UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Gruppi di matrici e di Lie in fisica

Relatore:
Prof. Francesco D'Andrea

Candidato:
Fabrizio Rippa
Matr. N85001266

Anno Accademico 2019/2020

Alla mia mamma ed al mio papà.

Indice

Introduzione

Dato un insieme, ad esempio l'insieme degli stati di un sistema fisico in studio, le trasformazioni invertibili di questo insieme si possono comporre, e con la composizione si ottiene una struttura algebrica che prende il nome di gruppo. Le trasformazioni del sistema sono quindi conseguenza dell'azione di un elemento di un gruppo. La teoria dei gruppi fornisce un formalismo universale per esplorare le proprietà di un gruppo, senza dover esplicitare la forma matematica dei suoi elementi.

In fisica si sfrutta in particolare l'invarianza dei sistemi sotto l'azione di determinati gruppi per ricavare alcune leggi di conservazione fondamentali: questo è il contenuto del teorema di Noether. Ad esempio, l'invarianza dei sistemi sotto il gruppo delle rotazioni porta alla legge di conservazione del momento angolare, l'invarianza per traslazioni spaziali porta alla conservazione del momento, o ancora l'invarianza di gauge (di fase) che porta alla legge di conservazione della carica elettrica. In altre parole, una simmetria (interna) del sistema è legata ad una proprietà invariante, i.e. una legge di conservazione.

In questa tesi, dopo aver richiamato alcuni concetti di algebra astratta, concentreremo la nostra attenzione sui gruppi di matrici che sono i gruppi che vengono utilizzati più di frequente in fisica e vedremo come possiamo sempre ricondurci a gruppi di matrici reali.

Svilupperemo quindi un formalismo che ci permetterà di dimostrare che tutti i gruppi di matrici sono gruppi di Lie. In particolare, introdurremo le algebre di Lie, e lo strumento che ci permette di connettere un gruppo di Lie alla sua algebra, ovvero l'applicazione esponenziale, che vedremo sarà di particolare importanza per studiare le rappresentazioni del gruppo e della sua algebra. Come i gruppi sono usati per descrivere le trasformazioni di un insieme, i gruppi di matrici sono particolarmente importanti quando si parla di trasformazioni lineari, ad esempio di uno spazio vettoriale. Se l'insieme in esame è una varietà differenziabile, gli oggetti naturali per descriverne le trasformazioni sono i cosiddetti gruppi di Lie, introdotti nel primo capitolo. In altri termini, possiamo dire che i gruppi di Lie sono i gruppi di simmetria delle varietà differenziabili, e sono anche manifestazioni di una struttura matematica più semplice, ovvero l'algebra di Lie, che ci permette di definire le proprietà locali di un gruppo.

Nel terzo capitolo vedremo che è possibile mappare, attraverso le rappresentazioni, un qualsiasi gruppo in un sottogruppo delle trasformazioni lineari invertibili di uno spazio vettoriale. Se lo spazio ha dimensione n finita, il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili è isomorfo a $GL_n(\mathbb{R})$ e se la rappresentazione è iniettiva sarà un isomorfismo con l'immagine. In altri termini, scelta una base per lo spazio vettoriale, possiamo rappresentare l'azione di un gruppo mediante una matrice.

Vedremo poi le relazioni che intercorrono tra le rappresentazioni di un gruppo di Lie e quelle della corrispondente algebra, e parleremo di teoria delle rappresentazioni di $su(2)$, che è l'algebra di Lie del gruppo delle matrici complesse 2×2 speciali unitarie $SU(2)$ e del gruppo speciale delle matrici ortogonali $SO(3)$. Cercheremo di analizzare, a partire dalle rappresentazioni di $su(2)$, il legame che intercorre tra $SU(2)$ ed $SO(3)$.

Infine, fornendo un controesempio, vedremo che non tutti i gruppi di Lie sono gruppi di matrici. Il controesempio che studieremo è un quoziente del gruppo di Heisenberg, la cui algebra di Lie è quella che definisce le regole di commutazione canoniche in meccanica quantistica. Nella fattispecie, esso è il quoziente tra il gruppo di Heisenberg ed un suo sottogruppo normale chiuso. Vedremo quindi un importante risultato in geometria differenziale: l'azione libera e propria di un gruppo di Lie su una varietà differenziabile, garantisce che lo spazio delle orbite è ancora una varietà e che la proiezione sullo spazio delle orbite è una sommersione. Questo teorema, unito alla proprietà caratteristica delle sommersioni differenziabili, permetterà di dimostrare il teorema di caratterizzazione degli spazi omogenei e quindi che il quoziente tra un gruppo di Lie ed un suo sottogruppo normale chiuso è ancora un gruppo di Lie. Infine dimostreremo che questo gruppo quoziente non è un gruppo di matrici: per fare ciò useremo alcuni risultati sulla sua teoria delle rappresentazioni.

Capitolo 1

Preliminari matematici

In questo capitolo, se non espressamente indicato, faremo riferimento a [Sti08] per i paragrafi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, mentre ci rifaremo a[Tap16] per i paragrafi 1.6, 1.7, 1.8.

1.1 Gruppi: definizioni ed un esempio.

Un *gruppo* G [Mac74] è un insieme non vuoto nel quale è definita un'operazione binaria, cioè una funzione $G \times G \to G$, soddisfacente tre condizioni

1. Per ogni $g_1, g_2, g_3 \in G$, si ha che

$$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3;$$

2. esiste un elemento $e \in G$, detto *elemento neutro*, tale che

$$ge = eg = g \qquad \forall g \in G;$$

3. per ogni $g \in G$ esiste il suo *inverso* g^{-1} tale che

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e \qquad \forall g \in G.$$

Vale il teorema di unicità di elemento neutro e inverso: in un gruppo l'elemento neutro è unico e l'inverso di un elemento è unico. Nella notazione qui sopra l'operazione è indicata con la semplice giustapposizione di simboli: chiamiamo tale notazione *moltiplicativa*. In altri casi si usa indicare l'operazione con "+", e chiameremo tale notazione *additiva*, ad esempio nel caso degli spazi vettoriali, che sono appunto gruppi rispetto alla somma, come vedremo nel paragrafo 1.7. Chiameremo *abeliano* un gruppo la cui operazione è commutativa, cioè tale che

$$g_1g_2 = g_2g_1 \qquad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Se moltiplichiamo tutti gli elementi g' di un gruppo G da sinistra per un particolare $g \in G$, riotteniamo tutti gli elementi di G poichè, $\forall g'' \in G$ esiste un $g' \in G$ tale che $gg' = g''$ (cioè $g' = g^{-1}g''$). Un gruppo topologico è uno spazio topologico con operazione soddisfacente gli assiomi di gruppo, tale che moltiplicazione ed inversione sono funzioni continue. Un sottoinsieme H di G è un *sottogruppo* di G se è un gruppo con l'operazione definita in G: in particolare esso deve essere chiuso per tale operazione. Un sottogruppo di un gruppo topologico è anch'esso un gruppo topologico, se viene dotato della topologia indotta dal gruppo che lo contiene.

Riportiamo due esempi [Ste95], che avremo modo di analizzare nel corso della trattazione. Consideriamo il gruppo $O(3)$ di tutte le trasformazioni lineari nello spazio Euclideo tridimensionale invertibili e che conservano norma, ovvero, tutte le trasformazioni A che soddisfano:

$$||Av|| = ||v||$$

per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$, e che possiamo identificare nel modo naturale con matrici. Con un conto, si fa vedere che si tratta di quelle matrici che soddisfano

$$AA^T = 1,$$

da cui discende anche che le trasformazioni ortogonali sono quelli la cui matrice rappresentativa ha determinante ± 1. Un calcolo diretto mostra che il prodotto di due trasformazioni ortogonali è ancora una trasformazione ortogonale, così come lo è la trasformazione inversa. Quindi, l'insieme di tutte le trasformazioni lineari è effettivamente un gruppo. Indicheremo con $SO(3)$ il sottogruppo delle trasformazioni ortogonali con determinante $+1$.

Indichiamo con $\mathbb{C}^n$ lo spazio vettoriale complesso n-dimensionale, con il prodotto scalare hermitiano:

$$(z, w) = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Una matrice complessa A è detta *unitaria* se:

$$(Az, Aw) = (z, w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Indicando con A^* la matrice hermitiana di A, possiamo dire che A è unitaria se e solo se $AA^* = e$. Il prodotto di due matrici unitarie è ancora una matrice unitaria, così come l'inversa di una matrice unitaria è una matrice unitaria: pertanto, l'insieme di tutte le matrici unitaria $n \times n$ è un gruppo, che indicheremo con $U(n)$. Dato che $detA^* = \overline{detA}$, si ha $|detA| = 1$, per ogni $A \in U(n)$. Il sottogruppo di $U(n)$ che ha per elementi le matrici che hanno determinante unitario è indicato con $SU(n)$. Quindi, ad esempio, il gruppo $SU(2)$ consiste in tutte le matrici 2×2 della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Prima di dare la definizione di gruppo di Lie, diamo prima la definizione di gruppo topologico. Riferendoci a [SW13], un *gruppo topologico* è un gruppo che è anche uno spazio topologico, in cui le operazioni di gruppo, ovvero la moltiplicazione da $G \times G \to G$ e l'inversione come applicazione da $G \to G$, sono continue. Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico che è anche una varietà differenziabile, in cui le operazioni di gruppo sono differenziabili.

1.2 Sottogruppi e laterali

Per ogni sottogruppo H di G si ha una decomposizione di G in *laterali*, destri e sinistri, di H in G. I laterali sinistri sono, per definizione, insiemi della forma:

$$gH = \{gh \ : \ h \in H\} \qquad \text{con } g \in G.$$

Quindi H stesso è un laterale per $g = e$, e, in generale, il laterale gH sarà il "traslato" mediante g di H. I laterali destri, invece, sono insiemi della forma

$$Hg = \{hg : h \in H\}. \qquad \text{con } g \in G.$$

Ogni laterale gH è in corrispondenza biunivoca con H perchè possiamo ottenere ciascun $h \in H$ da $gh \in gH$ semplicemente moltiplicando da sinistra per g^{-1}. Inoltre, laterali diversi sono disgiunti, poichè se $g \in g_1H$ e $g \in g_2H$ allora

$$g = g_1h_1 = g_2h_2 \qquad \text{per qualche } \; h_1, h_2 \in H,$$

e quindi $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$. Ma allora

$$g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H = g_2(h_2h_1^{-1}H) = g_2H$$

poichè $h_2h_1^{-1} \in H$ e quindi $h_2h_1^{-1}H = H$, dato che abbiamo già visto che moltiplicando ad un gruppo uno dei suoi elementi riotteniamo il gruppo stesso. Quindi, se due laterali hanno un elemento in comune, allora essi coincidono. Possiamo anche dire [Lee13] che due elementi $g_1, g_2 \in G$ appartengono allo stesso laterale sinsitro H se e solo se $g_1^{-1}g_2 \in H$; in questo caso possiamo scrivere $g_1 \equiv g_2$ (modulo H), e dire che *g_1 e g_2 sono congruenti modulo H*.

Notiamo che i laterali sinistri (lo stesso vale per i destri) formano una partizione di G e, lo spazio quoziente determinato da tale partizione, ovvero l'insieme di tutti i laterali munito della topologia quoziente, è chiamato *spazio dei laterli sinistri di G modulo H*, e viene indicato con G/H [Lee13].

1.3 Sottogruppi normali

A parte il caso speciale dei gruppi abeliani, siccome in generale $hg \neq gh$, anche gH ed Hg possono non essere uguali. Se $gH = Hg$ per ogni $g \in G$, diremo che H è un *sottogruppo normale* di G. In altri termini, posto

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \;:\; h \in H\} \qquad \text{per } g \in G.$$

allora H è un sottogruppo normale se e solo se $H = g^{-1}Hg$, per ogni $g \in G$. Ovviamente, se un gruppo è abeliano, ogni suo sottogruppo sarà automaticamente normale.

I laterali di un sottogruppo normale H formano un gruppo moltiplicativo, secondo la regola che il prodotto del laterale di g_1 con il laterale di g_2 è uguale al laterale di g_1g_2:

$$g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H.$$

Il gruppo dei laterali è chiamato *gruppo quoziente* di G mediante H, e si indica con G/H: sottolineiamo il fatto che il gruppo quoziente G/H esiste solo se H è un sottogruppo normale, ed ha come elemento neutro H stesso. Un altro modo per descrivere questa situazione è in termini di omomorfismi, ovvero mediante applicazioni tra gruppi che conservano la struttura di gruppo.

Un gruppo si dice *semplice* se possiede solo sottogruppi normali banali, ovvero $H = e$ oppure $H = G$. Ad esempio, $SO(3)$ è un gruppo semplice. Si dirà *semisemplice* un gruppo che non possiede sottogruppi normali non banali ed abeliani [CC08]. Se un gruppo è semplice sarà anche semisemplice, poichè per definizione non possiede sottogruppi normali non banali.

Come definito in [Mac74], dato un gruppo G, il *centro di G* è il sottogruppo di G

$$Z(G) = \{c : cg = gc \quad \forall g \in G\}$$

ovvero è il gruppo formato dagli elementi di G che commutano con tutti gli elementi di G. Chiaramente, per come è definito, si tratta di un gruppo abeliano. Inoltre, è un sottogruppo normale di G: infatti, presi $c \in Z(G)$ e $g \in G$

$$gc = cg \Rightarrow gcg^{-1} = cgg^{-1} = c.$$

Questa proprietà permette sempre di costruire il gruppo quoziente $G/Z(G)$.

1.4 Omomorfismi ed isomorfismi

Se H è un sottogruppo normale di G, l'applicazione $\varphi : G \to G/H$ definita da

$$\varphi(g) = gH \qquad \forall g \in G$$

conserva il prodotto, nel senso che, se $g_3 = g_1 g_2$, allora

$$\varphi(g_3) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) \qquad \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$$

Questo segue dal fatto che i laterali di un sottogruppo normale formano un gruppo moltiplicativo, infatti

$$\varphi(g_1 g_2) = g_1 g_2 H = g_1 H \cdot g_2 H = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2).$$

Un'applicazione $\varphi : G \to G'$ tra gruppi è detta un *omomorfismo* se conserva il prodotto. Notiamo che un omomorfismo tra gruppi, in particolare, conserva la struttura di gruppo, poichè conserva non solo il prodotto, ma anche l'identità e l'inversa. Infatti, poichè φ conversa il prodotto e poichè all'interno di un gruppo di elementi identità ed inverso sono unici:

- Dal momento che $g = eg$ per ogni $g \in G$, si ha:

$$\varphi(g) = \varphi(eg) = \varphi(e) \cdot \varphi(g)$$

- Dato che $e = gg^{-1}$ per ogni $g \in G$, si ha:

$$e = \varphi(e) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1})$$

  che ci dice che $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, dal momento che l'inverso di $\varphi(g)$ è unico.

In generale, più elementi di G potrebbero essere mappati nello stesso elemento di G', ovvero φ non deve necessariamente essere un'applicazione biunivoca. Se esiste un omomorfismo $\varphi : G \to G'$ biunivoco diciamo che G e G' sono *isomorfi* (ovvero hanno la stessa forma) e l'applicazione φ la chiamiamo *isomorfismo*.

Dato un omomorfismo tra gruppi $\varphi : G \to G'$, l'*immagine* di φ, ovvero l'insieme

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \in G : g \in G\},$$

è un sottogruppo di G'. Il più naturale sottogruppo normale H di G è il *nucleo* di φ, definito come

$$H = \ker \varphi = \{g \in G \ : \ \varphi(g) = e\}.$$

Infatti, possiamo vedere che $\mathrm{Im}(\varphi)$ è isomorfo al gruppo $G/(\ker \varphi)$ dei laterali di $\ker \varphi$, perchè:

1. $\ker \varphi$ è un gruppo, dal momento che:

$$h_1, h_2 \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(h_1) = \varphi(h_2) = e \Rightarrow \varphi(h_1)\varphi(h_2) = e$$

$$\Rightarrow \varphi(h_1 h_2) = e \Rightarrow h_1 h_2 \in \ker \varphi$$

e inoltre

$$h \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(h) = e \Rightarrow \varphi(h)^{-1} = e$$

$$\Rightarrow \varphi(h^{-1}) = e \Rightarrow h^{-1} \in \ker \varphi.$$

2. $\ker\varphi$ è un sottogruppo normale di G perchè, per ogni $g \in G$:

$$h \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e\varphi(g^{-1}) = e$$

$$\Rightarrow ghg^{-1} \in \ker\varphi.$$

Quindi $g(\ker\varphi)g^{-1} = \ker\varphi$, ovvero $\ker\varphi$ è normale.

3. Ogni $g' = \varphi(g) \in G'$ corrisponde al laterale $g(\ker\varphi)$. Infatti, si ha $g(\ker\varphi) = \varphi^{-1}(g')$, dal momento che:

$$k \in \varphi^{-1}(g') \iff \varphi(k) = g' \iff \varphi(k) = \varphi(g) \iff \varphi(g)^{-1}\varphi(k) = e$$

$$\iff \varphi(g^{-1}k) = e \iff g^{-1}k \in \ker\varphi \iff k \in g(\ker\varphi).$$

4. Il prodotto di elementi di $g'_1 g'_2 \in G'$ corrisponde al prodotto dei corrispondenti laterali:

$$g'_1 = \varphi(g_1),\ g'_2 = \varphi(g_2) \Rightarrow \varphi^{-1}(g'_1) = g_1(\ker\varphi),\ \varphi^{-1}(g'_2) = g_2(\ker\varphi)$$

dal passo precedente. Inoltre:

$$g'_1 = \varphi(g_1),\ g'_2 = \varphi(g_2) \Rightarrow g'_1 g'_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2)$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(g'_1 g'_2) = g_1 g_2(\ker\varphi)$$

sempre dal passo 3. Quindi il prodotto $g'_1 g'_2$ corrisponde a $g_1 g_2(\ker\varphi)$, che è il prodotto dei laterali corrispondenti a g'_1 e g'_2 rispettivamente.

Dunque, riassumendo, un omomorfismo tra gruppi φ di G in G' fornisce una corrispondenza uno ad uno tra $\mathrm{Im}(\varphi)$ e $G/(\ker\varphi)$ che conserva il prodotto, i.e. $\mathrm{Im}(\varphi)$ è isomorfo a $G/(\ker\varphi)$. Questo risultato è noto come *teorema fondamentale degli omomorfismi tra gruppi*. Corollario di questo teorema è se $\varphi : G \to G'$ è un omomorfismo suriettivo tra gruppi, allora G' è isomorfo a $G/\ker\varphi$.

1.5 L'azione di un gruppo su un insieme

Le più importanti applicazioni della teoria dei gruppi sono quelle che riguardano le loro azioni su altri insiemi: in particolare, quando parleremo di gruppi di Lie, vedremo l'azione di gruppi di Lie su varietà differenziabili. Inoltre, vedremo un tipo di azione particolarmente importante, cioè quello delle azioni lineari su uno spazio vettoriale, cioè omomorfismi $\rho : G \to GL(V)$, dove G è un gruppo e V è uno spazio vettoriale: queste azioni saranno dette rappresentazioni. Notiamo che se G è un gruppo topologico richiediamo che gli omomorfismi ρ siano anche funzioni continue, mentre per i gruppi di Lie richiediamo che siano differenziabili.

Possiamo definire [Lee13], detti G un gruppo ed M un insieme, l'azione sinistra di G su M come un'applicazione $G \times M \to M$, scritta come $(g, p) \mapsto g \cdot p$, che soddisfa:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \qquad \forall g_1, g_2 \in G, \quad p \in M;$$

$$e \cdot p = p \qquad \forall p \in M.$$

E' intuitivo il caso dell'azione destra. Notiamo che un'azione destra $p \cdot g$ può essere convertita in un'azione sinistra moltiplicando da destra e per g^{-1}, e viceversa. Se M è uno spazio topologico e G è un gruppo topologico, l'azione di G su M è detta continua se la corrispondente applicazione è continua: in questo caso diremo che M è un G-spazio (destro o sinistro). Se M è una varietà differenziabile e G un gruppo di Lie, e l'applicazione è liscia, parleremo di azione differenziabile.

I gruppi di Lie sono importanti in situazioni che coinvolgono qualche tipo di simmetria. Ad esempio, se M è uno spazio vettoriale o, più in generale, una varietà differenziabile munita di una metrica, l'insieme dei diffeomorfismi di M che conservano la struttura (gruppi di simmetria della struttura), spesso si rivelano essere gruppi di Lie che agiscono in maniera differenziabile su M.

Diamo adesso alcune definizioni, sempre seguendo [Lee13]. Supponiamo che $\theta : G \times M \to M$ sia un'azione sinistra di un gruppo G su un insieme M.

- Per ogni $p \in M$, *l'orbita di* p, indicata con $G(p)$, è l'insieme di tutte le immagini di p sotto l'azione degli elementi di G:

  $$G(p) = \{\theta_g(p) : g \in G\}.$$

  Per riprendere l'esempio fatto nel paragrafo 1.1, consideriamo il gruppo $SO(3)$ sullo spazio euclideo tridimensionale: l'orbita di un qualsiasi punto che non sia l'origine è una sfera centrata nell'origine e passante per il punto in questione, invece l'orbita dell'origine è solo un punto, l'origine stessa [Ste95].

  Come esplicitato in [AT11],le orbite costituiscono una partizione di M, cioè essere in una stessa orbita è una relazione d'equivalenza. Indicheremo con M/G lo spazio quoziente delle orbite.

- Per ogni $p \in M$, il *gruppo di isotropia*, indicato con G_p, è l'insieme di tutti gli elementi di G che "fissano" p:
  $$G_p = \{g \in G : \theta_g(p) = p\}.$$

  E' chiaro che sia un gruppo poichè se $\theta_g(p) = p$ allora $\theta_{g^{-1}}(p) = p$. Inoltre, se $\theta_{g_1}(p) = p$ e $\theta_{g_2}(p) = p$, allora $\theta_{g_1 g_2}(p) = p$.

  Nel caso di $SO(3)$ che agisce sullo spazio tridimensionale, il gruppo di isotropia di ogni punto $p \neq 0$ avrà come elementi le rotazioni attorno all'asse passante per il punto: quindi, per ogni $p \neq 0$ il gruppo dell'isotropie di $SO(3)$ è isomorfo ad $SO(2)$, e consiste nelle rotazioni nel piano perpendicolare a p. Il gruppo delle isotropie nel caso in cui p è l'origine è l'intero gruppo $SO(3)$ [Ste95].

- L'azione è detta *transitiva* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste $g \in G$ tale che $\theta_g(p) = q$, o, equivalentemente, se l'unica orbita è tutta in M. In tal caso diremo che M è uno spazio G-*spazio omogeneo* [AT11].

- L'azione è detta *libera* se l'unico elemento di G che fissa ogni elemento di M è l'identità, ovvero $\theta_g(p) = p$ per qualche $p \in M$, implica $g = e$, o, equivalentemente, se ogni gruppo di isotropia è banale.

1.5.1 Coniugazione e classi di coniugio

In questo paragrafo ci rifacciamo al testo [Ste95]. Un insieme su cui un gruppo G può agire è il gruppo G stesso. Quando G agisce su se stesso con una moltiplicazione da sinistra, quindi trasformando b mediante a in ab, l'azione sarà sempre transitiva. Inoltre, il sottogruppo di isotropia di ogni elemento del gruppo è costituito dalla sola identità, dal momento che $ab = b$ implica $a = e$.

C'è un altro modo per definire l'azione di un gruppo su se stesso, che porta a orbite e sottogruppi di isotropia non banali. Diciamo che G agisce su se stesso per *coniugazione* se l'azione di a su b è aba^{-1}. La coniugazione definisce l'azione di un gruppo su se stesso, dato che l'azione di ac su b porta a:

$$(ac)b(ac)^{-1} = acbc^{-1}a^{-1} = a(cbc^{-1})a^{-1},$$

che è lo stesso dell'azione mediante coniugazione di c seguita dall'azione di a. Notiamo inoltre che la coniugazione è un isomorfismo di gruppi.

Le orbite di un gruppo sotto coniugazione sono dette *classi di coniugio* del gruppo. Due elementi b e c appartengono alla stessa classe se esiste un elemento a tale che:

$$aba^{-1} = c, \tag{1.1}$$

e due tali elementi saranno detti *coniugati*. Notiamo che l'essere coniugati è una relazione di equivalenza fra gli elementi del gruppo, che quindi realizza una partizione del gruppo stesso: in altre parole, il gruppo risulta formato dall'unione di vari sottoinsiemi disgiunti, ciascuno costituito da elementi tra loro coniugati. Riprendendo l'esempio di $SO(3)$, possiamo dire che ciascuna classe è formata dalle rotazioni del medesimo angolo (intorno a tutti i possibili assi).

Dall'equazione 1.1 seguono due importanti conseguenze:

- L'insieme $\{e\}$ è una classe di coniugio formata da un solo elemento. Infatti:
$$aea^{-1} = e \qquad \forall a \in G;$$
- Se G è un gruppo abeliano, ogni classe di coniugio è formata da un solo elemento. Questo segue banalmente da
$$aba^{-1} = aa^{-1}b = b.$$

Il gruppo di isotropia di un elemento G_b sotto coniugazione consiste negli elementi a del gruppo per cui vale $aba^{-1} = b$. Alcuni elementi che soddisfano tale relazione sono sicuramente e, b, b^{-1}.

Quando parleremo di gruppi di matrici, elementi B, C appartenenti ad una classe di coniugio soddisfano:

$$ABA^{-1} = C,$$

per una qualche A, da cui segue che le matrici B e C hanno gli stessi autovalori, e quindi stessi determinante e traccia.

1.6 Corpi e campi

Un *corpo* è un insieme $\mathbb{K}$ dotato di due operazioni, addizione e moltiplicazione, che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{K};$

2. $\mathbb{K}$ è un gruppo abeliano per l'addizione, con identità 0;

3. $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo, con identità 1.

Un corpo per cui la moltiplicazione è commutativa è detto un *campo*.

Gli insiemi dei numeri reali $\mathbb{R}$ e dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, sono esempi di campo. Il piano $\mathbb{R}^2$ (in generale $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$) non è un campo per la moltiplicazione e l'addizione di componenti omonime,

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd), \qquad \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}^2$$

perchè non ogni elemento diverso dal vettore nullo è invertibile.

Per rendere $\mathbb{R}^2$ un campo, lo muniamo dell'addizione di componenti omonime, e definiamo la moltiplicazione nel modo seguente:

$$(a,b)\cdot(c,d) \coloneqq (ac-bd, ad+bc), \quad \forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2.$$

Se indichiamo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ con $a+ib$ la moltiplicazione appena definita diventa la familiare moltiplicazione complessa:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

Possiamo quindi identificare $\mathbb{R}^2$ con il *campo dei complessi* $\mathbb{C}$. E' possibile costruire una moltiplicazione che renda anche $\mathbb{R}^4$ un campo. Indicando un generico elemento di $\mathbb{R}^4$ come $a+ib+jc+kd$, ci basta definire una regola di moltiplicazione per i simboli $\{1,i,j,k\}$ ed estenderla in modo che sia $\mathbb{R}$-bilineare. Il simbolo 1 agisce come identità moltiplicativa, mentre il quadrato degli altri tre simboli è uguale a -1. Inoltre, il prodotto di due simboli tra $\{i,j,k\}$ è pari a più o meno il terzo, secondo le permutazioni cicliche di $i\cdot j=k$. L'insieme $\mathbb{R}^4$ con le operazioni di somma di componenti omologhe e la moltiplicazione appena descritta, si indica con $\mathbb{H}$ ed è chiamato *corpo dei quaternioni*. Seguendo [D'A20], possiamo indicare con $\mathbb{H}\subset M_2(\mathbb{C})$ il sottospazio delle matrici della forma

$$q \coloneqq \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \qquad z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Con questa identificazione, le unità quaternioniche saranno:

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \quad j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \quad k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}.$$

Notiamo che la regola di moltiplicazione di due quaternioni senza le componenti k e j equivale alla regola di moltiplicazione per i complessi, e che la regola di moltiplicazione dei complessi senza la componente i equivale a quella dei numeri reali. Si ha quindi la seguente catena di inclusioni:

$$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset\mathbb{H}.$$

1.7 Le matrici come trasformazioni lineari

Uno *spazio vettoriale sinistro* su un corpo $\mathbb{K}$, anche detto $\mathbb{K}$-*modulo sinistro* è un insieme M munito di un'operazione di addizione da $M\times M$ ad M, e della moltiplicazione per uno scalare da $\mathbb{K}\times M$ ad M, tali che M è un gruppo abeliano per l'addizione e, per ogni $a,b\in\mathbb{K}$, $A,B\in M$ si hanno:

1. $a\cdot(b\cdot A)=(a\cdot b)\cdot A$;

2. $1\cdot A=A$;

3. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;

4. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$.

Supponiamo che V_1 e V_2 siano spazi vettoriali sinistri su $\mathbb{K}$. Una funzione $f : V_1 \to V_2$ è detta $\mathbb{K}$-*lineare* se per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $X, Y \in V_1$:

$$f(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot f(X) + b \cdot f(Y).$$

E' naturale identificare $\mathbb{K}^n = \{(q_1, ..., q_n) \ : \ q_i \in \mathbb{K}\}$ con $M_{1,n}(\mathbb{K})$, e in tal modo considerare $\mathbb{K}^n$ come uno spazio vettoriale sinistro su $\mathbb{K}$. Con questa identificazione, abbiamo due possibili modi per far vedere che le matrici corrispondono a trasformazioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^n$, utilizzando la moltiplicazione destra o sinistra.

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, definiamo $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ e $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tali che, per $X \in \mathbb{K}^n$:

$$R_A(X) \coloneqq X \cdot A \quad \text{e} \quad L_A(X) \coloneqq (A \cdot X^T)^T = X \cdot A^T = R_{A^T}.$$

Proposizione 1.1. *La moltiplicazione destra determina una corrispondenza biunivoca tra le funzioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^n$ e le matrici. Più precisamente:*

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *è $\mathbb{K}$-lineare.*

2. *Ogni funzione $\mathbb{K}$-lineare da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^n$ è uguale a R_A per qualche $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Per provare la 1, notiamo che per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $X, Y \in \mathbb{K}^n$,

$$R_A(aX + bY) = (aX + bY) \cdot A = a(X \cdot A) + b(Y \cdot A) = a \cdot R_A(X) + b \cdot R_A(Y).$$

Per provare la 2, partiamo dal fatto che $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è $\mathbb{K}$-lineare. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice la cui i-esima colonna è $f(e_i)$, dove con e_i abbiamo indicato la base canonica di $\mathbb{K}^n$. E' chiaro che $f(e_i) = R_A(e_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dato che f ed R_A sono entrambe applicazioni lineari e sono uguali se applicate su una base, possiamo concludere che $f = R_A$. □

Sfruttando la relazione

$$L_A = R_{A^T} \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{K}),$$

è possibile estendere la proposizione 1.1 anche all'applicazione $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, tenendo presente che L_A è necessariamente $\mathbb{K}$-lineare solo quando $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.8 Il gruppo generale lineare

L'insieme $M_n(\mathbb{K})$ non è un gruppo moltiplicativo perchè non tutte le matrici $n \times n$ hanno inversa.

Il *gruppo generale lineare* su $\mathbb{K}$ è definito come:

$$GL_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \exists B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ con } AB = BA = I\}$$

ed è un gruppo moltiplicativo, in generale non abeliano. La matrice B è dunque l'inversa di A, e sarà indicata con A^{-1}. Quindi $GL_n(\mathbb{K})$ è l'insieme di tutte le matrici aventi determinante diverso da zero. Il teorema di Binet ci permette di concludere che l'applicazione $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to$

$\mathbb{K} \setminus \{0\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$[1], è un omomorfismo tra gruppi (ricordiamo che $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ è gruppo rispetto al prodotto): in particolare, il sottogruppo normale $SL_n(\mathbb{K})$ di $GL_n(\mathbb{K})$ è il nucleo di questo omomorfismo. In altre parole, è il sottogruppo delle matrici con determinante pari ad uno.

Si può caratterizzare il gruppo generale lineare anche attraverso la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \textit{ è un isomorfismo lineare}\}.$$

Dimostrazione. Se $A \in GL_n(\mathbb{K})$ e B è tale che $BA = I$, allora

$$R_A \circ R_B = R_{BA} = R_I = I_d$$

e quindi R_B è l'inversa di R_A.
Viceversa, sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ tale che R_A è invertibile. L'applicazione $(R_A)^{-1}$ è lineare e questo può essere visto applicando R_A ad entrambi i membri della seguente equazione:

$$(R_A)^{-1}(aX + bY) = a(R_A)^{-1}(X) + b(R_A)^{-1}(Y).$$

Dato che ogni applicazione lineare è rappresentata da una matrice, come mostrato nella proposizione 1.1, allora $(R_A)^{-1} = R_B$, per qualche $B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora $R_{BA} = R_A \circ R_B = I_d$, che implica $BA = I$. Similmente si dimostra che $R_{AB} = R_B \circ R_A = I_d$, che implica che $AB = I$. $\square$

A partire dal gruppo generale lineare è possibile definire i gruppi di matrici.

Un *gruppo di matrici* è un sottogruppo $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ topologicamente chiuso in $GL_n(\mathbb{K})$.

che ogni sottogruppo di $GL_n(\mathbb{C})$ o di $GL_n(\mathbb{H})$ è isomorfo ad un sottogruppo di $GL_m(\mathbb{R})$ per qualche m. Infatti, seguendo [D'A20], abbiamo definito i quaternioni $\mathbb{H}$ come il sottospazio vettoriale delle matrici 2×2 complesse: è evidente quindi che ogni sottogruppo $GL_n(\mathbb{H})$ è anche un sottogruppo di $GL_{2n}(\mathbb{C})$. A sua volta, ogni matrice complessa può essere scritta in un unico modo nella forma $A + iB$, con A e B matrici reali, e quindi è possibile definire un morfismo di gruppi iniettivo

$$GL_n(\mathbb{C}) \ni A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$$

che ci permette di identificare $GL_n(\mathbb{C})$ con un sottogruppo chiuso di $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Di conseguenza, ogni gruppo di matrici è un gruppo di matrici reale.

[1] E' possibile dimostrare, si veda [Asl96], che non è possibile definire il determinante di una matrice quaterionica come una funzione $\det : M_n(\mathbb{H}) \to \mathbb{H}$ che soddisfi le proprietà del determinante di matrici reali o complesse, ossia:

1. $\det(A) = 0 \iff A$ è una matrice singolare;

2. $\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \forall A, B \in M_b(\mathbb{K})$;

3. Se A' è ottenuta da A aggiungendo un multiplo sinistro di una riga ad un'altra riga oppure un multiplo destro di una colonna ad un'altra colonna, allora $\det(A') = \det(A)$;

in quanto avrebbe immagine commutativa. L'unica definizione di determinante che abbia senso è una funzione $d : M_n(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}$.

Capitolo 2

I gruppi di matrici sono gruppi di Lie

Per dimostrare che tutti i gruppi di matrici sono anche gruppi di Lie, dobbiamo introdurre i concetti di algebra di Lie di un gruppo di matrici, di esponenziale di una matrice (caso particolare dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie) e di gruppo ad un parametro. In questo capitolo ci rifacciamo al formalismo ed alla dimostrazione del teorema sulla mappa esponenziale di [Tap16], salvo diversa indicazione.

2.1 L'algebra di Lie di un gruppo di matrici

Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ dotato di un'ulteriore operazione $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, detta *parentesi di Lie*, che soddisfa

1. $[v, w] = -[w, v]$, per ogni $v, w \in V$;

2. $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$, per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $a, b \in \mathbb{K}$;

3. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ per ogni $u, v, w \in V$.

è detta *algebra di Lie* [AT11].

Un gruppo di matrici $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ è un sottoinsieme dello spazio Euclideo $M_n(\mathbb{R})$, quindi possiamo definire il suo *spazio tangente* in un qualsiasi $p \in G$ come segue:

$$T_pG \coloneqq \{\gamma'(0) \text{ tale che } \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G \text{ è differenziabile con } \gamma(0) = p\}.$$

Notiamo che γ è differenziabile come curva in $M_n(\mathbb{R})$, ed ha immagine contenuta in G, e $\gamma'(0)$ è il vettore velocità, derivazione delle funzioni C^∞ su $M_n(\mathbb{R})$. *L'algebra di Lie* di un gruppo di matrici $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ è lo spazio tangente a G in I_n, ovvero alla matrice identità di ordine n, dove $I_n \in G$, e lo indicheremo con $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{g}(G) \coloneqq T_{I_n}G$. Lo spazio tangente è un particolare spazio vettoriale: per far vedere che è un'algebra di Lie dobbiamo far vedere che $\mathfrak{g}$ è chiuso per la parentesi di Lie. Per fare ciò, definiremo la parentesi di Lie come la derivata in un punto della mappa aggiunta e faremo vedere che tale definizione coincide con quella data all'inizio del paragrafo.

Sia adesso G un gruppo di matrici con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Allora, per ogni $g \in G$, la coniugazione $C_g : G \to G$, definita come

$$C_g(a) \coloneqq gag^{-1}$$

è un isomorfismo differenziabile. La derivata $d(C_g)_I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è uno isomorfismo di spazi vettoriali, che indichiamo con Ad_g:

$$Ad_g \coloneqq d(C_g)_I$$

e chiameremo *mappa aggiunta*. Per scrivere una formula semplice per $Ad_g(B)$, sfruttiamo il fatto che ogni $B \in \mathfrak{g}$ può essere scritto come $B = \beta'(0)$, dove $\beta(t)$ è una curva differenziabile in G, con $\beta(0) = I$. Per la regola di derivazione del prodotto

$$Ad_g(B) = d(C_g)_I(B) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\beta(t)g^{-1} = gBg^{-1}$$
$$\Rightarrow Ad_g(B) = gBg^{-1}.$$

Se tutti gli elementi di G commutano con g, allora Ad_g è l'identità su $\mathfrak{g}$.

Possiamo allora definire la *parentesi di Lie* di due vettori A e B in $\mathfrak{g}$ nel modo seguente

$$[A, B] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad_{\alpha(t)}B,$$

dove $\alpha(t)$ è una curva differenziabile in G tale che $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(t) = 0$. Notiamo che $[A, B] \in \mathfrak{g}$, dato che è il vettore velocità iniziale di una curva differenziabile in $\mathfrak{g}$.

Proposizione 2.1. *Per ogni $A, B \in \mathfrak{g}$, $[A, B] = AB - BA$.*

Dimostrazione. Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ curve differenziabili in G, con $\alpha(0) = I$, $\beta(0) = I$, $\alpha'(0) = A$ e $\beta'(0) = B$. Usando la formula di Leibnitz ed un risultato che dimostreremo con la proposizione 2.6 si ha:

$$[A, B] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(t)B\alpha(t)^{-1} = AB - BA.$$

□

Vediamo adesso un altro importante risultato.

Proposizione 2.2. *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di matrici $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ è un sottospazio reale di $M_n(\mathbb{R})$.*

Vogliamo provare che $T_{I_n}G$ è un sottospazio vettoriale di $T_{I_n}M_n(\mathbb{R})$. La proposizione segue dall'identificazione canonica tra $T_{I_n}M_n(\mathbb{R})$ con $M_n(\mathbb{R})$ stesso. Dette A, B due matrici qualsiasi in $M_n(\mathbb{R})$, e scelta un'applicazione $f \in C^\infty(M_n(\mathbb{R}))$, l'isomorfismo (di spazi vettoriali) canonico, che indichiamo con $\mathcal{D}_{A,\cdot}$ da $M_n(\mathbb{R}) \tilde{\rightarrow} T_A M_n(\mathbb{R})$ è tale che

$$M_n(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \mathcal{D}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(A + tB).$$

Dimostrazione. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathfrak{g}$, ovvero possiamo scrivere $A = \gamma'(0)$ per qualche curva differenziabile $\gamma(t)$ in G, tale che $\gamma(0) = I$. La curva $\sigma := \gamma(\lambda t)$ è tale che il suo vettore velocità iniziale $\sigma'(0) = \lambda A$, il che prova che $\lambda A \in \mathfrak{g}$.

Siano adesso $A, B \in \mathfrak{g}$, pertanto possiamo scrivere $A = \gamma'(0)$ e $B = \beta'(0)$ per curve differenziabili $\gamma(t)$ e $\beta(t)$ in G, tali che $\gamma(0) = \beta(0) = I$. Il prodotto di queste due curve, $\sigma(t) := \gamma(t) \cdot \beta(t)$ è differenziabile e giace in G. Dalla regola di Leibnitz si ha $\sigma'(0) = A + B$, che dimostra che $A + B \in \mathfrak{g}$. □

Dato che stiamo identificando $M_n(\mathbb{R})$ con i suoi spazi tangenti, e quindi pensiamo le derivazioni semplicemente come matrici, segue banalmente che $gl_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$, dove con $gl_n(\mathbb{K})$ abbiamo indicato l'algebra di Lie di $GL_n(\mathbb{K})$. Infatti, ci basta considerare una curva $\gamma(t) = I + tA$ in $M_n(\mathbb{R})$ e notare che $\gamma(t)$ ha determinante non nullo e, pertanto, ristretta ad un intervallo appartiente a $GL_n(\mathbb{R})$. Quindi, tutte le matrici sono tangenti a curve nel gruppo generale lineare.

E' importante notare che, anche se $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, l'algebra di Lie di un gruppo di matrici complesso $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ non è necessariamente un $\mathbb{C}$-sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$. Lo stesso vale ovviamente per un gruppo di matrici quaternioniche.

2.1.1 Alcune definizioni

Per le prossime definizione seguiamo [Bak12]. Sia $\mathfrak{a}$ una $\mathbb{K}$-algebra di Lie con parentesi $[\cdot, \cdot]$, allora un $\mathbb{K}$-sottospazio $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ è una $\mathbb{K}$-*sottoalgebra di* $\mathfrak{a}$ se è chiusa per commutazione, i.e. per ogni $x, y \in \mathfrak{b}$, allora $[x, y] \in \mathfrak{b}$; scriveremo $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$. Una algebra di Lie in cui tutte le parentesi sono banali è detta *abeliana*.

Un $\mathbb{K}$-sottospazio $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{a}$ è un *ideale di Lie di* $\mathfrak{a}$ se $[z, x] \in \mathfrak{n}$ per ogni $z \in \mathfrak{n}$ e $x \in \mathfrak{a}$; scriveremo allora $\mathfrak{n} \lhd \mathfrak{a}$.

Il *centro di* $\mathfrak{a}$ è definito come

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \{z \in \mathfrak{a} : \forall x \in \mathfrak{a}, \quad [z, x] = 0\}.$$

Il centro di $\mathfrak{a}$ è anche un ideale di Lie. Infatti, per $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e $x \in \mathfrak{a}$, si ha $[x, z] = 0$, per cui $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \lhd \mathfrak{a}$.

Da questo punto alla fine del paragrafo, invece, ci rifacciamo a [Hal15]. Un'algebra di Lie $\mathfrak{a}$ è detta *irriducibile* se i suoi ideali sono banali, e sarà detta *semplice* se è irriducibile e $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, e sarà detta *semisemplice* se non ha ideali abeliani. Anche per le algebre di Lie, essere semplice implica essere semisemplice.

Diamo adesso un'importante definizione molto usata in fisica. Consideriamo l'algebra di Lie $\mathfrak{a}$ e scegliamo una base $X_1, \ldots, X_N$. Allora le costanti (uniche) c_{jkl} tali che

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{N} c_{jkl} X_l$$

sono dette *costanti di struttura* dell'algebra, rispetto alla base scelta. Si può dimsotrare a partire dalle proprietà della parentesi di Lie che tali costanti di struttura soddisfano le seguenti condizioni:

$$c_{jkl} + c_{kjl} = 0$$

$$\sum_n (c_{jkn} c_{nlm} + c_{kln} c_{njm} + c_{ljn} c_{nkm}) = 0$$

per ogni j, k, l, m.

2.1.2 Gli elementi di un'algebra di Lie come campi vettoriali

Abbiamo visto, nella sezione 1.7, che possiamo considerare, tramite la corrispondenza $A \leftrightarrow R_A$, gli elementi di $GL_n(\mathbb{R})$ come trasformazioni lineari in $\mathbb{R}^n$. Pertanto, una curva differenziabile $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to GL_n(\mathbb{R})$ può essere vista come una famiglia di trasformazioni lineari ad un parametro di $\mathbb{R}^n$. Per vedere come agisce questa famiglia di trasformazioni su un vettore $X \in \mathbb{R}^n$, sia $\sigma(t) \coloneqq R_{\gamma(t)}(X)$ una curva differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Se $\gamma(0) = I$, allora $\sigma(0) = X$. Dalla regola di derivazione del prodotto si ha:

$$\sigma'(0) = R_{\gamma'(0)}(X).$$

Quindi possiamo pensare a $R_{\gamma'(0)}$ come un campo vettoriale[1] su $\mathbb{R}^n$, il cui valore ad ogni $X \in \mathbb{R}^n$ indica la direzione in cui X viene spostato dalla famiglia di trasformazioni lineari corrispondenti alla curva $\gamma(t)$. In questo modo, possiamo rappresentare un elemento $\gamma'(0)$ di un'algebra di Lie di un gruppo di matrici come un campo vettoriale $R_{\gamma'(0)}$ su $\mathbb{R}^n$.

[1] Un *campo vettoriale* su $\mathbb{R}^m$ è una funzione continua $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

2.2 La mappa esponenziale

Per introdurre la funzione esponenziale di una matrice, partiamo da alcuni concetti di base.

Diremo che una serie

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l = A_0 + A_1 + A_2 + ...$$

di elementi $A_l \in M_n(\mathbb{R})$ converge (assolutamente) se, per ogni i, j, le serie $(A_0)_{ij} + (A_1)_{ij} + (A_2)_{ij} + ...$ convergono (assolutamente) a qualche $A_{ij} \in \mathbb{R}$.

Possiamo calcolare una serie di potenze $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$, con $c_I \in \mathbb{R}$, su una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ottenendo una serie in $M_n(\mathbb{R})$:

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots.$$

Quindi, quando applichiamo la serie di potenze della funzione $f(x) = e^x$ ad una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il risultato è l'*esponenziazione matriciale*:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots.$$

Vogliamo adesso provare che per ogni $A \in gl_n(\mathbb{R})$ esiste una curva a valori in $GL_n(\mathbb{R})$ tale che $\gamma'(0) = A$, cioè vogliamo provare che l'algebra di Lie di $GL_n(\mathbb{R})$ è data da tutte le matrici $n \times n$.

Proposizione 2.3. *Sia $A \in gl_n(\mathbb{R})$. La curva $\gamma : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, definita come $\gamma(t) \coloneqq e^{tA}$ è differenziabile e inoltre $\gamma'(t) = A\gamma(t)$.*

Dimostrazione. Ciascuna delle n^2 entrate di

$$\gamma(t) = e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots$$

è una serie di potenze in t che, differenziata, fornisce:

$$\gamma'(t) = A + tA^2 + \frac{1}{2}t^2A^3 + \dots = A\gamma(t).$$

□

Riportiamo, infine, due importanti proposizioni che ci saranno utili nel seguito.

Proposizione 2.4. *Dette $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, se $AB = BA$, allora $e^A e^B = e^{A+B}$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} \frac{A^k B^{l-k}}{k!(l-k)!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k B^{l-k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A+B)^l}{l!} \end{aligned}$$

Dove, nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che A e B commutano. □

Anche se la maggior parte delle coppie di matrici non commutano[2], la proposizione 2.4 ha un'importante conseguenza.

[2] Nel caso di matrici non commutanti vale la formula più generale di Baker-Campbell-Hausdorff. Si rimanda a [Hal15] per una trattazione.

Proposizione 2.5. *Per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ si ha $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$. Pertanto, l'esponenziazione matriciale è una funzione* $\exp : gl_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Dato che A e $-A$ commutano, allora $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$, e quindi e^A ha inversa e^{-A}. □

Questo ci permette di dare un'altra caratterizzazione delle algebre di Lie di un gruppo di matrici: possiamo dire che un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo G è l'insieme di tutte le matrici X tali che $e^{tX} \in G$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2.3 Gruppo ad un parametro

Un *gruppo ad un parametro* in un gruppo di matrici G è un omomorfismo tra gruppi differenziabile $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$. Quindi un gruppo ad un parametro è sia un oggetto algebrico (omomorfismo), che un oggetto geometrico (curva differenziabile).

Proposizione 2.6. *Dimostriamo che:*

1. *Per ogni $A \in gl_n(\mathbb{R})$, $\gamma(t) := e^{tA}$ è un gruppo ad un parametro.*

2. *Ogni gruppo ad un parametro di $GL_n(\mathbb{R})$ è scritto come $\gamma(t) = e^{tA}$ per un'unica $A \in gl_n(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La parte 1 della dimostrazione segue dalla proposizione 2.4, dal momento che:

$$\gamma(t_1 + t_2) = e^{t_1 A + t_2 A} = \gamma(t_1)\gamma(t_2).$$

In particolare notiamo che $\gamma(t)\gamma(-t) = I$, che dimostra che:

$$\gamma(t)^{-1} = \gamma(-t)$$

Per la parte 2, supponiamo che $\gamma(t)$ sia un gruppo ad un parametro in $GL_n(\mathbb{K})$, e sia $A := \gamma'(0)$. Notiamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\gamma(t+h) - \gamma(t)] = \gamma(t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\gamma(h) - I] = \gamma(t)A.$$

Allora, applicando la regola di Leibnitz si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\gamma(t)e^{-tA}] &= \gamma'(t)e^{-tA} + \gamma(t)\frac{d}{dt}(e^{-tA}) \\ &= \gamma(t)Ae^{-tA} - \gamma(t)Ae^{-tA} = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che $\gamma(t)e^{-tA} = I$, che implica che $\gamma(t) = e^{tA}$. □

2.4 Teorema sulla mappa esponenziale

In questo paragrafo vediamo come la mappa esponenziale si restringe ad un'algebra di Lie.

Per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ possiamo definire la sua *norma* come

$$||A|| := \sup\{|XA| : X \in \mathbb{R}^n \text{ con } |X| = 1\}.$$

Per $r > 0$ indichiamo

$$B_r = \{W \in M_n(\mathbb{K}) : ||W|| < r\}.$$

Teorema 2.7. *Sia $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un gruppo di matrici, con algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset gl_n(\mathbb{R})$.*

(1) *Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, si ha $e^X \in G$.*

(2) *Per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ è un intorno di I in G, e la restrizione $exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ è un omeomorfismo.*

La parte (1) del teorema afferma che se un gruppo ad un parametro in $GL_n(\mathbb{R})$ comincia tangente ad un gruppo di matrici G, allora sarà completamente contenuto in G. Una conseguenza di questo importante teorema è che ogni gruppo di matrice è una varietà differenziabile. La dimostrazione del teorema 2.7 fa uso del teorema della funzione inversa, che riportiamo di seguito senza dimostrazione.

Teorema 2.8. *(Teorema della funzione inversa.) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è C^r in un intorno di $x \in \mathbb{R}^n$ $(r \geq 1)$ e df_x è un'applicazione lineare invertibile, allora esisterà un intorno U di x tale che $V = f(U)$ è un intorno di $f(x)$, e $f : U \to V$ è invertibile, con inversa C^r.*

2.4.1 Dimostrazione della parte (1)

Sia $\{X_1, \ldots, X_k\}$ una base di $\mathfrak{g}$. Per ogni $i = 1, \ldots, k$ scegliamo una curva differenziabile $\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to G$, con $\alpha_i(0) = I$ e $\alpha_i'(0) = X_i$. Definiamo

$$F_{\mathfrak{g}} : (\text{intorno di } 0 \text{ in } \mathfrak{g}) \to G$$

come segue:

$$F_{\mathfrak{g}}(c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k) = \alpha_1(c_1) \cdot \alpha_2(c_2) \ldots \alpha_k(c_k).$$

Notiamo che $F_{\mathfrak{g}}(0) = I$, e $d(F_{\mathfrak{g}})_0$ è la funzione identità, cioè

$$d(F_{\mathfrak{g}})_0(X) = X \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Scegliamo il sottospazio $\mathfrak{p} \subset M_n(\mathbb{R})$ complementare a $\mathfrak{g}$, che significa completare l'insieme $\{X_1, \ldots, X_k\}$ ad una base di $M_n(\mathbb{R})$, e definendo $\mathfrak{p}$ come la combinazione lineare degli elementi di base aggiunti. In questo modo, possiamo scrivere $M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$.

Scegliamo una funzione $F_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to M_n(\mathbb{R})$, con $F_{\mathfrak{p}}(0) = I$ e $d(F_{\mathfrak{p}})_0(V) = V$, per ogni $V \in \mathfrak{p}$[3]. Poi definiamo la funzione

$$F : (\text{intorno di } 0 \text{ in } \mathfrak{g} \times \mathfrak{p} = M_n(\mathbb{R})) \to M_n(\mathbb{R})$$

tramite la regola $F(X + Y) = F_{\mathfrak{g}}(X) \cdot F_{\mathfrak{p}}(Y)$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{p}$. Notiamo che $F(0) = I$ e che dF_0 è la funzione identità, cioè $dF_0(X + Y) = X + Y$.

Dal teorema della funzione inversa, F ha un'inversa definita in un intorno di I in $M_n(\mathbb{R})$, che per matrici a in tale intorno possiamo esprimere come:

$$F^{-1}(a) = u(a) + v(a) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{p}.$$

Dalla definizione, si ha che $u(F(X + Y)) = X$ e $v(F(X + Y)) = Y$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{p}$ vicino allo 0. La cosa importante è che v ci permette di capire se un elemento $a \in M_n(\mathbb{R})$, vicino all'identità I, è contenuto in G:

$$v(a) = 0 \Rightarrow a \in G.$$

[3]Ad esempio, una funzione che soddisfa le richieste potrebbe essere $F_{\mathfrak{p}} = I + V$.

Sia ora $X \in \mathfrak{g}$ e definiamo $a(t) = e^{tX}$. Vogliamo provare che $a(t) \in G$ per piccoli t, mostrando che $v(a(t)) = 0$. Dal momento che $v(a(0)) = 0$, sarà sufficiente dimostrare che $\frac{d}{dt}v(a(t)) = 0$ per piccoli t. Dato che

$$\frac{d}{dt}v(a(t)) = dv_{a(t)}(a'(t)) = dv_{a(t)}(X \cdot a(t)),$$

il risultato viene dal lemma seguente:

Lemma 2.9. *Per ogni $a \in M_n(\mathbb{R})$ intorno all'identità, e per ogni $X \in \mathfrak{g}$, si ha $dv_a(X \cdot a) = 0$.*

Dimostrazione. Scriviamo a come

$$a = F(Z + Y) = F_{\mathfrak{g}}(Z) \cdot F_{\mathfrak{p}}(Y),$$

dove $Z \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{p}$. Per ogni $W \in \mathfrak{g}$, e per t sufficientemente piccoli,

$$v(F_{\mathfrak{g}}(Z + tW) \cdot F_{\mathfrak{p}}(Y)) = Y,$$

che significa che v non cambia in a in queste direzioni:

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v(F_{\mathfrak{g}}(Z + tW) \cdot F_{\mathfrak{p}}(Y)) = dv_a((d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)) \cdot F_{\mathfrak{p}}(Y))$$

$$= dv_a((d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)) \cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1} \cdot a) = dv_a(X \cdot a),$$

dove abbiamo definito $X = (d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)) \cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}$. Resta da dimostrare che X è un elemento arbitrario di $\mathfrak{g}$. Innanzitutto, $X \in \mathfrak{g}$ perchè è il vettore tangente iniziale della seguente curva differenziabile in G:

$$t \to F_{\mathfrak{g}}(Z + tW) \cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}.$$

Inoltre, X è arbitrario poichè l'applicazione lineare da $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ che manda

$$W \to (d(F_{\mathfrak{g}})_Z(W)) \cdot F_{\mathfrak{g}}(Z)^{-1}$$

è l'applicazione identità quando $Z = 0$, e per continuità ha determinante vicino ad 1, ed è pertanto un isomorfismo, quando Z è vicino allo 0. In altri termini, W può essere scelto in modo tale che X è un qualsiasi elemento di $\mathfrak{g}$. $\square$

Il lemma completa la dimostrazione per il fatto che se $X \in \mathfrak{g}$, allora $e^{tX} \in G$, per piccoli t, diciamo per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Possiamo estendere tale risultato osservando che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e per ogni intero positivo N, si ha

$$e^{NtX} = e^{tX + tX + \ldots tX} = e^{tX} \cdot e^{tX} \ldots e^{tX} \in G,$$

che verifica che $e^{tX} \in G$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2.4.2 Dimostrazione della parte (2)

Partiamo da un'importante proprietà della mappa esponenziale, che riportiamo senza dimostrazione:

Proposizione 2.10. $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *è liscia.*

Questo ci permette di dimostrare la parte (2) del teorema 2.7 nel caso speciale in cui $G = GL_n(\mathbb{R})$.

Lemma 2.11. *Per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $V = \exp(B_r)$ è un intorno di I in $GL_n(\mathbb{R})$, e $\exp : B_r \to V$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Per ogni $X \in M_n(\mathbb{R})$, $d(\exp)_0(X)$ è il vettore tangente iniziale alla curva differenziabile $t \to e^{tX}$, vale a dire X. In altre parole, $d(\exp)_0$ è l'identità. La dimostrazione segue dal teorema della funzione inversa, insieme all'osservazione che un intorno dell'identità sufficientemente piccolo in $M_n(\mathbb{R})$ deve essere contenuto in $GL_n(\mathbb{R})$. $\square$

L'inversa di exp viene indicata con log; è una funzione differenziabile in un intorno di I in $GL_n(\mathbb{R})$.

Sia adesso $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un gruppo di matrici con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. La parte (2) della proposizione 2.7 ci dice che per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $\exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ è un intorno di I in G. Il lemma 2.11 esaurisce il caso $G = GL_n(\mathbb{R})$. Generalizzare al caso di un G arbitrario non è semplice, infatti la proposizione può essere falsa per un sottogruppo $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ non chiuso.

Richiamiamo un altro lemma che ci è utile ai fini della dimostrazione:

Lemma 2.12. *Sia $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un gruppo di matrici, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Nel lemma 2.11, $r > 0$ può essere scelto in maniera tale che si ha anche*

$$\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) = \exp(B_r) \cap G.$$

Per ogni r, $\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) \subset \exp(B_r) \cap G$, quindi questo lemma ci dice che l'altra inclusione vale per piccoli r.

Dimostrazione. Scegliamo un sottospazio $\mathfrak{p} \subset M_n(\mathbb{R})$, complementare a $\mathfrak{g}$, come nella dimostrazione della parte (1), per cui possiamo scrivere $M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$. Definiamo la funzione $\phi : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p} \to M_n(\mathbb{R})$ in modo che $\phi(X + Y) = e^X e^Y$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{p}$. Notiamo che ϕ coincide con exp su $\mathfrak{g}$. Le funzioni ϕ ed exp sono simili anche per il fatto che la derivata di entrambe in 0 è l'identità. In particolare, ϕ è localmente invertibile per il teorema della funzione inversa.

Ragioniamo per assurdo: assumendo che il lemma sia falso, allora deve esistere una successione di vettori $\{A_1, A_2, \dots\}$ in $M_n(\mathbb{R})$, con $|A_i| \to 0$, tale che $A_i \notin \mathfrak{g}$ e $\phi(A_i) \in G$ per ogni i. Scriviamo $A_i = X_i + Y_i$, dove $X_i \in \mathfrak{g}$ e $0 \neq Y_i \in \mathfrak{p}$. Per ogni i, sia $g_i = \phi(A_i) = e^{X_i} e^{Y_i} \in G$.

Per la compattezza della sfera dei vettori di lunghezza unitaria in $\mathfrak{p}$, la successione $\left\{ \frac{Y_1}{|Y_1|}, \frac{Y_2}{|Y_2|}, \dots \right\}$ deve convergere a qualche vettore di lunghezza unitaria $Y \in \mathfrak{p}$.

Sia $t \in \mathbb{R}$. Dal momento che $|Y_i| \to 0$, è possibile scegliere una sequenza di interi positivi n_i tale che $n_i Y_i \to tY$. Dato che $e^{n_i Y_i} = (e^{Y_i})^{n_i} \in G$, e dato che G è chiuso in $GL_n(\mathbb{R})$, segue che $e^{tY} \in G$. Abbiamo quindi trovato che $e^{tY} \in G$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, che è un assurdo dal momento che $Y \notin \mathfrak{g}$. $\square$

Per completare la dimostrazione della parte (2) scegliamo $r > 0$ come nel lemma 2.12. Allora $V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ è un intorno di I in G, perchè è uguale all'insieme $\exp(B_r) \cap G$, e $\exp(B_r)$ è aperto in $M_n(\mathbb{K})$ per il lemma 2.11. La restrizione $\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ è continua, così come la sua inversa ($\log : \exp(B_r) \to B_r$), ovvero è un omeomorfismo.

In realtà, $\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ è, per la proposizione 2.10 è liscia, così come la restrizione di log, la sua inversa, a V è una funzione differenziabile.

2.5 Tutti i gruppi di matrici sono gruppi di Lie

Per dimostrare che tutti i gruppi di matrici sono gruppi di Lie, dobbiamo innanzitutto dimostrare che essi hanno una struttura differenziabile, ovvero che sono delle varietà. Nella sezione precedente abbiamo visto che la restrizione della funzione $\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ è un omeomorfismo, e quindi, in particolare, l'inversa della funzione exp dà una carta su V, definita in un intorno di I_n. Per dimostrare che ogni gruppo di matrici è una varietà differenziabile dobbiamo costruire, a partire da tale carta, un atlante, ovvero dobbiamo cercare di ottenere una carta in ogni $g \in G$ e dimostrare che le carte così definite sono tra loro compatibili.

Teorema 2.13. *Ogni gruppo di matrici di dimensione n è una varietà differenziabile di dimensione k.*

Dimostrazione. Sia $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un gruppo di matrici di dimensione n, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Identifichiamo, scegliendo una base, $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^k$. Scegliamo $r > 0$ come nel teorema 2.7. Allora $V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ è un intorno di I_n in G, l'applicazione $\log : \exp(B_r) \cap G \to B_r \cap \mathfrak{g}$ è una k-carta su G centrata in I_n che indichiamo con (U, φ), e la restrizione $\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ è una parametrizzazione in I_n.

Adesso, scegliamo un arbitrario $g \in G$ e consideriamo la moltiplicazione sinsitra $L_g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, che agisce come

$$L_g(A) = g \cdot A \qquad \forall A \in G.$$

Notiamo che L_g è un diffeomorfismo perchè è il prodotto righe per colonne, e in particolare è omeomorfismo da G in G per ogni g rispetto alla topologia di sottospazio, quindi $L_g(V)$ è un intorno di g in G, e $(L_g \circ exp) : B_r \cap \mathfrak{g} \to L_g(V)$ è una parametrizzazione in g. Pertanto, usando L_g possiamo traslare le k-carte su G: in particolare, dalla carta (U, φ) centrata in I_n, otteniamo $(U_g, \varphi_g) = (L_g(U), \varphi \circ L_g^{-1})$, ovvero una carta centrata in g. Dato che g l'abbiamo scelto ad arbitrio, in questo modo possiamo ottenere una k-carta centrata in ogni punto di G.

A questo punto, ci rimane da dimostrare che le k-carte sono tra loro compatibili. Scegliamo due carte (U_g, φ_g) e (U_h, φ_h), dobbiamo dimostrare che il cambio di carta è C^∞. Notiamo che possiamo scrivere $\varphi_g \circ \varphi_h^{-1} = L_{gh^{-1}}$ che è chiaramente un diffeomorfismo per ogni $g, h \in G$, quando agisce da $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, ma è un diffeomorfismo anche quando ristretto a $B_r \cap \mathfrak{g} \to B_r \cap \mathfrak{g}$. Questo prova che i cambi di carta sono C^∞, ovvero abbiamo trovato un atlante su G. □

Notiamo che G in realtà è una sottovarietà regolare di $M_n(\mathbb{R})$. Infatti [AT11], la definizione di sottovarietà regolare contiene tre richieste:

1. L'inclusione è un omeomorfismo con l'immagine: questo equivale a dire che la topologia indotta dalla struttura di varietà differenziabile su G coincide con la topologia indotta da $M_n(\mathbb{R})$, per cui G risulta essere un sottospazio topologico di $M_n(\mathbb{R})$.

2. L'inclusione è di classe C^∞: questo equivale a dire che per ogni carta (U, φ) su $M_n(\mathbb{R})$ con $U \cap G \neq \emptyset$, la restrizione $\varphi|_G = \varphi \circ \imath$ sia di classe C^∞. Questo implica, in particolare, che l'atlante costruito nel teorema 2.13 è adattato a G.[4]

[4]Sia $S \subseteq N$ una sottovarietà k-dimensionale di una varietà M. Una carta (U, φ) di M è detta *adattata* ad S se $U \cap S = \emptyset$, oppure se $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \{\mathbb{R}^k \times \{0\}\}$. Un atlante $\mathcal{A}$ di M è detto *adattato* ad S se ogni sua carta lo è [AT11].

3. Infine, che il differenziale $d\imath_g : T_gG \to T_gM_n(\mathbb{R})$ sia iniettivo, per ogni $g \in G$, che è equivalente a richiedere che ogni funzione C^∞ in G si ottiene come restrizione di funzioni C^∞ in un opportuno aperto di $M_n(\mathbb{R})$.

Per dimostrare che ogni gruppo di matrici G è anche un gruppo di Lie ci resta da dimostrare che la moltiplicazione e l'inversione sono differenziabili. Questo viene dal fatto che G è una sottovarietà chiusa di $M_n(\mathbb{R})$: infatti, una sottovarietà regolare è chiusa se e solo se è una sottovarietà regolare propria e, dato che sottospazi di Hausdorff compatti sono anche chiusi, questo ci permette di identificare le sottovarietà regolari chiuse con le sottovarietà regolari compatte. E' possibile dimostrare che una sottovarietà immersa è regolare se è anche compatta. Pertanto, dato che l'inclusione $\imath : M_n(\mathbb{R}) \to G$ è differenziabile una qualsiasi applicazione differenziabile $F : M_n(\mathbb{R}) \to N$, dove N è una varietà differenziabile, sarà ancora differenziabile se ne restringiamo il dominio, poichè $F|_G = F \circ \imath$ è composizione di applicazioni differenziabili[5].

[5] Per una trattazione sulle sottovarietà regolari ed immerse si veda [Lee13], capitolo 5.

Capitolo 3

Teoria della rappresentazione

La rappresentazione di un gruppo ci consente di ridurre molti problemi di teoria dei gruppi ad equivalenti problemi di algebra lineare. Una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio vettoriale V è un'azione di G su V, in cui ciascun elemento di G agisce come una trasformazione lineare [Ste95]. In altre parole, una rappresentazione di G è un omomorfismo di G nel gruppo delle trasformazioni lineari invertibili, che è isomorfo a $GL_n(\mathbb{K})$ in cui n è la dimensione di V [CC08]. Dato che stiamo trattando principalmente gruppi di matrici, analizziamo in dettaglio le rappresentazioni dei gruppi di matrici e delle loro algebre di Lie, e le relazioni che intercorrono tra esse. In questo capitolo ci rifacciamo per intero a [Hal15].

3.1 Rappresentazioni

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e indichiamo con $GL(V)$ il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di su V. Se scegliamo una base su V, possiamo identificare $GL(V)$ con $GL_n(\mathbb{K})$, per cui, tenendo a mente tale identificazione, possiamo pensare a $GL(V)$ come ad un gruppo di matrici (la cui topologia è indipendente dalla base scelta). Inoltre, indichiamo con $gl(V) = End(V)$ lo spazio degli operatori lineari da V in se stesso, che, munito della parentesi di commutazione, forma un'algebra di Lie.

Sia G un gruppo di matrici. Una *rappresentazione finita di G* è un omomorfismo tra gruppi di Lie

$$\Pi : G \to GL(V).$$

Se $\mathfrak{g}$ è una $\mathbb{K}$-algebra di Lie, allora una *rappresentazione finita di* $\mathfrak{g}$ è un omomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \to gl(V)$ di algebre di Lie.

Se Π o π sono omomorfismi iniettivi, la rappresentazione è detta *fedele*.

Per quanto detto, possiamo pensare ad una rappresentazione come ad un'azione lineare di un gruppo o algebra di Lie su uno spazio vettoriale. Se l'omomorfismo $\Pi : G \to GL(V)$ è fissato, possiamo anche scrivere $A \cdot v$ invece di $\Pi(A)v$.

Sia Π una rappresentazione di un gruppo di matrici G, che agisce su uno spazio V. Un sottospazio W di V è detto *invariante* se $\Pi(A)w \in W$, per ogni $w \in W$ e per ogni $A \in G$. Una rappresentazione che non ammetta sottospazi invarianti banali è detta *irriducibile*. Con le opportune modifiche, tali definizioni valgono anche per le rappresentazioni delle algebre di Lie.

Sia G un gruppo di matrici, e sia Π la rappresentazione di G agente su uno spazio V, e sia Σ la rappresentazione di G agente sullo spazio W. Un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ è detta *intertwiner* di rappresentazioni se

$$\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)\Pi(v)$$

per ogni $A \in G$ e per ogni $v \in V$. Se ϕ è un operatore di intreccio di rappresentazioni invertibile, allora sarà detto un *isomorfismo* di rappresentazioni e le rappresentazioni saranno dette *isomorfe.* Per quanto detto in precedenza, possiamo riscrivere la proprietà dell'operatore di intreccio come

$$\phi(A \cdot v) = A\phi(v)$$

per ogni $A \in G$ e per ogni $v \in V$, per cui capiamo che affinchè ϕ sia un operatore di intreccio deve commutare con l'azione di G. In altri termini, ϕ è un morfismo per il gruppo G ed un isomorfismo di spazi vettoriali.

Proposizione 3.1. *Sia G un gruppo di matrici con $\mathfrak{g}$ algebra di Lie, e sia Π la rappresentazione di G, agente sullo spazio V. Esiste un'unica rappresentazione π di $\mathfrak{g}$ agente sullo stesso spazio V, tale che*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$. La rappresentazione π può essere calcolata come

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\bigg|_{t=0}$$

e soddisfa

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e per ogni $A \in G$.

Questo risultato vale in generale per qualsiasi omomorfismo Π tra gruppi di Lie, e ci dice che ogni omomorfismo tra gruppi di Lie dà vita ad un omomorfismo tra algebre di Lie[1]. Nel linguaggio della geometria differenziale, vogliamo dimostrare che π è il differenziale di Π nell'identità.

Dimostrazione. Dato che Π è un omomorfismo tra gruppi di Lie allora $\Pi(e^{tX})$ è un sottogruppo ad un parametro di $GL(V)$. Dal teorema **??** sappiamo che esiste un'unica matrice Z tale che

$$\Pi(e^{tX}) = e^{tZ}.$$

Definiamo $\pi(X) = Z$ e vediamo che π sia effettivamente un omomorfismo tra algebre di Lie, ovvero dobbiamo dimostrare che conserva la linearità, la moltiplicazione per uno scalare e il commutatore. Ponendo $t = 1$ nella relazione precedente otteniamo

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Inoltre, se $\Pi(e^{tX}) = e^{tZ}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora $\Pi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$, il che dimostra che $\pi(sX) = s\pi(X)$. Usando la formula di Lie per il prodotto e la continuità di Π, possiamo scrivere

$$e^{t\pi(X+Y)} = \Pi\left(\lim_{m\to\infty}(e^{tX/m}e^{tY/m})^m\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\Pi(e^{tX/m})\Pi(e^{tY/m})\right)^m$$

$$\Rightarrow e^{t\pi(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{t\pi(X)/m}e^{t\pi(Y)/m}\right)^m = e^{t(\pi(X)+\pi(Y))}.$$

[1]Potremmo chiederci se, dato un omomorfismo ϕ tra algebre di Lie, esiste un omomorfismo Φ tra gruppi di Lie tale che $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. In generale la risposta è no, ma è vero solo se il gruppo è semplicemente connesso. Si veda a tal proposito [Hal15], sezione 5.7.

Quindi, differenziando in $t = 0$ dimostriamo che $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$. Abbiamo quindi dimostrato che π è un'applicazione lineare che soddisfa $\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$, e inoltre è unica. Infatti, se esistesse un'altra applicazione lineare π' con tale proprietà, si avrebbe

$$e^{t\pi(X)} = e^{t\pi'(X)} = \Pi(e^{tX}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Differenziando tale risultato in $t = 0$ si ottiene $\pi(X) = \pi'(X)$.

Dobbiamo ora dimostrare le altre proprietà. Per ogni $A \in G$, si ha

$$e^{t\pi(AXA^{-1})} = e^{\pi(tAXA^{-1})} = \Pi(e^{tAXA^{-1}})$$

$$\Rightarrow e^{t\pi(AXA^{-1})} = \Pi(A)\Pi(e^{tX})\Pi(A)^{-1} = \Pi(A)e^{t\pi(X)}\Pi(A)^{-1}.$$

Differenziando in $t = 0$ si ottiene $\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$.

Adesso, per dimostrare che π conserva il commutatore, per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ si ha

$$\pi([X,Y]) = \pi\left(\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\bigg|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\pi(e^{tX}Ye^{-tX})\bigg|_{t=0},$$

dove abbiamo usato il fatto che la derivata commuta con una trasformazione lineare. Quindi,

$$\pi([X,Y]) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\pi(Y)\Pi(e^{-tX})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\pi(X)}\pi(Y)e^{-t\pi(X)}\bigg|_{t=0} = [\pi(X), \pi(Y)].$$

Infine, dal momento che $\Pi(e^{tX}) = e^{\pi(tX)} = e^{t\pi(X)}$, si vede che

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\bigg|_{t=0}.$$

□

3.2 Completa riducibilità

Sia G un gruppo di matrici e siano $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ rappresentazioni di G agente, rispettivamente sugli spazi $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Allora la *somma diretta* di $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ è una rappresentazione di G sullo spazio $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, definita da

$$[\Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_m(A)](v_1, \ldots, v_m) = [\Pi_1(A)v_1, \ldots .\Pi_m(A)v_m] \qquad \forall A \in G.$$

La definizione di somma diretta di rappresentazioni di un'algebra di Lie la possiamo dare in maniera analoga.

Una rappresentazione di dimensione finita di un gruppo o di un'algebra di Lie si dice *completamente riducibile* se è isomorfa alla somma diretta di un numero finito di rappresentazioni irriducibili. Notiamo che una rappresentazione irriducibile è anche completamente riducibile, con decomposizione banale data da un solo addendo.

Proposizione 3.2. *Se V è una rappresentazione completamente riducibile di un gruppo o di un'algebra di Lie, valgono le seguenti proprietà:*

1. *Per ogni sottospazio invariante U di V, esiste un altro sottospazio invariante W tale che V è somma diretta di U e W.*

2. *Ogni sottospazio invariante di V è completamente riducibile.*

Dimostrazione. Per il punto 1., supponiamo di poter decomporre V come

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k,$$

dove gli U_j sono sottospazi invarianti ed irriducibili, e che U sia un sottospazio invariante di V. Se $U = V$, possiamo scegliere $W = \{0\}$ e la dimostrazione è conclusa. Se $U \neq V$, allora deve esistere qualche j_1 tale che U_{j_1} non è contenuto in U. Dato che U_{j_1} è irriducibile, segue che il sottospazio invariante $U_{j_1} \cap U$ deve essere $\{0\}$. Supponendo adesso che $U + U_{j_1} = V$: dal momento che hanno intersezione vuota sono in somma diretta, e la dimostrazione è conclusa. Se $U + u_{j_1} \neq V$ allora esisterà qualche j_2 tale che $(U + U_{j_1}) \cap U_{j_2} = \{0\}$. Procedendo come fatto prima, possiamo eventualmente ottenere una famiglia $j_1, j_2, \ldots, j_l$ tale che $U + U_{j_1} + \ldots U_{j_l} = V$ e quindi tali sottospazi sono in somma diretta. Allora, $W = U_{j_1} + \ldots U_{j_l}$ è il complemento che cercavamo di U.

Per il punto 2., supponiamo che U sia un sottospazio invariante di V. Notiamo innanzitutto che, per quanto dimostrato nel punto 1., U possiede un complemento invariante. Supponiamo che X sia un altro sottospazio invariante di V, con $X \subset U$. Sempre dal punto 1., possiamo trovare un sottospazio invariante Y tale che $V = X \oplus Y$. Poniamo $Z = Y \cap U$, che è un sottospazio invariante. Adesso vogliamo dimostrare che $U = X \oplus Z$. Per ogni $u \in U$, possiamo scrivere $u = x + y$, con $x \in X$ e $y \in Y$. Dato che $X \subset U$, si ha che $x \in U$ e quindi $y = u - x \in U$. Quindi, $y \in Z = Y \cap U$. Abbiamo mostrato che ogni $u \in U$ può essere scritto come la somma di un elemento di X e di un elemento di Z. Inoltre, $X \cap Z \subset X \cap Y = \{0\}$, per cui U è somma diretta di X e Z.

Adesso ci manca da dimostrare che U è completamente riducibile. Se U fosse irriducibile, la dimostrazione sarebbe conclusa. Altrimenti, U possiede un sottospazio invariante non banale X, e quindi U può essere scritto come $U = X \oplus Z$, per qualche sottospazio invariante Z. Se X e Z sono irriducubili, la dimostrazione è conclusa, altrimenti procediamo allo stesso modo. Dal momento che U ha dimensione finita, il processo sicuramente terminerà e riusciremo a scrivere U come una somma diretta di irriducibili. □

3.3 Prodotto tensore

Siano G ed H gruppi di matrici, e sia Π_1 una rappresentazione di G che agisce sullo spazio U e Π_2 una rappresentazione di H sullo spazio V. Allora il *prodotto tensore* di Π_1 e Π_2 è una rappresentazione $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ di $G \times H$ che agisce su $U \otimes V$, definita da

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(A, B) = \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(B)$$

per ogni $A \in G$ e per $B \in H$.

Notiamo che se $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ e $H \subset GL_m(\mathbb{K})$, allora $G \times H$ può essere visto come un sottogruppo chiuso di $GL_{n+m}(\mathbb{K})$. Quindi, il prodotto diretto di gruppi di matrici è ancora un gruppo di matrici, mentre si vede che l'algebra di Lie di $G \times H$ è isomorfa alla somma diretta delle algebre di Lie di G e di H.

Proposizione 3.3. *Siano G ed H gruppi di matrici, con algebre di Lie $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$, rispettivamente. Siano Π_1 e Π_2 rappresentazioni di G ed H rispettivamente, e consideriamo la rappresentazione $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ di $G \times H$, agente su $U \otimes V$. Se $\pi_1 \otimes \pi_2$ indica la rappresentazione associata di $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, allora*

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y) = \pi_1(X) \otimes I + I \otimes \pi_2(Y)$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{h}$.

Dimostrazione. Supponiamo che $u(t)$ sia una curva liscia in U e che $v(t)$ sia una curva liscia in V. Allora, dalla regola di Leibnitz

$$\frac{d}{dt}(u(t) \otimes v(t)) = \frac{du}{dt} \otimes v(t) + u(t) \otimes \frac{dv}{dt}.$$

In questo caso, possiamo scrivere

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y)(u \otimes v) = \frac{d}{dt}\Pi_1(e^{tX})u \otimes \Pi_2(e^{tY})v\Big|_{t=0}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\Pi_1(e^{tX})u\Big|_{t=0}\right) \otimes v + u \otimes \left(\frac{d}{dt}\pi_2(e^{tY})v\Big|_{t=0}\right).$$

Questo dimostra la forma richiesta per $(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y)$, sugli elementi della forma $u \otimes v$, che generano $U \otimes V$.

□

Tramite questa proposizione siamo riusciti a caratterizzare le rappresentazioni delle algebre di Lie di gruppi di matrici agenti su spazi vettoriali a prodotto tensore. Notiamo che se avessimo definito

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y) = \pi_1(X) \otimes \pi_2(Y)$$

questa non sarebbe stata una rappresentazione di $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, dato che questa espressione non è lineare in (X, Y).

Se Π_1 e Π_2 sono rappresentazioni irriducibili di un gruppo G, allora $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ non sarà in generale irriducibile, se vista come rappresentazione di G. Allora è possibile decomporre $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ come somma diretta di rappresentazioni irriducibili: tale procedimento viene chiamato *decomposizione di Clebsch-Gordan* o, nel linguaggio della fisica, somma di momenti angolari.

Notiamo che non tutte le rappresentazioni sono completamente riducibili, in particolare $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ potrebbe non esserlo. Per $SU(2)$ dimostriamo a mano che $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ è completamente riducibile scrivendone la decomposizione esplicitamente.

3.4 La complessificazione di un'algebra di Lie reale

Quando si studiano le rappresentazioni di un gruppo di Lie G, è spesso conveniente passare all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G, che, in generale, è un'algebra di Lie reale. Può risultare conveniente passare per un'algebra di Lie complessa, associata a $\mathfrak{g}$, detta *complessificazione di* $\mathfrak{g}$. Se V è uno spazio vettoriale reale e di dimensione finita, allora la *complessificazione* di V, indicata con $V_{\mathbb{C}}$, è lo spazio delle combinazioni lineari $v_1 + iv_2$, con $v_1, v_2 \in V$. Potremmo anche pensare a $V_{\mathbb{C}}$ come allo spazio delle coppie ordinate (v_1, v_2), e dunque considerare V come il sottospazio reale di $V_{\mathbb{C}}$.

Proposizione 3.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita e $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la sua complessificazione. Allora la parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$ ha un'unica estensione in $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, che rende $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ un'algebra di Lie complessa, detta complessificazione di $\mathfrak{g}$.*

L'estensione della parentesi di commutazione deve essere bilineare, pertanto deve avere la seguente forma

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + X_2, Y_1).$$

Per dimostrarne l'esistenza dobbiamo dimostrare che sia effettivamente bilineare, anti-commutativa e che deve rispettare l'identità di Jacobi. Per la verifica di tali proprietà si deve effettuare un calcolo esplicito, pertanto ometteremo tale dimostrazione.

Proposizione 3.5. *Supponiamo che $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ è un'algebra di Lie reale e che per ogni $X \in \mathfrak{g}$ non nulla, iX non appartiene a $\mathfrak{g}$. Allora la complessificazione $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ di $\mathfrak{g}$ è isomorfa all'insieme di matrici in $M_n(\mathbb{C})$ che possono essere espresse nella forma $X + iY$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione da $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ in $M_n(\mathbb{C})$, che manda le combinazioni lineari $X + iY$ nelle combinazioni di matrici $X + iY$. Tale applicazione si può dimostrare essere un omomorfismo tra algebre di Lie complesse. Se scegliamo $\mathfrak{g}$ come da ipotesi, allora tale applicazione sarà anche iniettiva e quindi un isomorfismo di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, con $\mathfrak{g} + i\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$. □

In particolare, usando tale teorema otteniamo il seguente isomorfismo

$$su(n)_{\mathbb{C}} \cong sl_n(\mathbb{C}),$$

che ci servirà nel seguito, e dove con $su(n)$ abbiamo indicato l'algebra di Lie di $SU(n)$, e con $sl_n(\mathbb{C})$ quella di $SL_n(\mathbb{C})$.

Proposizione 3.6. *L'insieme $su(n)$ delle matrici antihermitiane a traccia nulla coincide con l'algebra di Lie di $SU(n)$.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che

$$su(n) \ni A \mapsto e^A \in T_{I_n}SU(n).$$

Dal fatto che gli elementi di $su(n)$ sono antihermitiani si ha:

$$A^* = -A \Rightarrow \left(e^A\right)^* = e^{A^*} = \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \qquad \forall A \in su(n).$$

La condizione sulla traccia ci viene da

$$\det\left(e^A\right) = e^{Tr\{A\}}, \qquad \forall A \in su(n).$$

Se A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora e^A è diagonalizzabile con autovalori $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Quindi, $Tr\{A\} = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ e

$$\det\left(e^A\right) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{Tr\{X\}},$$

e quindi $Tr\{A\} = 0 \iff \det A = 1$. Se A non è diagonalizzabile, possiamo approssimarla con matrici diagonalizzabili[2]. □

In maniera simile, si dimostra che l'algebra di Lie di $SL_n(\mathbb{C})$ è l'insieme $sl_n(\mathbb{C})$ delle matrici complesse a traccia unitaria, e che l'algebra di Lie di $SO(n)$ è l'insieme $so(3)$ delle matrici reali che soddisfano $X^T = -X$, per ogni $X \in so(3)$.

Possiamo scrivere una base per $su(2)$ nel seguente modo:

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questi elementi soddisfano le seguenti regole di commutazione $[E_i, E_j] = \epsilon_{ijk}E_k$. Per l'algebra di Lie $so(3)$ possiamo individuare la seguente base:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questi elementi soddisfano le seguenti regole di commutazione $[F_i, F_j] = \epsilon_{ijk}F_k$.

Dal momento che $E_1,\ E_2,\ E_3$ soddisfano le stesse regole di commutazione di $F_1,\ F_2,\ F_3$, allora le due algebre di Lie sono isomorfe.

[2]Ogni matrice $n \times n$ è il limite di una successione di matrici diagonalizzabili. Si veda [Hal15], appendice A per una trattazione.

3.5 Una rappresentazione di $SU(2)$

Indichiamo con V_m lo spazio dei polinomi a due variabili complesse e omogenei di grado m. Per ogni $U \in SU(2)$, possiamo definire una trasformazione lineare $\Pi_m(U)$ sullo spazio V_m come

$$[\Pi_m(U)f](z) = f(U^{-1}z), \qquad z \in \mathbb{C}^2.$$

Allora Π_m è una rappresentazione di $SU(2)$.

Gli elementi di V_m hanno la forma

$$f(z_1, z_2) = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \cdots + a_m z_2^m \tag{3.1}$$

con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e le a_j costanti complesse arbitrarie, per cui vediamo che $\dim(V_m) = m + 1$. Esplicitamente, con f come in 3.1, si ha

$$[\Pi_m(U)f](z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m} a_k (U_{11}^{-1} z_1 + U_{12}^{-1} z_2)^{m-k} (U_{21}^{-1} z_1 + U_{22}^{-1} z_2)^k.$$

Espandendo il secondo membro di questa relazione, vediamo che $\Pi_m(U)f$ è ancora un polinomio omogeneo di grado m. Quindi, $\Pi_m(U)$ mappa V_m in V_m. Per vedere che Π_m è effettivamente una rappresentazione, calcoliamo

$$\Pi_m(U_1)[\Pi_m(U_2)f](z) = [\Pi_m(U_2)f](U_1^{-1}z) = f(U_2^{-1}U_1^{-1}z) = \Pi_m(U_1U_2)f(z).$$

Vedremo nella proposizione 3.7 che ciascun Π_m è irriducibile e vedremo nel prossimo paragrafo che ogni rappresentazione irriducibile di dimensione finita di $SU(2)$ è isomorfa ad una delle Π_m.

La rappresentazione associata π_m di $su(2)$ può essere calcolata come

$$(\pi_m(X)f)(z) = \frac{d}{dt} f(e^{-tX}z)\bigg|_{t=0}.$$

Scegliamo $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, curve in $\mathbb{C}^2$, definite come $z(t) = e^{-tX}z$. Dalla regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\pi_m(X)f = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}\bigg|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt}\bigg|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \pi_m(X)f = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(X_{12}z_1 + X_{22}z_2). \tag{3.2}$$

Adesso, possiamo considerare l'unica estensione lineare e complessa di π, a $sl_2(\mathbb{C}) \cong su(2)_{\mathbb{C}}$: questa estensione è data dalla stessa formula, solo con $X \in sl_2(\mathbb{C})$. Se X, Y, e H sono i seguenti elementi di base per $sl_2(\mathbb{C})$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

applicando la formula 3.2 otteniamo

$$\pi_m(H) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$\pi_m(X) = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1},$$

$$\pi_m(Y) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Applicando tali operatori ad un elemento di base $z_1^{m-k} z_2^k$ per V_m otteniamo

$$\pi_m(H)(z_1^{m-k} z_2^k) = (-m + 2k) z_1^{m-k} z_2^k,$$

$$\pi_m(X)(z_1^{m-k} z_2^k) = -(m-k) z_1^{m-k-1} z_2^{k+1},$$
$$\pi_m(Y)(z_1^{m-k} z_2^k) = -k z_1^{m-k+1} z_2^{k-1}.$$

Quindi, $z_1^{m-k} z_2$ è un autovettore per $\pi_m(H)$ con autovalore $-m + 2k$, mentre $\pi_m(X)$ e $\pi_m(Y)$ hanno l'effetto di abbassare o di alzare l'esponente k di z_2 di un'unità. Notiamo che, dato che $\pi_m(X)$ aumenta il valore di k, questo operatore aumenterà l'autovalore di $\pi_m(H)$ di 2, mentre $\pi_m(Y)$ abbasserà l'autovalore di $\pi_m(H)$ di 2.

Proposizione 3.7. *Per ogni $m \geq 0$, la rappresentazione π_m è irriducibile.*

Dimostrazione. Ci basta mostrare che ogni sottospazio invariante non vuoto di V_m è uguale a V_m. Quindi, sia W tale spazio e scegliamo un $w \in W$. Allora possiamo scrivere w nella seguente forma

$$w = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \cdots + a_m z_2^m$$

con almeno un a_k non nullo. Sia k_0 il più piccolo valore di k per cui $a_k \neq 0$ e consideriamo

$$\pi_m(X)^{m-k_0} w.$$

Dato che ogni applicazione di $\pi_m(X)$ aumenta l'esponente di z_2 di 1, $\pi_m(X)^{m-k_0}$ annullerà tutti i termini in w tranne $a_0 z_1^{m-k_0} z_2^{k_0}$. D'altra parte, dato che $\pi_m(X)(z_1^{m-k} z_2^k)$ è nullo solo se $k = m$, vediamo che $\pi_m(X^{m-k_0})$ è un multiplo non nullo di z_2^m. Dato che abbiamo assunto W invariante, W deve contenere questo multiplo di z_2^m, e anche z_2^m stesso. Ora, per $0 \leq k \leq m$, segue che $\pi_m(Y)^k z_2^m$ è un multiplo non nullo di $z_1^k z_2^{m-k}$. Inoltre, W deve contenere anche $z_1^k z_2^{m-k}$ per ogni $o \leq k \leq m$. Dato che questi elementi formano una base per V_m, abbiamo ottenuto che $W = V_m$, come richiesto.

□

3.6 Rappresentazioni di $sl_2(\mathbb{C})$

Le rappresentazioni di $su(2)$ del paragrafo precedente diventano di $sl_2(\mathbb{C})$ per complessificazione. Notiamo che non ogni rappresentazione di $sl_2(\mathbb{C})$ dà una rappresentazione di $su(2)$. Inoltre, ci sono algebre di Lie la cui complessificazione è $sl_2(\mathbb{C})$, come ad esempio $sl_2(\mathbb{R})$ e $su(1,1)$. Quindi, più algebre di Lie reali possono dar luogo alla stessa algebra di Lie per complessificazione e saranno le rappresentazioni ad esplicitarne la corrispondenza. In particolare, sono anche rappresentazioni di $su(2)$ le rappresentazioni di $sl_2(\mathbb{C})$ che soddisfano $\pi(A)^* = \pi(A^*)$.

In questo paragrafo calcoleremo (a meno di un isomorfismo) tutte le rappresentazioni complesse, irriducibili e di dimensione finita dell'algebra di Lie $sl_2(\mathbb{C})$. Questo calcolo è importante perchè abbiamo visto che $sl_2(\mathbb{C})$ è la complessificazione di $su(2)$, che è isomorfo ad $so(3)$, e le rappresentazioni di $so(3)$ sono fondamentali in meccanica quantistica.

Useremo per $sl_2(\mathbb{C})$ la base definita in precedenza:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che hanno le seguenti regole di commutazione

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Se V è uno spazio vettoriale complesso e di dimenisone finita, e A, B, e C sono operatori su V che soddisfano $[A, B] = 2B$, $[A, C] = -2C$ e $[B, C] = A$, allora, data l'anti-commutatività e la bilinearità della parentesi di Lie, l'unica mappa lineare $\pi : sl_2(\mathbb{C}) \to gl(V)$ che soddisfa

$$\pi(H) = A, \quad \pi(X) = B, \quad \pi(Y) = C$$

sarà una rappresentazione di $sl_2(\mathbb{C})$.

Adesso vogliamo dimostrare che ogni rappresentazione di dimensione finita ed irriducibile di $sl_2(\mathbb{C})$ "ricorda" una delle rappresentazioni π_m che abbiamo trovato nel precedente paragrafo. In particolare, noi abbiamo visto che lo spazio V_m è generato dagli autovettori di $\pi_m(H)$ e gli operatori $\pi_m(X)$ e $\pi_m(Y)$ agiscono alzando od abbassando gli autovalori di 2. Adesso, prima di procedere con la dimostrazione, introduciamo un lemma che ci permette di sviluppare una struttura simile, valida in un'arbitraria rappresentazione irriducibile di $sl_2(\mathbb{C})$.

Lemma 3.8. *Sia u un autovettore di $\pi(H)$ con autovalore $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora si ha*

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha + 2)\pi(X)u.$$

Quindi, o $\pi(X)u = 0$, oppure $\pi(X)u$ è un autovettore di $\pi(H)$ con autovalore $\alpha+2$. Allo stesso modo

$$\pi(H)\pi(Y)u = (\alpha - 2)\pi(Y)u,$$

per cui o $\pi(Y)u = 0$ oppure $\pi(Y)u$ è un autovettore di $\pi(H)$ con autovalore $\alpha - 2$.

Dimostrazione. Dimostreremo solo il caso per l'operatore $\pi(X)$. Sappiamo che

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]) = 2\pi(X),$$

per cui

$$\pi(H)\pi(X)u = \pi(X)\pi(H)u + 2\pi(X)u = \pi(X)(\alpha u) + 2\pi(X)u = (\alpha + 2)\pi(X)u.$$

□

Teorema 3.9. *Per ogni intero $m \geq 0$ esiste una rappresentazione complessa ed irriducible di $sl_2(\mathbb{C})$ di dimensione $m + 1$. Due rappresentazioni di $sl_2(\mathbb{C})$ della stessa dimensione sono isomorfe. Se π è una rappresentazione irriducibile e complessa di $sl_2(\mathbb{C})$ di dimensione $m+1$, allora π è isomorfa alla rappresentazione π_m, descritta nel paragrafo precedente.*

Dimostrazione. Sia π una rappresentazione irriducibile di $sl_2(\mathbb{C})$, che agisce su uno spazio vettoriale complesso V, di dimensione finita. Vogliamo cercare di diagonalizzare l'operatore $\pi(H)$: dato che stiamo lavorando su $\mathbb{C}$, tale operatore deve avere almeno un autovalore. Sia u un autovettore per $\pi(H)$ con autovalore α. Applicando ripetutamente il lemma 3.8, vediamo che

$$\pi(H)\pi(X)^k u = (\alpha + 2k)\pi(X)^k u.$$

Dato operatori agenti su uno spazio finito-dimensionale devono avere altrettanti autovalori, i $\pi(X)ku$ non possono essere tutti nulli. Quindi, esisterà un $N \geq 0$ tale che

$$\pi(X)^N u \neq 0$$

ma

$$\pi(X)^{N+1}u = 0.$$

Se poniamo $u_0 = \pi(X)^N u$, e $\lambda = \alpha + 2N$, allora

$$\pi(H)u_0 = \lambda u_0 \qquad \pi(X)u_0 = 0.$$

Definiamo

$$u_k = \pi(Y)^k u_0$$

per $k \geq 0$. Dal lemma 3.8 abbiamo

$$\pi(H)u_k = (\lambda - 2k)u_k.$$

Si può verificare per induzione che

$$\pi(X)u_k = k[\lambda - (k-1)]u_{k-1} \qquad (k \geq 1). \tag{3.3}$$

Inoltre, dal momento che $\pi(H)$ può avere solo un numero finito di autovalori, gli u_k non possono essere tutti nulli. Esisterà, però, un intero $m \geq 0$ tale che

$$u_k = \pi(Y)^k u_0 \neq 0$$

per ogni $k \leq m$, ma

$$u_{m+1} = \pi(Y)^{m+1} u_0 = 0.$$

Se $u_{m+1} = 0$, allora $\pi(X)u_{m+1} = 0$ e quindi, dall'equazione 3.3, si ha

$$0 = \pi(X)u_{m+1} = (m+1)(\lambda - m)u_m.$$

Dato che u_m e $m+1$ sono non nulli, deve essere $\lambda - m = 0$. Quindi, per ogni rappresentazione irriducibile (π, v), esiste un intero $m \geq 0$ e vettori non nulli $u_0, \ldots, u_m$, tali che

$$\pi(H)u_k = (m - 2k)u_k;$$

$$\pi(Y)u_k = \begin{cases} u_{k+1} & \text{if } k < m \\ 0 & \text{if } k = m \end{cases}$$

$$\pi(X)u_k = \begin{cases} k(m - (k-1))u_{k-1} & \text{if } k > 0 \\ 0 & \text{if } k = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

I vettori $u_0, \ldots, u_m$ devono essere linearmente indipendenti, dal momento che sono autovettori di $\pi(H)$ corrispondenti ad autovalori diversi. Inoltre, lo spazio generato da tali vettori deve essere invariante sotto l'azione di $\pi(X)$, $\pi(Y)$ e $\pi(H)$ e, di conseguenza, sotto $\pi(Z)$, per ogni $Z \in sl_2(\mathbb{C})$. Dato che π è irriducibile, questo spazio generato deve coincidere con V. □

Abbiamo dimostrato che ogni rappresentazione irriducibile di $sl_2(\mathbb{C})$ ha la forma 3.4. Inoltre, la precedente analisi dimostra che ogni rappresentazione irriducibile di dimensione $m+1$ deve avere la forma 3.4, il che dimostra anche che due tali rappresentazioni devono essere isomorfe. In particolare, la rappresentazione π_m descritta nel paragrafo 3.5 deve essere isomorfa a quella in 3.4.

Tornando al gruppo $SU(2)$ sappiamo che esso è semplicemente connesso, il che ci garantisce che le rappresentazioni di $sl_2(\mathbb{C}) \cong su(2)_\mathbb{C}$ sono in corrispondenza biettiva con le rappresentazioni di $SU(2)$, e che esso è compatto, per cui ogni sua rappresentazione sarà completamente riducibile[3].

Vediamo adesso le conseguenze di queste affermazioni sul gruppo $SO(3)$, che non è semplicemente connesso. Sappiamo che esiste un omomorfismo tra gruppi di Lie $\Phi : SU(2) \to SO(3)$ che è 2 a 1, e che $\ker \Phi = \{I, -I\}$. Inoltre, abbiamo dimostrato nella proposizione 3.1, che ogni omomorfismo tra gruppi di Lie dà vita ad un omomorfismo tra le corrispondenti algebre di Lie. In particolare, essendo $\ker \Phi = \{I, -I\}$, l'omomorfismo associato $\phi : su(2) \to so(3)$ è un isomorfismo di algebre di Lie. Quindi, le rappresentazioni di $so(3)$ sono della forma $\sigma_m = \pi_m \circ \phi^{-1}$. Vogliamo determinare, per un particolare m, se esiste o no una rappresentazione Σ_m del gruppo $SO(3)$ tale che

$$\Sigma_m(e^X) = e^{\sigma_m(X)} \qquad \forall X \in so(3).$$

Riportiamo, senza dimostrazione (per una dimosrazione si veda [Hal15], teorema 4.35), la seguente proposizione, e cerchiamo di comprenderne le connessioni con la fisica.

Proposizione 3.10. *Sia $\sigma_m = \pi_m \circ \phi^{-1}$ una rappresentazione irriducibile e complessa dell'algebra di Lie $so(3)$ $(m \geq 0)$. Se m è pari, allora esiste una rappresentazione Σ_m del gruppo $SO(3)$ tale che $\Sigma_m(e^X) = e^{\sigma_m(X)} \qquad \forall X \in so(3)$. Se, invece, m è dispari, allora non esiste una tale rappresentazione di $SO(3)$.*

Notiamo che la condizione m pari è equivalente alla condizione che $\dim V_m = m + 1$ sia dispari. Quindi, sono le rappresentazioni di dimensione dispari di $so(3)$ che discendono da rappresentazioni del gruppo $SO(3)$. In fisica, le rappresentazioni di $su(2) \cong so(3)$ sono labellate dal parametro $l = m/2$. In termini di questa notazione, una rappresentazione di $so(3)$ discende da una rappresentazione di $SO(3)$ se e solo se l è intero.

[3]Per una dimostrazione di tali risultati si veda [Hal15], rispettivamente teoremi 5.6 e 4.28.

Capitolo 4

Non tutti i gruppi di Lie sono gruppi di matrici

In questo capitolo daremo un esempio di gruppo di Lie che non è un gruppo di matrici. In particolare, vedremo che esso è un quoziente del gruppo di Heisenberg, la cui algebra di Lie è quella che definisce le regole di commutazione canoniche in meccanica quantistica. Pertanto, per dare validità a questo controesempio, andremo a dimostrare che esso è un gruppo di Lie e che non è un gruppo di matrici. Per fare ciò, richiameremo alcuni concetti di geometria differenziale per dimostrare innanzitutto che, sotto opportune ipotesi, l'azione di un gruppo di Lie su una varietà differenziabile genera uno spazio quoziente che ha una naturale struttura di varietà differenziabile. In particolare, l'azione di un gruppo deve essere *libera*, cioè il gruppo deve agire senza punti fissi, e *propria*, il cui significato sarà esplicitato in seguito. Questo ci permetterà di dimostrare che il quoziente di un gruppo di Lie con un suo sottogruppo normale è ancora un gruppo di Lie. Infine dimostreremo che tale quoziente non ammette una rappresentazione fedele di dimensione finita e, pertanto, non è isomorfo ad alcun gruppo di matrici.

4.1 Azioni di gruppi di Lie su varietà

Abbiamo già visto come, in un certo senso, i gruppi di Lie possono essere considerati come i gruppi di simmetria di una varietà differenziabile. In particolare, vedremo come essi possono essere utilizzati per costruire nuove varietà.

Per i gruppi di Lie, possiamo estendere in maniera naturale il concetto di azione di un gruppo introdotto nel paragrafo 1.5 e, richiedendo che l'applicazione $\theta : G \times M \to M$, dove M è una varietà differenziabile e G un gruppo di Lie, sia di classe C^∞, otteniamo un'azione differenziabile. Definiamo [AT11] *G-spazio* una varietà su cui agisce il gruppo di Lie G, mentre se l'azione di G è anche transitiva la varietà viene detta *G-spazio omogeneo*. Nella maggior parte degli spazi omogenei, l'azione di un gruppo conserva molte delle strutture sulla varietà (come ad esempio la metrica Riemanniana, le forme differenziali, un campo vettoriale, ecc.), e il fatto che l'azione è transitiva significa che questa struttura è "la stessa" ovunque sulla varietà [Lee13].

Riprendiamo il concetto di orbita di un punto. Detta $\theta : G \times M \to M$ l'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M, abbiamo visto che l'orbita di un punto $p \in M$ è l'insieme $G(p) = \{\theta_g(p) : g \in G\}$, e che M/G è lo spazio quoziente delle orbite. Lo spazio delle orbite, in questo caso, in quanto quoziente di uno spazio topologico, ha una struttura naturale di spazio topologico. Una domanda naturale è se ha una struttura di varietà differenziabile. La risposta in generale è no: M/G potrebbe non essere neppure una varietà topologica. Ci sono però delle condizioni che assicurano che lo spazio delle orbite sia ancora una varietà [AT11].

Diremo, sempre riprendendo [AT11], che un'azione $\theta : G \times M \to M$ di un gruppo di Lie G su una varietà M è *propria* se l'applicazione $\Theta : G \times M \to M \times M$, data da $\Theta(g,p) = (g \cdot p, p)$ è propria. Spesso è difficile da vedere se una data azione è propria, perciò conviene introdurre la seguente caratterizzazione, dimostrata in [Lee13].

Proposizione 4.1. *(Caratterizzazione delle azioni proprie.) Sia M una varietà differenziabile, e sia G un gruppo di Lie che agisce con continuità su M. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *L'azione è propria.*

(b) *Se (p_i) è una successione in M e (g_i) è una successione in G tali che sia (p_i) e $(g_i \cdot p_i)$ convergono, allora esisterà una sottosuccessione di (g_i) convergente.*

(c) *Per ogni sottoinsieme compatto $K \subseteq M$, l'insieme $G_K = \{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ è compatto.*

Adesso vogliamo dimostrare che il quoziente di una varietà sotto un'azione libera e propria è ancora una varietà. Seguiremo lo schema dimostrativo proposto da [AT11], pertanto richiamiamo un lemma preliminare e il teorema della funzione inversa per varietà, che riporteremo senza dimostrazione:

Lemma 4.2. *Sia $\theta : G \times M \to M$ un'azione di un grppo di Lie su una varietà M. Allora la proiezione naturale $\pi : M \to M/G$ è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia $U \subseteq M$ aperto. Per costruzione,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} \theta_g(U).$$

Essendo θ_g un omeomorfismo, ciascun $\theta_g(U)$ è aperto, e anche $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto. Per definizione di topologia quoziente questo implica che $\pi(U)$ è aperto in M/G, per cui π è un'applicazione aperta. □

Teorema 4.3. *(Teorema della funzione inversa per varietà.) Sia $F : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra varietà. Sia $p \in M$ un punto tale che $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno $U \subseteq M$ di p e un intorno $V \subseteq N$ di $F(p)$ tali che $F|_U : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Teorema 4.4. *Sia $\theta : G \times M \to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M, e indichiamo con $\pi : M \to M/G$ la proiezione naturale sullo spazio delle orbite. Supponiamo che l'azione sia libera e propria. Allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su M/G, compatibile con la topologia quoziente, tale che π sia una sommersione. Rispetto a questa, M/G ha dimensione* $\dim M - \dim G$.

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando l'unicità della struttura. Supponiamo di avere due atlanti $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ su M/G, compatibili con la topologia quoziente e rispetto a cui π è una sommersione suriettiva. Poichè l'identità è differenziabile sia da $(M/G, \mathcal{A}_1)$ a $(M/G.\mathcal{A}_2)$ che nel viceversa, allora è un diffeomorfismo: i due atlanti sono dunque compatibili ed identificano la stessa struttura differenziabile.

Dimostriamo ora che le orbite sono sottovarietà di M. Per ogni $p \in M$, sia $\theta^p : G \to M$ data da $\theta^p(g) = \theta_g(p)$. In particolare, l'orbita di p è l'immagine di θ^p; quindi, ci basta dimostrare che θ^p è un embedding. E' iniettiva: $\theta^p(g) = \theta^p(h)$ implica $\theta_{h^{-1}g}(p) = p$, per cui, essendo l'azione libera, deve essere necessariamente $h^{-1}g = e$, ovvero $g = h$. Ora, notiamo che

$$\theta^p(gh) = \theta_{gh}(p) = \theta_g(\theta_h(p)) = \theta_g(\theta^p(h)).$$

Essendo la traslazione sinistra transitiva ed essendo per ipotesi differenziabile e per definizione equivariante, necessariamente deve avere rango costante. Avendo dimostrato che è iniettiva, deve essere un'immersione. In particolare, $\dim G \leq \dim M$. Ora, se $K \subseteq M$ è compatto, $(\theta^p)^{-1}(K)$ è chiuso in G, ed è contenuto in $\{g \in G : g(K \cup \{p\}) \cap (K \cup \{p\}) \neq \emptyset\}$, che è compatto perchè l'azione è propria; quindi θ^p è propria, e dunque un embedding.

Continuiamo studiando le proprietà topologiche di M/G. Essendo π aperta per il lemma 4.2, l'immagine tramite π di una base numerabile di aperti di M è una base numerabile di aperti di M/G; quindi M/G è a base numerabile.

Per ipotesi, l'applicazione $\Theta : G \times M \to M \times M$ data da $\Theta(g, p) = (\theta_g(p), p)$ è propria: in particolare, ha immagine chiusa. Ora, abbiamo $(p, q) \in \Theta(G \times M)$ se e solo se p e q appartengono alla stessa orbita, cioè se e solo se $\pi(p) = \pi(q)$. Dunque, se $\pi(p) \neq \pi(q)$, possiamo trovare un intorno $U \times V$ di (p, q) in $M \times M$ disgiunto da $\Theta(G \times M)$, e (essendo π aperta) $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni disgiunti di $\pi(p)$ e $\pi(q)$ in M/G, che quindi è di Hausdorff.

Ora, poniamo $k = \dim G$ e $n = \dim M - \dim G$. Diremo che una carta (U, φ) di M è adattata all'azione di G se $\varphi(U)$ è un prodotto $V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, e se $q \in M$ è tale che l'orbita $G(q)$ interseca U allora $\varphi(G(q) \cap U) = V_1 \times \{c\}$, per un opportuno $c \in \mathbb{R}^n$. Come primo passo per la costruzione dell'atlante su M/G dimostriamo che, per ogni $p \in M$, esiste una carta adattata all'azione di G centrata in p.

Siccome l'orbita $G(p)$ è una sottovarietà di M, abbiamo una carta (V, ψ) centrata in p per cui $\psi(V \cap G(p)) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\})$. Sia $s \subset V$ la sottovarietà di V definita da $S = \psi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$. Chiaramente abbiamo $T_pM = T_pG(p) \oplus T_pS$.

Sia $\eta : G \times S \to M$ la restrizione a $G \times S$ dell'azione θ; vogliamo dimostrare che η è un diffeomorfismo in un intorno di (e, p). Sia $\imath_p : G \to G \times S$ l'embedding $\imath_p(g) = (g, p)$; chiaramente, $\theta^p = \eta \circ \imath_p$. Siccome θ^p è un embedding con immagine $G(p)$, abbiamo $d\theta^p_e(T_eG) = T_pG(p)$, per cui l'immagine di $d\eta_{(e,p)}$ contiene $T_pG(p)$. Analogamente, usando l'embedding $\jmath_e : S \to G \times S$ dato da $\jmath_e(q) = (e, q)$, e notando che la composizione $\eta \circ \jmath_e$ è uguale all'inclusione $S \hookrightarrow M$, vediamo che l'immagine di $d\eta_{(e,p)}$ contiene anche T_pS. Quindi $\eta_{(e,p)} : T_{e,p}(G \times S) \to T_pM$ è suriettivo e dunque, confrontando le dimensioni, un isomorfismo. Il teorema 4.3 ci assicura allora l'esistenza di un intorno $W_1 \times W_2$ ei (e, p) in $G \times S$ e di un intorno W di p in M tali che $\eta : W_1 \times W_2 \to W$ sia un diffeomorfismo.

Vogliamo far vedere che, a meno di rimpicciolire W_2, possiamo supporre che ogni G-orbita interseca W_2 in al più un punto. Se così non fosse, potremmo trovare una base numerabile $\{W^j\}$ di intorni di p in $W_2 \subset S$ e, per ogni $j \geq 1$, punti distinti $p_j, p'_j \in W^j$ e $g_j \in G$ tali che $g_j \cdot p_j = p'_j$. Siccome $\{W^j\}$ è una base di intorni, p_j e $p'_j = g_j \cdot p_j$ tendono a p. Essendo l'azione propria, la proposizione 4.1 ci dice che, a meno di passare a una sottosuccessione, possiamo supporre che $g_j \to g \in G$. Ma allora

$$g \cdot p = \lim_{j \to \infty} p'_j = p;$$

essendo l'azione libera, otteniamo $g = e$. Dunque $g_j \in W_1$ quando j è abbastanza grande; ma questo contraddice l'iniettività di η su $W_1 \times W_2$ perchè $\eta(g_j, p_j) = p'_j = \eta(e, p'_j)$ e sitamo assumendo $p'_j = p_j$.

A meno di rimpicciolire ulteriormente W_1 e W_2 possiamo supporre che siano i domini di due carte (W_1, γ_1) e (W_2, γ_2) centrate in $e \in G$ e $p \in S$ rispettivamente. Poniamo $\varphi = (\gamma_1 \times \gamma_2) \circ \eta^{-1}$; vogliamo dimostrare che (U, φ) è la carta adattata all'azione di G che stavamo cercando. Che $\varphi(U)$ sia un prodotto è ovvio per costruizione. Supponiamo che un'orbita $G(p)$ intersechi U. Siccome $U = \eta(W_1 \times W_2)$, possiamo supporre che $q \in W_2$; e, visto che ogni orbita interseca W_2 in al più un punto, questo q è univocamente determinato. Ma allora $\varphi(G(p) \cap U) = \gamma_1(W_1) \times \{\gamma_2(q)\}$, per cui (U, φ) è adattata all'azione di G, come voluto.

Ora usiamo le carte adattate per costruire un atlante di M/G. Dato $p \in M$, poniamo $\hat{p} = \pi(p)$, e sia (U, φ) una carta di M centrata in p ed adattata all'azione di G. Poniamo $\hat{U} = \pi(U)$; essendo π aperta, $\hat{U}$ è aperto in M/G. Se $S = U \cap \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$, per definizione di carta adattata $\pi|_S : S \to \hat{U}$ è biettiva. Inoltre, se $W \subset S$ è aperto in S, allora $\pi(W) = \pi(\eta(G \times W) \cap U)$ è aperto in M/G, per cui $\pi|_S$ è un omeomorfismo con l'immagine. Sia $\pi_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione sulla seconda coordinata, e poniamo $\hat{\varphi} = \pi_2 \circ \varphi \circ (\pi|_S)^{-1} : \hat{U} \to \mathbb{R}^n$. Per costruzione, $\hat{\varphi}$ è un omeomorfismo con l'immagine; quindi, $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ è una n-carta di M/G compatibile con la topologia quoziente. Inoltre, $\hat{\varphi} \circ \pi \circ \varphi^{-1} = \pi_2$, per cui rispetto a questa carta π è una sommersione.

Per completare la dimostrazione dobbiamo far vedere che due carte costruite in questo modo sono compatibili tra loro. Siano (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) due carte adattate di M, e $(\hat{U}_1, \hat{\varphi}_1)$ e $(\hat{U}_2, \hat{\varphi}_2)$ le corrispondenti carte di M/G. Se entrambe le carte adattate sono centrate nello stesso punto $p \in M$, si vede subito che

$$\hat{\varphi}_2 \circ \hat{\varphi}_1^{-1}(x) = \pi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(0, x),$$

che è chiaramente di classe C^∞ dove definita. Se invece sono centrate in punti diversi, da $\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2 \neq \emptyset$ deduciamo che esistono $p_1 \in U_1$ e $p_2 \in U_2$ tali che $\pi(p_1) = \pi(p_2)$. A meno di traslazioni, possiamo supporre che (U_1, φ_1) sia centrata in p_1 e che $u - 2, \varphi_2$ sia centrata in p_2. Siccome p_1 e p_2 appartengono alla stessa orbita, esiste $g \in G$ tale che $\theta_g(p_1) = p_2$. Ma θ_g è un diffeomorfismo che manda orbite in orbite; quindi $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \theta_g$ è un'altra carta adattata centrata in p_1, definita in $U_3 = \theta_g^{-1}(U_2) \cap U_1$. Se indichiamo con $(\hat{U}_3, \hat{\varphi}_3)$ la corrispondente carta in M/G, per quanto visto prima $\hat{\varphi}_3 \circ \varphi_1^{-1}$ è di classe C^∞ dove definita. Ma, se poniamo $S_j = U_j \cap \varphi_j^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$, per $j = 1, 2, 3$, abbiamo $(\pi|S_3)^{-1} = \theta_g^{-1} \circ (\pi|_{S_2})^{-1}$ e quindi

$$\hat{\varphi}_3 = \pi_2 \circ \varphi_3 \circ (\pi|_{S_3})^{-1} = \pi_2 \circ \varphi_2 \circ \theta_g \circ \theta^{-1} g \circ (\pi|_{S_2})^{-1} = \hat{\varphi}_2;$$

quindi $(\hat{U}_1, \hat{\varphi}_1)$ e $(\hat{U}_2, \hat{\varphi}_2)$ sono compatibili. $\square$

Questo risultato, molto importante in geometria differenziale, unito alla proprietà caratteristica delle sommersioni suriettive[1], permette di dimostrare il seguente teorema (si veda [Lee13], teorema 21.17 per una dimostrazione):

Teorema 4.5. *(Teorema di costruzione degli spazi omogenei) Sia G un gruppo di Lie e sia H un sottogruppo chiuso di G. Lo spazio dei laterali sinistri G/H è una varietà topologica di dimensione* $\dim G - \dim H$*, ed ha un'unica struttura differenziabile tale che la mappa quoziente $\pi : G \to G/H$ è una sommersione liscia. L'azione sinistra di G su G/H, rende G/H un G-spazio.*

Una volta dimostrato che lo spazio delle orbite determinato dall'azione destra di H su G è praticamente G/H, è facile dimostrare che l'azione di H è liscia, libera e propria e che quindi

[1]Data una sommersione suriettiva $\pi : G \to G/K$, un'applicazione $F : G/K \to M$ è differenziabile se e solo se $F \circ \pi : G \to M$ è differenziabile. Si veda ad esempio [Lee13], teorema 4.29, per una dimostrazione.

G/H ha un'unica struttura di varietà differenziaibile e che la mappa quoziente $\pi : G \to G/H$ è una sommersione liscia.

Con questi teoremi in mente, la seguente dimostrazione del seguente teorema, che si trova in [Lee13], teorema 21.26, è banale:

Teorema 4.6. *Supponiamo che G sia un gruppo di Lie e che $K \subseteq G$ sia un sottogruppo normale chiuso. Allora G/K è un gruppo di Lie, e la mappa quoziente $\pi : G \to G/K$ è un omomorfismo di gruppi di Lie suriettivo, il cui nucleo è K.*

L'unica cosa che andrebbe dimostrata è che la moltiplicazione e l'inversione sono differenziabili. Con un po' di lavoro, usando il teorema di caratterizzazione delle sommersioni suriettive per F data dall'inversione e per F data dalla moltiplicazione (il prodotto cartesiano di sommersioni suriettive è ancora una sommersione suriettiva), si prova che moltiplicazione e inversione in G/K sono differenziabili.

4.2 Il gruppo di Heisenberg

Come riportato in [Hal15], il *gruppo di Heisenberg* è il gruppo delle matrici 3×3 triangolari superiori

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

mentre la sua algebra di Lie è l'insieme delle matrici

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

come provato nella seguente proposizione:

Proposizione 4.7. *L'algebra di Lie del gruppo di Heisenberg H è lo spazio $\mathfrak{h}$ delle matrici della forma*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se una matrice X è strettamente triangolare superiore, un calcolo diretto mostra che X^m sarà strettamente triangolare, per ogni intero positivo m. Quindi, per una matrice X come nell'equazione 4.1, avremo $e^{tX} = I + B$, con B strettamente triangolare, il che dimostra che $e^{tX} \in H$. Viceversa, se e^{tX} appartiene ad H per ogni parametro t reale, allora tutte le entrate di e^{tX} sulla diagonale e al di sotto di essa saranno indipendenti da t. Quindi

$$X = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\bigg|_{t=0}$$

sarà come in 4.1. □

Un calcolo diretto ci mostra che il centro di H è

$$Z(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

In [Ste95][2] è reso esplicito che esiste un isomorfismo di gruppi di Lie $\mathbb{R} \cong Z(H)$ mediante il quale il sottogruppo degli interi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ corrisponde al gruppo delle matrici

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

che forma un sottogruppo discreto normale chiuso. Possiamo quindi formare il quoziente

$$Q = H/N$$

e dotarlo di topologia quoziente, dal momento che N è un sottogruppo normale.

Consideriamo il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, in cui definiamo la moltiplicazione e l'inversione nel modo seguente:

$$(x_1, x_2, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 z_2 e^{2\pi i x_1 y_2}) \qquad (x_1, y_1), (x_2 y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1;$$

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, z^{-1} e^{2\pi i x y}) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{S}^1.$$

Le applicazioni ora definite sono chiaramente differenziabili, pertanto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ è un gruppo di Lie.

Possiamo definire un morfismo di gruppi di Lie:

$$\Phi : H \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad \Phi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c, e^{2\pi i b}).$$

E' manifesto che Φ è, in particolare, un morfismo differenziabile e suriettivo, e che ha per nucleo $\ker \Phi = \Phi^{-1}\{(0, 0, 1)\} = N$.

Introduciamo la proiezione al quoziente canonica $\pi : H \to H/N = Q$, che è una sommersione suriettiva. Notiamo che, per quanto detto nel paragrafo 1.4, si ha $N = \ker \pi$. Quindi, abbiamo trovato che $\ker \Phi = \ker \pi$, il che ci dice che Φ è costante sulle fibre di π.

Consideriamo adesso il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & H/N = Q \arrow[d, "\tilde{\Phi}"] \\ & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Dalla proprietà caratteristica delle sommersioni suriettive si ha che $\tilde{\Phi}$ è C^∞. In maniera simile possiamo dimostrare che $\tilde{\Phi}^{-1}$ è C^∞. Possiamo quindi concludere che Q e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ sono varietà diffeomorfe.

[2] Ci rifaremo a tale testo fino alla fine del paragrafo.

4.3 Q è un gruppo di Lie non matriciale

In questo paragrafo dimostreremo che Q non è isomorfo ad alcun gruppo di matrici, seguendo lo schema proposto in [Hal15]. Prima di fare ciò, richiamiamo un lemma che ci tornerà utile nel corso della dimostrazione:

Lemma 4.8. *Se X è una matrice nilpotente e $e^{tX} = I$, per qualche $t \neq 0$, allora $X = 0$.*

Dimostrazione. Dato che X è nilpotente, la serie di potenze per e^{tX} è finita. Quindi, ciascuna delle entrate di e^{tX} dipende in maniera polinomiale da t, cioè, esisteranno polinomi $p_{jk}(t)$ tali che $\left(e^{tX}\right)_{jk} = p_{jk}(t)$. Se $e^{tX} = I$ per qualche t diverso da zero, allora $e^{ntX} = I$ per tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, il che dimostra che $p_{jk}(nt) = \delta_{jk}$, per tutti gli n. Ad ogni modo, un polinomio che assume uno stesso valore infinite volte deve essere costante. Quindi, dato che $e^{tX} = I$ per ogni I, questo implica che $X = 0$. $\square$

Teorema 4.9. *Sia Π una qualsiasi rappresentazione di dimensione finita di H. Se $\ker \Pi \supset N$, allora $\ker \Pi \supset Z(H)$*

Inoltre vediamo come scrivere l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ del gruppo di Heisenberg.

Dimostrazione. Sia π la rappresentazione associata dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di H. Sia $\{X, Y, Z\}$ una base per $\mathfrak{h}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

Adesso vogliamo vedere che $\pi(Z)$ è nilpotente, o, equivalentemente, che ha tutti gli autovalori nulli. Sia λ un autovalore per $\pi(Z)$ e sia V_λ l'autospazio associato. Allora V_λ è certamente invariante sotto $\pi(Z)$. Inoltre, dal momento che $\pi(X)$ e $\pi(Y)$ commutano con $\pi(Z)$, V_λ sarà invariante anche sotto $\pi(X)$ e $\pi(Y)$. Quindi, al restrizione di $\pi(Z)$ a V_λ, che indichiamo con λI, è il commutatore con le restrizioni a V_λ di $\pi(X)$ e $\pi(Y)$. Dal momento che la traccia di un commutatore è nulla, abbiamo che $0 = \lambda \dim(V_\lambda)$, e quindi λ deve essere nullo.

Ora un calcolo diretto mostra che e^{nZ} appartiene ad N per ogni intero n. Quindi, se Π è una rappresentazione di H, e $\ker \Pi \supset N$, abbiamo che $\Pi(e^{nZ}) = I$, per ogni n. Dato che $\pi(Z)$ è nilpotente, il lemma 4.8 ci dice che $\pi(Z)$ è nullo, e di conseguenza $\Pi(e^{tZ}) = e^{t\pi(Z)} = I$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato che ogni elemento di $Z(H)$ è della forma e^{tZ} per qualche t, abbiamo concluso la dimostrazione. $\square$

Notiamo che se $F : G \to GL_n(\mathbb{R})$ è un isomorfismo con un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$, allora, in particolare, è una rappresentazione fedele. Se non esistono rappresentazioni fedeli, questo vuol dire che G non è isomorfo ad un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$. Possiamo quindi concludere che non esistono rappresentazioni iniettive di dimensione finita di Q. Inoltre, se Σ è una qualsiasi rappresentazione di dimensione finita di Q, allora il nucleo di $\Pi = \Sigma \circ \Phi$ conterrà N e, quindi, $Z(H)$, come conseguenza del teorema 4.9. Quindi, per ogni $b \in \mathbb{R}$

$$\Pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Sigma(0, 0, e^{2\pi i b}) = I.$$

Questo significa che il nucleo di Σ contiene tutti gli elementi della forma $(0, 0, u)$, e Σ non è una rappresentazione fedele. Quindi, otteniamo il seguente risultato.

Corollario 4.10. *Il gruppo di Lie Q non ha nessuna rappresentazione fedele di dimensione finita. In particolare, Q non è isomorfo ad alcun gruppo di matrici.*

4.4 La connessione con la meccanica quantistica

Riportiamo il formalismo introdotto in [Ste95]. Abbiamo visto che la moltiplicazione l'inversione Q sono dati da:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 z_2 e^{2\pi i x_1 y_2})$$

,

$$(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, z^{-1} e^{2\pi i x y}).$$

La parentesi di Lie di $\mathfrak{h}$ è data da

$$[(x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2)] = (0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

L'algebra $\mathfrak{h}$ viene spesso chiamata algebra di Heisenberg ed è quella utilizzata in meccanica quantistica. E' essenzialmente la stessa algebra degli operatori sulle funzioni differenziabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, generata dagli operatori $\hat{I}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$, definiti da

$$\hat{I} f(x) = f(x), \quad \hat{p} f(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad \hat{q} f(x) = x f(x).$$

Il commutatore che coinvolge tali operatori è dato dalla regola di commutazione canonica

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = \hat{I}.$$

Notiamo infatti che in $\mathfrak{h}$ gli elementi $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ formano una base con il seguente commutatore

$$[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] = (0, 0, 1).$$

Bibliografia

[Asl96] Helmer Aslaksen. Quaternionic determinants. *The Mathematical Intelligencer*, 18(3):57–65, 1996.

[AT11] Marco Abate and Francesca Tovena. *Geometria differenziale.* Springer Science & Business Media, 2011.

[Bak12] Andrew Baker. *Matrix groups: An introduction to Lie group theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[CC08] Giampaolo Cicogna and Michele Cini. *Metodi matematici della fisica.* Springer, 2008.

[D'A20] Francesco D'Andrea. *Varietà Differenziabili.* Società Editrice Esculapio, 2020.

[Hal15] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, volume 222. Springer, 2015.

[Lee13] John M Lee. Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds*, pages 1–31. Springer, 2013.

[Mac74] Antonio Machi. *Introduzione alla teoria dei gruppi.* Feltrinelli, 1974.

[Ste95] Shlomo Sternberg. *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1995.

[Sti08] John Stillwell. *Naive lie theory.* Springer Science & Business Media, 2008.

[SW13] David H Sattinger and Oliver L Weaver. *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2013.

[Tap16] Kristopher Tapp. *Matrix groups for undergraduates*, volume 79. American Mathematical Soc., 2016.