfatto nell'ambito della Cosmologia quantistica, ma è piuttosto difficile farlo e non verrà discusso.

Secondo il quadro della Cosmologia quantistica, le primissime fasi di vita dell'Universo appartengono interamente al dominio quantistico: si tratta della singolarità iniziale in $a = 0$, dell'intera regione al di sotto della barriera di potenziale (4.17) e di un certo intorno di a_0, in cui giocano un ruolo considerevole le fluttuazioni della schiuma spaziotemporale. In un particolare momento nell'evoluzione dell'Universo, poi, è emerso uno spaziotempo classico ben definito: è lecito perciò chiedersi quando la funzione d'onda dell'Universo predica l'emergenza dello spaziotempo classico.

Halliwell ha mostrato [12] che una funzione d'onda della forma $\exp(iS)$ predice una precisa correlazione tra la coordinata canonica q e il momento coniugato p:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \tag{4.36}$$

Questo risultato è di grande importanza per l'obiettivo di indagare il limite classico, ovvero $\hbar \to 0$, del sistema Universo. Nella regione classicamente permessa del potenziale (4.17), infatti, l'approssimazione WKB per la funzione d'onda dell'Universo restituisce proprio una soluzione oscillante di questo tipo: applicando la procedura dell'espansione asintotica della funzione d'onda (arrestata al primo ordine in $\hbar$) illustrata nel paragrafo 3.3 e ricordando i risultati (3.15a) e (3.15b), si trova che la funzione d'onda dell'Universo è $\Psi \propto \exp(iS_0)$. Da ciò segue che la funzione d'onda è piccata attorno a una regione del minisuperspazio in cui la correlazione tra la coordinata a e il momento coniugato p_a (ossia tra il fattore di scala e il tasso di espansione) è data dalla relazione (4.36):

$$p_a = \frac{\partial S_0}{\partial a} = -\sqrt{-V(a)} \tag{4.37}$$

Usando l'espressione (4.11) per p_a, tale correlazione tra le variabili si riduce a:

$$\dot{a} = \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.38}$$

che non è altro che l'equazione di Einstein (4.3) per uno spaziotempo FLRW. Si può così concludere che, nella regione del minisuperspazio in cui è valida l'approssimazione WKB e la funzione d'onda dell'Universo è oscillante, emerge in modo naturale uno spaziotempo FLRW classico, cioè descritto dalle equazioni classiche della Relatività generale. In definitiva, la regione semiclassica del superspazio, definita dalla struttura oscillante della funzione d'onda dell'Universo, prende il nome di regione lorentziana, mentre la regione esterna a questa è detta euclidea.

Poiché gli aspetti non classici dell'evoluzione dello spaziotempo compaiono dal secondo ordine in poi nell'espansione asintotica in $\hbar$, si può affermare che lo spaziotempo classico emerge quando i termini di ordine superiore al primo sono piccoli [1]; ricordando la condizione (3.17), ciò risulta soddisfatto al primo ordine in $\hbar$ se si ha:

$$\left|d^2 S_0\right| \ll \left(dS_0\right)^2 \tag{4.39}$$

Ponendo $a \equiv n a_0$ e sostituendo l'espressione di a_0 in termini di Λ e quindi di ρ_{P}, si ottiene:

$$\alpha \ll \frac{9}{16} n^2 \frac{\left(n^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{2n^2-1} \tag{4.40}$$

Poiché l'approssimazione semiclassica richiede che sia $\alpha \ll 1$, allora per confronto si trova:

$$\frac{9}{16} n^2 \frac{\left(n^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{2n^2-1} \sim 1 \tag{4.41}$$

Questa equazione è soddisfatta per $n \approx 1,75$. Osservando il grafico 4.3, si nota che è proprio per $a \approx 1,75\, a_0$ che le varie funzioni d'onda dell'Universo diventano oscillanti: a questo punto nell'evoluzione dell'Universo, dunque, dalla schiuma quantistica iniziale emerge lo spaziotempo classico descritto dalle equazioni di campo di Einstein.

Capitolo 5

Conclusione

Dopo più di mezzo secolo di ricerca, è difficile negare che la Cosmologia quantistica sia una teoria scientifica ancora agli albori, come evidenziato dalle seguenti criticità: la mancanza di una ben definita struttura formale e interpretativa, la complessità tecnica che ostacola il raggiungimento di risultati teorici generali, l'assenza di (nuove) predizioni fisiche direttamente verificabili. Va però riconosciuto che quello della Cosmologia quantistica è un programma arduo e ambizioso, giustificato da notevoli motivazioni epistemologiche e anche da alcuni successi non da poco. Le motivazioni sono sia di carattere puramente conoscitivo, come la descrizione delle condizioni iniziali dell'Universo e la comprensione delle sue principali caratteristiche osservate, sia di tipo tecnico e teorico, come la risoluzione dei problemi del modello cosmologico standard e lo sviluppo di una teoria quantistica della gravità; la rilevanza di questi temi è tale da aver portato all'elaborazione della teoria in modo del tutto naturale, quasi necessario. Anche i risultati già raggiunti non possono essere sottovalutati: prima di tutto, la Cosmologia quantistica riesce a risolvere il problema delle condizioni iniziali cosmologiche perché, attraverso la sola assegnazione delle condizioni al contorno per la funzione d'onda dell'Universo, prevede sia la fase di espansione inflazionaria sia l'emergenza dello spaziotempo classico; inoltre, a ciò va aggiunta [4] la selezione del corretto stato quantistico del vuoto, ossia quello che di norma in Teoria quantistica dei campi viene assunto come ipotesi di lavoro per riuscire a spiegare la presenza di deviazioni dall'omogeneità nell'Universo osservato.

Secondo l'approssimazione WKB, le funzioni d'onda dell'Universo che hanno forma oscillante corrispondono allo spaziotempo classico in quanto sono piccate attorno a un insieme di soluzioni classiche delle equazioni di Einstein; in particolare, questo insieme di soluzioni è un sottoinsieme della soluzione generale, per cui le condizioni al contorno della funzione d'onda dell'Universo determinano a tutti gli effetti le condizioni iniziali per l'insieme delle soluzioni classiche. Più in generale, il limite classico rappresenta il criterio cruciale per individuare la funzione d'onda dell'Universo e per interpretarla in un modo che consenta efficacemente di fare predizioni, anche se non si è ancora d'accordo sui dettagli delle regole da impiegare per estrarre informazioni da tale funzione d'onda; oltretutto, le osservazioni a disposizione riguardano un universo classico, giacché non si è in grado di ottenere dati precedenti all'era di Planck. L'Universo ha attraversato diverse fasi di evoluzione e ciascuna di esse viene descritta con un modello fisico diverso; nell'osservare l'Universo oggi, perciò, è complicato distinguere tra gli effetti dovuti principalmente alle condizioni iniziali cosmologiche e quelli dovuti soprattutto all'evoluzione dinamica o comunque ai particolari modelli utilizzati per descriverne le fasi. È chiaro allora che i sopraccennati risultati costituiscano in realtà delle predizioni osservazionali indirette, mentre ottenere delle verifiche dirette sarà sicuramente molto ostico. Per una validazione della Cosmologia quantistica occorrono, per la precisione, degli effetti osservabili che non solo siano stati prodotti all'inizio della storia dell'Universo, ma che risultino anche imperturbati dalla sua susseguente evoluzione. Si comprende subito che si tratta di un compito assai impegnativo, tanto a livello teorico quanto a livello sperimentale, ragion per cui non è da escludere che si debba affrontare il problema di una Cosmologia quantistica capace di produrre soltanto predizioni inosservabili o indistinguibili. Al di là delle difficoltà evidenziate, in ogni caso, una spinta importante per questa ricerca proviene dalla Gravità quantistica: i modelli cosmologici sono dei semplici esempi a cui si potrebbero applicare le idee di una teoria completa di Gravità quantistica; l'Universo primordiale, inoltre, è probabilmente l'unico 'laboratorio' in cui si potrà testare una teoria quantistica della gravità.

Com'è tipico di una teoria scientifica nuova, la Cosmologia quantistica ha fatto emergere delle questioni profonde e inaspettate, relative ai concetti di cosmogenesi, tempo, spazio, evento, causalità; queste novità ci spingono a riconsiderare l'immagine classica e intuitiva del mondo, nonché le stesse leggi fisiche che vengono adoperate per descriverlo. Come se non bastasse, questa teoria riesce a mettere in risalto alcuni aspetti delicati del metodo scientifico inteso come metateoria, su tutti l'autoconsistenza e la verificabilità; non si può fare a meno, infatti, di soffermarsi a riflettere su interrogativi come i seguenti: "quali affermazioni scientifiche si possono fare su un sistema fisico in cui non è definita nemmeno la nozione di evento?", "se lo spaziotempo e la materia-energia si sono formati dal nulla, allora da dove provengono e di che natura sono le leggi fisiche che hanno sotteso questo avvenimento?", "si può considerare come scientificamente valida una teoria le cui predizioni non sono ben distinguibili o, nel migliore dei casi, si limitano a confermare risultati già noti?". Ad esempio, la predizione più originale e affascinante della teoria, ossia la cosmogenesi quantistica dal nulla, è chiaramente non testabile al momento, sia perché non ha lasciato (a quanto ne sappiamo) tracce osservabili, sia perché attualmente risulta inconcepibile pensare di poter riprodurre in laboratorio la formazione di un universo; d'altra parte, si può affermare che l'aver mostrato anche solo la possibilità di un evento del genere, ponendolo su basi matematiche solide e potenzialmente testabili, rappresenti già di per sé una conclusione di vasta portata.

Per quanto la strada in avanti non si prospetti del tutto agevole, è indiscutibile che lo sviluppo della Cosmologia quantistica sia legittimato da stimoli scientifici considerevoli e che i suoi risultati potranno far espandere ulteriormente le frontiere della Fisica; al contempo, comunque, non si può evitare di ponderare anche l'attrattiva delle domande di stampo autenticamente filosofico che questo studio si ritrova inevitabilmente ad affrontare: "perché esiste qualcosa piuttosto che nulla?", "quali sono le nostre origini?", "che cos'è la realtà?". È semplice prevedere che quesiti di questa profondità non smetteranno di alimentare, anche solo inconsciamente, una fervente ricerca avente il potenziale di far luce su alcune delle più viscerali questioni scientifiche ed esistenziali.

Bibliografia

[1] David Atkatz. «Quantum cosmology for pedestrians». In: *American Journal of Physics* (1994). URL: https://doi.org/10.1119/1.17479.

[2] David Bohm. *Quantum Theory*. Dover Publications, 1989.

[3] Martin Bojowald, Claus Kiefer e Paulo Vargas Moniz. «Quantum Cosmology for the XXIst Century: A Debate». In: *12th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*. 2010. URL: https://arxiv.org/abs/1005.2471v1.

[4] Salvatore Capozziello e Maria Funaro. *Introduzione alla Relatività Generale*. Liguori Editore, 2005.

[5] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.

[6] Bryce S. DeWitt. «Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory». In: *Physical Review* (1967). URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113.

[7] Bryce S. DeWitt e Neill Graham. *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1973.

[8] Hugh Everett. «"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics». In: *Review of Modern Physics* (1957). URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.29.454.

[9] Murray Gell-Mann e James B. Hartle. «Quantum Mechanics in the Light of Quantum Cosmology». In: *Proceedings of the 3rd International Symposium on The Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*. 1989. URL: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812819895_0036.

[10] Alan H. Guth. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». In: *Physical Review D* (1981). URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347.

[11] Alan H. Guth. «Speculations on the Origin of the Matter, Energy, and Entropy of the Universe». In: *Asymptotic Realms of Physics*. 1983. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983arp..book..199G.

[12] Jonathan J. Halliwell. «Introductory Lectures on Quantum Cosmology». In: *Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*. 1990. URL: https://arxiv.org/abs/0909.2566v1.

[13] Jonathan J. Halliwell. «The Interpretation of Quantum Cosmological Models». In: *13th Conference on General Relativity and Gravitation*. 1992. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9208001v1.

[14] James B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education Limited, 2014.

[15] James B. Hartle. «Initial Conditions and Quantum Cosmology». In: *Liege International Astrophysical Colloquia*. 1986. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986LIACo..26....1H.

[16] Claus Kiefer e Barbara Sandhöfer. *Quantum Cosmology*. 2008. URL: https://arxiv.org/abs/0804.0672v2.

[17] Lev Davidovich Landau e Evgeny M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1991.

[18] Charles W. Misner, Kip S. Thorne e John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman & Company, 1973.

[19] P. James E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.

[20] Lev Vaidman. «Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics». In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2018. URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/qm-manyworlds.

[21] Alexander Vilenkin. «Approaches to Quantum Cosmology». In: *Physical Review D* (1994). URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.2581.

[22] Alexander Vilenkin. «The quantum cosmology debate». In: *AIP Conference Proceedings* (1999). URL: https://doi.org/10.1063/1.59443.

[23] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.

[24] John Archibald Wheeler. *Geometrodynamics*. Academic Press, 1962.

[25] John Archibald Wheeler. «Superspace and the nature of quantum geometrodynamics». In: *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics* (1968).