UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Problemi a simmetria sferica in Relatività Generale

Relatore:
Salvatore Capozziello

Candidato:
Alice Damiano
Matr. N85001157

Anno Accademico 2019/2020

Al mio papà

Indice

Introduzione

Il primo requisito che una teoria fisica deve soddisfare è la riproducibilità dei risultati sperimentali. Dal punto di vista teorico, il primo passo è la descrizione di modelli quanto più semplici possibili, e successivamente renderli realistici, flessibili per adattarsi ai sistemi più complessi. Lo scopo di tale lavoro di tesi è offrire un "primo passo" verso una modellizzazione più complessa per quanto concerne lo studio di oggetti astrofisici compatti a simmetria sferica e il campo gravitazionale esterno da essi generato. Una simile analisi acquista grande rilievo se si considera che: dal punto di vista puramente teorico, la prima soluzione alle equazioni di campo di Einstein, proposta da Karl Schwarzschild nel 1916, descrive il campo gravitazionale a simmetria sferica prodotto da una sorgente sferica statica o che si muova di moto radiale e dal punto di vista dell'astrofisica relativistica vi sono innumerevoli corpi celesti che hanno distribuzione di massa sferica o in buona approssimazione possono essere considerati tali.
Dapprima verrà approntata una breve ricapitolazione dei fondamenti matematici della Teoria della Relatività Generale, nonchè i punti salienti che portano alla formulazione delle equazioni di campo, con particolare attenzione alla costruzione del tensore energia-impulso per un fluido perfetto, approssimazione che prelude ad una trattazione più approfondita nell'ultima parte del testo. Successivamente, si restituirà la derivazione completa della soluzione di Schwarzschild in coordinate (r, t, θ, ϕ); oltre alla rilevanza storica di cui abbiamo parlato, la soluzione di Schwarzschild necessita di attenzione particolare perchè innanzitutto offre uno strumento potentissimo per comprendere la discrepanza tra la teoria newtoniana e quella relativistica, in quanto mostra il carattere non-euclideo della struttura spaziotemporale per campi gravitazionali molto intensi, in secondo luogo è la metrica con cui vengono studiati oggetti del tutto peculiari, come buchi neri e collassi gravitazionali. Di fatti, dallo studio della metrica di Schwarzschild è possibile inferire che il campo gravitazionale deve essere *statico* e, con opportune variazioni di coordinate, che questo presenta una singolarità essenziale per $r = 0$, di cui non si discuterà, ed una superficie del tutto peculiare, denominata *orizzonte degli eventi* tale che ciò che vi penetri non possa più fuoriuscirne. A concludere il capitolo 2, dedicato alla soluzione esterna, verranno introdotte nuove coordinate dette *coordinate isotrope*, che, tramite espansione opportuna, permetteranno di introdurre parametri sperimentali da confrontare con i valori teorizzati dalla Relatività Generale, per provare la validità della teoria einsteiniana.

Il passaggio dal campo gravitazionale esterno, dove i risultati sono stati ottenuti a partire dalle equazioni di campo in assenza di materia:

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

verso lo studio della struttura interna di stelle sferiche, sarà oggetto di studio del terzo capitolo, laddove si tenterà di fornire alcuni risultati fondamentali per lo studio

di stelle relativistiche statiche a simmetria sferica.
La stella relativistica sarà idealizzata come un fluido perfetto, pertanto il modello sarà costruito a partire dai parametri fondamentali dell'idrostatica quali la pressione, la densità barionica e la densità di massa-energia, nonchè la conservazione del tensore energia-impulso. Per determinare univocamente le caratteristiche stellari occorrono cinque equazioni, due delle quali sono le *equazioni di stato* ed esprimono la dipendenza funzionale della densità di massa-energia e della pressione dalla densità barionica, pertanto variano a seconda della particolare stella considerata, non saranno quindi approfondite in questa sede, che auspica ad un approccio più generale. Le altre tre equazioni verranno ottenute a partire dalla conservazione del quadrimpulso e dalla risoluzione delle equazioni di campo. I risultati forniranno l'equivalente relativistico della condizione di equilibrio idrostatico , nonchè l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff, che esplicitano il processo più elementare alla base dell'equilibrio stellare: il bilancio tra l'attrazione gravitazionale ed il gradiente di pressione. In quest'ambito,verranno accennate alcune peculiarità delle stelle sferiche, in particolare la possibilità di definizione della distribuzione di massa-energia all'interno della stella e nel campo gravitazionale da essa generato. Come semplice esempio della risoluzione delle equazioni dell'equilibrio idrostatico, verrà analizzata la soluzione analitica per un fluito a densità uniforme, ancora una volta derivata da Schwarzschild nel 1916, benchè la soluzione a cui perverremo ha scarso interesse pratico essendo il modello a densità uniforme decisamente troppo restrittivo e, nei fatti, irrealistico.
Infine, si analizzeranno brevemente due esempi di configurazioni stellari relativistiche, quali le stelle di neutroni ed i buchi neri. Si farà esplicito riferimento al processo di collasso gravitazionale in atto negli stadi finali dell'evoluzione di una stella relativistica. Il processo può essere riassunto in alcuni punti chiave, quali *instabilità*, dovuta all'esaurimento del combustibile che altera l'equilibrio idrostatico fino all' *implosione.* Se la superficie stellare casca all'interno dell'*orizzonte degli eventi* nulla vi potrà più sfuggire e si arriverà ad un punto di non ritorno. Entro breve tempo $(\Delta\tau = 10^{-5}(m/M)_{\odot})$ dopo aver oltrepassato l'orizzonte verrà raggiunta la singolarità essenziale in $r = 0$.
A proposito della validità e della effettiva applicabilità dei risultati che verranno ottenuti, è bene sottolineare che il processo di collasso gravitazionale così descritto è valido per stelle relativistiche sferiche, mentre sopraggiungono chiaramente complicazioni quando si tenga conto della non-sfericità o della possibilità che esse possano possedere carica elettrica. Tuttavia, calcoli perturbativi sembrano mostrare che il collasso gravitazionale proceda nel modo descritto fino alla creazione di un buco nero.
Si rimarca, preliminarmente, che il collasso gravitazionale non va inteso come unico responsabile della nascita di un buco nero e che la trattazione non vuole essere esaustiva, quanto piuttosto fornire nozioni basilari e stimolare l'interesse, in vista di futuri sviluppi e approfondimenti nel campo dell'astrofisica relativistica.

Capitolo 1

Equazioni di campo

1.1 Sulla struttura metrica dello spazio-tempo

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile, definiamo metrica *pseudo-Riemanniana* su $\mathcal{M}$ un campo tensoriale g di tipo (0,2) che sia simmetrico e non degenere [1].
Se $(x^1, ..., x^n)$ definiscono le coordinate locali di un punto sulla varietà:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

La coppia $(\mathcal{M}, g)$ formata da una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ e da una metrica g pseudo-Riemanniana, definisce una varietà pseudo Riemanniana.

Detti inoltre r gli autovalori della matrice g_{ij} positivi ed s gli autovalori negativi, la coppia (r, s) è detta *segnatura* della metrica. In dimensione n una metrica tale che:

$$(r, s) = (1, n-1)$$

è detta *lorentziana*.

La Relatività Generale è una teoria metrica dello spazio-tempo: lo spazio-tempo è una varietà pseudo-riemanniana tetradimensionale caratterizzata da una metrica lorentziana, le linee di mondo seguite dai corpi di prova sono le geodetiche della metrica ed inoltre dato un punto $p \in \mathcal{M}$ esiste sempre un riferimento laddove la matrice g_{ij} assume la forma canonica:

$$g_{ij} = diag(1, -1, -1, -1)$$

detto sistema locale di Lorentz, in cui lo spazio è localmente piatto.

La curvatura su una varietà assume un ruolo di estremo rilievo nell'ambito della Relatività Generale, essendo questa lo strumento con cui viene descritta la gravità. Al fine di caratterizzare la curvatura mediante un'opportuno tensore, il tensore di Riemann, è necessario introdurre una nuova struttura sulla varietà, la *connessione*, indaghiamone brevemente le caratteristiche.
La richiesta di invarianza delle leggi fisiche per arbitrario cambiamento del sistema di riferimento scelto, impone che tali leggi conservino carattere covariante, ovvero tensoriale, ciò vuol dire che gli usuali operatori utilizzati in meccanica newtoniana devono essere ben definiti e trasformare opportunamente tensori in tensori. Tuttavia la derivata parziale di un tensore non è un tensore, di fatti, data una trasformazione

di coordinate $\overline{x}_\alpha = \overline{x}_\alpha(x_\mu)$ e un tensore $\overline{T}^\alpha$, si ha:

$$\frac{\partial \overline{T}^\alpha}{\partial \overline{x}^\rho} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^\rho}\left(\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^\mu} T^\mu\right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^\mu} T^\mu\right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\rho}\frac{\partial^2 \overline{x}^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} T^\mu + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\rho}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial T^\mu}{\partial x^\sigma}$$

che chiaramente non soddisfa la trasformazione di coordinate che definisce il tensore $\overline{T}^\alpha_{,\rho}$:

$$\overline{T}^\alpha_{,\rho} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \overline{x}^\rho} T^\mu_\sigma$$

Per eseguire un'operazione di derivazione che sia covariante, occorre aggiungere all'usuale derivata parziale una "correzione", costituita appunto dai coefficienti della connessione $\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}$:

$$D_\rho T^\alpha = \partial_\rho T^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} T^\sigma \tag{1.1}$$

Geometricamente, la correzione è dovuta alla necessità preliminare di trasportare le componenti del tensore, in modo tale che esse rimangano costanti,nello stesso punto sulla varietà,prima di confrontarle. Se nello spazio euclideo appare molto naturale confrontare due vettori posti in punti differenti, su una generica varietà abbiamo bisogno di introdurre la connessione: la differenza sta nel fatto che mentre nello spazio *piatto* è possibile definire univocamente un vettore per *trasporto parallelo*, il risultato del trasporto parallelo da un punto ad un altro su una varietà curva dipende dal cammino tra i due punti. Imponendo che il vettore T_β rimanga inalterato dopo il cammino infinitesimo da x^μ ad $x^\mu + dx^\mu$ otteniamo:

$$D_\mu T_\beta dx^\mu = 0 \tag{1.2}$$

Imponendo poi che esso torni su se stesso dopo un loop infinitesimo:

$$\oint \delta T_\beta = \oint \Gamma^\sigma_{\mu\beta} T_\sigma dx^\mu$$

ed applicando il teorema di Stockes, si ricava che condizione necessaria e sufficiente affinchè lo spazio sia piatto è che:

$$T_\alpha R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$$

dove:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \tag{1.3}$$

è il tensore di Riemann, che dunque rende conto e "quantifica" la curvatura sulla varietà. Malgrado il tensore di Riemann sia costruito a partire dai coefficienti di connessione e le loro derivate, che non hanno un carattere tensoriale, può essere mostrato che esso è effettivamente un tensore,e gode delle seguenti proprietà:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\mu} \tag{1.4}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\beta\alpha\nu\mu} = R_{\mu\nu\beta\alpha} \tag{1.5}$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} + R^\alpha_{\mu\nu\beta} + R^\alpha_{\nu\beta\mu} = 0 \tag{1.6}$$

e l'*identità di Bianchi*

$$R^\alpha_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^\alpha_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\alpha_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{1.7}$$

Il tensore definito tramite la seguente contrazione del primo e terzo indice del tensore di Riemann:

$$R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = R_{\beta\nu}$$

è detto tensore di Ricci, ed esso è simmetrico, grazie alla proprietà (1.5), dunque:

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta}$$

Inoltre,partendo dall'identità di Bianchi:

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^{\alpha}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

contraendo gli indici α e λ :

$$R_{\beta\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\beta\mu\nu;\lambda} - R_{\beta\nu;\mu} = 0$$

innalzando β e contraendo ancora β e μ, si ottiene:

$$R_{;\nu} - R^{\lambda}_{\nu;\lambda} - R^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \Rightarrow \; R_{;\nu} - 2R^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

da cui, moltiplicando per il tensore metrico $g_{\mu\rho}$, ed eguagliando gli indici ν e μ otteniamo:

$$\left(R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}R\right)^{;\mu} = 0 \tag{1.8}$$

Lo scalare $R = R^{\mu}_{\mu}$ è detto *scalare di Ricci.*

1.2 Le equazioni di campo

Avendo brevemente riassunto le caratteristiche imprescindibili della struttura spazio-temporale, si introdurranno ora delle equazioni covarianti che stabiliscono un legame tra la geometria dello spazio tempo e la materia che vi risiede, cerchiamo quindi una generalizzazione dell'equazione di Poisson per il potenziale newtoniano [2]:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{1.9}$$

dove ρ è la densità di massa, che sia covariante, del secondo ordine e si riproduca il limite newtoniano per campi deboli. La curvatura ricopre un ruolo imprescindibile in questo quadro, essa infatti rappresenta l'ente geometrico legato alla presenza di campi gravitazionali. In assenza di materia, imporre che tutte le componenti del tensore di Riemann si annullino:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$$

non è corretto: sebbene sia naturale assumere che in assenza di sorgenti di campo gravitazionale ci si riduca allo spazio minkowskiano piatto, possono essere comunque costruiti campi gravitazionali solenoidali, la cui usuale interpretazione è che essi siano validi entro determinate regioni, mentre le sorgenti di campo siano poste *oltre* tali regioni [3]. Più ragionevolmente, si può pensare di contrarre prima e terza componente del tensore di Riemann, ed affermare che in assenza di sorgenti si abbia:

$$R_{\beta\nu} = 0 \tag{1.10}$$

ovvero, in assenza di sorgenti il tensore di Ricci è nullo.

Analizziamo ciò che accade in presenza di sorgenti definendo il *tensore energia−impulso* $T^{\alpha\beta}$ le cui componenti sono la densità e la corrente del quadrimpulso. Il tensore energia-impulso è un tensore simmetrico:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

e la conservazione del quadrimpulso implica che la derivata covariante del tensore energia-impulso si annulli:

$$D_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.11}$$

Sebbene la determinazione della forma del tensore energia-impulso sia a priori cosa assai complessa, qui ci si limiterà al semplice caso di un fluido perfetto. Ciascun punto del fluido si muove con la medesima velocità $\mathbf{v}$ e in tale riferimento vede lo spazio attorno a sè come perfettamente isotropo [4]. In un riferimento comovente sulla superficie del fluido, ossia in un sistema locale di Lorentz:

$$T^{00} = \epsilon$$

dove ϵ è la densità di energià,

$$T^{ij} = T^{ji} = 0 \; per \; i \neq j$$

poichè il fluido è perfetto, ed infine, poichè il fluido è isotropo, la pressione p è una costante:

$$T^{ii} = p$$

Pertanto il tensore energia impulso assume la forma :

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

considerando poi che in un sistema a riposo la quadrivelocità:

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$$

ne deduciamo che il tensore energia-impulso può scriversi come:

$$T^{\alpha\beta} = \epsilon u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta} + pu^\alpha u^\beta = (\epsilon + p)u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta}$$

Per la covarianza, in un generico sistema di riferimento per un fluido perfetto:

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \tag{1.13}$$

Einstein suggerì che le equazioni di campo potessero assumere la forma:

$$R_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

con la costante di proporzionalità χ da determinare. Tuttavia, se per la conservazione del quadrimpulso vale la (1.11) , dovrebbe essere anche :

$$D^\alpha R_{\alpha\beta} = 0$$

che invece non è verificata. Tuttavia, ricordando l'equazione (1.8), le equazioni di campo possono essere scritte correttamente come:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta} \tag{1.14}$$

o, poichè:

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R = \chi g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \rightarrow R - 2R = \chi T \rightarrow R = -\chi T$$

nella forma equivalente:

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) \tag{1.15}$$

La derivazione delle equazioni di campo può essere inoltre ottenuta a partire da un principio variazionale, prendendo come lagrangiana $\mathcal{L} = R$ e imponendo [5]:

$$\delta\int\sqrt{-g}Rd\Omega = 0 \tag{1.16}$$

Già ci si rende conto che le equazioni di campo costituiscono un set di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali, tuttavia ancora non conosciamo il valore della costante χ e d'altra parte per decidere se tali equazioni sono in accordo con l'esperienza, è necessario anzitutto esaminare se, in prima approssimazione, conducono alla teoria newtoniana [6]. Si rende utile dunque analizzare il *limite di campo debole* che in effetti condurrà ad un primo esempio di metrica esterna ad una sorgente di campo gravitazionale sferica e stazionaria, valido con buoni margini di approssimazione per stelle newtoniane e pianeti [2].

1.3 Il limite di campi deboli

Per arrivare alla determinazione della costante χ che interviene nelle equazioni di campo, approfondiamo cosa accade nel limite di campi gravitazionali deboli, verificando che la condizione per cui le equazioni debbano riprodurre il limite newtoniano in tale regime sia soddisfatta. Innanzitutto, per *limite newtoniano* si intende la situazione in cui un corpo si muova ad una velocità $\mathbf{v}$ tale che $v/c \ll 1$ in un campo gravitazionale debole, cioè tale che

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{1.17}$$

dove $h^{\mu\nu}$ è una piccola perturbazione ($|h^{\mu\nu}| \ll 1$) e il campo sia statico. Se invece il campo è ancora debole ma può variare nel tempo, parliamo di *limite di campi deboli*. Partiamo analizzando le equazioni che caratterizzano il moto di una particella libera nelle due teorie.

Il moto di una particella materiale libera in Relatività Generale può essere derivato a partire dal principio variazionale di minima azione: la particella si muoverà in modo tale che la sua *linea di universo* sia l'estremale tra i due *punti di universo* dati, nello spazio ordinario a tre dimensioni ciò si traduce in un moto rettilineo uniforme [7]. Per tracciare il moto di una particella di prova in Relatività Generale dunque può essere applicato il principio di minima azione, oppure possiamo opportunamente "generalizzare" la condizione newtoniana che descrive il moto rettilineo ed uniforme di una particella libera:

$$\frac{du^\beta}{ds} = 0 \tag{1.18}$$

dove $\mathbf{u}$ è la velocità della particella. Nella varietà tetradimensionale spazio-temporale, l'operatore di derivazione covariante sostituisce e generalizza opportunamente la derivata ordinaria nello spazio euclideo. Dunque, utilizzando la (1.2), l'equazione (1.18) diviene:

$$Du^\beta = 0 \Rightarrow du^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}du^\gamma dx^\alpha = 0$$

dividendo per ds e ricordando che $u^\beta = dx^\beta/ds$ otteniamo:

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \tag{1.19}$$

Poichè d^2x^β/ds^2 è la quadriaccelerazione della particella, possiamo confrontare l'equazione ottenuta con la II legge della dinamica, da cui deduciamo che:

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}$$

se m è la massa della particella di prova: la quantità $-m\left(\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\right)$ costituiscono l'analogo delle *forze gravitazionali* e ricordando che:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = g^{\mu\rho}\{\rho,\lambda\nu\} \tag{1.20}$$

$$\{\rho,\lambda\nu\} = \frac{1}{2}(g_{\rho\lambda,\nu} + g_{\nu\rho,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho}) \tag{1.21}$$

ne deduciamo che i coefficienti della metrica $g_{\alpha\beta}$,nel confronto trala teoria newtoniana e quella di Einstein, assumono il ruolo dei potenziali gravitazionali. Per indagare tale relazione,consideriamo che ponendoci nel limite newtoniano per $i, j \neq 0$:

$$\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \simeq 1 \quad \frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds} \sim o\left(\frac{v}{c}\right) \quad \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \sim o\left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{1.22}$$

per ipotesi, in regime di campi deboli $\frac{v}{c} \ll 1$, quindi l'equazione (1.19) diviene:

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{00} = 0$$

Dalle equazioni (1.20) e (1.21)per le coordinate spaziali labellate dall'indice k, otteniamo:

$$\Gamma^k_{00} = g^{k\rho}\{\rho,00\} \simeq \eta^{k\rho}\{\rho,00\} = \eta^{kk}\frac{1}{2}(-g_{00,k}) = \frac{1}{2}g_{00,k} \tag{1.23}$$

dove nel primo passaggio si è fatto uso della (1.17), nel secondo è stata sfruttata l'ipotesi di staticità del campo ($g_{k0,0} = g_{0k,k} = 0$), mentre nel terzo $\eta^{kk} = -1$.
Se $dt \simeq d\tau$ sulla geodetica $ds^2 \simeq c^2dt^2$ dunque:

$$\frac{d^2x^k}{c^2dt^2} + \Gamma^k_{00} = 0$$

e sfruttando la (1.23) otteniamo infine:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{c^2}{2}g_{00,k} = 0$$

dal confronto con l'equazione di Newton:

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi$$

si ricava:

$$g_{00} = -\frac{c^2}{2}\Phi + costante$$

la costante si ricava facilmente nel limite per $R \to \infty$ laddove $\Phi \to 0$ e
$g_{00} \to 1$, mentre il potenziale gravitazionale per una sorgente di campo gravitazionale a simmetria sferica:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{1.24}$$

in definitiva:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} \tag{1.25}$$

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} \tag{1.26}$$

da cui la metrica nel limite newtoniano, se $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, sembrerebbe essere:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - dr^2$$

Cioè sembrerebbe che $g_{0\alpha} = 0$ e $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. In realtà, al primo ordine vi sono correzioni anche agli altri coefficienti della metrica, il motivo per cui non sono state ricavate con questo metodo risiede nel fatto che la correzione in $g_{\alpha\beta}$ conduce a infinitesimi di ordine superiore, come proviene dalla (1.22), cosa che accade poichè le componenti $g_{\alpha\beta}$ non sono moltiplicate per c^2 come avviene per g_{00} [7]. Per evitare di incorrere in questo problema, confrontiamo l'espressione generale della metrica in coordinate radiali per un campo gravitazionale debole a simmetria sferica:

$$ds^2 = g_{00} {dx^0}^2 + g_{11} {dx^2}^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.27}$$

con quella in un sistema di riferimento localmente inerziale:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl_{rad}^2 - dl_{perp}^2$$

dove abbiamo utilizzato il tempo proprio ($d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$) e distinto la direzione perpendicolare e trasversale del moto ($dl_{rad} = \sqrt{-g_{11}} dr$ e $dl_{perp} = \sqrt{-g_{22}} d\theta$) [5].
Per le trasformazioni di Lorentz, nella direzione del moto dl_{rad} si ha:

$$dr = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.28}$$

e tenuto conto del potenziale gravitazionale newtoniano a simmetria sferica (1.24):

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r}$$

da cui, espandendo al primo ordine l'equazione (1.28) ed uguagliando:

$$-g_{11} = 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

In modo analogo per $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ utilizzando le trasformazioni di Lorentz:

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

in conclusione, la metrica (1.27):

$$ds^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Si vedrà che la forma di g_{11} appena ricavata non è altro che il primo ordine di approssimazione in serie di Taylor della soluzione esterna di Schwarzschild che ricaveremo (2.10): piccole deviazioni dalla geometria galileiana sono coerentemente ottenute a

partire dallo sviluppo in serie della metrica nel vuoto a simmetria centrale.
In conclusione,per completezza, ricaviamo il valore della costante χ che compare nelle equazioni di campo:valutando la prima delle equazioni (1.10) si ha:

$$R_{00} = R^{\mu}_{0\mu,0} = \Gamma^{\mu}_{00,\mu} - \Gamma^{\mu}_{0\mu,0} + \Gamma^{\lambda}_{00}\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{0\mu}\Gamma^{\mu}_{\lambda 0}$$

poichè nell'ipotesi di campo statico $\Gamma^{\mu}_{0\mu,0} = 0$ mentre il prodotto tra due Γ è del secondo ordine nella perturbazione $h_{\mu\nu}$, per la (1.19), (1.20) e (1.21), si ha:

$$R_{00} \simeq \Gamma^{\mu}_{00,\mu} = \partial_{\mu}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho 0,0} + g_{0\rho,0} - g_{00,\rho})\right) = -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,ij} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \quad (1.29)$$

utilizzando la (1.26) vediamo che in assenza di sorgenti porre $R_{00} = 0$ equivale all'equazione di Laplace $\nabla^2\Phi = 0$.
In presenza di sorgenti e in approssimazione newtoniana, le particelle sono non relativistiche. In tale ipotesi, le pressioni sono trascurabili, pertanto:

$$T_{\mu\nu} = \epsilon u_{\mu}u_{\nu} = \rho c^2 u_{\mu}u_{\nu}$$

dove ρ è la densità di massa. Sfruttando l'equazione (1.15):

$$R_{00} = \chi\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right)$$

$$T = T^0_0 = \rho c^2 u^0 u_0 = \rho c^2 \Rightarrow R_{00} = \chi\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2\right) = \chi\frac{\rho c^2}{2}$$

Infine, facendo uso delle equazioni (1.26) e (1.29) otteniamo:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi = \chi\frac{\rho c^2}{2}$$

Da cui, per confronto cn l'equazione di Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ si ottiene:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho = \chi\rho\frac{c^4}{2} \Rightarrow \chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Infine, le equazioni di campo assumono la forma:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

In linea di principio vi sarebbero 16 equazioni indipendenti, tuttavia la simmetria per scambio degli indici di $g_{\alpha\beta}$,$R_{\alpha\beta}$ e $T_{\alpha\beta}$ riduce il numero a 10, imporre ulteriormente la (1.8) porta le equazioni effettivamente indipendenti a 6. Malgrado la loro forma elegante, le equazioni di campo prevedono il calcolo di derivate e prodotti dei simboli di Christoffel, che a loro volta si ottengono come prodotto dell'inverso dei coefficienti della metrica per le derivate degli stessi, ed inoltre sono equazioni non lineari; si comprende dunque che risalire alle soluzioni è cosa assai complessa, da qui la necessità di muovere da alcune assunzioni sulla simmetria della metrica.
E' stata appena derivata la metrica esterna ad una sorgente di campo gravitazionale statica a simmetria sferica al primo ordine dell'approssimazione per campi deboli, muoviamo ora da tale limite ed estendiamo la trattazione di sorgenti di campo a simmetria sferica in Relatività Generale.

Capitolo 2

La soluzione di Schwarzschild esterna

Le equazioni di campo di Einstein sono un set di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, e in ciò risiede la complessità nel determinarne le soluzioni. Le prime due soluzioni esatte alle equazioni di campo furono ricavate da Karl Schwarzschild, in due articoli pubblicati tra gennaio e febbraio del 1916 ([8] e [9]).La prima soluzione descrive la metrica esterna ad una sfera in equilibrio idrostatico,mentre la seconda la metrica interna ad un fluido perfetto incompressibile a simmetria sferica. Nel seguito, verrà derivata la soluzione per il campo gravitazionale esterno alla sorgente sferica (che o è in quiete o si muove di moto puramente radiale); malgrado la sua semplicità questa rappresenta, come vedremo, la prima idealizzazione del campo prodotto da una stella.

2.1 La metrica di Schwarzschild

Se assumiamo una simmetria sferica, la metrica può scriversi come:

$$ds^2 = A(r,t)c^2dt^2 - B(r,t)dr^2 - C(r,t)drdt - D(r,t)r^2(d\theta^2 + (\sin\theta)^2\ d\phi^2)$$

che contempla la possibilità di un moto puramente radiale della sorgente. Senza perdere di generalità, ponendosi nel nuovo sistema di coordinate tali che [3]:

$$r' = \sqrt{D(r,t)}r \quad t' = t'(r,t) \quad \theta' = \theta \quad \phi' = \phi$$

e sostituendo dell'espressione per ds^2 con un'espressione opportuna per $t'(r,t)$, rinominando gli apici $r' \to r$ e $t' \to t$, si ottiene:

$$ds^2 = A(r,t)dt^2 - B(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\phi^2)$$

resta arbitrarietà sulla scelta delle funzioni $A(r,t)$ e $B(r,t)$ che Schwarzschild pone nella forma esponenziale

$$A(r,t) = e^{\nu(r,t)} \quad B(r,t) = e^{\lambda(r,t)}$$

per evitare singolarità, ma anche in operando quest'accortezza, vedremo che la soluzione trovata presenterà singolarità. In definitiva il tensore metrico assume la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

In assenza di sorgenti, le equazioni di campo si riducono a $R_{\alpha\beta} = 0$. Nel seguito, si calcoleranno dapprima i simboli di Christoffel, esplicitando la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = e^{\nu}(\dot{x}^0) - e^{\lambda}(\dot{x}^1) - r^2(\dot{x}^2) - r^2 sin^2\theta(\dot{x}^3) \tag{2.2}$$

e l'equivalenza tra le equazioni della geodetica:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{2.3}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

Una volta ottenuti i simboli di Christoffel si potrà utilizzare l'espressione (1.3) per calcolare le componenti del tensore di Ricci e porle uguali a zero.
Procediamo con il calcolo di ciascuna delle equazioni di Eulero-Lagrange a partire dalla (2.2):

- $\mu = 0$

  $$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \frac{d}{ds}(2e^{\nu}\dot{x}^0) = 2e^{\nu}\ddot{x}^0 + 2e^{\nu}\nu_r\dot{x}^0\dot{x}^1 + \frac{2}{c}e^{\nu}\nu_t\dot{x}^0\dot{x}^0$$

  dove $\nu_r = \frac{\partial \nu}{\partial r}$ e $\nu_t = \frac{\partial \nu}{\partial t}$

  $$\frac{\partial L}{\partial x^0} = \frac{1}{c}e^{\nu}\nu_t(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{c}e^{\lambda}\lambda_t(\dot{x}^1)^2$$

  dunque:

  $$\ddot{x}^0 + \nu_r\dot{x}^0\dot{x}^1 + \frac{1}{c}(\dot{x}^0)^2\nu_t - \frac{1}{2c}\nu_t(\dot{x}^0)^2 + \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\lambda_t(\dot{x}^1)^2$$

  per confronto con l'equazione della geodetica 2.3 si evince che:

  $$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\nu_t \quad \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\nu_r \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\lambda_t$$

- $\mu = 1$

  $$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = \frac{d}{ds}(-2e^{\lambda}\dot{x}^1) = -2e^{\lambda}\ddot{x}^1 - 2e^{\lambda}\lambda_r(\dot{x}^1)^2 - \frac{2e^{\lambda}}{c}\lambda_t\dot{x}^1\dot{x}^0$$

  $$\frac{\partial L}{\partial x^1} = e^{\nu}\nu_r(\dot{x}^0)^2 - e^{\lambda}\lambda_r(\dot{x}^1)^2 - 2r(\dot{x}^2)^2 - 2r\sin^2\theta(\dot{x}^3)^2$$

  l'equazione di Eulero-Lagrange è quindi:

  $$\ddot{x}^1 + \lambda_r(\dot{x}^1)^2 + \lambda_t\dot{x}^1\dot{x}^0 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{2}\lambda_r(\dot{x}^1)^2 - re^{-\lambda}(\dot{x}^2)^2 - re^{-\lambda}\sin^2\theta(\dot{x}^3)^2$$

  i simboli di Christoffel sono:

  $$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r \quad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{\lambda_t}{2c} \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_r}{2} \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} \quad \Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta$$

- $\mu = 2$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = \frac{d}{ds}(-2r^2\dot{x}^2) = -4r\dot{x}^2\dot{x}^1 - 2r^2\ddot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} = -2r^2 \sin\theta\cos\theta(\dot{x}^3)^2$$

$$\ddot{x}^2 + \frac{2}{r}\dot{x}^2\dot{x}^1 - \sin\theta\cos\theta(\dot{x}^3)^2 = 0$$

dunque:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

- $\mu = 3$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = \frac{d}{ds}(-2r^2\sin^2\theta\dot{x}^3) = -2(2r\sin^2\theta\dot{x}^3\dot{x}^1 + r^2\sin^2\theta\ddot{x}^3 + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{x}^3\dot{x}^2)$$

mentre:

$$\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0$$

dunque:

$$\ddot{x}^3 + \frac{2}{r}\dot{x}^3\dot{x}^1 + 2\cot\theta\dot{x}^3\dot{x}^2 = 0$$

infine:

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma 3_{13} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

Procediamo col calcolare le componenti del tensore di Ricci,sfruttando la relazione

$$\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\ln\sqrt{-g})$$

si ha per il tensore di Ricci:

$$R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha,\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\nu x^\beta}(\ln\sqrt{-g}) + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\ln\sqrt{-g}\right) - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}$$

laddove, calcolando la traccia dell'espressione (2.1)

$$g = -e^\nu e^\lambda r^4 sin^2\theta$$

da cui:

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 sin\theta$$

Partiamo da $R_{01} = 0$:

$$R_{01} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{01} - \frac{\partial^2}{\partial x^0 x^1}(\ln\sqrt{-g}) + \Gamma^\sigma_{01}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\ln\sqrt{-g}\right) - \Gamma^\sigma_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma 1} = 0$$

calcoliamo indipendentemente i vari termini:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{01} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{01} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{01} = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{1}{2}\nu_r\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{2c}\lambda_t\right) = \frac{1}{2c}(\lambda_{rt} + \nu_{tr}) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^1}\left(\ln\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^1}\left(\frac{\nu+\lambda}{2} + 2\ln r + \ln sin\theta\right) = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2} + \frac{2}{r}\right) = \frac{\nu_{rt}+\lambda_{rt}}{2c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\ln\sqrt{-g}\;\Gamma^\sigma_{01} = \Gamma^0_{01}\frac{\partial}{\partial x^0}\ln\sqrt{-g} + \Gamma^1_{01}\frac{\partial}{\partial x^1}\ln\sqrt{-g} =$$
$$= \frac{1}{2}\nu_r\left(\frac{\nu_t+\lambda_t}{2}\right) + \frac{1}{2c}\lambda_t\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2} + \frac{2}{r}\right) = \frac{1}{4c}(\nu_r\nu_t + \lambda_t\lambda_r) + \frac{1}{2c}(\nu_r\lambda_t) + \frac{1}{cr}\lambda_t$$

$$\Gamma^\alpha_{\sigma 1}\Gamma^\sigma_{0\alpha} = \Gamma^0_{\sigma 1}\Gamma^\sigma_{00} + \Gamma^1_{\sigma 1}\Gamma^\sigma_{01} = \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{01}$$
$$= \frac{1}{2}\nu_r\frac{1}{2c}\nu_t + \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\nu_t\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r + \frac{1}{2c}\lambda_t\frac{1}{2}\nu_r + \frac{1}{2}\lambda_r\frac{1}{2c}\lambda_t = \frac{1}{4c}\left(\nu_r\nu_t + \lambda_r\lambda_t + 2\lambda_t\nu_r\right)$$

Ed unendo tali termini nella (2.4) si ottiene:

$$R_{01} = 0 \Rightarrow \frac{1}{cr}\lambda_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = 0$$

Procediamo in maniera analoga a quanto appena fatto, stavolta ponendo R_{00}=0

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{00} - \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2}\left(\ln\sqrt{-g}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\ln\sqrt{-g}\right)\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\alpha_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{0\alpha} = 0$$

Sviluppando ciascun termine indipendentemente, e tenendo conto del risultato appena ottenuto $\lambda_t = 0$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{00} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0_{00} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2c^2}\nu_{tt} + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu_r - \lambda_r)\nu_r + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_{rr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2}(\ln\sqrt{-g}) = \frac{\nu_{tt}}{2c^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\ln\sqrt{-g})\Gamma^\sigma_{00} = \frac{\partial}{\partial x^0}(\ln\sqrt{-g})\Gamma^0_{00} + \frac{\partial}{\partial x^1}(\ln\sqrt{-g})\Gamma^1_{00} = \frac{1}{4c^2}\nu_t^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2} + \frac{2}{r}\right)$$

$$\Gamma^\alpha_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{0\alpha} = \Gamma^0_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{00} + \Gamma^1_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{01} = \left(\Gamma^0_{00}\right)^2 + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \left(\Gamma^1_{01}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}\nu_t^2 + \frac{1}{2}\nu_r^2 e^{\nu-\lambda}$$

dunque:

$$R_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{2\nu_r}{r} - \frac{1}{2}\lambda_r\nu_r\right) = 0 \tag{2.5}$$

Ancora, imponendo $R_{11} = 0$:

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{11} - \frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2}\left(\ln\sqrt{-g}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\ln\sqrt{-g}\right)\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^\alpha_{\sigma 1}\Gamma^\sigma_{1\alpha} = 0$$

e calcolando i termini componenti:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{11} = \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda_{rr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2}(\ln\sqrt{-g}) = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2} + \frac{2}{r}\right) = \frac{\nu_{rr}+\lambda_{rr}}{2} - \frac{2}{r^2}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{11}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\ln\sqrt{-g})=\Gamma^{0}_{11}\frac{\partial}{\partial x^{0}}(\ln\sqrt{-g})+\Gamma^{1}_{11}\frac{\partial}{\partial x^{1}}(\ln\sqrt{-g})=\frac{1}{2}\lambda_r\left(\frac{\lambda_r+\nu_r}{2}+\frac{2}{r}\right)$$

$$(\Gamma^{0}_{10})^2+2\Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{11}+(\Gamma^{1}_{11})^2+(\Gamma^{2}_{12})^2+(\Gamma^{3}_{13})^2=\frac{1}{4}\nu_r^2+\frac{1}{4}\lambda_r^2+\frac{2}{r^2}$$

Si ottiene infine, per $R_{11}=0$:

$$-\frac{1}{2}\left(\nu_{rr}+\frac{1}{2}\nu_r^2-\frac{1}{2}\nu_r\lambda_r-2\frac{\lambda_r}{r}\right)=0 \tag{2.6}$$

Dalle equazioni (2.5) e (2.6) ricaviamo:

$$\nu_{rr}+\frac{1}{2}\nu_r^2+\frac{2\nu_r}{r}-\frac{1}{2}\lambda_r\nu_r=0 \tag{2.7}$$

$$\nu_{rr}+\frac{1}{2}\nu_r^2+2\frac{\lambda_r}{r}-\frac{1}{2}\lambda_r\nu_r=0 \tag{2.8}$$

da cui, sottraendo membro a membro:

$$\lambda_r+\nu_r=0\Rightarrow\lambda_r=-\nu_r\ e\ \lambda+\nu=cost$$

dovendo la metrica ridursi alla metrica piatta per r $\rightarrow\infty$:

$$ds^2=c^2dt^2-dr^2-d\Omega^2$$

deve aversi $e^{\lambda}\rightarrow 1$ e $e^{\nu}\rightarrow 1$, dunque $cost=0$. Utilizzando il risultato $\lambda_r=-\nu_r$ e $\lambda=-\nu$ nell'equazione (2.5) abbiamo:

$$R_{00}=\frac{1}{2}e^{2\nu}\left(\nu_{rr}+\nu_r^2+2\frac{\nu_r}{r}\right)=0$$

un'espressione formalmente analoga può essere ottenuta da $\frac{e^{\nu}}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(e^{\nu}r)=0$, di fatti:

$$\frac{e^{\nu}}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(e^{\nu}r)=0=\frac{e^{\nu}}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(r\nu_re^{\nu}+e^{\nu})=\frac{e^{\nu}}{2r}(\nu_re^{\nu}+r\nu_{rr}e^{\nu}+r\nu_r^2e^{\nu}+\nu_re^{\nu})=\frac{1}{2}e^{2\nu}(\nu_{rr}+\nu_r^2+2\frac{\nu_r}{r})$$

per cui, per integrazioni successive:

$$\frac{e^{\nu}}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(e^{\nu}r)=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(e^{\nu}r)=0\Rightarrow re^{\nu}=Ar+B\Rightarrow e^{\nu}=A+\frac{B}{r}$$

Le costanti possono ancora una volta essere determinate nel limite asintotico $r\rightarrow\infty$ dove $e^{\nu}\rightarrow 1$, ciò implica che $A=1$, mentre nel limite newtoniano dovendo valere (3.11):

$$e^{\nu}=g_{00}=1-\frac{2GM}{c^2r}=1-\frac{R_S}{r}=e^{-\lambda} \tag{2.9}$$

dove è stata definita la quantità $R_S=\frac{2GM}{c^2}$ detta *raggio di Schwarzschild*, la metrica, in tale limite, è dunque:

$$ds^2=\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{R_S}{r}}-r^2d\Omega^2 \tag{2.10}$$

Osservando la forma della metrica ottenuta, sono evidenti due importanti risultati che essa sottende: l'indipendenza dalla coordinata temporale e la presenza di singolarità. Entrambe queste caratteristiche verranno approfondite nella successiva sezione. Inoltre, risulta chiaro che molto lontano dalla sorgente (r $\rightarrow\infty$) la metrica diventa *minkowskiana*: è interessante notare che questa è una caratteristica della soluzione e non è stata un'assunzione iniziale: asintoticamente t ed r hanno lo stesso significato che in Relatività Speciale [10].

2.2 Il teorema di Birkhoff e le singolarità

La sola ipotesi di partenza alla soluzione di Schwarschild è che la sorgente di campo abbia simmetria sferica, ma il risultato ottenuto ha una caratteristica sorprendente: l'indipendenza dal tempo. Preserviamoci, per ora, dalla regione singolare, per $r > R_S$, banalmente, dalla metrica (2.10):

$$g_{\alpha\beta,0} = 0$$

che implica che la soluzione sia *stazionaria*,cioè tale che il moto sia simmetrico [1]. Non solo: la soluzione è anche invariante sotto riflessione [11]:

$$t \to t' = -t$$

e per traslazione temporale:

$$t \to t' = t + cost$$

e dunque la soluzione è *statica.* La non linearità delle equazioni di campo si manifesta in maniera stupefacente, facendo infatti solo un'ipotesi iniziale sulle caratteristiche simmetriche spaziali, si perviene ad una stringente condizione sulla dinamica temporale, che trova la sua formulazione nel:

Teorema 1 (Teorema di Birkhoff) *Nel vuoto, una soluzione a simmetria sferica delle equazioni di campo, per un osservatore esterno, è necessariamente statica.*

Implicazione immediata del teorema è che la soluzione di Schwarzschild sia anche *l'unica* soluzione a simmetria sferica possibile. In conclusione, una sorgente di campo gravitazionale che evolva in maniera simmetricamente sferica non può propagare nulla nello spazio circostante (per $r > R_S$), in quanto esso deve necessariamente rimanere statico.

Oltre alla stazionarietà, la caratteristica lampante della metrica di Schwarzschild è la presenza di singolarità per $r = 0$ e $r = R_S$. E' del tutto ammissibile che i coefficienti della metrica siano singolari, nella misura in cui essi dipendono dalle particolari coordinate scelte e dunque sono eliminabili,ed in questo caso si parla di *singolarità coordinate.* In virtù della coovarianza le singolarità non eliminabili, dette *reali* o *intrinseche*, vanno ricercate nella forma di quantità ottenute a partire dal tensore di Riemann o dal tensore di Ricci, per prodotto scalare o contrazione degli indici. In questo senso, è possibile dimostrare che [2]:

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48G^2M^2}{r^6}$$

e che invece è possibile eliminare la singolarità in $r = R_S$ adottando nuovi sistemi di coordinate mentre gli invarianti scalari di curvatura hanno un andamento regolare per $r = R_S$. Possiamo allora affermare mentre R_S è una singolarità coordinata, per $r = 0$ troviamo invece una singolarità intrinseca, di cui non ci si occuperà in questo testo. Tuttavia, alcune caratteristiche del tutto peculiari possono essere evidenziate analizzando le geodetiche della metrica di Schwarzschild, dallo studio delle quali si

[1] Più precisamente, una metrica è detta stazionaria quando essa possiede un vettore di Killing di tipo time-like, se inoltre tale vettore è ortogonale alla famiglia di ipersuperfici tali che $t = cost$ tale metrica è detta *statica.*

[2] E' possibile trovarne una dimostrazione in [12].

evince che la quantità R_S, sebbene non singolare, giochi un ruolo speciale all'interno della teoria. Delineiamo le linee essenziali di questo approccio, studiando le geodetiche nulle, cioè traiettorie di raggi luminosi.
Innanzitutto, la lagrangiana di una particella di prova in un sistema di riferimento di coordinate x^α con parametro affine du sulla geodetica è legata al tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ dalla relazione [13]:

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du}$$

dalla metrica di Schwarzschild (2.10) ricaviamo per la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{R_S}{r}} - r^2\dot{\theta}^2 - (r\sin\theta)^2\dot{\phi}^2\right) \tag{2.11}$$

mentre i momenti coniugati p_α sono tali che:

$$p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = \left(1-\frac{R_S}{r}\right)c\dot{t} \qquad p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} \qquad p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = (r\sin\theta)^2\dot{\phi}$$

Dall'espressione dell'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{q}}(t)\mathbf{p}(t) - \mathcal{L} = p_t\dot{t} - p_r\dot{r} - p_\theta\dot{\theta} - p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

interpretabile come la mancanza del termine di "potenziale": l'energia è puramente cinetica (si identificherà con K nel seguito)ed inoltre, considerando una geodetica nulla $\mathcal{H} = \mathcal{L}$=0. Limitiamoci ancora al caso in cui $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ cioè alle geodetiche di tipo "radiale", in questo caso la (2.11) diviene:

$$K = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{R_S}{r}}\right) = 0 \tag{2.12}$$

ed imponendo l'equazione di Eulero-Lagrange per la coordinata t, poichè $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$ otteniamo:

$$\frac{d}{du}\left[\left(1-\frac{R_S}{r}\right)\dot{t}c\right] = 0$$

da cui, per integrazione:

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)\dot{t}c = a \tag{2.13}$$

dove a è una costante, sostituendo nella (2.12) si ottiene:

$$\dot{r}^2 = a^2 \Rightarrow \dot{r} = \pm a \tag{2.14}$$

A partire da questi risultati, valutiamo qualitativamente l'andamento della coordinata t in funzione della coordinata radiale:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{du}\frac{du}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}$$

per le equazioni (2.13) e (2.14), scegliendo il segno positivo:

$$\dot{t} = \frac{a}{c\left(1-\frac{R_S}{r}\right)} \qquad \dot{r} = a$$

da cui:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{(r - R_S)\, c}$$

per integrazione, tramite la sostituzione $y = r - R_S$:

$$t(r) = \frac{1}{c}\int \frac{r}{r - R_S} dr = \frac{1}{c}\int \frac{y + R_S}{y} dy = \frac{1}{c}\left(y + R_S \ln y + cost\right)$$

da cui:

$$t(r) = \frac{1}{c}(r + R_S \ln |r - R_S|) + cost_+$$

oppure, definendo:

$$\mathcal{R} = r + R_S ln|r - R_S| \tag{2.15}$$

$$t(r) = \frac{1}{c}\mathcal{R} + cost_+ \tag{2.16}$$

e notiamo che se $r > R_S \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0$, in questo caso si parla di *geodetiche nulle radiali uscenti*, se $r < R_S$ la coordinata r decrementa con t e dunque si parla di *geodetiche nulle radiali entranti*. Se scegliamo il segno negativo $\dot{r} = -a$ si ottiene:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-r}{(r - R_S)\, c^2}$$

e con procedimento analogo al precedente:

$$t(r) = -\frac{1}{c}(r + R_S \ln |r - R_S|) + cost_-$$

oppure:

$$t(r) = -\frac{1}{c}\mathcal{R} + cost_- \tag{2.17}$$

in questo caso per $r > R_S$ le geodetiche sono entranti, per $r < R_S$ sono uscenti. L'introduzione della coordinata $\mathcal{R}$ è importante nella misura in cui questa è definita su tutto lo spazio esterno ad R_S di fatti:

$$r \to -R_S \Rightarrow \mathcal{R} \to -\infty \quad r \to -R_S \Rightarrow \mathcal{R} \to +\infty$$

Il grafico di t in funzione di r, per θ e ϕ fissati è mostrato in figura (2.1), dove sono mostrati anche i coni luce nelle due regioni. Inoltre, la metrica di Schwarzschild nelle coordinate t ed $\mathcal{R}$ diviene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(dt^2 - d\mathcal{R}^2\right) - r(\mathcal{R})^2 d\Omega^2 \tag{2.18}$$

Riprendiamo l'equazione (2.14), essa implica:

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} = \pm a \Rightarrow r = \pm au + cost_\pm$$

per confronto con l' equazione (2.15) ne deduciamo che le geodetiche radiali attraversano l'orizzonte $r = R_S$ senza alcuna difficoltà nel tempo proprio, mentre impiegano un tempo infinito per raggiungere *l'orizzonte* delineato da R_S nel tempo coordinato, ad esempio per un osservatore esterno.

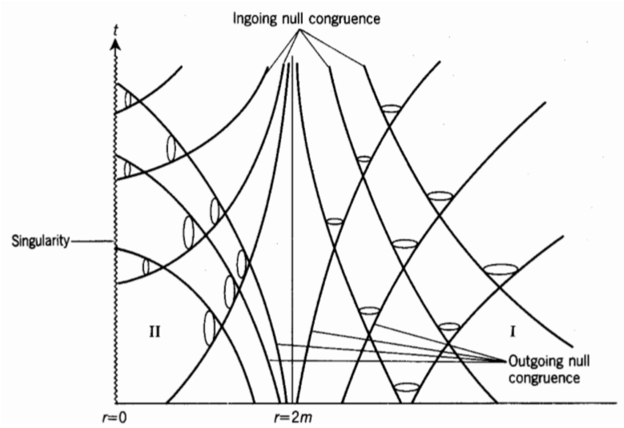

Figura 2.1: Geodetiche nulle radiali in coordinate di Schwarzschild in unità tali che $G = 1$ e $c = 1$.

Per approfondire ulteriormente, operiamo un cambio di coordinate che si adattino naturalmente alle geodetiche nulle radiali in modo tale che esse siano linee rette in tale sistema di coordinate, cioè,banalmente dall'equazione (2.16) poniamo:

$$u = \frac{1}{c}\mathcal{R} + t$$

con tale scelta le geodetiche nulle radiali entranti nella regione $r < R_S$ sono caratterizzate da:

$$u = cost$$

E operando la stessa scelta per nel secondo caso per l'equazione (2.17) , introducendo una nuova coordinata v tale che nella regione $r < R_S$ le geodetiche nulle radiali uscenti siano caratterizzate da $v = cost$:

$$v = -\frac{1}{c}\mathcal{R} + t$$

utilizzando le coordinate (u, r, θ, ϕ) poichè:

$$du = dt + d\mathcal{R} \quad d\mathcal{R} = dr + \frac{R_S}{r - R_S}dr$$

la metrica (2.18) assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 - dudr - drdu - r^2 \sin^2\theta$$

da cui:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

dunque, il determinante $g = -r^4 \sin^2\theta$ e sebbene il coefficiente g_{00} si annulli per $r = R_S$ non c'è alcuna singolarità sul raggio di Schwarzschild. Tale sistema di coordinate prende il nome di coordinate di Eddington-Finkelstein, possiamo delinearne alcune peculiarità, in vista di un ulteriore approfondimento nel prossimo capitolo. Notiamo, infatti, che le geodetiche nulle nelle coordinate di Eddington-Finkelstein si ottengono chiaramente imponendo:

$$ds^2 = 0$$

da cui:

$$\frac{du}{dr} = 0 \qquad \frac{du}{dr} = \frac{2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}$$

la metrica è perfettamente regolare in R_S ma se $r < R_S$ dalla seconda delle espressioni precedenti ricaviamo che $\frac{du}{dr} < 0$ cioè le traiettorie dirette nel *futuro* procedono con r decrescente, dunque verso $r = 0$. R_S in questo senso non è una singolarità intrinseca ma un *punto di non ritorno* in quanto una volta che un corpo vi si trovi all'interno non può più fuoriuscirne, per tale motivo R_S viene detto *orizzonte degli eventi*: nessun evento che abbia $r < R_S$ può influenzare ciò che accade per $r > R_S$ e dunque non è possibile ottenere informazioni circa quanto vi è all'interno, per questo motivo si parla di *buco nero*.

Prima di approfondire ulteriormente le caratteristiche dei buchi neri non rotanti e non carichi, lasciamo la metrica *esterna* alla sorgente di campo sferica operando un nuovo cambio di coordinate nell'ipotesi in cui il campo sia isotropo.

2.3 Le coordinate isotrope

Introduciamo in questa sezione un nuovo sistema di coordinate per la metrica di Schwarzschild che conduce alla determinazione teorica di tre parametri, α, β e γ, particolarmente utili per effettuare verifiche sperimentali della Teoria della Relatività Generale.

Supponiamo che il campo esterno ad una sorgente a simmetria sferica sia stazionario ed isotropo, la metrica può scriversi come [5]:

$$ds^2 = A(\rho)c^2dt^2 - B(\rho)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2dt^2 - B(\rho)\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right) \tag{2.19}$$

dove:

$$\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

affinchè la metrica (2.19) riproduca la metrica di Schwarzshild (2.10) deve essere:

$$B(\rho)d\rho^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} \quad B(\rho)\rho^2 = r^2 \tag{2.20}$$

da cui:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R_S r}}$$

per integrazione:

$$\ln\rho + cost = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R_S r}} \tag{2.21}$$

uno dei modi per svolgere l'integrale a secondo membro potrebbe essere completando il quadrato al denominatore e per sostituzioni successive, come mostrato:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R_S r}} = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R_S r + \frac{R_S^2}{4} - \frac{R_S^2}{4}}} = \int \frac{dr}{\left(r - \frac{R_S}{2}\right)^2 - \frac{R_S^2}{4}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{R_S^2}{4}}}$$

dove chiaramente $y = r - \frac{R_S}{2}$. Ancora, moltiplicando e dividendo al denominatore per $\frac{R_S}{2}$ ed effettuando la sostituzione $x = \frac{2}{R_S}y$ e successivamente $x = \cosh t$ si ha:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{4}{R_S^2} - 1}\frac{R_S}{2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sinh t}{\sqrt{(\cosh t)^2 - 1}} dt = t + cost$$

procedendo a ritroso:

$$t = \text{arcosh} x = \text{arcosh}\left(\frac{2}{R_S}\left(r - \frac{R_S}{2}\right)\right) = \ln\left(\left(\frac{2r}{R_S} - 1\right) + \sqrt{\frac{4r^2}{R_S^2} - R_S}\right)$$

In conclusione, mettendo in evidenza $\frac{2}{R_S}$ e riprendendo la (2.21)otteniamo:

$$\ln\rho + cost = \ln\left(\left(r - \frac{R_S}{2}\right) + (r^2 - R_S r)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Imponendo che all'infinito lo spazio sia piatto, cioè $B(\rho) = 1$ e dunque all'infinito $\rho = r$ per l'equazione (2.20). Allora:

$$\ln\rho + cost = \ln\left(r\left(1 - \frac{R_S}{2r}\right) + r\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq \ln(2r) = \ln 2 + \ln r \Rightarrow cost = \ln 2$$

da cui:

$$2\rho = \left(r - \frac{R_S}{2}\right) + \left(r^2 - R_S r\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

procediamo notando che:

$$\left[\left(r - \frac{R_S}{2}\right) + \left(r^2 - R_S r\right)^{2}\right]\left[\left(r - \frac{R_S}{2}\right) - \left(r^2 - R_S r\right)^{2}\right] = \left[\left(r - \frac{R_S}{2}\right)^2 - \left(r^2 - R_S r\right)\right] = \left(\frac{R_S}{2}\right)^2$$

Utilizzando questa eguaglianza e sostituendo nella (2.22):

$$\left(r - \frac{R_S}{2}\right) - \left(r^2 - R_S r\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R_S^2}{8\rho}$$

che ancora sommata alla (2.22):

$$2\left(r - \frac{R_S}{2}\right) = 2\rho + \frac{R_S^2}{8\rho} \Rightarrow 2r - R_S = 2\rho\left(1 + \frac{R_S^2}{16\rho^2}\right) \Rightarrow r = \rho\left(1 + \frac{R_S}{4\rho}\right)^2$$

da cui, sostituendo nella metrica 2.19:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{R_S}{\rho}}{1 + \frac{R_S}{\rho}}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

Sviluppando in serie di Taylor per $\frac{R_S}{\rho} \to 0$ cioè per grandi distanze dalla sorgente:

$$ds^2 \simeq \left(1 - \frac{R_S}{\rho} + \frac{R_S^2}{2\rho^2} + ...\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{R_S}{\rho} + ...\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right) \tag{2.23}$$

Eddigton e Robertson proposero l'introduzione dei suddetti parametri α, β e γ, non noti, che entrano nell'espansione in serie e ne pesano i vari termini, in questo modo:

$$ds^2 = \left(1 - \alpha\frac{R_S}{\rho} + \beta\frac{R_S}{2\rho^2} + ...\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\gamma R_S}{\rho} + ...\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right) \tag{2.24}$$

In Relatività Generale, come si evince immediatamente dall'equazione (2.23) i tre parametri sono tutti uguali all'unità. Ci si può ricondurre alla metrica di Schwarzschild nella forma (2.10) constatando che al primo ordine per l'equazione (2.23):

$$B(\rho) = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

e $B(\rho)\rho^2 = r^2$ dunque:

$$\rho = r\left(1 - \gamma\frac{R_S}{2r}\right)$$

sostituendo nell'equazione (2.24):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r} + (\beta - \gamma)\frac{R_S^2}{2r^2} + ...\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{\gamma R_S}{r}\right)dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

da cui si ricava la metrica in coordinate di Schwarzschild per $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Capitolo 3

Simmetria idrostatica sferica

In questo capitolo si studieranno le caratteristiche di un fluido perfetto a simmetria sferica in idrostatica relativistica, cioè l'idealizzazione della materia all'interno di una stella. In questo senso, riprenderemo la metrica di Schwarzschild in coordinate di Schwarzschild introdotta nelle precedenti sezioni:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

e il tensore metrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Lo studio di una tale struttura, mediante l'imposizione della conservazione del quadrimpulso e le equazioni di campo, porterà al corrispettivo relativistico dell'equazione dell'equilibrio idrostatico e dunque alla descrizione del processo fondamentale che governa l'evoluzione e la fase finale della vita di una stella. Si procederà poi fornendo soluzione alle equazioni di campo per un fluido ideale a densità uniforme, ricavata dallo stesso Schwarzschild nel 1916. Infine, le ultime sezioni saranno dedicate alla descrizione di due oggetti compatti estremamente interessanti,la cui esistenza emerge unicamente nell'ambito della teoria relativistica e che differiscono dalle stelle ordinarie in quanto si originano nello stadio finale dell'evoluzione stellare, quando essa ha esaurito tutto il "combustibile":verrà ripresa la trattazione dei buchi neri *buchi neri* e verranno introdotte le *stelle di neutroni.*

3.1 Conservazione dell'energia ed equazioni di campo

Per studiare le caratteristiche di un fluido perfetto in equilibrio idrostatico, riprendiamo i risultati della sezione (1.2), in cui detti ρ, p e u^α rispettivamente la densità di massa-energia in un riferimento in cui il fluido è a riposo, la pressione isotropa in tale riferimento e le componenti della quadrivelocità del fluido rispettivamente, il tensore energia-impulso assumeva la forma (1.13):

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$$

ci prefiggiamo di determinarne le componenti.

In un riferimento comovente con il fluido, le componenti u^r, u^θ, u^ϕ della quarivelocità sono nulle:

$$u^1 = u^r = \frac{dr}{d\tau} = 0 \quad u^2 = u^\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad u^3 = u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \tag{3.2}$$

per la normalizzazione della quadrivelocità:

$$\mathbf{u} \cdot \ \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1 \tag{3.3}$$

da cui, considerando le equazioni (3.2) si ha e il tensore metrico (2.1)

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{00}(u^0)^2 = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = e^{\frac{-\nu}{2}}$$

dunque:

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = e^{-\frac{\nu}{2}} \qquad \mathbf{u} = (e^{-\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0) \tag{3.4}$$

Con queste premesse, a partire dalla (1.13):

$$T^{00} = (\epsilon + p)u^0 u^0 - p g^{00} = (\epsilon + p)e^{-\nu} - p e^{-\nu} = \epsilon e^{-\nu}$$

$$T^{11} = p g^{11} = p e^{-\lambda}$$

$$T^{22} = p g^{22} = p r^{-2}$$

$$T^{33} = p g^{33} = p r^{-2} (\sin\theta)^{-2}$$

dove è stato utilizzata la (3.4) e il fatto che per l'uguaglianza (3.3) si ha:

$$g_{00} u^0 u^0 = 1 \Rightarrow g^{00} = u^0 u^0 = e^{-\nu}$$

Prima di procedere, è necessario un chiarimento utile agli sviluppi futuri del testo: finora ci siamo infatti limitati alla derivazione delle componenti del tensore energia impulso per imporre la conservazione del tensore energia impulso e risolvere le equazioni di campo. In realtà, questo non esaurisce completamente l'informazione che dobbiamo avere per determinare la struttura di una stella relativistica: necessitiamo piuttosto dell'introduzione di due equazioni di stato che chiariscano la dipendenza funzionale della pressione p e della densità ρ dal numero di barioni per unità di volume, che chiameremo $n(r)$, cioè necessitiamo di [14]:

$$\rho = \rho(n) \qquad p = p(n)$$

funzioni affatto banali, se si considera il fatto che la dipendenza da n non è univoca, ed in generale ρ e p dipendono anche dalla temperatura o dall'entropia. Ad ogni modo, nell'esempio che seguirà, le stelle di neutroni, ci si metterà nelle condizioni semplici tali che la dipendenza da n possa essere considerata univoca.
Proseguiamo dunque imponendo la conservazione del quadrimpulso,cioè l'equazione (1.9):

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$$

per semplicità di calcolo, piuttosto che esprimere il tensore energia-impulso in forma completamente controvariante, calcoliamone le componenti in forma mista, ed imponiamo:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

Dove:

$$T^0_0 = g_{00}T^{00} = e^{\nu}\epsilon e^{-\nu} = \epsilon \tag{3.5}$$

$$T^1_1 = g_{11}T^{11} = e^{\lambda}pe^{-\lambda} = p \tag{3.6}$$

$$T^2_2 = g_{22}T^{22} = r^2pr^{-2} = p$$

$$T^3_3 = g_{33}T^{33} = r^2(\sin\theta)^2pr^{-2}(\sin\theta)^2 = p$$

Utilizziamo ora la seguente formula:

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{-g}T^{\beta}_{\alpha}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}T^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

la cui dimostrazione si preferisce rimandare all'appendice **A**, per ragioni di scorrevolezza del testo.
L'unica delle equazioni (3.7) non banale [5] è per $\alpha = 1$, per la quale si ha:

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{-g}T^1_1) - \frac{1}{2}(g_{00,1}T^{00} + g_{11,1}T^{11} + g_{22,1}T^{22} + g_{33,1}T^{33}) \tag{3.8}$$

analizzando separatamente ciascun termine:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{-g}T^1_1) = e^{-\frac{\nu+\mu}{2}}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{\frac{\nu+\lambda}{2}r}r^2\sin\theta\,(-p)\right) =$$

$$= e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(-p\frac{\nu_r+\lambda_r}{2}e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}r^2\sin(\theta) - pe^{\frac{\nu+\lambda}{2}}2r\sin\theta - e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}r^2\sin\theta\frac{\partial p}{\partial r}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2}p + p\frac{2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r}\right)$$

Mentre:

$$g_{00,1}T^{00} + g_{11,1}T^{11} + g_{22,1}T^{22} + g_{33,1}T^{33} = \nu_r\epsilon - p\lambda_r - 2\frac{p}{r} - 2\frac{p}{r}$$

Dunque, accorpando i termini nella (3.8) e imponendo la conservazione del quadrimpulso si ha:

$$-\left(\frac{\nu_r+\lambda_r}{2}p + p\frac{2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\left(\nu_r\epsilon - p\lambda_r - 4\frac{p}{r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}(\epsilon+p) \tag{3.9}$$

Tale equazione, valida per ipotesi per una stella a simmetria sferica (e in questo senso la pressione dipende unicamente da r) indica quanto "gradiente di pressione" è necessario ad evitare che un elemento del fluido collassi verso il centro della stella.
Ora, nel limite newtoniano, riprendendo il risultato (1.20) si ha:

$$g_{00} = e^{\nu} =\simeq 1 + \nu \simeq 1 - 2\frac{\Phi}{c^2}$$

dunque:

$$\nu = 2\frac{\Phi}{c^2}$$

e ancora, nel limite newtoniano la pressione diventa molto minore della densità di massa-energia $p \ll \rho c^2 = \epsilon$, dunque l'equazione (3.9) diviene:

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{dU}{dr} \tag{3.10}$$

equazione che esprime, nel limite classico, l'equilibrio tra la forza gravitazionale e il gradiente di pressione. E' interessante confrontare i risultati classico e relativistico: nel caso relativistico, il gradiente di pressione causa un'accelerazione che frena l'elemento di fluido dalla caduta verso il centro, mantenendolo ad r fissato e dunque causando una deviazione dalla geodetica locale. Nel caso newtoniano, la linea di mondo ha r fissato,ed è la forza gravitazionale che appare come sorgente di accelerazione, bilanciata dal gradiente di pressione [14].

Procediamo ora con la risoluzione delle equazioni di campo, cominciando dalla prima componente :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

dove dalla (3.9):

$$T_{00} = g_{00} T^0_0 = e^{\nu} \epsilon$$

si può verificare che per la componente G_{00} vale la seguente relazione [5]:

$$G_{00} = \frac{e^{\nu}}{r^2} \left[1 - \frac{d\left(re^{-\lambda}\right)}{dr} \right] \tag{3.11}$$

dunque per le equazioni di campo:

$$\frac{e^{\nu}}{r^2} \left[1 - \frac{d\left(re^{-\lambda}\right)}{dr} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} e^{\nu} \epsilon$$

abbiamo ottenuto cioè un'equazione differenziale lineare in $e^{-\lambda}$ e dunque risolvibile per integrazione senza alcun problema:

$$\frac{d\left(re^{-\lambda}\right)}{dr} = 1 - \frac{\epsilon 8\pi G r^2}{c^4}$$

da cui, per integrazione:

$$re^{-\lambda} = r - \frac{8\pi G}{c^4} \int \epsilon r^2 dr \Rightarrow e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4 r} \int \epsilon r^2 dr \tag{3.12}$$

per motivi che saranno chiari in pochi passaggi, rinominiamo la quantità:

$$M(r) = \int \frac{4\pi\epsilon}{c^2} r^2 dr \tag{3.13}$$

con questa scelta, l'equazione (3.12) assume la forma:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} M(r)$$

fin qui abbiamo dunque risolto le equazioni di campo all'interno di una sorgente a simmetria sferica, supponiamo che essa abbia raggio R e imponiamo che sulla superficie la soluzione interna e quella esterna coincidano, cioè, riprendendo la soluzione di Schwarzschild esterna (2.10) troviamo:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{R_S}{r} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} \int_0^R \frac{4\pi\epsilon}{c^2} r^2 dr$$

ovvero la quantità M(r) è legata alla massa classica newtoniana, ci proponiamo di indagarne la forma ed il significato. Innanzitutto, l'elemento di volume proprio è dato da:

$$dV_p = \sqrt{-g_r r} 4\pi r^2 dr = e^{\frac{\lambda}{2}} 4\pi r^2 dr$$

mentre, essendo il volume coordinato chiaramente $dV = 4\pi r^2 dr$, da cui, utilizzando la (3.13):

$$M(R) = \frac{1}{c^2} \int_0^R \epsilon dV$$

da cui, riarrangiando ed utilizzando l'elemento di volume proprio:

$$M(R) = \frac{1}{c^2} \int_0^R \epsilon dV = \frac{1}{c^2} \left(\int_0^R \epsilon dV + \int_0^R \epsilon dV_p - \int_0^R \epsilon dV_p \right) = \frac{1}{c^2} \int_0^R \epsilon (dV - dV_p) + \frac{1}{c^2} \int_0^R dV_p \tag{3.14}$$

Analizzando il primo integrale, si ha:

$$\frac{1}{c^2} \int_0^R \epsilon (dV - dV_p) = \frac{1}{c^2} \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon (1 - e^{\frac{\lambda}{2}}) dr \tag{3.15}$$

richiamando l'equazione (2.9) deve aversi:

$$e^{\frac{\lambda}{2}} \simeq 1 + \frac{R_S}{2r} = 1 + \frac{GM}{c^2 r} \Rightarrow 1 - e^{\frac{\lambda}{2}} = -\frac{GM}{c^2 r}$$

sostituendo nell'integrale (3.15):

$$\frac{1}{c^2} \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon (1 - e^{\frac{\lambda}{2}}) = -\frac{1}{c^2} \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon \frac{GM}{c^2 r} = -\int_0^R \frac{GM}{r} \frac{4\pi \epsilon r^2}{c^2} dr$$

ricordando la definizione di $M(r)$ (3.13), con un cambio di variabili:

$$-\int_0^R \frac{GM}{r} \frac{4\pi \epsilon r^2}{c^2} dr = -\int_0^M \frac{M}{r} dM \tag{3.16}$$

Ovvero l'energia di legame gravitazionale classica.
Invece, il secondo integrale nell'espressione per la massa (3.14):

$$\frac{1}{c^2} \int_0 R \epsilon dV_p$$

Ora, l'integrazione è eseguita su un elemento di volume proprio, cioè eseguita in un riferimento solidale al fluido, dunque nel computo dell'energia non vi rientra il contributo dovuto alla gravità. In questo senso, la densità di energia ϵ consterà di due termini: uno dovuto alla densità di massa a riposo, e il secondo all'energia dovuta ad altri fattori energetici che non comprendono la gravità, cioè:

$$\epsilon = \rho c^2 + \mu \tag{3.17}$$

dove ρ è la densità di massa propria.

Prima di proseguire con le equazioni di campo, approfondiamo cosa si intenda e in che senso è possibile, nel caso di una stella sferica, definire una *massa-energia totale* all'interno di un raggio r,cioè:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\epsilon}{c^2} dr \tag{3.18}$$

la questione è la seguente: benchè la massa-energia di una stella isolata sia ben definita, non è ben definita la *distribuzione* di massa-energia *all'interno* della stella e nel suo campo gravitazionale [14]. In generale, infatti, non è possibile definire un *quadrimpulso locale gravitazionale*, di fatti qualsiasi tentativo di definizione univoca sarebbe errato in virtù del principio di equivalenza di Einstein, poichè è sempre possibile porsi in un riferimento localmente inerziale, dove le forze gravitazionali sono nulle, e dunque anche il quadrimpulso gravitazionale locale è nullo. Lungi dall'affermare che *non esista* l'energia gravitazionale, si vuole rimarcare l'impossibilità della localizzabilità dell'energia gravitazionale, non della sua innegabile esistenza.
Tuttavia, nel caso di una stella a simmetria sferica, e solo in questo caso, è possibile definire la distribuzione di massa-energia totale (3.18) poichè una sorgente di campo gravitazionale a simmetria sferica per il teorema di Birkhoff è statica, non ha effetti sullo spazio circostante, dunque non si hanno problemi riguardo alla localizzabilità dell'energia gravitazionale [1]. Inoltre, i risultati (3.16) e (3.17) possono essere riassunti scrivendo la massa del corpo come la somma di tre contributi:

$$M(r) = M_0(r) + U(r) + \Omega(r)$$

r dove $M_O(r)$ è la massa a riposo, $U(r)$ il contributo dell'energia interna non-gravitazionale (ad esempio termica) ed infine $\Omega(r)$, il termine del primo integrale, cioè l'energia potenziale gravitazionale.

Imponiamo ora la seconda equazione di campo, essendo $T_{\alpha\beta}$ diagonale, essa sarà:

$$G_{11} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{11} = \frac{8\pi GM}{c^4} pe^{\lambda} \tag{3.19}$$

essendo $T_{11} = g_{11} T_1^1 = e^{\lambda} p$. Per la componente G_{11} si ha:

$$G_{11} = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - e^{\lambda} r^2 \tag{3.20}$$

dunque:

$$\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - e^{\lambda} r^2 = \frac{8\pi G}{c^4} pe^{\lambda}$$

d'altra parte, abbiamo calcolato per la precedente equazione di campo che:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} M(r) \Rightarrow e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2G}{c^2 r} M(r)} \tag{3.21}$$

per cui, imponendo la (3.20):

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{2G}{c^2 r} M(r)} \left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} = \frac{\frac{8\pi G}{c^4} pr^2 + \frac{2GM}{c^2 r}}{r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \tag{3.22}$$

d'altra parte, dalla conservazione del quadrimpulso abbiamo ottenuto l'equazione (3.8), che riscriviamo

$$\frac{d\nu}{dr} = -2 \frac{1}{\epsilon + p} \frac{dp}{dr} \tag{3.23}$$

[1] La spiegazione completa prevede lo studio di di fenomeni dipendenti dal tempo, non prevista nel testo.

eguagliando le due equazioni precedenti:

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\frac{\epsilon + p}{2}\right)\frac{1}{r}\left(\frac{8\pi G}{c^4}pr^2 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

mettendo in evidenza $\frac{2G}{c^2 r}$ nella seconda parentesi, otteniamo l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff dell'equilibrio idrostatico:

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\frac{\epsilon + p}{c^2}\right)\frac{G}{r^2}\left(\frac{4\pi pr^3}{c^2} + M\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \tag{3.24}$$

Riprendiamo l'equazione (3.22), nel limite newtoniano possiamo trascurare il termine in $\frac{1}{c^4}$ e $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \to 1$ dunque:

$$\nu' = \frac{2GM}{c^2 r^2} \tag{3.25}$$

d'altra parte, ancora nel limite classico, abbiamo, per l'equazione (1.20) ed espandendo in serie di Taylor e^{ν}:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - 2\frac{\Phi}{c^2} \simeq 1 + \nu \Rightarrow \nu \simeq -2\frac{\Phi}{c^2}$$

da cui, differenziando rispetto ad r ed eguagliando con l'equazione (3.25):

$$\nu' \simeq -2\frac{d\Phi}{dr}\frac{1}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

Anche in questo caso, l'equazione (3.23) con la (3.25) si ha:

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2GM}{c^2 r^2} = -2\frac{1}{\epsilon + p}\frac{dp}{dr} \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -(\epsilon + p)\frac{GM}{c^2 r^2}$$

poichè inoltre $p \ll \epsilon = \rho c^2$ dove ρ è la densità di massa propria, abbiamo:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \tag{3.26}$$

Utilizzando l'equazione (3.24) e il limite classico (3.26) confrontiamo i due modelli valutando il gradiente di pressione nella teoria relativistica e in quella newtoniana. Nel caso relativistico:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{e^{\frac{\lambda}{2}}dr} &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\left(\frac{\epsilon + p}{c^2}\right)\frac{G}{r^2}\left(\frac{4\pi pr^3}{c^2} + M\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\right] \\ &= -\frac{\left(\frac{\epsilon+p}{c^2}\right)G\left(\frac{4\pi pr^3}{c^2} + M\right)}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)G\left(\frac{4\pi pr^3}{c^2} + M\right)}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nel caso classico si ha invece l'equazione (3.26):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

nella teoria relativistica il gradiente di pressione è maggiore rispetto al caso classico, in virtù del fatto che sia al denominatore sia al numeratore vi sono termini in più

rispetto al caso classico che sono rispettivamente inferiore ad 1 e maggiori di 0. Ciò vuol dire che man mano che ci si addentra verso il centro della stella (ricordiamo infatti il segno negativo) l'aumento di pressione è maggiore rispetto alle previsioni classiche, si nota chiaramente (purchè $r > R_S$) . Non solo: poichè la pressione compare anche a secondo membro dell'equazione relativistica, cioè compare nella (3.27) quanto più la pressione aumenta, tanto più veloce diventa la sua crescita al diminuire della distanza propria. Addentrandosi verso il centro,quindi, l'incremento della pressione non è costante in r ma è sempre più rapido all'aumentare della pressione stessa. Questo meccanismo è detto di *rigenerazione della pressione*. Estremamente interessante circa la comprensione del ruolo della pressione nel processo è quanto segue: se in meccanica newtoniana solo la massa genera gravità, in Relatività Generale tutte le forme di energia contribuiscono alla gravità [15], questo è evidente nel meccanismo sotteso dall'equazione (3.24). Supponiamo infatti di analizzare l'equazione per stelle di masse via via crescenti: man mano che la massa aumenta, la pressione che occorre per prevenirne il collasso gravitazionale deve aumentare, ma poichè quanto più aumenta la pressione tanto più incrementa il gradiente della pressione verso il centro della stella, e poichè sul bordo deve essere $p = 0$, il raggio della stella deve necessariamente diminuire! Come conseguenza, se la massa di una stella relativistica eccede il valore limite, detto *massa limite*, non c'è scampo al collasso gravitazionale verso un buco nero.
Riassumendo, la dissonanza più importante tra le equazioni dell'equilibrio idrostatico nella teoria di Einstein e in meccanica newtoniana è l'incremento in modulo del gradiente di pressione con il raggio. Questo implica che per una data densità $\rho(r)$ il massimo della pressione sarà sempre maggiore della previsione classica e dunque è più difficile in questo caso mantenere il fluido in equilibrio [16]. Questo può essere osservato analizzando il modello di fluido incompressibile, oggetto del secondo degli articoli scritti da Schwarzschild nel 1916.

3.2 La soluzione di Schwarzschild interna

All'esterno della stella, di qualsiasi stella a simmetria sferica, la soluzione alle equazioni di campo è la soluzione esterna (2.10) derivata nel capitolo precedente, ed essa è anche *unica*. La risoluzione analitica delle equazioni di campo all'interno del fluido, invece, è assai tediosa per modelli ideali e impossibile per modelli realistici, dove si rende necessaria l'integrazione numerica. In questo paragrafo verrà analizzato un modello irrealistico ma tanto semplice da poterne ricavare soluzione analitica esatta, quello di un fluido incompressibile, cioè tale che la densità sia uniforme:

$$\rho = \rho_0$$

e di conseguenza:

$$\epsilon = \rho_0 c^2$$

Per determinare i coefficienti della metrica, sostituiamo l'equazione precedente nella (3.21) notando che adesso:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\rho r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$$

dunque:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} = 1 - \frac{8\pi G \rho_0 r^2}{3c^2} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \tag{3.28}$$

dove è stato definito $r_0 = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}$. Inoltre, riprendendo l'equazione (3.9) nel caso in esame, possiamo integrare per separazione di variabili, poichè stavolta ϵ non ripende da r, dunque:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\epsilon + p)\frac{d\nu}{dr} \Rightarrow \frac{dp}{(\epsilon + p)} = -\frac{1}{2}d\nu$$

integrando:

$$(\epsilon + p) = cost \cdot e^{-\frac{\nu}{2}} \tag{3.29}$$

che è possibile riscrivere come:

$$(\epsilon + p) = \frac{c^4}{8\pi G} D e^{-\frac{\nu}{2}} \tag{3.30}$$

e la costante D può essere imposta notando che all'interfaccia $r = R$ la pressione è nulla, pertanto:

$$D = \frac{8\pi G \rho}{c^2} e^{\frac{\nu(R)}{2}} \tag{3.31}$$

Proseguiamo utilizzando la seguente uguaglianza, valida chiaramente per via delle equazioni di campo:

$$G_0^0 - G_1^1 = \frac{8\pi G}{c^4}(T_0^0 - T_1^1)$$

Da cui, sostituendo ed utilizzando le equazioni precedentemente menzionate per $G_{00}, G_{11}, T_0^0, T_1^1$ rispettivamente (3.11),(3.19),(3.9),(3.6):

$$G_0^0 = g^{00} G_{00} = \frac{1}{r^2}\left[1 - \left(re^{-\lambda}\right)'\right] \qquad G_1^1 = g^{11} G_{11} = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{\lambda}}{r^2}\right)$$

$$T_0^0 = \rho c^2 \qquad T_1^1 = -p$$

poichè $g^{00} = e^{-\nu}$ e $g^{11} = -e^{-\lambda}$, otteniamo allora:

$$\frac{1}{r}e^{-\lambda}\left(\lambda' + \nu'\right) = \frac{8\pi G \rho}{c^4}\left(\rho c^2 + p\right)$$

Utilizzando l'equazione (3.30):

$$\frac{1}{r}e^{-\lambda}\left(\lambda' + \nu'\right) = De^{\frac{-\nu}{2}} \Rightarrow -\frac{de^{-\lambda}}{dr} + e^{-\lambda}\nu' = Dre^{\frac{-\nu}{2}}$$

ancora, dalla (3.31) sostituendo e svolgendo la derivata:

$$\frac{2r}{r_0^2} + \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\nu' = Dre^{\frac{-\nu}{2}} \Rightarrow \frac{2r}{r_0^2}e^{\frac{\nu}{2}} + \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\nu' e^{\frac{\nu}{2}} = Dr$$

ed infine, notando che $\nu' e^{\frac{\nu}{2}} = 2\frac{d}{dr}e^{\frac{\nu}{2}}$ otteniamo:

$$\frac{r}{r_0^2}e^{\frac{\nu}{2}} + \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{de^{\frac{\nu}{2}}}{dr} = \frac{1}{2}Dr$$

L'equazione differenziale lineare del primo ordine è risolvibile esattamente e la famiglia di primitive è data da:

$$e^{\frac{\nu}{2}} = e^{-f(r)}\left(cost + \int \frac{1}{2} D r e^{f(r)} dr\right)$$

dove:

$$f(r) = \int \frac{\frac{r}{r_0^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)} dr = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

dunque:

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2} D r_0^2 - B\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

dove B è una costante che vogliamo determinare. Poniamoci in $r = R$ e utilizziamo la definizione di D (3.31):

$$e^{\nu(R)/2} = \frac{3}{2} e^{\nu(R)/2} - B\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2} e^{\nu(R)/2} = 3B\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

Sostituendo nella (3.32):

$$e^{\nu/2} = B\left\{3\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{3.34}$$

Dal raccordo al contorno:

$$e^{-\lambda(R)} = e^{\nu(R)} = 1 - \frac{2GM(R)}{c^2 R} = 1 - \frac{R^2}{r_0^2}$$

da cui $B = 1/2$. Inoltre, dall'equazione (3.32) possiamo anche ricavare la dipendenza funzionale della pressione dalla coordinata r, di fatti:

$$(\rho c^2 + p) = \frac{c^4}{8\pi G} D e^{-\nu/2} = \rho c^2 e^{\nu(R)/2} e^{\nu/2}$$

da cui, ricavando $e^{\nu(R)}$ dalla (3.33):

$$\rho c^2 + p = 2B\rho c^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{1/2} e^{-\,\nu/2}$$

e poichè $B = 1/2$ ed utilizzando la (3.34) :

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\left[1 - (\frac{r}{ro})^2\right]^{1/2} - \left[1 - \left(\frac{R}{ro}\right)^2\right]^{1/2}}{3\left[1 - \left(\frac{R}{ro}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1 - (\frac{r}{ro})^2\right]^{1/2}}$$

equazione che può essere anche ottenuta per integrazione diretta dell'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). La pressione centrale (per $r = 0$) dall'equazione precedente, è:

$$p(0) = \rho c^2 \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{1/2}}{3\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{1/2} - 1} \tag{3.35}$$

manifesta una crescita monotona all'aumentare del raggio totale R della stella. Intuitivamente, quanta più materia la stella comprende tanta più pressione occorre per "tenerla insieme", se per ipotesi la densità di energia si mantiene ad un valore ρ costante, l'aumento di materia deve corrispondere necessariamente ad un aumento del raggio.
Il denominatore dell'equazione diverge per:

$$3\left[1-\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{1/2}-1=0 \Rightarrow \left[1-\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]=\frac{1}{9}$$

da cui:

$$R^2=\frac{8}{9}r_0^2 \Rightarrow \frac{R^2 8\pi G\rho}{3c^2}=\frac{R_S}{R}=\frac{8}{9}$$

Dunque, in Relatività Generale non possono esistere stelle con densità uniforme tali che:

$$\frac{2GM}{c^2R}<\frac{8}{9} \Rightarrow R>\frac{9}{4}\frac{GM}{c^2}$$

Si tratta di un limite puramente relativistico non previsto dalla teoria newtoniana, di fatti in meccanica classica avremmo semplicemente per una stella di raggio R dall'ipotesi di densità costante, che:

$$M(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0$$

da cui, inserendo quest'equazione nella (3.26) e integrando:

$$p(r)=-G\int_r^R\frac{4}{3}\pi r\rho dr=-\frac{2}{3}\pi\rho(R^2-r^2)$$

dove è stata imposta la condizione al bordo $p(R)=0$ [16].
La presenza di un raggio e di una massa limite, nonchè le conseguenze delle correzioni relativistiche al gradiente di pressione e gli indizi che provengono dall'approssimazione di densità uniforme, troveranno applicazione nei modelli astrofisici relativistici a simmetria sferica elencati nelle prossime sezioni, le stelle di neutroni ed i buchi neri.

3.3 Stelle di neutroni

Nelle sezioni precedenti abbiamo delineato alcuni aspetti di oggetti compatti a simmetria sferica, trattandoli sia nel limite newtoniano sia nell'alveo della teoria relativistica. Ne abbiamo sottolineato le differenze, concettuali (come la difficoltà nella definizione della distribuzione di massa-energia gravitazionale) e quantitative (la rigenerazione della pressione e la presenza di un raggio limite). Di grande interesse è allora lo studio di oggetti la cui configurazione e le cui proprietà non sono predette dalla teoria classica e possono essere unicamente spiegate tramite la Relatività Generale, laddove gli effetti relativistici non possono essere affatto trascurati. Descriveremo qualitativamente, nel presente e nel prossimo paragrafo, due configurazioni che rientrano in questa categoria, le *stelle di neutroni* ed i *buchi neri.*
Le configurazioni relativistiche che prenderemo in considerazione sono diverse tipologie di stadi finali delle stelle. Per *stadio finale dell'evoluzione stellare* intendiamo lo stato al minimo dell'energia, con velocità angolare nulla e temperatura allo zero assoluto [14]. Tale sistema, dipendentemente dalla sua massa e dalla sua storia precedente, può manifestarsi in una stella *fredda*, come le nane bianche o le stelle di

neutroni, o in un buco nero.
Se la massa M della stella è compresa tra:

$$1,2M_\odot < M < 2M_\odot$$

dove $M_\odot$ è la massa solare, la configurazione di equilibrio è quella di una stella di neutroni: la materia è compressa con densità che è dello stesso ordine di quella di un nucleo atomico ($\rho \simeq 10^{15} g/cm^2$) ed un raggio dell'ordine della decina di chilometri [17].
Seguiamo l'evoluzione della materia fredda fino a raggiungere la densità nucleare. A pressione molto bassa ($p/\rho(r)^2c^2 < 10^{-11}$), la stella sarebbe un'ammasso di nuclei di ^{56}Fe, essendo questo il nucleo che esibisce un minimo per l'energia di legame per nucleone. Man mano che la pressione aumenta, gli atomi vengono a trovarsi talmente vicini che gli elettroni corrispondenti non distinguono più i relativi atomi: le forze interatomiche contribuiscono meno alla pressione rispetto agli elettroni orbitali finchè questi ultimi formano un gas di Fermi degenere. Per caratterizzare il gas, introduciamo *l'indice adiabatico* γ definito come:

$$\gamma = \frac{\rho + p}{p}\frac{dp}{d\rho}$$

per un gas di Fermi non relativistico ideale $\gamma = \frac{5}{3}$, e raggiunge tale valore per $\rho = 10^5 g/cm^3$. All'aumentare della pressione, l'energia di Fermi degli elettroni più la massa dei nuclei di ferro, diviene maggiore della massa dei nuclei di ^{56}Mn dunque tramite cattura elettronica si formeranno nuclei di ^{56}Mn e altri maggiormente ricchi di neutroni: nel range $1,4 \cdot 10^7 g/cm^3 < \rho < 3 \cdot 10^{11} g/cm^3$ le reazioni nucleari si susseguono via via verso nuclei più elettronici e neutronici fino a $^{122}_{39}$Y, fino a che i nuclei sono talmente densamente ricchi di neutroni che essi vengono espulsi in un processo detto *neutronizzazione* della materia. Per densità comprese tra i $10^{11} g/cm^3$ e $10^{13} g/cm^3$ i neutroni liberi diventano sempre più abbondanti e i nuclei rimanenti vengono totalmente disintegrati, e anche stavolta possiamo trattare i neutroni come formanti un gas di Fermi costituito per 8/10 da neutroni, 1/10 da elettroni e 1/10 da protoni, per compressione ancora più elevata (fino a $\rho \sim 10^{15}$) essi raggiungono energie di Fermi relativistiche.
Per analizzare le fasi di equilibrio stabile che corrispondono a configurazioni stellari nell'evoluzione appena descritta, riprendiamo l'ipotesi del paragrafo precedente, trattando configurazioni stellari di densità uniforme in un modello elaborato da Harrison e Wheeler [18],che malgrado la semplicità dell'approssimazione risulta predittivo. In figura (3.1) troviamo un grafico dell'energia di legame in funzione della densità, e sono tracciate varie curve corrispondenti a differenti valori di $A/A_\odot$:il numero di barioni rispetto al numero di barioni all'interno del sole. Descriviamo qualitativamente il grafico seguendo la linea del [19].
Innanzitutto, la classificazione in base al numero di barioni è valida in quanto il numero totale di barioni è conservato in ciascuna "trasformazione" di particelle quindi il loro numero è una misura della *quantità di materia* che la stella contiene. Inoltre, nella teoria relativistica, così come in quella newtoniana, le configurazioni di equilibrio corrispondono a minimi o massimi delle curve rappresentate, in particolare le configurazioni di equilibrio *stabile* sono minimi relativi.

L'interesse e la pertinenza di una tale analisi nell'ambito delle precedenti considerazioni riguardo le equazioni dell'equilibrio idrostatico risiede nel fatto che l'intera evoluzione può essere spiegata in termini del bilancio tra le forze di pressione e la

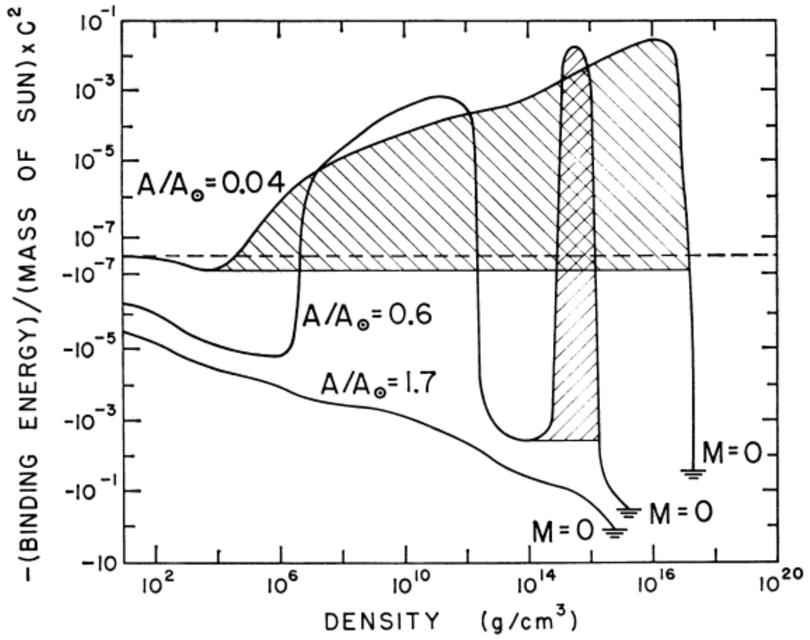

Figura 3.1: Energia di legame in funzione della densità per il modello HW

gravità. Come vediamo, per tutte e tre le curve e fino a densità di $10^4 g/cm^2$ l'andamento decrescente dell'energia di legame mostra che la gravità cresce più rapidamente rispetto all'energia di compressione interna. Gli andamenti delle tre curve iniziano poi a differenziarsi: per $A/A_\odot = 1,7$ gli effetti della crescita non lineare dell'energia gravitazionale sono così violenti che la stella collassa inesorabilmente verso $M = 0$, per $A/A_\odot = 0,4$ viene raggiunto un minimo , dopodichè la pressione sale velocemente contrastando la gravità, fino al raggiungimento di un massimo; infine, per $A/A_\odot = 0,6$ notiamo qualcosa di interessante: per densità intorno a $\rho \sim 10^{14} g/cm^2$ la repulsione tra i neutroni formatisi nel processo di neutronizzazione dà luogo ad un nuovo minimo nella curva. Per masse tali, dunque, abbiamo due minimi in corrispondenza delle *nane bianche* e delle *stelle di neutroni.* In particolare, il limite superiore alla massa di una nana bianca ideale, prima che essa subisca un collasso gravitazionale, è detto *limite di Chandrasekhar* [20].
Il modello stellare che rappresenta l'estensione di tale ragionamento per densità non uniformi è il modello di Harrison-Wakano-Wheeler (HWW) [21] che parte dall'integrazione dell'equazione di TOV e prevede nuove oscillazioni nella curva dovute a fenomeni relativistici. Essenzialmente, però, le predizioni non sono difformi da quelle ottenute nel caso di densità uniforme: per una stella tale che $A/A_\odot = 0,6$ vi sono due configurazioni di equilibrio stabile e due di equilibrio instabile, mentre per stelle tali che $A/A_\odot > 1,2$ non vi sono configurazioni di equilibrio stabile: una stella simile collassa inevitabilmente in una singolarità, che tratteremo nel prossimo paragrafo.

3.4 Buchi neri originati dal collasso gravitazionale

E' naturale, avendo descritto le caratteristiche di oggetti astrofisici compatti a simmetria sferica e l'evoluzione fino alle stelle di neutroni, concludere la trattazione descrivendo qualitativamente lo stadio estremo della storia di una stella, i buchi neri. La nozione di buco nero è stata già introdotta alla fine del paragrafo (2.2), in merito

alla perdita di informazione per oggetti che penetrino una regione di raggio inferiore al raggio di Schwarzschild. Analizziamo qui, molto brevemente, le caratteristiche di una struttura simile ed il ruolo della metrica di Schwarzschild nella nascita di un buco nero a partire dal *collasso gravitazionale*,cioè la contrazione fino a $r < R_S$ di una massa a simmetria sferica . Premettiamo innanzitutto che la soluzione di Schwarzschild è effettivamente idonea alla descrizione del collasso gravitazionale in virtù del teorema di Birkhoff: se la geometria di una regione spaziotemporale possiede simmetria sferica ed è una soluzione delle equazioni di campo nel vuoto, allora deve obbedire necessariamente alla metrica di Schwarzschild. Ciò vuol dire che il campo generato da sorgenti che siano statiche o in movimento puramente radiale segue la metrica di Schwarzschild ed è dunque statico. Se il collasso gravitazionale è radiale, allora, non c'è alcun modo di influenzare il campo esterno finchè la simmetria sferica è conservata.
Il collasso gravitazionale origina dal mancato equilibrio tra la forza gravitazionale ed il gradiente di pressione di cui abbiamo discusso in questo capitolo e che si manifesta in prima istanza nella formazione di nane bianche e stelle di neutroni; quando però le stelle di neutroni sono talmente massive che l'equilibrio idrostatico non è preservato e la gravità vince sulle pressioni interne, il collasso procede fino al raggiungimento del limite per $r = R_S$, oltre il quale parliamo della nascita di un buco nero. Il collasso gravitazionale relativistico di un corpo sferico non rotante genera un buco nero sferico [22]. All'indomani del collasso gravitazionale, nessun segnale emesso per $r < R_S$ può fuoriuscire dalla superficie patologica, nessun segnale può giungere ad un osservatore esterno al raggio di Schwarzschild, piuttosto viene "catturato" e procede verso la singolarità essenziale in $r = 0$ (dal punto di vista di un osservatore esterno, il viaggiatore verso il buco nero, in effetti, non scompare mai, poichè impiega un tempo infinito per raggiungere R_S) [2].

La singolarità essenziale in $r = 0$ è una prova che la teoria di Einstein non costituisce una teoria completa della gravità: il principio di indeterminazione impedisce di specificare la posizione di un corpo, anche quella si una singolarità essenziale infinitesima. La nozione di singolarità che emerge nella teoria di Einstein è, in questo senso, un'intrinseca violazione della teoria quantistica [24]. Nella trattazione è stata adottata l'ipotesi di simmetria sferica della sorgente ed inoltre non si è affatto discusso della possibilità che questa possegga una carica elettrica. Tali ipotesi semplificative non sono, in realtà, del tutto sterili: per piccole asimmetrie e deboli cariche elettriche può essere utilizzato un calcolo perturbativo sulla soluzione di Schwarzschild ed in ogni caso, senza alcuna ipotesi iniziale, rimane sempre vero che un buco nero possa essere descritto unicamente a partire dalla sua massa, M, dalla carica, Q, e dal suo momento angolare, S, cioè i soli tre parametri osservabili che caratterizzano un buco nero stazionario. Tale situazione è espressa dall'aforisma di Wheeler "*A Black Hole has no hair*". [25]

[2] Dunque ci si potrebbe chiedere se ha effettivamente senso lo studio del collasso gravitazionale: che rilevanza può avere il fenomeno se impiegheremmo un tempo infinito per osservarlo? La risposta è sorprendente, si trova nell'articolo [23] e si basa sul fatto che in effetti un riferimento comovente con il fluido in contrazione non vede alcuna singolarità in R_S e la attraversa.

Appendice A

Data una metrica generica $g_{\mu\nu}$ espressa in forma matriciale, sia g il determinante di tale matrice, si ha:

$$g = g_{\mu\nu} det(M_{\mu\nu}) \tag{3.36}$$

dove $M_{\mu\nu}$ è il minore ottenuto eliminando dalla matrice la riga e la colonna dell'elemento $g_{\mu\nu}$. Per costruire la matrice inversa si sostituisce a ciascun elemento il suo complemento algebrico diviso il determinante g:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\det M_{\mu\nu}}{g} \Rightarrow \det M_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$$

Il differenziale del determinante del tensore metrico, dg, a partire dalla (3.36) e dall'espressione precedente:

$$dg = \delta g_{\mu\nu} \det M_{\mu\nu} \Rightarrow dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} \tag{3.37}$$

d'altra parte, nello spazio tetradimensionale:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$$

si ottiene:

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

dunque per il differenziale, utilizzando la (3.37):

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

Poichè:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln |g| = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln (-g) \tag{3.38}$$

essendo g negativo, utilizzando le relazioni (1.17) e (1.18):

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = g^{\mu\rho} \{\rho, \lambda\nu\} = g^{\mu\rho} \frac{1}{2} (g_{\rho\lambda,\nu} + g_{\nu\rho,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho})$$

ed eguagliando gli indici μ e ν si ha:

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\lambda,\mu} + g_{\mu\rho,\lambda} - g_{\lambda\mu,\rho}) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g_{\mu\rho,\lambda}$$

quindi, per l'equazione (3.38):

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln (-g) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln(\sqrt{-g})$$

oppure:

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g)_{,\alpha} \tag{3.39}$$

Con queste premesse, consideriamo la derivazione covariante di un tensore in forma mista:

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = T^{\beta}_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} T^{\sigma}_{\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} T^{\beta}_{\sigma}$$

utilizzando l'uguaglianza appena ottenuta per i simboli di Christoffel con due indici uguali (3.39):

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = T^{\beta}_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} T^{\sigma}_{\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} T^{\beta}_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{-g} T^{\beta}_{\alpha}) - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} T^{\beta}_{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{-g} T^{\beta}_{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu}$$

Bibliografia

[1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. AMS Chelsea publishing. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008, Rhode Island.

[2] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, 2014, Santa Barbara.

[3] R. Feynman. *Feynman Lectures On Gravitation*. CRC Press, 2018, Boca Raton.

[4] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and application of the General Theory of Relativity*. Wiley India Pvt. Limited, 2008, New York.

[5] S. Capozziello and M. Funaro. *Introduzione alla relatività generale. Con applicazioni all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*. Liguori, 2005, Napoli.

[6] A. Einstein. *Il significato della relatività*. Bollati Boringhieri I Grandi Pensatori. Bollati Boringhieri, 2015, Torino.

[7] L.D. Landau and E.M. Lifsits. *Fisica teorica*. Number v. 10 in Fisica teorica. Editori Riuniti, 1994, Roma.

[8] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196, 1916.

[9] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:424–434, 1916.

[10] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2001, Oxford.

[11] R. D'Inverno and L.F.M.S.R. D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education. Clarendon Press, 1992, Oxford.

[12] Ioannis Gkigkitzis, Ioannis Haranas, and Omiros Ragos. Singularities Entropy and Information. *Physics International 5(1)*: 103-111. DOI: 10.3844/pisp.2014.103.111, 2016.

[13] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1998, Oxford.

[14] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, and D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017, Princeton.

[15] N.K. Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity.* Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York, 2012, New York.

[16] R.M. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984, Chicago.

[17] Y.B. Zel'dovich and I.D. Novikov. *Stars and Relativity.* Dover Books on Physics. Dover Publications, 2014, New York.

[18] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler. *Gravitation Theory and Gravitational Collapse.* University of Chicago Press, 1965, Chicago.

[19] Thorne KS. Gravitational Collapse and the Death of a Star. 150(3704):1671-1679. DOI:10.1126/science.150.3704.1671, 1965.

[20] S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophysical Journal, vol. 74, p. 81* , DOI:10.1086 / 143324 , 1931.

[21] M e Wheeler JA e Chiu HY Harrison, BK e Wakano. La struttura e l'evoluzione dell'universo. *Onzieme Conseil de Physisque de Solvay*, 1958.

[22] V. Frolov and I. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments.* Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 2012, Dordrecht.

[23] Harrison E.R. Gravitational Collapse, *Nature* ***204***, 1179–1180. https://doi.org/10.1038/2041179a0, 1964.

[24] J. Craig Wheeler. *Cosmic Catastrophes: Exploding Stars, Black Holes, and Mapping the Universe.* Cambridge University Press, 2 edition, 2007, New York.

[25] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects.* Wiley, 2008, Weinheim.