

*a mio padre Giovanni
e ad Alessia*

Indice

Introduzione	3
1 IL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD	5
1.1 L'espansione dell'universo	5
1.1.1 Il fattore di scala	5
1.1.2 Hubble rate	6
1.1.3 La costante di Hubble	6
1.2 Relatività Generale	7
1.2.1 La metrica FRW	8
1.2.2 L'equazione per le geodetiche	9
1.2.3 Le equazioni di Einstein	11
1.3 La densità di energia	14
1.3.1 Fotoni	14
1.3.2 Neutrini	15
1.3.3 Barioni e materia	16
1.3.4 Energia oscura	17
1.4 La soluzione per $a(t)$	17
2 LA NUCLEOSINTESI PRIMORDIALE	20
2.1 L'equazione di Boltzmann	21
2.2 I processi di nucleosintesi	25
2.2.1 L'abbondanza di neutroni	27
2.2.2 La produzione del deuterio	31
2.2.3 Le abbondanze di elementi leggeri	33
2.3 Evidenze sperimentali	36
Conclusioni	38
Bibliografia	39

INTRODUZIONE

La ricerca cosmologica è sempre stata dedicata all'indagine sull'evoluzione dell'universo sin dalle sue origini. Un'adeguata comprensione di tale argomento consentirebbe di conoscere i meccanismi che hanno portato alla formazione di tutti gli elementi che costituiscono il mondo in cui viviamo, ivi compresa la vita, alla loro evoluzione fino ai giorni nostri e che determinano il loro futuro sviluppo.

Le scoperte di Hubble degli anni venti hanno avvalorato l'idea di un universo in espansione e la teoria sviluppata da Einstein ha consentito di descriverne accuratamente la dinamica. Per poter giungere ad una soluzione verosimile per le equazioni di Einstein è stato necessario porre delle assunzioni basate su alcune evidenze sperimentali. La principale ipotesi da avanzare trae le sue fondamenta dall'osservazione che l'universo può essere considerato, in prima approssimazione, omogeneo ed isotropo, ossia che, almeno su larga scala (~ 100 Mpc), qualunque misura cosmologica restituisca lo stesso risultato indipendentemente dalla posizione e dalla direzione in cui viene effettuata. Questa assunzione getta le basi per la definizione di una metrica in termini della quale è possibile quantificare l'espansione dell'universo. Nei fatti, alcune osservabili, mostrano delle disomogeneità, come ad esempio la distribuzione della radiazione cosmica di fondo, tuttavia queste sono sufficientemente piccole da poter essere trattate come perturbazioni.

Questo modello cosmologico può essere sviluppato inserendo le informazioni sulla materia osservabile nello spazio, ottenendo informazioni quantitative che possono essere confrontate con i dati empirici. Di fatto, l'idea di un universo in espansione ha come conseguenza diretta il fatto che nel passato questo dovesse essere molto più denso e caldo di oggi, caratterizzato da un plasma di elettroni e fotoni in intensa e frequente interazione. Fin tanto che il rate di tali interazioni è sufficientemente elevato da consentire il raggiungimento delle condizioni di equilibrio, è possibile trattare il plasma

primordiale con la meccanica statistica dell'equilibrio. L'utilizzo esclusivo di tali strumenti conduce tuttavia a delle previsioni inattendibili. In effetti, se il rate di espansione dell'universo è troppo elevato, l'equilibrio delle reazioni tra le particelle si interrompe. Si rende allora necessario abbandonare la termodinamica e fare uso della teoria cinetica, complicando notevolmente i calcoli.

La nucleosintesi primordiale è il processo di formazione dei primi elementi chimici durante gli istanti iniziali dell'universo. Attraverso la teoria cinetica è possibile calcolare le abbondanze degli elementi prodotti e ricondurre queste quantità a delle grandezze osservabili ad oggi con grande precisione. Lo scopo di questo lavoro di tesi è proprio quello di ottenere delle stime di tali quantità. La prima parte sarà dedicata allo studio dell'espansione dell'universo, ricavando esplicitamente una soluzione per le equazioni di Einstein, che servirà a quantificare il tasso di dilatazione dello spazio, in modo da poterlo confrontare con i rate delle interazioni che coinvolgono le particelle che formano il plasma primordiale. Nella seconda parte, si presenterà dettagliatamente la teoria cinetica, derivando l'equazione fondamentale che la descrive e riscrivendola in termini dei parametri di interesse per lo studio della nucleosintesi. In seguito a ciò, si inseriranno le informazioni sulle reazioni che portano alla formazione degli elementi chimici più leggeri, ottenendo così dei valori numerici per le quantità prodotte per ciascuna di queste sostanze.

Capitolo 1

IL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD

1.1 L'espansione dell'universo

L'espansione dell'universo è il fenomeno per il quale la distanza tra i corpi aumenta nel tempo. Ciò è valido per corpi di qualunque scala di grandezza, ma diventa particolarmente evidente e accuratamente misurabile nei moti delle galassie. Questo significa che la distanza che intercorre tra noi e le stelle lontane è maggiore oggi di quanto lo fosse in passato. Per descrivere questo effetto è molto utile introdurre le nozioni di coordinate comoventi e fattore di scala.

1.1.1 Il fattore di scala

Alla luce di quanto appena detto, se dovessimo misurare ripetutamente la distanza tra due corpi liberi inizialmente fermi l'uno rispetto all'altro, otterremo valori progressivamente crescenti nel tempo. Si definiscono allora le coordinate comoventi di un punto nello spazio come le coordinate che questo avrebbe se fosse in quiete. È evidente che le coordinate comoventi sono costanti nel tempo. Per poter risalire alla distanza fisica dalle coordinate comoventi si definisce il fattore di scala $a(t)$, dipendente dal tempo, come il rapporto tra le sue coordinate fisiche e quelle comoventi. [\[2\]](#)

È importante notare che dall'isotropia dello spazio discende immediatamente che il fattore di scala non dipende dalla particolare coordinata scelta

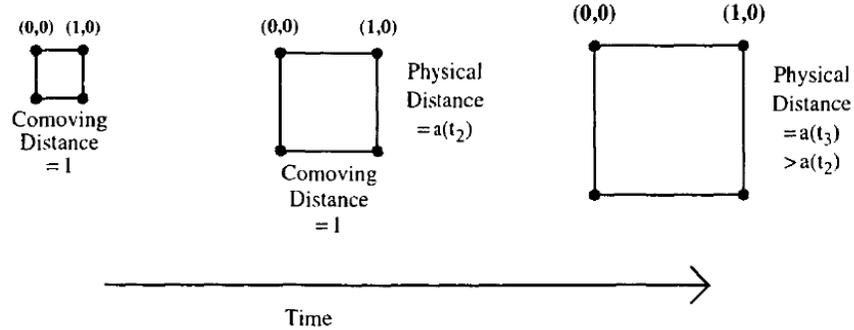


Figura 1.1.1: Rappresentazione di punti a coordinate fissate. La distanza fisica è proporzionale alla distanza comovente tramite il fattore di scala, che aumenta nel tempo.

tra le tre spaziali. Inoltre, per convenzione, è comodo porre il fattore ad 1 ai giorni nostri, cosicché nelle misure attuali le coordinate comoventi coincidono con quelle fisiche. Questo significa dire che nel passato si doveva necessariamente avere $a(t) < 1$. Determinare l'evoluzione temporale di a è indispensabile per poter fare una trattazione quantitativa della nucleosintesi primordiale.

1.1.2 Hubble rate

Si renderà particolarmente utile nelle trattazioni successive specificare il tasso di variazione del fattore di scala nel tempo. Si definisce quindi l'Hubble rate [\[2\]](#)

$$H := \frac{da/dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a}$$

dove il puntino denota la derivata rispetto al tempo. H ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

1.1.3 La costante di Hubble

La definizione dell'Hubble rate consente di avere una prima evidenza dell'espansione dell'universo. Se la distanza fisica tra due galassie è per definizione $d = ax$ dove x è la distanza comovente, in assenza di una velocità comovente

(ossia $\dot{x} = 0$), la velocità relativa tra le due galassie sarà

$$\dot{d} = \dot{a}x = H_0 d \quad (1.1.1)$$

dove H_0 denota la costante di Hubble al tempo presente.

Si ottiene che la velocità di allontanamento delle galassie deve essere proporzionale alla loro distanza, con H_0 costante di proporzionalità. Sperimentalmente, è possibile misurare la distanza di un qualunque oggetto nello spazio, conoscendo la sua luminosità intrinseca e confrontandola con quella misurata, nota la relazione che lega queste quantità alla lontananza. È più diretta, invece, la misura della velocità. Noto che la lunghezza di un'onda emessa da una sorgente in allontanamento subisce una dilatazione, cosicché la lunghezza osservata è maggiore di quella intrinseca, è possibile definire il redshift z come

$$1 + z := \frac{\lambda_{oss}}{\lambda_{em}}$$

Per valori piccoli di \dot{d} , si può sviluppare il redshift al primo ordine ottenendo

$$z \simeq \frac{\dot{d}}{c}$$

ossia il redshift fornisce una misura diretta della velocità con cui si allontana l'oggetto.

L'equazione [1.1.1](#) risulta in ottimo accordo ai dati sperimentali, già a partire dalle osservazioni che Hubble fece nel 1929. La costante H_0 viene tipicamente espressa in termini della costante adimensionale h come

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

e le misure attuali stimano $h \simeq 0.72 \pm 0.08$.[\[6\]](#)

1.2 Relatività Generale

L'obiettivo principale di questa sezione è quello di ricavare una stima quantitativa per l'evoluzione temporale di H . Naturalmente la dinamica dello spazio-tempo può essere completamente descritta tramite le equazioni di Einstein, che possono essere risolte senza eccessive difficoltà se si fa uso delle evidenze sull'omogeneità e sull'isotropia dell'universo. A tale scopo, tuttavia, occorre preliminarmente riportare le variabili dinamiche che compaiono nelle equazioni in termini del fattore di scala $a(t)$.

1.2.1 La metrica FRW

La relazione che intercorre tra le coordinate comoventi e le distanze fisiche dei corpi può essere efficacemente tradotta nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$ che compare nelle equazioni di Einstein.

L'assunzione secondo cui l'universo sia invariante sotto traslazioni e rotazioni offre la possibilità di introdurre una metrica che goda di particolari proprietà di simmetria, semplificando notevolmente il problema. Fissate delle coordinate comoventi nello spazio-tempo 4-dimensionale l'espressione dell'invariante metrico è

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.1)$$

dove $dx^0 = dt$ ¹. La definizione del fattore di scala suggerisce una forma particolarmente comoda per la metrica [5, 7]

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (1.2.2)$$

(da questo punto in poi si farà uso della notazione di Einstein e delle unità naturali $c = \hbar = k_B = 1$). Questa prende il nome di metrica Friedmann-Robertson-Walker. Le variabili r, θ, ϕ sono le coordinate comoventi, e t è il tempo proprio misurato dagli osservatori comoventi, ossia quelli per i quali le coordinate hanno valori costanti nel tempo. Il parametro k rappresenta la curvatura dello spazio e, limitatamente ai valori $k = -1, 0, +1$, corrisponde rispettivamente ad uno spazio a curvatura negativa, uno spazio piatto ed una 3-sfera. Molte evidenze sperimentali avvalorano l'idea che l'universo sia piatto, di conseguenza l'equazione 1.2.2 può essere riscritta in termini delle coordinate cartesiane in questo modo

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.2.3)$$

Ciò corrisponde ad un tensore metrico così fatto

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

¹Si farà sempre uso degli indici greci per indicare le componenti dei quadrivettori, riservando gli indici latini ai casi in cui ci si restringe alle sole componenti spaziali (eg. le somme su indici greci vanno da 0 a 3, quelle su indici latini vanno da 1 a 3)

che coincide con la metrica di Minkowski moltiplicata per il fattore di scala nelle componenti spaziali.

1.2.2 L'equazione per le geodetiche

Il vantaggio che si ha nell'utilizzare la metrica è che questa contiene tutte le informazioni sulla gravità. Sicché, se nella meccanica newtoniana l'equazione del moto di un corpo doveva includere un campo gravitazionale, in relatività si riconduce il problema del moto a quello di un corpo libero in movimento all'interno di uno spazio-tempo curvo. La curva che descrive il moto di tale corpo prende il nome di geodetica e l'equazione per le geodetiche si può ricavare a partire dalla legge di Newton per un corpo libero²:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0 \quad (1.2.4)$$

Qualora si adottino delle coordinate diverse da quelle cartesiane

$$x^i = x^i(x'^j)$$

si ha

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \quad (1.2.5)$$

dove la matrice $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ è lo jacobiano della trasformazione. L'equazione [1.2.4](#) diventa

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \right] = 0 \quad (1.2.6)$$

Scambiando le derivate si ottiene e usando la [1.2.5](#) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right] = \frac{\partial}{\partial x'^j} \left[\frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt}$$

svolgendo la derivata del prodotto nella [1.2.6](#) e sostituendo l'equazione per le geodetiche diventa

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{d^2 x'^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0 \quad (1.2.7)$$

²Per le finalità di questo lavoro, il calcolo che segue è presentato in maniera intuitiva e semplificata, per una trattazione più formale si rimanda ad un qualunque testo di geometria differenziale

Moltiplicando entrambi i membri per l'inversa dello jacobiano si può isolare il termine della derivata seconda

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} + \left[\left(\frac{\partial x^{-1}}{\partial x'} \right)_i^l \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \right] \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0 \quad (1.2.8)$$

A questo punto si generalizza quanto fatto alle quattro dimensioni dello spazio-tempo. Gli indici latini verranno quindi sostituiti con quelli greci e, essendo adesso t una delle coordinate, la geodetica verrà riparametrizzata con un parametro di evoluzione temporale λ .

Si definiscono allora i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{-1}}{\partial x'} \right)_{\nu}^{\mu} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}}$$

e, detto $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$ si ottiene la forma finale dell'equazione per le geodetiche

$$\frac{du^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \quad (1.2.9)$$

È possibile ora calcolare i vari simboli di Christoffel, impiegando la relazione che li lega al tensore metrico e al suo inverso $g^{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right]$$

Si valutano, inizialmente, i valori con $\mu = 0$. Dal momento che il tensore metrico è diagonale, lo è anche il suo inverso. Dunque, tutti i termini con $\nu \neq 0$ si annullano e rimane $g^{00} = -1$. Anche i primi due termini nelle parentesi si riducono alle sole derivate di g_{00} , i quali, essendo costanti, hanno derivate nulle. L'espressione che si ottiene è allora

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

Calcolando ciascun termine si ha

$$\Gamma_{00}^0 = 0$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a} a$$

Analogamente si procede per $\Gamma_{\alpha\beta}^i$: l'unico termine che compare è quello che ha $\nu = i$, che vale $g^{ii} = 1/a^2$, e l'ultimo termine tra parentesi non figura mai, siccome nessuno degli elementi del tensore metrico dipende dal punto. Per la stessa ragione, uno dei due indici α e β deve essere 0, cosicché una delle due derivate rimanenti sia rispetto al tempo. Infine, sempre in virtù del fatto che il tensore è diagonale, il restante indice deve coincidere con i . In sintesi di ciò, svolgendo le derivate, si ottiene

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= 0 \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{jk}^i &= 0\end{aligned}$$

1.2.3 Le equazioni di Einstein

Le equazioni di Einstein sono le leggi fondamentali della teoria della relatività generale. Queste legano le componenti del tensore di Einstein, che descrive la geometria dello spazio-tempo, alle componenti del tensore energia-impulso, che racchiude le informazioni sulla densità di materia e di energia nello spazio, e le loro soluzioni costituiscono i vari modelli cosmologici. Il modello fino ad ora discusso prende il nome da Friedmann e Lemaître e nella trattazione che segue si giungerà ad una soluzione che mette in relazione l'Hubble rate con la densità di energia nello spazio.

Ora che si è stabilita una metrica e noti i coefficienti di Christoffel, si entrerà nel merito vero e proprio della dinamica dello spazio-tempo, inserendo tutte le informazioni sin ora ottenute nelle equazioni di Einstein. [2, 5]

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.2.10)$$

dove:

- $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein;
- $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci le cui componenti dipendono dal tensore metrico e le sue derivate;
- \mathcal{R} è lo scalare di Ricci, contrazione del corrispettivo tensore ($\mathcal{R} := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$);

- G è la costante di Newton;
- $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso.

Il tensore di Ricci è definito come segue

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}$$

dove con la virgola si intende la derivata parziale rispetto ad x (eg. $\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} = \partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}/\partial x^{\beta}$).

Il calcolo per le componenti del tensore è piuttosto lungo, tuttavia è possibile far vedere che nel caso in esame (metrica FRW e universo piatto) gli unici elementi che non si annullano sono quelli che hanno $\mu = \nu$, ossia il tensore è diagonale. Si considera innanzitutto

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}$$

ricordando che i simboli di Christoffel si annullano se entrambi gli indici bassi sono zero l'espressione si riduce a

$$R_{00} = -\Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} - \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}$$

e considerando che uno dei due indici in basso deve essere spaziale

$$R_{00} = -\Gamma_{0i,0}^i - \Gamma_{j0}^i\Gamma_{0i}^j$$

esplicitando i termini si ottiene

$$R_{00} = -3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \delta_j^i\delta_i^j\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

Le stesse considerazioni si possono fare per il calcolo di

$$R_{ii} = \Gamma_{ii,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{i\alpha,i}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{ii}^{\beta} - \Gamma_{\beta i}^{\alpha}\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$$

(senza somma su i). Nel primo termine compare solo quello con $\alpha = 0$, il secondo è nullo in quanto nessuno dei simboli di Christoffel dipende dal punto, la terza somma si riduce ai soli elementi con $\beta = 0$ e $\alpha = j$, mentre l'ultima ai soli termini con uno dei due indici, α o β , uguale a zero e l'altro indice spaziale. Esplicitamente

$$R_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{\partial(\dot{a}a)}{\partial t} + 3\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2\right) = \delta_{ij}(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)$$

Noti gli elementi del tensore di ricci, si calcola lo scalare

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]$$

Per quanto riguarda il tensore energia-impulso, è necessario fare un'ulteriore modellizzazione: in questo modello, non è una cattiva approssimazione descrivere il gas di particelle come un fluido isotropo perfetto, per il quale il tensore di cui sopra assume la seguente forma [\[5\]](#)

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + \mathcal{P})u^{\mu}u_{\nu} + \mathcal{P}\delta_{\nu}^{\mu}$$

dove ρ è la densità del fluido, \mathcal{P} la sua pressione e u^{μ} la sua quadrivelocità nel sistema di riferimento comovente. Nel caso particolare il fluido non abbia velocità comovente ($u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$) allora

$$T_0^0 = -\rho \quad T_j^i = \mathcal{P}\delta_j^i$$

Allo scopo di valutare l'evoluzione temporale del fattore di scala è necessaria la sola componente tempo-tempo delle equazioni di Einstein

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} = 8\pi GT_{00} \quad (1.2.11)$$

Il termine a sinistra è uguale a

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$$

siccome $T_{00} = \rho$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.2.12)$$

definendo la densità critica come $\rho_{cr} := 3H_0^2/8\pi G$ si ottiene

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (1.2.13)$$

Questa prende il nome di equazione di Friedmann e lega, come anticipato, il fattore di scala, che racchiude tutta la dinamica dell'espansione dell'universo, alla densità di energia. Qui ρ incorpora la densità di energia di qualunque

tipologia (materia, radiazione e materia oscura) e, se si considera uno solo di questi tre contributi alla volta, la forma funzionale di H risulta particolarmente semplice. È importante far notare che tutti i risultati fin ora ottenuti si basano sull'ipotesi che l'universo sia piatto. Si può generalizzare l'equazione [1.2.13](#) ad un universo a qualunque curvatura:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho(t) + \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)} \right] \quad (1.2.14)$$

dove ρ_0 è la densità di energia attuale. Si vede facilmente che questa equazione si riconduce alla [1.2.13](#) se la densità di energia attuale coincide con quella critica. Inoltre, è possibile far vedere che una densità ρ_0 differente da quella critica corrisponde ad un universo aperto o chiuso ($k = \pm 1$), mentre l'uguaglianza corrisponde ad un universo piatto ($k = 0$).[\[2\]](#)

1.3 La densità di energia

Come si può notare, le soluzioni dell'equazione [1.2.13](#) dipendono dalla forma di $\rho(t)$, che come abbiamo detto consta di diversi contributi, ciascuno dei quali ha una diversa dipendenza dal tempo. L'obiettivo di questa sezione è di calcolare la densità di energia per ciascun tipo di componente dell'universo.

1.3.1 Fotoni

Essendo bosoni, i fotoni sono energeticamente distribuiti secondo la Bose-Einstein. Attualmente, la temperatura della radiazione cosmica di fondo è stata accuratamente stimata a $T_0 = 2.725 \pm 0.002K$.[\[6\]](#), [\[5\]](#) La densità di energia associata a tale radiazione è

$$\rho_\gamma = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p/T} - 1} p \quad (1.3.1)$$

in cui non compare il potenziale chimico, siccome a causa dell'annichilazione delle coppie elettrone-positrone il numero di fotoni non è conservato. Definendo la variabile $x = p/T$, l'integrale si riscrive

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dx x^3}{e^x - 1}$$

che può essere risolto in termini della funzione ζ di Riemann dando come risultato

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4$$

Resta ora da specificare la dipendenza temporale della temperatura: una distribuzione di fotoni a temperatura T_0 ha una lunghezza d'onda media $\lambda_0 = \hbar c / k_B T_0$. Si vede allora che l'energia varia come l'inverso della lunghezza d'onda, la quale nel passato doveva essere più piccola di un fattore $a(t)$. Di conseguenza l'energia del fotone, e corrispondentemente la sua temperatura, doveva essere maggiore di un fattore $1/a(t)$, ossia

$$T = \frac{T_0}{a(t)}$$

Dunque la temperatura dipende dal tempo attraverso il fattore di scala e la densità di energia varia come $a^{-4}(t)$.

1.3.2 Neutrini

I neutrini sono particelle dalla massa molto piccola rispetto a quella dei rispettivi leptoni carichi e interagiscono solo tramite interazione debole. Dagli esperimenti di oscillazione di sapore e dal decadimento del trizio, oggi si sa che il neutrino più pesante non può avere massa maggiore di circa 1eV. Pertanto, nell'intervallo di temperature della nucleosintesi (10 KeV - 1 MeV) i neutrini possono essere considerati come particelle relativistiche. È possibile far vedere che questi sono rimasti in equilibrio con il resto del plasma cosmico fino a temperature dell'ordine della massa dell'elettrone. Da quel momento in poi i neutrini sono rimasti disaccoppiati dal resto delle particelle, pur mantenendo una distribuzione del tipo Fermi-Dirac, ed in seguito a ciò il processo di annichilazione tra elettroni e positroni ha fatto sì che la temperatura dei fotoni si mantenesse più elevata rispetto a quella dei neutrini di un fattore [2](#)

$$\frac{T_\nu}{T} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3}$$

L'integrale da calcolare è analogo al [1.3.1](#) con le seguenti differenze: il fattore di degenerazione per i neutrini è 6, a causa dei tre differenti sapori e delle corrispettive antiparticelle; i neutrini sono fermioni per cui al denominatore comparirà $e^{p/T_\nu} + 1$ il che rende l'integrale minore di quello della

distribuzione di Bose-Einstein di un fattore $7/8$. Si ha quindi

$$\rho_\nu = 3 \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{15} T_\nu^4 = 3 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \frac{\pi^2}{15} T^4 = 3 \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \rho_\gamma$$

Spesso si preferisce indicare il contributo alla densità di energia delle particelle relativistiche tramite un unico fattore

$$\rho_{rel} = \rho_\gamma + \rho_\nu$$

1.3.3 Barioni e materia

A differenza dei fotoni la materia e i barioni non possono essere trattati come gas di particelle senza potenziale chimico, la densità va quindi misurata direttamente. Se le particelle sono non relativistiche, l'energia di ciascuna di esse coincide con l'energia a riposo, che è costante nel tempo. La densità di energia risulta quindi uguale alla densità di particelle moltiplicata per l'energia a riposo.

Siccome un volume unitario nel sistema comovente varia nel tempo come $a^3(t)$, imponendo la conservazione del numero di barioni, la densità di energia per unità di volume necessariamente avrà un andamento di

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \quad \rho_b = \rho_{b0} a^{-3}$$

Convenzionalmente si definiscono

$$\Omega_b := \frac{\rho_b}{\rho_{cr}} a^3 \quad \Omega_m := \frac{\rho_m}{\rho_{cr}} a^3$$

rispettivamente il rapporto di barioni e quello di materia.

Gli esperimenti danno come risultati $\Omega_b h^2 \simeq 0.02237 \pm 0.00015$ e $\Omega_m h^2 \simeq 0.1430 \pm 0.0011$. [\[1\]](#)

Si ha perciò evidenza del fatto che la densità barionica costituisce solo il 5% della densità critica, mentre quella di materia ne compone il 30%. Queste osservazioni portano forti argomenti a favore dell'ipotesi dell'esistenza di una materia non barionica di cui è formata larga parte della materia totale presente nell'universo, ovverosia la materia oscura.

1.3.4 Energia oscura

Una larga parte di esperienze danno prova del fatto che la densità di energia oggi sia molto vicina a quella critica. Un gran numero di esperimenti sulla curvatura dello spazio dimostrano che l'universo può essere considerato piatto in buona approssimazione. Ciò nonostante, il bilancio di tutte le energie raggiunge solo un terzo di quella critica, i rimanenti due terzi devono necessariamente risalire ad una forma di energia tuttora inesplorata, denominata energia oscura. Data la carenza di informazioni sulla natura di questa energia, la sua dipendenza temporale può essere solamente ipotizzata. La possibilità più studiata è quella di un'energia che rimane costante nel tempo

$$\rho_\Lambda = \Lambda \quad \Omega_\Lambda := \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}}$$

che trova riscontro in molte misure effettuate sulle supernovae in lontananza.

1.4 La soluzione per $a(t)$

Ricavate le dipendenze temporali per tutte le forme di energia di cui l'universo si compone, non rimane che inserirle nell'espressione di ρ nell'equazione [1.2.13](#), ottenendo così un'equazione differenziale al primo ordine in $a(t)$, non lineare, in generale difficile da risolvere. Per semplificare i calcoli, è possibile tuttavia immaginare che in differenti epoche della storia dell'universo una sola delle varie forme di energia portasse un contributo dominante a ρ mentre le altre fossero trascurabili. Di fatti, è facile mostrare che, siccome $\rho_\gamma \propto a^{-4}$, la radiazione costituisce la componente principale dell'energia nell'universo primordiale, per poi decrescere rapidamente, lasciando posto ai termini di materia non relativistica. Venendo verso i tempi odierni, si vede come anche questi ultimi due termini, i quali decrescono come a^{-3} , iniziano ad essere trascurabili, sicché il contributo primario all'espansione dell'universo oggi proviene proprio dall'energia oscura.

Alla luce di queste considerazioni, risolvere l'equazione di Friedmann per un universo piatto diventa particolarmente semplice e risultati che si ottengono per ciascuno dei tre casi sono i seguenti:

$$a(t) = \begin{cases} t^{1/2} & \rho = \rho_{rel} \\ t^{2/3} & \rho = \rho_b + \rho_m \\ e^{\bar{H}t} & \rho = \rho_\Lambda \end{cases}$$

dove \bar{H} è il valore costante del parametro di Hubble.

Per ottenere un'espressione unica per $a(t)$ è possibile raccordare le varie soluzioni agli istanti in cui si ha l'equivalenza tra due forme di energia e infine imponendo la condizione che $a(t_0) = 1$.

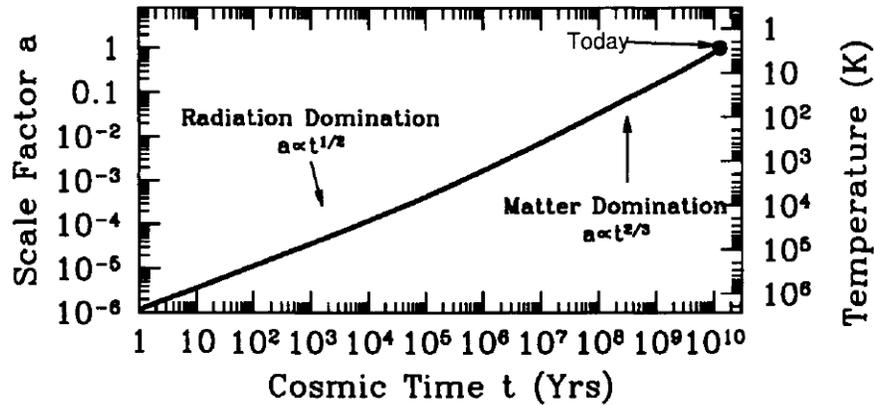


Figura 1.4.1: Evoluzione del fattore di scala nel tempo.

Si noti che la soluzione mostrata, comunque si restringe ad un modello in cui l'universo è piatto. Nel tempo i cosmologi sono stati portati a riconsiderare questa ipotesi, costruendo modelli in cui lo spazio potesse essere alternativamente o aperto o chiuso, lasciando variare i parametri cosmologici Ω_m e Ω_Λ e ottenendo degli andamenti per $a(t)$ che possono differire sensibilmente da quello appena ottenuto. In alcuni di essi il parametro di scala può persino presentare un massimo per poi decrescere nuovamente verso lo zero, aprendo ad uno scenario in cui l'universo possa ricollassare (Big Crunch). [7]

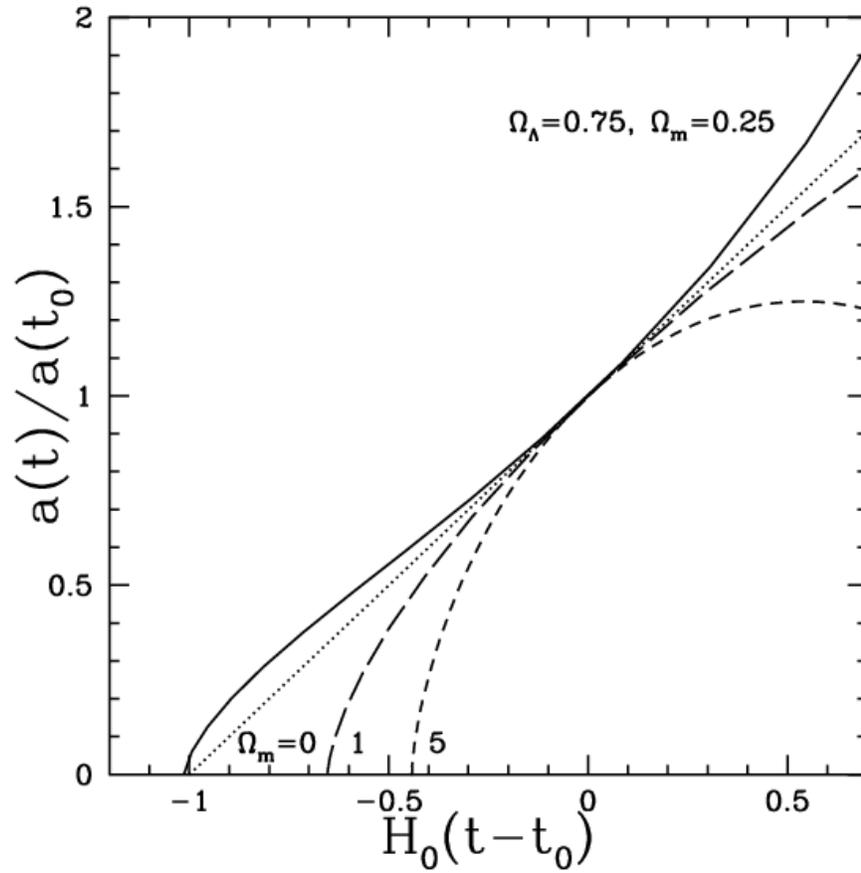


Figura 1.4.2: Evoluzione del fattore di scala in dipendenza dei parametri cosmologici. t_0 rappresenta l'età dell'universo.

Capitolo 2

LA NUCLEOSINTESI PRIMORDIALE

La teoria del Big Bang fornisce previsioni quantitative per un'ampia varietà di fenomeni che possono essere confermate sperimentalmente, tra cui la radiazione cosmica di fondo, la simmetria tra materia e antimateria, la formazione di corpi celesti di grandi dimensioni e la produzione dei nuclei leggeri e, conseguentemente, di tutti gli elementi presenti in natura. Il modello delineato nella prima parte consente di comprendere la struttura dell'universo, risalendo fino ai primi istanti della sua esistenza.

L'universo primordiale, avendo un fattore di scala sensibilmente minore, era molto più caldo e denso di come lo vediamo oggi: la temperatura dei fotoni attualmente si aggira attorno i 3K e le distanze tra i corpi nello spazio sono tali che un fotone possa viaggiare anche una distanza di $10^{28}cm$ senza interagire. Al contrario, quando l'età dell'universo era di appena 1 secondo, la temperatura valeva 10 miliardi di kelvin ed il cammino libero medio di un fotone era delle dimensioni di un atomo. Di conseguenza, l'elevato tasso di interazioni rendeva possibile il raggiungimento delle condizioni di equilibrio delle varie reazioni che avvenivano. Nonostante ciò, vi era la possibilità che in determinati istanti il tasso di espansione dell'universo (Hubble rate) potesse superare quello di interazioni, cosicché le condizioni di equilibrio non fossero più soddisfatte. A partire da questi istanti, la dinamica delle reazioni cambiava sensibilmente, come del resto cambiano le equazioni che le descrivono, e nuovi processi avevano luogo. Si vedrà in seguito che questo sovvertimento dell'equilibrio ha giocato un ruolo fondamentale nella formazione dei primi nuclei e degli elementi leggeri della materia.

2.1 L'equazione di Boltzmann

Quando le trasformazioni che subisce un sistema fisico raggiungono l'equilibrio, la descrizione del suo stato e delle varie osservabili che lo caratterizzano diventa particolarmente semplice. Si può scegliere di fare uso sia della termodinamica che della meccanica statistica a seconda che si voglia adottare un punto di vista rispettivamente macroscopico o microscopico. In aggiunta, i principi della termodinamica possono essere interamente desunti dalla meccanica statistica, per cui i due approcci conducono necessariamente agli stessi risultati. D'altro canto, quando le condizioni che garantiscono raggiungimento dell'equilibrio non sono soddisfatte, ci si vede costretti ad abbandonare completamente questi metodi, per giunta in questi casi perdono anche di senso le definizioni di molte variabili fondamentali come la temperatura o la pressione. Lo strumento che si può utilizzare al loro posto per descrivere l'evoluzione del sistema è la teoria cinetica. Questa si pone come obiettivo trovare la dipendenza temporale della funzione di distribuzione delle particelle (analoghe alla Fermi-Dirac e alla Bose-Einstein) come soluzione di un'equazione integro-differenziale nota come equazione di Boltzmann. Risolvere un problema integro-differenziale può essere piuttosto complicato, tuttavia se si adottano opportune semplificazioni è possibile ottenere una descrizione sufficientemente accurata senza ricorrere ad una matematica eccessivamente complessa.

Si consideri la funzione distribuzione $f(x^\mu, P^\mu)$ di una specie nello spazio delle fasi, dove P^μ è il quadrivettore impulso. L'idea alla base dell'equazione di Boltzmann è che, in assenza di interazioni, la distribuzione deve rimanere costante sul moto delle particelle, ossia sulle geodetiche. Formalmente [\[5\]](#)

$$\hat{\mathcal{L}}(f) := \frac{d}{d\lambda} f(x^\mu(\lambda), P^\mu(\lambda)) = 0 \quad (2.1.1)$$

esplicitando le derivate e usando l'equazione [1.2.9](#) si ha

$$\hat{\mathcal{L}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\nu} \frac{dP^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} P^\mu - \frac{\partial f}{\partial P^\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu P^\alpha P^\beta = 0 \quad (2.1.2)$$

Nella metrica FRW, l'omogeneità e l'isotropia comportano che la distribuzione possa dipendere solo dal tempo e dall'energia ($f = f(E, t)$). Esplicitando allora i simboli di Christoffel e le componenti di $P = (E, p)$, si

ottiene

$$P^0 \frac{\partial f}{\partial x^0} - \Gamma_{ii}^0 P^i P^i \frac{\partial f}{\partial P^0} = E \frac{\partial f}{\partial t} - a \dot{a} P^i P^i \frac{\partial f}{\partial E} = E \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 H P^i P^i \frac{\partial f}{\partial E} = 0 \quad (2.1.3)$$

Usando la definizione dell'impulso fisico $p^i = aP^i$ l'espressione diventa

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - p^2 H \frac{\partial f}{\partial E} = 0 \quad (2.1.4)$$

Cambiando variabile nella seconda derivata da E in p e ricordando che $\partial p / \partial E = E/p$

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - p^2 H \frac{E}{p} \frac{\partial f}{\partial p} = E \left(\frac{\partial f}{\partial t} - p H \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0 \quad (2.1.5)$$

L'intento è ora di generalizzare l'equazione [2.1.1](#) al caso in cui le particelle collidano tra loro. In questo caso al secondo membro dovrà apparire un termine che tenga conto della variazione della densità di particelle a causa dei processi a cui le collisioni danno luogo. L'equazione allora diventa [\[6, 5\]](#)

$$\frac{1}{E} \hat{\mathcal{L}}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} - p H \frac{\partial f}{\partial p} = \mathbf{C}(f; f_i) \quad (2.1.6)$$

dove con f_i si intendono le distribuzioni di tutte le altre specie che interagiscono con quella che si sta calcolando. Il secondo membro viene denominato integrale di collisione ed è dato dalla somma dei rate di tutti i processi che producono le particelle di interesse meno i rate di tutti i processi in cui queste vengono distrutte. In linea di principio, bisogna considerare equazioni analoghe per ognuna delle specie coinvolte, dunque il problema più generale è quello di un sistema di equazioni integro-differenziali accoppiate.

Le interazioni che verranno analizzate nel seguito sono tutte caratterizzate da processi in cui particelle di due specie differenti reagiscono creando coppie di particelle diverse ($1+2 \leftrightarrow 3+4$). L'integrale di collisione associato a questo tipo di sistemi prende la seguente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(f_1; f_2, f_3, f_4) &= \\ &= \frac{1}{E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\ &\times [|\mathcal{M}_{34,12}|^2 f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - |\mathcal{M}_{12,34}|^2 f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \quad (2.1.7) \end{aligned}$$

Qui si rende necessario descrivere i vari termini: la delta di Dirac impone la conservazione dell'energia e del momento; con $\mathcal{M}_{34,12}$ e $\mathcal{M}_{12,34}$ si denotano le ampiezze dei processi $1+2\leftarrow 3+4$ e $1+2\rightarrow 3+4$ rispettivamente e sono determinate dalla fisica fondamentale (ad esempio, se il processo in questione fosse uno scattering Compton di elettroni da fotoni, le due $|\mathcal{M}|^2$ sarebbero proporzionali alla costante di struttura fine); l'ultima riga esprime il fatto che il rateo di produzione della specie 1 è favorita dal numero di occupazione delle specie 3 e 4, ma sfavorita dalla presenza delle stesse specie 1 e 2; infine, i fattori $(1 \pm f)$ (+ per i bosoni e $-$ per i fermioni) sono dovuti agli effetti di Bose enhancement e Pauli blocking per cui, a causa della limitazione per i numeri di occupazione per i fermioni, la produzione di una particella della specie 1, in presenza di un'altra già precedentemente formata, è favorita o sfavorita a seconda che questa sia un bosone o un fermione. Nei casi di interesse, le ampiezze dei processi diretti e inversi sono coincidenti e possono essere messe in evidenza.

Per ottenere una forma più congeniale dell'equazione di Boltzmann, si integra ad ambo i membri la [2.1.6](#). Iniziando dal primo membro

$$g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \hat{\mathcal{L}}(f_1) = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial f}{\partial t} - pH \frac{\partial f}{\partial p} \right] \quad (2.1.8)$$

dove g è la degenerazione di spin. Si richiama ora la definizione di densità numerica

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f \quad \Longrightarrow \quad \dot{n} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

Il primo termine dell'integrale restituisce proprio \dot{n} , mentre il secondo può essere integrato per parti, assumendo che la f decresca all'infinito più velocemente di qualunque potenza di p :

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p p \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^{+\infty} dp p^3 \frac{\partial f}{\partial p} = \\ &= -3 \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^{+\infty} dp p^2 f = -3 \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f = -3n \end{aligned}$$

L'espressione [2.1.8](#) diventa quindi

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = a^{-3} \frac{d}{dt} (n_1 a^3) = g_1 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{C}(f_1; f_2, f_3, f_4) \quad (2.1.10)$$

dove si è esplicitato che l'equazione di Boltzmann è riferita alla specie 1. A questo punto si integra anche l'integrale di collisione

$$\begin{aligned}
 g_1 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{C} &= \\
 &= \int \prod_{i=1}^4 \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\
 &\quad \times |\mathcal{M}|^2 [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \quad (2.1.11)
 \end{aligned}$$

L'equazione [2.1.10](#) è la forma finale per l'equazione di Boltzmann, che si intende risolvere. Nelle applicazioni che verranno trattate, la maggior parte delle difficoltà matematiche del problema verranno superate tramite alcune considerazioni. La prima semplificazione viene dal fatto che tipicamente i processi di scattering avvengono in equilibrio cinetico, ossia le distribuzioni delle varie specie prendono la forma delle distribuzioni Fermi-Dirac e Bose Einstein. Ciò riduce la risoluzione dell'equazione integro-differenziale in un'equazione differenziale alle derivate ordinarie in μ . In più, per temperature più piccole di $E - \mu$, gli esponenziali nelle due distribuzioni sono grandi e consentono di trascurare i termini ± 1 ai denominatori. [2](#) Per questo motivo è possibile inserire nell'equazione [2.1.10](#) distribuzioni del tipo

$$f = e^{\mu/T} e^{-E/t}$$

e i termini associati agli effetti Bose enhancement e Pauli blocking sono piccoli, cosicché l'ultima riga dell'integrale di collisione diventa

$$f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) = e^{-(E_1+E_2)/T} [e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T}] \quad (2.1.12)$$

Richiamando la definizione di densità numerica

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{\mu_i/T} \int d^3 p e^{-E_i/T}$$

e introducendo quella di densità numerica all'equilibrio

$$n_i^{(0)} := \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-E_i/T} \quad (2.1.13)$$

si può riscrivere $e^{\mu_i/T}$ come $n_i/n_i^{(0)}$ e l'espressione [2.1.12](#), diventa

$$e^{-(E_1+E_2)/T} \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right] \quad (2.1.14)$$

Se si definisce la sezione d'urto mediata nel seguente modo

$$\langle \sigma |v\rangle := \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \prod_{i=1}^4 \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2$$

L'equazione di Boltzmann si scrive

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_1 a^3) = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma |v\rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right] \quad (2.1.15)$$

Questa è un'equazione differenziale nelle varie densità numeriche, molto più semplice da trattare rispetto alla [2.1.10](#). I vari parametri variano a seconda dell'applicazione considerata, tuttavia è possibile fare una considerazione generale nel caso si tratti di sistemi all'equilibrio chimico. Data la definizione di sezione d'urto, discende immediatamente la definizione di rate di interazione [5](#)

$$\Gamma_a = \langle \sigma |v\rangle n_2^{(0)}$$

Si è già detto che quando questo valore è elevato (maggiore di H) la specie in questione è in equilibrio, ossia il primo membro nella [2.1.15](#) è nullo (la densità varia come a^{-3}). Per far sì che ciò avvenga è necessario che il termine tra parentesi quadre al membro di destra deve annullarsi, ovvero

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \quad (2.1.16)$$

Questa legge è nota come legge del bilancio dettagliato o equazione di Saha e sarà utile nel calcolo delle abbondanze delle varie specie fin quando l'equilibrio è mantenuto.

2.2 I processi di nucleosintesi

L'obiettivo di questa sezione è quello di tracciare i processi che i barioni hanno subito nell'universo primordiale, fino alla formazione dei primi nuclei. In particolar modo, come si mostrerà a breve, l'istante a partire dal quale ha senso studiare la nucleosintesi è quello in cui la temperatura dell'universo è dell'ordine del MeV. In questa fase, il plasma che compone il cosmo consiste principalmente di: [2](#)

- **Particelle relativistiche**, ossia fotoni, elettroni e positroni. Questi sono costantemente in interazione elettromagnetica ($e^+e^- \leftrightarrow \gamma \gamma$), di conseguenza, vengono mantenuti in equilibrio.
- **Neutrini disaccoppiati**. Questi interagiscono con gli elettroni solo tramite interazione debole, principalmente in processi come $\nu e \leftrightarrow \nu e$, i quali hanno un rate che a temperature di 1MeV scendono al di sotto del rate di espansione. Per questa ragione i neutrini presenti nel plasma cosmico sono sostanzialmente disaccoppiati.
- **Particelle non relativistiche: barioni e antibarioni**. Su questi si spenderà l'intera sezione. Per cominciare, bisogna precisare che, affinché un qualsiasi processo nucleare possa avvenire, è necessario che non tutti i barioni interagiscano con le corrispettive antiparticelle: se non ci fosse stata asimmetria tra materia e antimateria tutte le particelle avrebbero subito annichilazione prima ancora che la temperatura potesse scendere al di sotto del MeV. È noto, al contrario, che tale asimmetria era presente sin dall'inizio $(n_b - n_{\bar{b}})/s \simeq 10^{-10}$. La quantità di antibarioni presente nell'universo primordiale è irrisoria, dunque è possibile definire il rapporto tra barioni e fotoni

$$\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma}$$

che, per quanto appena detto, a partire dal termine della fase di annichilazione, rimane costante. Questo rapporto rappresenta, quindi, una quantità molto utile per verificare il modello cosmologico e le osservazioni convergono ad un valore di $\eta_b \simeq 6 \times 10^{-10}$.

Se i barioni fossero stati in equilibrio durante tutto il processo di nucleosintesi, sarebbe possibile determinare la configurazione finale tramite il solo calcolo dell'energia. I vari nuclei prodotti avrebbero allora subito una serie di fusioni e/o decadimenti, fino a raggiungere uno stato che minimizzasse l'energia di legame tra nucleoni. Esiste oggi un modello semiempirico che quantifica tale energia per tutti gli elementi della tavola periodica e, in accordo con gli esperimenti, l'elemento più stabile di tutti è il ferro. Di conseguenza, se il sistema fosse stato in equilibrio, la materia presente nell'universo si sarebbe convertita quasi interamente in ferro. Tuttavia, le reazioni nucleari hanno un rate che dipende da una potenza della densità ed escono dall'equilibrio man mano che la temperatura scende, quindi per poter calcolare le abbondanze dei vari

elementi bisogna, in linea di principio, risolvere un sistema di equazioni differenziali del tipo dell'equazione [2.1.15](#) accoppiate, per ciascun nucleo. Per superare questa necessità, è possibile fare uso di due semplificazioni. [\[2\]](#) La prima consiste nel fatto che l'elevata barriera coulombiana per gli elementi più pesanti rende difficile la loro formazione nell'universo primordiale, inoltre la bassa densità barionica rende improbabile la produzione di elementi che nascono da reazioni a tre corpi. Ne è un esempio, il carbonio, che viene prodotto principalmente tramite la reazione ${}^4\text{He}+{}^4\text{He}+{}^4\text{He}\rightarrow{}^{14}\text{C}$, il quale può formarsi nelle stelle, ma non nell'universo primordiale, a causa della scarsa densità dell'elio. Ci si aspetta, quindi, che i prodotti della nucleosintesi siano l'idrogeno, l'elio e i loro isotopi (deuterio, e ${}^3\text{He}$). La seconda semplificazione si basa sul fatto che, a temperature dell'ordine del MeV, anche se l'energia è scesa al di sotto di quella di legame per nucleone, vi è ancora una buona probabilità che un fotone energetico, appartenente alla coda della distribuzione, distrugga un nucleo appena formato. Per questa ragione, si considera l'universo primordiale privo di nuclei leggeri, almeno fino a quando la temperatura non raggiunge i 0.1 MeV.

Il procedimento che si seguirà sarà perciò analogo alla successione cronologica degli eventi: si risolverà l'equazione [2.1.15](#) per il rapporto neutroni-protoni e si userà l'abbondanza ottenuta per la sintesi del deuterio e dell'elio.

2.2.1 L'abbondanza di neutroni

Protoni e neutroni possono seguire i seguenti processi [\[4\]](#), [\[2\]](#)

$$p + e^- \longleftrightarrow n + \nu$$

$$p + \bar{\nu} \longleftrightarrow n + e^+$$

$$n \longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

i quali avvengono tutti per interazioni deboli. Si vedrà a breve che queste reazioni mantengono i nucleoni in equilibrio chimico fino a temperature $T \simeq 1 \text{ MeV}$. Dalla definizione di densità all'equilibrio [2.1.13](#) si ha nel limite non relativistico ($E = m + p^2/2m$):

$$\frac{n_p^{(0)}}{n_n^{(0)}} = \frac{e^{-m_p/T} \int dp p^2 e^{-p^2/2m_p T}}{e^{-m_n/T} \int dp p^2 e^{-p^2/2m_n T}} = e^{Q/T} \left(\frac{m_p}{m_n} \right)^{3/2} \simeq e^{Q/T}$$

dove $Q = (m_n - m_p)$ e si è approssimato il rapporto tra le masse all'unità. Dunque ad alte temperature neutroni e protoni si equivalgono e, man mano che la temperatura scende, i protoni prevalgono. Se le interazioni deboli fossero state abbastanza intense da mantenere l'equilibrio indefinitamente, i neutroni sarebbero scomparsi totalmente. Bisogna allora studiare cosa avviene alla rottura dell'equilibrio. Si definisce il rapporto di neutroni sui nucleoni totali

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{1}{1 + (n_p/n_n)}$$

ed il suo corrispettivo all'equilibrio

$$X_n^{(0)} = \frac{n_n^{(0)}}{n_n^{(0)} + n_p^{(0)}} = \frac{1}{1 + (n_p^{(0)}/n_n^{(0)})}$$

Si inizia dall'equazione [2.1.15](#) dove l'indice 1 è associato ai neutroni, il 3 ai protoni e il 2 e il 4 ai leptoni. I leptoni sono in equilibrio, per cui ($n_l = n_l^{(0)}$), si ha quindi

$$a^{-3} \frac{d}{dt} (n_n a^3) = n_l^{(0)} \langle \sigma |v| \rangle \left[\frac{n_p n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} - n_n \right]$$

Qui $\frac{n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} = e^{-Q/T}$, si definisce il rate della conversione di neutroni in protoni $\lambda_{np} = n_l^{(0)} \langle \sigma |v| \rangle$ e si riscrive $n_n = (n_n + n_p) X_n$. A questo punto il fattore $(n_n + n_p) a^{-3}$ è costante e può essere portato fuori dalla derivata. Si perviene all'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} X_n = \lambda_{np} [(1 - X_n) e^{-Q/T} - X_n] \quad (2.2.1)$$

Siccome le quantità T e λ_{np} dipendono a loro volta dal tempo, è preferibile definire la variabile

$$x = \frac{Q}{T}$$

si calcola

$$\frac{dX_n}{dt} = \dot{x} \frac{dX_n}{dx} = -\frac{\dot{T}}{T} x \frac{dX_n}{dt}$$

ricordando che $T \propto a^{-1}$ e l'equazione [1.2.12](#)

$$\frac{\dot{T}}{T} = a \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = -H = -\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho}$$

La nucleosintesi avviene nell'epoca dominata dalla radiazione, per cui si calcola il contributo all'energia sommando su tutte le particelle relativistiche

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} T^4 \left[\sum_{i=bosoni} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=fermioni} g_i \right] = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4$$

dove g_* rappresenta la somma dei gradi di libertà per tutte le particelle presenti ($g = 2$ per fotoni, elettroni e positroni e $g = 6$ per i neutrini) e vale $g_* \simeq 10.75$. Volendo essere precisi, g_* è a sua volta una funzione del tempo, siccome le coppie elettrone positrone vanno consumandosi nel tempo per via dell'annichilazione, tuttavia nell'intervallo temporale che racchiude i processi dei nucleoni può considerarsi costante. Infine, l'ultimo dato fondamentale è il tasso di conversione λ_{np} , che può essere calcolato nell'approssimazione non relativistica

$$\begin{aligned} \lambda_{np} &= n_{\nu_e}^{(0)} \langle \sigma |v| \rangle = \frac{\pi}{4m^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p} e^{-p/T} \times \\ &\times \int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2p_e} \delta(Q + p_\nu - p_e) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

Tipicamente $|\mathcal{M}|^2$ viene espresso in termini della vita media del neutrone $\tau_n = 886.7 \text{sec}$, in questa maniera il rate risulta

$$\lambda_{np} = \frac{255}{\tau_n x^5} (12 + 6x + x^2)$$

Dunque, l'equazione [2.2.1](#) diventa

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{x \lambda_{np}}{H} [e^{-x} - X_n (e^{-x} + 1)] \quad (2.2.2)$$

che può essere integrata numericamente, ottenendo il risultato mostrato nella figura [2.2.1](#). Si nota innanzitutto che, all'istante in cui $T = Q$ (ossia $x = 1$), l'Hubble rate vale

$$H(x = 1) = \sqrt{\frac{4\pi^3 G Q^4}{45} g_*} = 1.13 \text{sec}^{-1}$$

mentre

$$\lambda_{np} \simeq 5.5 \text{sec}^{-1}$$

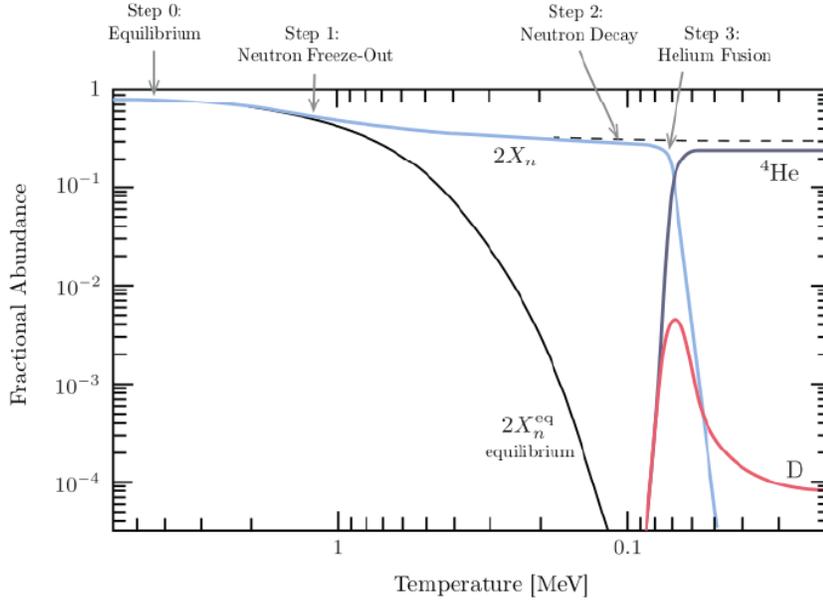


Figura 2.2.1: Evoluzione dell'abbondanza degli elementi leggeri. La curva tratteggiata è il risultato dell'integrazione numerica della [2.2.2](#), le curve colorate sono le soluzioni esatte (tenuto conto della massa finita dell'elettrone e della dipendenza di g_* dal tempo). Infine la curva sottile continua rappresenta l'abbondanza dei neutroni, se questi fossero indefinitamente in equilibrio.

decisamente maggiore del rate di espansione. Si vede dal grafico che l'abbondanza dei neutroni si allontana dall'equilibrio alla temperatura di circa 1 MeV per poi arrestarsi al valore 0.15 dal momento in cui la temperatura scende al di sotto di 0.5 MeV. Alla temperatura di 0.1 MeV, entra in gioco il processo di decadimento dei neutroni liberi ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$). Per tenere conto di questo effetto è sufficiente aggiungere a mano un fattore e^{-t/τ_n} alla funzione tratteggiata nella figura [2.2.1](#).

Si vedrà a breve che alla temperatura di circa 0.07 MeV hanno inizio i processi che legano i nucleoni tra loro. [6](#) Sostituendo la densità appena calcolata nell'equazione [1.2.12](#) e sostituendo H^2 con $(\dot{T}/T)^2$ si ottiene

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = kT^4$$

con $k = 8\pi^3 G g_*/90$. Separando le variabili e integrando si perviene alla relazione che lega il tempo alla temperatura

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{1}{T^2}$$

Sostituendo questa espressione nell'esponentiale del decadimento dei neutroni, è possibile calcolare la frazione di neutroni ancora non decaduti alla temperatura di 0.07 MeV

$$X_{n,dec} = \exp \left\{ - (132/886.7) (0.1/0.07)^2 \right\} = 0.74$$

dunque l'abbondanza netta di neutroni all'istante della nucleosintesi è di

$$X_n(T = 0.07 \text{ MeV}) = 0.74 \times 0.15 = 0.11$$

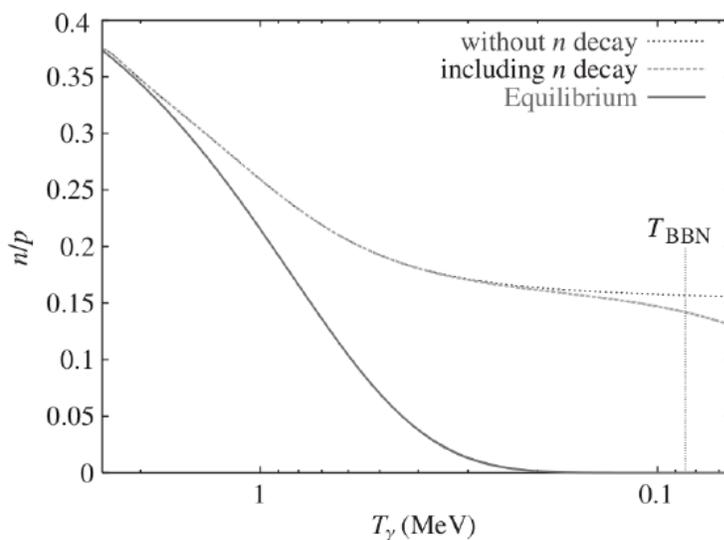


Figura 2.2.2: L'abbondanza di neutroni, con le varie correzioni, a temperature dell'ordine del MeV

2.2.2 La produzione del deuterio

Si è detto in precedenza che, a causa dei fotoni energetici residui, la presenza di nuclei leggeri è irrisoria fintantoché la temperatura non decresce a valori

dell'ordine dei 0.01 MeV. È possibile mostrare questo formalmente utilizzando l'equazione di Saha per la reazione di produzione del deuterio: $n+p \longleftrightarrow D+\gamma$

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{n_D^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}}$$

(avendo posto $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$). Le densità a destra possono essere calcolate sempre nel limite non relativistico

$$n_i^{(0)} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{-m_i/T} \int d^3 p e^{-p^2/2m_i T} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_i/T}$$

dove neutrone e protone hanno degenerazione 2 e il deuterio 3, l'equazione restituisce allora

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi m_D}{m_p m_n T} \right)^{3/2} e^{(m_n + m_p - m_D)/T}$$

In questa equazione si può approssimare $m_D = 2m_p = 2m_n$ nel fattore, ma nell'esponentiale si riconosce l'energia di legame del 2H che vale 2.22 MeV

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi}{m_p T} \right)^{3/2} e^{B_D/T}$$

Si vede immediatamente che, come ci si aspettava, a temperature elevate (fino anche a valori dell'ordine di B_D) la densità del deuterio è trascurabile. La produzione di 2H diventa significativa solo quando il processo di dissociazione da fotoni energetici perde di forza. Tenendo conto che se i barioni fossero stati in equilibrio tutti i neutroni e i protoni si sarebbero legati a formare il deuterio, è possibile ricavare la temperatura a partire dalla quale i primi nuclei leggeri si sono formati imponendo che la frazione di deuterio sia dell'ordine della densità barionica:[\[6\]](#)

$$e^{B_D/T_{nuc}} \eta_b = 1 \quad \implies \quad T_{nuc} \simeq 0.07 MeV \quad (2.2.3)$$

Con T_{nuc} si fa quindi riferimento alla temperatura alla quale la nucleosintesi primordiale ha avuto inizio. Una buona approssimazione è quella in cui la produzione degli elementi più leggeri sia avvenuta istantaneamente a tale temperatura.

2.2.3 Le abbondanze di elementi leggeri

All'istante dell'avvio della nucleosintesi, l'aumento della popolazione di deuterio induce l'innescio di una serie di reazioni nucleari che porta alla formazione di nuclei più pesanti. Siccome l'elio ha l'energia di legame per nucleone maggiore tra gli elementi leggeri, l'esponenziale $e^{B/T}$ per l'elio prevale e rapidamente quasi tutto il deuterio prodotto si fonde in ${}^4\text{He}$. La sua abbondanza è il principale risultato della nucleosintesi primordiale e può essere stimata in maniera intuitiva ma comunque accurata tramite semplici argomenti. La figura [2.2.1](#) mostra che l'elio viene prodotto quasi immediatamente dopo la formazione del deuterio, una buona approssimazione è che tutta la popolazione di neutroni a $T = T_{nuc}$ si lega a formare ${}^4\text{He}$. Siccome ogni atomo di elio-4 contiene 2 neutroni, l'abbondanza di ${}^4\text{He}$ equivale alla metà di quella dei neutroni. Spesso questa quantità viene espressa in termini di rapporto di massa

$$\begin{aligned} Y_p := X_{{}^4\text{He}} &= \frac{A_{{}^4\text{He}} n_{{}^4\text{He}}}{n_b} = \frac{4n_{{}^4\text{He}}}{n_p + n_n} = \frac{2}{1 + \frac{n_p}{n_n}} = \\ &= \frac{2}{1 + e^{\frac{Q}{T_{nuc}}} e^{-\frac{t(T_{nuc})}{\tau_n}}} \simeq 0.25 \simeq 2X_n(T_{nuc}) \end{aligned}$$

Una stima più precisa delle abbondanze primordiali del ${}^4\text{He}$ e più in generale degli altri elementi leggeri richiede la risoluzione di un sistema di equazioni cinetiche accoppiate abbinato alla conservazione del numero barionico e della carica (si ipotizza che l'universo sia globalmente neutro). La tabella [2.2.1](#) riporta l'insieme dei nuclidi tipicamente considerati nella nucleosintesi primordiale.

Considerando allora N nuclidi, ciascuno con densità n_i normalizzata rispetto alla densità barionica totale

$$X_i = \frac{n_i}{n_b}$$

la loro abbondanza viene normalmente espressa rispetto a quella dell'idrogeno

$$\frac{{}^2\text{H}}{\text{H}} = \frac{X_{{}^2\text{H}}}{X_p}, \quad \frac{{}^3\text{He}}{\text{H}} = \frac{X_{{}^3\text{He}}}{X_p}, \quad \frac{{}^7\text{Li}}{\text{H}} = \frac{X_{{}^7\text{Li}}}{X_p}$$

Con queste definizioni le equazioni che determinano l'evoluzione delle varie quantità sono [5](#)

$$\frac{\dot{n}_b}{n_b} = -3H \tag{2.2.4}$$

		$A - Z$							
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		n							
1	H	^2H	^3H						
2		^3He	^4He						
3				^6Li	^7Li	^8Li			
4				^7Be		^9Be			
5				^8B		^{10}B	^{11}B	^{12}B	
6						^{11}C	^{12}C	^{13}C	^{14}C
7						^{12}N	^{13}N	^{14}N	^{15}N
8							^{14}O	^{15}O	^{16}O

Tabella 2.2.1: Elementi la cui abbondanza viene tracciata nella nucleosintesi primordiale

$$\dot{X}_i = \sum_{j,k,l} N_i \left(\Gamma_{kl \rightarrow ij} \frac{X_k^{N_k} X_l^{N_l}}{N_k! N_l!} - \Gamma_{ij \rightarrow kl} \frac{X_i^{N_i} X_j^{N_j}}{N_i! N_j!} \right) \quad (2.2.5)$$

$$n_b \sum_j Z_j X_j = n_{e^-} - n_{e^+} \quad (2.2.6)$$

L'equazione [2.2.4](#) esprime la conservazione del numero barionico per volume comovente, le N equazioni [2.2.5](#) sono le equazioni cinetiche che esprimono l'evoluzione di ogni specie ed infine la [2.2.6](#), con Z_j carica del j -esimo nuclide, impone la neutralità dell'universo.

Risolvere analiticamente un tale sistema è improponibile, esistono perciò vari codici numerici che sono in grado di ottenere le varie evoluzioni. Si può vedere dalla figura che la produzione del deuterio dà inizio alla formazione di tutti gli altri nuclei: l'interazione tra deuterio e i nucleoni ha come risultati i nuclei ^3H , ^3He e ^4He ; il ^7Li viene prodotto tramite il trizio oppure per via della cattura elettronica del ^7Be . L'abbondanza di ciascuno di questi nuclidi ha una rapida salita iniziale per poi raggiungere un valore costante (freeze-out) una volta che la temperatura è scesa alla decina di KeV.

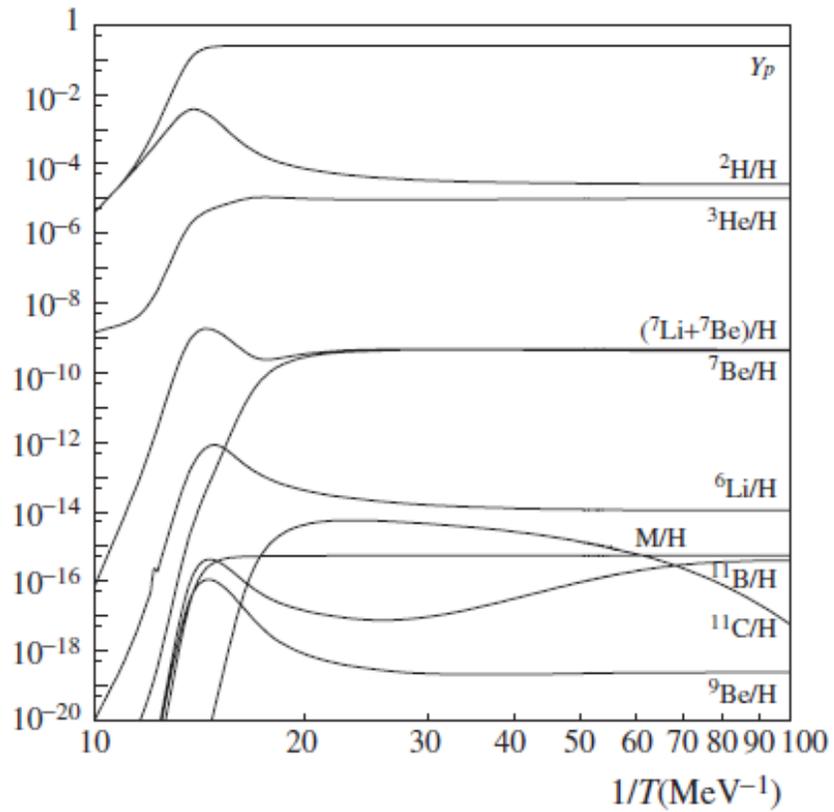


Figura 2.2.3: Evoluzione delle abbondanze degli elementi leggeri. La linea M/H si riferisce all'abbondanza dei metalli ($Z > 4$) come C, N e O. [4, 5]

2.3 Evidenze sperimentali

Come si è visto nella sezione precedente, tutti gli elementi leggeri vengono prodotti e raggiungono la loro abbondanza finale entro i primi 3 minuti dal Big Bang. Naturalmente, osservare direttamente queste quantità risalenti ad epoche così lontane è fuori dalle possibilità sperimentali. Per questo motivo si ricercano siti nei quali tali abbondanze siano il più vicine possibili a quelle primordiali.

Il deuterio prodotto nella nucleosintesi primordiale viene bruciato nelle stelle^[3]. Pertanto, è possibile misurare la frazione di deuterio nelle stelle più distanti, dove i processi chimici sono ancora all'inizio e i valori ottenuti costituiscono un limite inferiore alla frazione D/H. Tuttavia questo tipo di rilevazione restituisce un numero molto esiguo di misure. Una seconda fonte per le misure del deuterio sono le linee spettrali della luce proveniente da quasar ad alto redshift ($z = 1 \div 4$). L'idea alla base di ciò è che la luce emessa da oggetti distanti molto luminosi debba attraversare nel suo percorso verso la Terra vaste regioni intergalattiche in cui possono essere presenti residui di materia (principalmente idrogeno) che non ha subito alcun riprocessamento e che dunque può essere considerata pressoché inalterata dalla materia primordiale. I telescopi devono quindi osservare una depressione nello spettro misurato in corrispondenza delle linee di assorbimento dell'idrogeno e del deuterio, opportunamente redshiftate. Le linee del deuterio sono smorzate di meno a causa della sua esigua abbondanza e dunque il rapporto tra queste intensità rappresenta proprio la frazione di deuterio presente in tali regioni. Gli esperimenti più precisi forniscono un valore di ^[3]

$$D/H = (25.47 \pm 0.25) \times 10^{-6}$$

Le abbondanze di ${}^4\text{He}$ sono determinate tramite la ricombinazione delle linee di assorbimento di elio e idrogeno nelle regioni HII, regioni (nebulose) intergalattiche in cui l'idrogeno viene ionizzato dalla radiazione proveniente dalle stelle giovani, in cui è presente la minor quantità possibile di metalli. Queste osservazioni mostrano che l'abbondanza di elio nelle stelle è correlata alla loro metallicità (in altri termini, alla loro età), per cui l'estrapolazione a metallicità zero fornisce una stima per l'abbondanza primordiale di elio Y_p

^[3]

$$Y_p = 0.245 \pm 0.003$$

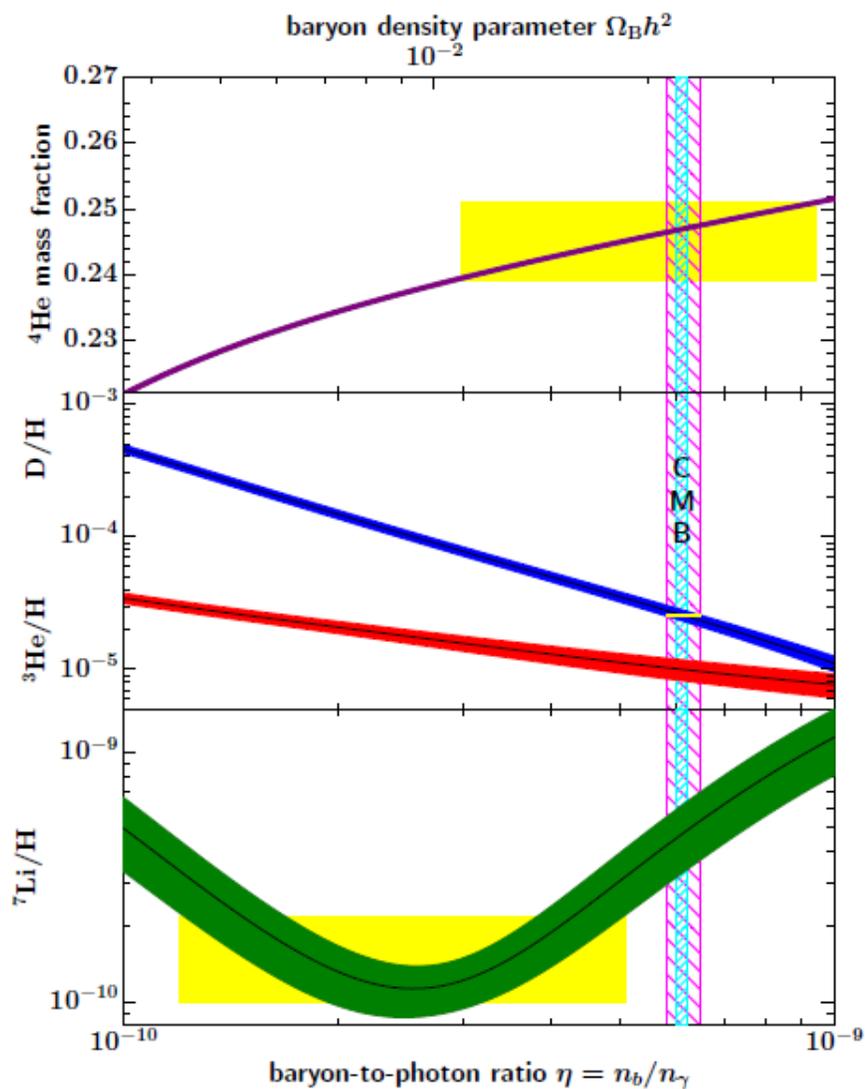


Figura 2.3.1: Abbondanze primordiali di ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$ come previste dalla nucleosintesi primordiale. I riquadri in giallo rappresentano i valori osservati. La fascia verticale sottile rappresenta la misura della densità barionica tramite il CMB e quella più larga il suo valore aspettato come somma $D + {}^4\text{He}$.

CONCLUSIONI

La nucleosintesi primordiale offre un utilissimo risvolto fenomenologico per la fisica dei Modelli Standard, Cosmologico e delle Particelle, siccome racchiude conoscenze provenienti da un ampio spettro di teorie. In aggiunta a ciò, questa restituisce delle previsioni quantitative su numerosi aspetti sperimentali osservabili con enorme precisione. Questo lavoro di tesi è stato dedicato allo studio della produzione del deuterio e dell'elio nei primi minuti dal Big Bang, fornendo delle stime sull'abbondanza di questi elementi nell'universo primordiale, quantità che possono essere misurate oggi con precisione elevata. Per questa ragione, anche un piccolo scostamento dai valori teorici di queste grandezze costituisce un potenziale punto di partenza per una nuova fisica. I risultati odierni delle misure sulle abbondanze calcolate in questo lavoro sono in perfetto accordo con i valori aspettati, ciò costituisce un fortissimo argomento a sostegno del modello del *hot Big Bang*.

Esistono, tuttavia, degli aspetti, risalenti sino alle primissime assunzioni su cui si regge la teoria presentata, che risultano ancora problematici. Il primo è l'evidenza, proveniente dall'osservazione sulla rotazione delle galassie, della presenza di materia in forma non barionica, la materia oscura. La natura della materia oscura è ancora sconosciuta, l'idea più diffusa è che consista di particelle elementari molto massive prodotte nei primi istanti dell'universo, quando la temperatura era dell'ordine delle centinaia di GeV.

Il secondo problema sorge nello studio della distribuzione della materia nell'universo. Già nell'esperienza quotidiana su piccole scale si possono vedere delle disuniformità della materia costituite semplicemente dalle formazioni planetarie e stellari ed in generale da tutte le forme collassate della materia. In aggiunta a ciò, dalle indagini su grandi distanze (redshifts) condotte negli ultimi anni si evince chiaramente che anche su grandi scale l'universo ha una struttura ben precisa e la materia non è distribuita nello spazio in maniera casuale. All'inizio della trattazione di questo lavoro si è posto molto l'accen-

to sull'ipotesi di omogeneità dello spazio, che come conseguenza immediata ha che l'universo si sarebbe dovuto evolvere in maniera omogenea, contro le osservazioni appena menzionate. È evidente allora che delle disomogeneità erano presenti già nell'universo primordiale, che nel tempo si sono accentuate in maniera evidente. Un primo modo per studiare questo fenomeno consiste nel trattare perturbativamente l'ambiente omogeneo del Modello Standard. Tramite questo approccio è possibile descrivere solo le irregolarità che si presentano a larga scala, essendo che le perturbazioni che si osservano su scale più piccole della decina dei Mpc non sono lineari e richiedono una teoria che vada oltre il Modello Standard. Questo tipo di anisotropie si osserva anche nella distribuzione della radiazione cosmica di fondo, anche se in maniera molto più contenuta poiché i fotoni formano agglomerati, ciò nondimeno queste piccole disuniformità sono facilmente rilevabili e costituiscono un ottimo punto di partenza sperimentale per lo sviluppo di nuovi modelli. C'è da notare, infine, che la materia oscura assume un ruolo importante anche nell'evoluzione delle disomogeneità della materia, infatti questa si presenta principalmente in densi aggregati a causa della forte attrazione gravitazionale dovuta alla massa elevata delle particelle di cui è costituita.

Nel cercare una causa alla quale ricondurre le perturbazioni primordiali che hanno generato la struttura attuale del cosmo, ci si troverà inevitabilmente a doversi confrontare con il problema delle condizioni iniziali dell'universo. Queste costituiscono la terza problematica che pone la necessità dello sviluppo di una teoria che superi il Modello Standard. L'ipotesi attualmente in auge richiede che nei primi istanti l'universo abbia subito una forte accelerazione, espandendosi esponenzialmente quando la sua età era appena di 10^{-35} secondi: questo fenomeno prende il nome di inflazione. L'inflazione, seppure spieghi efficacemente gli eventi che hanno influenzato drasticamente l'evoluzione dell'universo, ancora non è immersa in una teoria autoconsistente. Si tratta quindi di un prototipo a sé stante in cerca di uno sfondo teorico più generale.

Bibliografia

- [1] Y. Akrami et al. Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astron. Astrophys.*, 641:A1, 2020.
- [2] Scott Dodelson. Modern cosmology. academic press. 2003.
- [3] Particle Data Group, P A Zyla, R M Barnett, J Beringer, O Dahl, D A Dwyer, D E Groom, C J Lin, K S Lugovsky, E Pianori, D J Robinson, C G Wohl, W M Yao, K Agashe, G Aielli, B C Allanach, C AMSler, M Antonelli, E C Aschenauer, D M Asner, H Baer, Sw Banerjee, L Baudis, C W Bauer, J J Beatty, V I Belousov, S Bethke, A Bettini, O Biebel, K M Black, E Blucher, O Buchmuller, V Burkert, M A Bychkov, R N Cahn, M Carena, A Ceccucci, A Cerri, D Chakraborty, R Sekhar Chivukula, G Cowan, G D'Ambrosio, T Damour, D de Florian, A de Gouv \tilde{a} a, T DeGrand, P de Jong, G Dissertori, B A Dobrescu, M D'Onofrio, M Doser, M Drees, H K Dreiner, P Eerola, U Egede, S Eidelman, J Ellis, J Erler, V V Ezhela, W Fetscher, B D Fields, B Foster, A Freitas, H Gallagher, L Garren, H J Gerber, G Gerbier, T Gershon, Y Gershtein, T Gherghetta, A A Godizov, M C Gonzalez-Garcia, M Goodman, C Grab, A V Gritsan, C Grojean, M Gr \tilde{a} newald, A Gurtu, T Gutsche, H E Haber, C Hanhart, S Hashimoto, Y Hayato, A Hebecker, S Heinemeyer, B Heltsley, J J Hern \tilde{a} ndez-Rey, K Hikasa, J Hisano, A H \tilde{a} cker, J Holder, A Holtkamp, J Huston, T Hyodo, K F Johnson, M Kado, M Karliner, U F Katz, M Kenzie, V A Khoze, S R Klein, E Klempt, R V Kowalewski, F Krauss, M Kreps, B Krusche, Y Kwon, O Lahav, J Laiho, L P Lellouch, J Lesgourgues, A R Liddle, Z Ligeti, C Lippmann, T M Liss, L Littenberg, C Lourenco, S B Lugovsky, A Lusiani, Y Makida, F Maltoni, T Mannel, A V Manohar, W J Marciano, A Masoni, J Matthews, U G Mei \tilde{a} ner, M Mikhasenko, D J Miller, D Milstead, R E Mitchell, K M \tilde{a} gnig, P Molaro, F Moortgat, M Moskovic, K Nakamura,

- M Narain, P Nason, S Navas, M Neubert, P Nevski, Y Nir, K A Olive, C Patrignani, J A Peacock, S T Petcov, V A Petrov, A Pich, A Piepke, A Pomarol, S Profumo, A Quadt, K Rabbertz, J Rademacker, G Raffelt, H Ramani, M Ramsey-Musolf, B N Ratcliff, P Richardson, A Ringwald, S Roesler, S Rolli, A Romaniouk, L J Rosenberg, J L Rosner, G Rybka, M Ryskin, R A Ryutin, Y Sakai, G P Salam, S Sarkar, F Sauli, O Schneider, K Scholberg, A J Schwartz, J Schwiening, D Scott, V Sharma, S R Sharpe, T Shutt, M Silari, T Sjöstrand, P Skands, T Skwarnicki, G F Smoot, A Soffer, M S Sozzi, S Spanier, C Spiering, A Stahl, S L Stone, Y Sumino, T Sumiyoshi, M J Syphers, F Takahashi, M Tanabashi, J Tanaka, M Taniuchi, K Terashi, J Terning, U Thoma, R S Thorne, L Tiator, M Titov, N P Tkachenko, D R Tovey, K Trabelsi, P Urquijo, G Valencia, R Van de Water, N Varelas, G Venanzoni, L Verde, M G Vinster, P Vogel, W Vogelsang, A Vogt, V Vorobyev, S P Wakely, W Walkowiak, C W Walter, D Wands, M O Wascko, D H Weinberg, E J Weinberg, M White, L R Wienke, S Willocq, C L Woody, R L Workman, M Yokoyama, R Yoshida, G Zanderighi, G P Zeller, O V Zenin, R Y Zhu, S L Zhu, F Zimmermann, J Anderson, T Basaglia, V S Lugskey, P Schaffner, and W Zheng. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8), 08 2020. 083C01.
- [4] Fabio Iocco, Gianpiero Mangano, Gennaro Miele, Ofelia Pisanti, and Pasquale D. Serpico. Primordial nucleosynthesis: From precision cosmology to fundamental physics. *Physics Reports*, 472(1-6):1â76, Mar 2009.
- [5] Julien Lesgourgues, Gianpiero Mangano, Gennaro Miele, and Sergio Pastor. Neutrino cosmology. cambridge university press. 2013.
- [6] Pierpaolo Mazzella. Improved nuclear reaction network for a reliable estimate of primordial deuterium yield. 2018.
- [7] Viatcheslav Mukhanov. Physical foundations of cosmology. cambridge university press. 2005.