UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Considerazioni sulla formulazione affine delle Teorie della Gravitazione

Relatore:
Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Daniele Vernieri

Candidato:
Giovanni Costanzo
Matr. N85001154

Anno Accademico 2019/2020

Alla mia famiglia.

Introduzione

La relatività generale (GR) è sicuramente una delle teorie scientifiche più eleganti mai sviluppate finora. I tre principi di relatività, equivalenza e covarianza, insieme alla causalità, richiedono solo che la struttura spazio-temporale debba essere determinata da uno o entrambi i campi, ovvero da una metrica lorentziana $g_{\mu\nu}$ e/o da una connessione lineare ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$, presunta, inizialmente, essere priva di torsione per semplicità. La metrica $g_{\mu\nu}$ fissa la struttura causale dello spazio-tempo (i coni di luce) così come le sue relazioni metriche (misurate da orologi); la connessione ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ determina le leggi della caduta libera, le traiettorie spazio-temporali quadridimensionali seguite da osservatori inerziali locali. Ovviamente devono soddisfare una serie di relazioni di compatibilità che equivalgono a richiedere che i fotoni seguano geodetiche nulle di ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$, in modo che ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ possano essere indipendenti a priori, ma vincolati, a posteriori, da alcune restrizioni fisiche.
Questi, tuttavia, non impongono necessariamente che ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ debba essere la connessione Levi-Civita di $g_{\mu\nu}$ [1]. Ciò giustifica, almeno su base puramente teorica, il fatto che si possano prevedere le cosiddette "teorie alternative della gravitazione", che preferiamo chiamare "Teorie estese di gravitazione" (ETG) poiché i loro punti di partenza sono esattamente quelli considerati da Einstein e Hilbert nella costruzione di GR. Queste sono teorie in cui la gravitazione è descritta da una metrica (teorie puramente metriche), o da una connessione lineare (teorie puramente affini), o da entrambi i campi (teorie metrico-affine, note anche come teorie del formalismo del primo ordine).
Lo scopo di tale lavoro di tesi è quello di dare una descrizione della GR nel formalismo metrico affine, ponendo l'attenzione sulle principali differenze con quello puramente metrico. Nel formalismo puramente metrico Einstein assume che la metrica $g_{\mu\nu}$ è l'oggetto fondamentale per descrivere la gravità. La connessione ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ è costituita da coefficienti senza dinamica: si assume che ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ sia la connessione di Levi-Civita di $g_{\mu\nu}$. Lo spazio-tempo è, perciò, una coppia $\{\mathcal{M}, g\}$, costituita da una varietà riemanniana e dalla metrica $g_{\mu\nu}$ che determina, allo stesso tempo, la struttura causale (cono di luce), le misure (orologi) e la caduta libera di particelle test (geodetiche). Nel formalismo di Palatini, invece, la metrica $g_{\mu\nu}$ e la connessione ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ variano indipendentemente. Le connessioni ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ sono equazioni differenziali: risulta dalle equazioni di campo che ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ sia la connessione di Levi-Civita. Lo spazio-tempo è, perciò, una tripla $\{\mathcal{M}, g, \Gamma\}$, costituita dalla varietà riemanniana, dalla metrica $g_{\mu\nu}$ che determina le misure e dalla connessione ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ che determina la caduta libera delle particelle test [2].

In queste teorie la Lagrangiana è una densità scalare degli invarianti di curvatura costruiti sia da $g_{\mu\nu}$ che da $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$. La scelta della Lagrangiana di Einstein-Hilbert non è assolutamente unica e si scopre che questa Lagrangiana è di fatto l'unica scelta che produce un invariante lineare nelle derivate seconde della metrica (o derivate prime della connessione).
Numerosi tentativi di generalizzare la GR e unificarla con l'elettromagnetismo lungo queste linee furono seguiti da Einstein e molti altri, inclusi Eddington, Weyl e Schrodinger per citarne alcuni. Questi tentativi furono infine abbandonati negli anni '50, principalmente a causa di una serie di difficoltà legate alla struttura decisamente più complicata di una teoria non lineare (dove per "non lineare" si intende quella basata su invarianti non lineari del tensore di curvatura), e anche per la scoperta di due nuove interazioni fisiche, le forze nucleari forti e deboli che richiedevano la struttura più generale della teoria di gauge [3]. Tuttavia, indagini sporadiche su teorie alternative continuarono dopo il 1960.
La ricerca di una teoria quantistica coerente della gravitazione, qualcosa che, non verrà trattato in tale lavoro di tesi, ha fatto rivivere l'idea che non è obbligatorio aderire alla semplice prescrizione di Einstein e Hilbert e assumere che la gravità classica sia governata da una Lagrangiana lineare nella curvatura. Si possono anche cercare ulteriori invarianti di curvatura o funzioni non lineari di esse. Questo sarà maggiormente approfondito nei paragrafi (1.2) e (2.2) di tale lavoro di tesi. Inoltre è chiaro dalle recenti osservazioni astrofisiche e dalle attuali indagini cosmologiche che è legittimo dubitare del ruolo paradigmatico svolto dalle equazioni di Einstein a scale galattica, extragalattica e cosmologica. Il lato destro dell'equazione di campo contiene alcuni tipi di energia esotica, ovvero le componenti della materia oscura (DM) e dell'energia oscura (DE) del nostro universo.
L'idea discussa qui è, in linea di principio, molto più semplice. Invece di cambiare il lato materiale delle equazioni di Einstein e introdurre il contenuto di materia-energia mancante dell'universo osservato (fino al 95% del suo contenuto energetico totale), aggiungendo stati misteriosi, si nota che è, a priori, più semplice e conveniente cambiare il settore geometrico-gravitazionale di queste equazioni inserendo correzioni non lineari alla Lagrangiana. Questa procedura potrebbe essere considerata una mera questione di gusto; tuttavia, non vi è alcun motivo per scartare questo approccio a priori. In linea di principio, l'azione appartiene a una vasta famiglia di azioni ammissibili e, dal punto di vista puramente fenomenologico, questa libertà consente di essere scelta sulla base del suo migliore adattamento con i dati osservativi disponibili a tutte le scale (solare, galattico, extragalattico e cosmologico). Purtroppo tale approccio risulta avere un numero di parametri e funzioni libere relativamente alto, quindi molti modelli si adattano alle osservazioni facendone perdere il potere predittivo.
A tale scopo nell'ultimo capitolo di tale lavoro viene trattata l'analisi di Ehlers-Pirani-Schild (EPS) sviluppata negli anni '70 per definire quale struttura geometrica è osservabile e quali sono, invece, quelle convenzionali. L'analisi dell'EPS si basa su una serie di ipotesi: distinguere fisicamente il Principio di Equivalenza dal Principio di Causalità; misurare e descrivere la struttura spazio-temporale attraverso i raggi di luce e le particelle. La necessità di misurare nello spazio-tempo e utilizzare i raggi di luce richiede che lo spazio-tempo trasporta metriche,

mentre il principio di equivalenza e di interazione con la materia (sotto l'attrazione gravitazionale) richiede che lo spazio-tempo trasporta anche una connessione (lineare o affine). La connessione, un oggetto che può essere ridotto a zero in ogni singolo punto, è il potenziale del campo gravitazionale. La metrica determina la causalità e la propagazione dei fotoni. Per cui tale formalismo suggerisce chiaramente che il quadro corretto e più generale per affrontare la gravità è il formalismo di Palatini, poiché si basa sulla distinzione fisica e matematica tra il Principio di Equivalenza e il Principio di Causalità che per ovvie ragioni sono matematicamente e fisicamente distinte.
Infine l'ultimo capitolo tratta l'analisi EPS rivisitata alla teorie ETG, assumendo, come già detto precedentemente, che la lagrangiana non fosse lineare in $g_{\mu\nu}$ e ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$. Dal punto di vista teorico, infatti, ha perfettamente senso prendere in seria considerazione teorie della gravità non lineari piuttosto ben motivate, basate su Lagrangiane non singolari in quanto il modello ΛCDM (abbreviazione di Lambda-Cold Dark Matter) è invece accompagnato da materia esotica completamente diversa dai barioni conosciuti, mai rilevata nei nostri laboratori, e segregata su scale astrofisiche [4].

Indice

Capitolo 1

Formulazione puramente metrica della Relatività Generale

> "Certe volte mi domando perché sia stato proprio io a elaborare la teoria della relatività. La ragione, a parer mio, è che normalmente un adulto non si ferma mai a riflettere sui problemi dello spazio e del tempo. Queste sono cose a cui si pensa da bambini. Io invece cominciai a riflettere sullo spazio e sul tempo solo dopo essere diventato adulto. Con la sola differenza che studiai il problema più a fondo di quanto possa fare un bambino."
>
> Albert Einstein

Il primo approccio usato per descrivere la Relatività Generale era puramente metrico. Einstein, nel 1915, stabilì la connessione tra il campo gravitazionale e la struttura dello spazio tempo. Lo spazio-tempo è caratterizzato da un tensore metrico due volte covariante $g_{\mu\nu}$ e la gravità è una curvatura della geometria dello spazio-tempo dovuta alla distribuzione di sorgenti di materia-energia. In particolare la Relatività Generale di Einstein è basata su quattro assunzioni[2]:

- il *"Principio di Relatività"* - Le leggi della fisica devono essere valide in ogni sistema di riferimento omogeneo;
- il *"Principio di Equivalenza"* - Gli effetti inerziali sono localmente indistinguibili da quelli gravitazionali (equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale). Questo ha riscontro pratico nell'osservazione che i corpi in caduta libera seguono lo stesso percorso indipendentemente dalla loro massa;
- il *"Principio di Covarianza Generale"* - Le leggi della fisica devono essere invarianti sotto ogni trasformazione di coordinate differenziabile;
- il *"Principio di Causalità"* - Ogni punto dello spazio-tempo deve ammettere una nozione universalmente valida di passato, presente e futuro.

Su queste basi Einstein postulò che la struttura causale dello spazio-tempo è determinata dal cono di luce della metrica di equazione $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

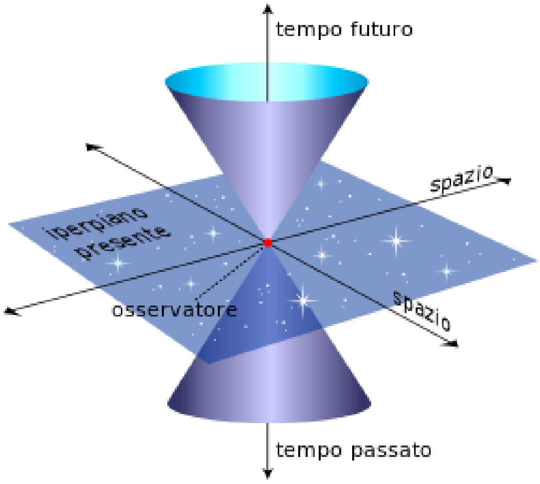

Figura 1.1. Struttura causale dello spazio-tempo

Dal punto di vista di Newton spazio e tempo sono quantità fisse e assolute non correlate tra loro e le masse seguono delle traiettorie curve dovute alla gravità. L'idea rivoluzionaria di Einstein è stato supporre che spazio e tempo fossero delle variabili equivalenti e che le masse seguissero delle traiettorie curve, dette geodetiche dello spazio-tempo dovute alla presenza di materia. Così postulò che le forze gravitazionali dovessero essere espresse dalla curvatura della varietà quadridimensionale spazio-temporale M descritta dalla metrica $g_{\mu\nu}$. Più precisamente la curvatura deflette la traiettoria dei corpi in caduta libera causando la cosiddetta gravità.

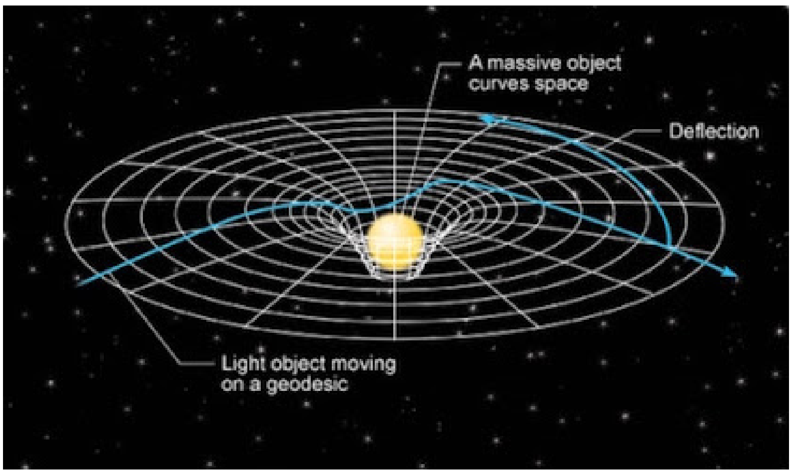

Figura 1.2. Curvatura dello spazio-tempo

Nell'approccio metrico il tensore $g_{\mu\nu}$ rappresenta il campo gravitazionale e il tensore di Riemann $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, che descrive la curvatura, è definito come:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} & \dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}} \\ \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} & \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu} & \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} \\ \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} & \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Dove abbiamo introdotto le connessioni affini $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, le quali possono essere espresse in termini della metrica del tensore $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda} \right) \tag{1.2}$$

Possiamo, quindi, affermare che l'interazione gravitazionale è legata alla curvatura dello spazio-tempo, la quale è determinata dalla distribuzione di sorgenti di materia-energia. Le relazioni che descrivono tale correlazioni sono dette Equazioni di Campo.

1.1 Equazioni di Campo nel formalismo puramente metrico

Per determinare le equazioni di campo è possibile considerare due approcci differenti: quello storico di Einstein e quello variazionale di David Hilbert. Per i nostri scopi determiniamo le equazioni con il secondo approccio. Quasi in contemporanea ad Einstein, Hilbert giunse alle equazioni di campo partendo dal Principio di Minima Azione. Quest'ultimo costituisce un'ottima base matematica per il rigore e la validità delle equazioni. Einstein, a differenza di Hilbert, fece considerazioni di tipo prettamente fisico e conservativo [6]. A tale scopo introduciamo il Principio di Minima Azione di Hilbert:

1.1.1 Principio di Minima Azione di Hamilton

Si consideri una particella in una dimensione con coordinata $q(t)$. Possiamo derivare le equazioni del moto per tale particella usando il seguente principio:
Principio di Minima Azione di Hamilton. *Una funzione lagrangiana realizza il minimo del funzionale d'azione se e solo se essa soddisfa le equazioni del moto di Eulero-Lagrange:*

$$\delta A = \int L(q(t), \dot{q}(t))\, dt = 0 \ , \tag{1.3}$$

dove la funzione $L(q(t), \dot{q}(t))$ è Lagrangiana del sistema preso in esame.

- In teoria dei campi si sostituiscono le singole coordinate $q(t)$ in un insieme di campi dipendenti dallo spazio-tempo $\Phi^i(x^\mu)$ e l'azione A diventa un funzionale di questi campi. Per cui la lagrangiana può essere espressa come un integrale sullo spazio della densità lagrangiana $\mathcal{L}$, la quale dipende dai campi Φ^i e dalle derivate spazio-temporali $\partial_\mu \Phi^i$:

$$L = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)\, d^3x \ , \tag{1.4}$$

per cui si ha

$$\delta A = \int \delta L\, dt = \int \delta \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)\, d^4x = 0 \ . \tag{1.5}$$

L'importanza del principio variazionale sta nella ricerca delle funzioni che garantiscono certe leggi di conservazione, anziché partire dall'assunzione che una conservazione ci sia già, proprio come fece Einstein.[1]

[1]Einstein partì dal presupposto che le equazioni di campo dovessero essere: scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza; del secondo ordine; tali da fornire la soluzione newtoniana per campi deboli.

1.1.2 Equazioni di Campo

Per determinare le equazioni di campo [7] è utile contrarre il tensore di Riemann, ottenendo così il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\tau\lambda} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma} \ . \tag{1.6}$$

La lagrangiana che descrive il campo gravitazionale è lineare rispetto al tensore di Ricci:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_M \\ &= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R(g) + \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M \ , \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ è lo scalare di curvatura e $\hat{\mathcal{L}}_M$ è la densità lagrangiana della materia. Per il principio di Hamilton si ottiene:

$$\delta A = \delta \int \mathcal{L} \ d^4x = \int \left(\frac{1}{16\pi G} \underbrace{\delta(\sqrt{-g}R(g))}_{1} + \underbrace{\delta(\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M)}_{2} \right) d^4x \ . \tag{1.8}$$

1) Per quanto riguarda il primo termine della (1.8) si ha

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta(R) \ . \tag{1.9}$$

Ricordando che

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \to \delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \ , \tag{1.10}$$

si ottiene

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \ . \tag{1.11}$$

Inoltre, per la derivata delle funzioni composte, si ha

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \ . \tag{1.12}$$

Ma $\delta g =^{2} g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =^{3} -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ allora, si ottiene,

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} = -\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2} \ . \tag{1.13}$$

[2] Dalla Formula di derivazione del determinante $\frac{d}{dt}Det(A) = Det(A)tr\left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right)$.

[3] Osservando che $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4 \to g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$.

Quindi, dalla (1.13):

$$\delta\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \underbrace{\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]}_{G_{\mu\nu}} d^4x + \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\, d^4x\ . \qquad (1.14)$$

Si noti che, essendo la variazione analoga ad una derivata, nel caso in cui il secondo integrale non si annulli si avrebbe un'equazione di campo non del secondo ordine, ma del terzo. Gibbons–Hawking–York dimostrarono che quest'ultimo termine è nullo, determinando la variazione di $R_{\mu\nu}$ nel RIL[4]:

$$\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{R^{\alpha}}_{\mu\alpha\nu} = {\Gamma^{\alpha}}_{\mu\nu,\alpha} - {\Gamma^{\alpha}}_{\mu\alpha,\nu} \Rightarrow \delta\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\nu}) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\alpha})\ . \qquad (1.15)$$

Moltiplicando la (1.15) per $g^{\mu\nu}$ si ha

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\,\delta\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\alpha}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left[g^{\mu\nu}\delta{\Gamma^{\rho}}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\alpha}\right]\ . \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Definendo il vettore $W^{\rho} := g^{\mu\nu}\delta{\Gamma^{\rho}}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta{\Gamma^{\alpha}}_{\mu\alpha}$ e ricordando che una relazione tensoriale che vale nel RIL, vale su tutta la varietà spazio-temporale, segue

$$g^{\mu\nu}\,\delta\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}W^{\rho}\ , \qquad (1.17)$$

per cui si ottiene

$$\delta\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int \frac{G_{\mu\nu}}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \cancel{\int \sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}W^{\rho}\, d^4x} = \int \delta\mathcal{L}_{\mathcal{H}}\, d^4x\ . \qquad (1.18)$$

L'ultimo termine rappresenta l'integrale di volume della divergenza di un vettore in assenza delle sorgenti, per cui ha contributo nullo:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathcal{HE}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\ . \qquad (1.19)$$

2) Per quanto riguarda il secondo termine della (1.8) si ha

$$\delta(\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M) = \delta\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M + \sqrt{-g}\delta\hat{\mathcal{L}}_M\ . \qquad (1.20)$$

[4]Sistema di riferimento localmente inerziale ⇒ Per il principio di equivalenza in forma forte si ha che, in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento, nell'intorno di ogni punto, dove gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli (${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu} = 0$).

Dalla (1.13) si ha che

$$\delta\mathcal{L}_M = -\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2}\hat{\mathcal{L}}_M + \sqrt{-g}\delta\hat{\mathcal{L}}_M \ . \tag{1.21}$$

Definito, quindi, il tensore Energia-Impulso, come

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\hat{\mathcal{L}}_M \ , \tag{1.22}$$

da cui

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \ , \tag{1.23}$$

per cui le equazioni di campo della teoria sono

$$0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\left(G_{\mu\nu} - 8\pi G T_{\mu\nu}\right) \ . \tag{1.24}$$

Da cui essendo $g \neq 0$ e $g^{\mu\nu} \neq 0$ si ottengono le equazioni di Einstein per lo spaziotempo in presenza di un campo di materia e quindi di sorgenti:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \ . \tag{1.25}$$

1.2 Teoria $f(R)$ nel formalismo puramente metrico

La decisione di Hilbert e Einstein di scegliere una Lagrangiana lineare nello scalare di Ricci potrebbe sembrare arbitraria. Tuttavia questi furono mossi dal fatto che le equazioni di campo dovessero essere del secondo ordine nel tensore metrico e perciò dovevano contenere derivate del secondo ordine del potenziale di campo.[5] Inoltre, dato che le equazioni sono ottenute variando l'azione, la densità Lagrangiana dovrebbe presentare derivate del primo ordine del tensore metrico, e quindi, in altre parole dovrebbe contenere il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e la connessione affine ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$. La scelta di Einstein dello scalare di curvatura era, quindi, l'unica possibile affinché le equazioni di campo fossero del secondo ordine nel tensore metrico.
La teoria $f(R)$ è una generalizzazione della relatività generale, la quale assume che la densità Lagrangiana è una funzione generale dello scalare di curvatura R continua e derivabile:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{HE} + \mathcal{L}_M \\ &= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}f(R) + \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M \ .\end{aligned} \tag{1.26}$$

La variazione dell'azione è

$$\delta A = \delta \int \mathcal{L}\ d^4x = \int \left(\frac{1}{16\pi G} \underbrace{\delta(\sqrt{-g}f(R))}_{1} + \underbrace{\delta(\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M)}_{2} \right) d^4x \ . \tag{1.27}$$

1)Per quanto riguarda il primo termine della (1.27) si ha

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}f(R)) &= \delta(\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\delta(f(R)) \\ &= \delta(\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}f'(R)\delta R \ .\end{aligned} \tag{1.28}$$

Dalla (1.10), (1.13) e (1.17) si ottiene

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}f(R)) &= -\frac{\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2}f(R) + \sqrt{-g}f'(R)\left(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) \\ &= \sqrt{-g}\left[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)\right]\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}f'(R)\partial_\rho W^\rho \ ,\end{aligned} \tag{1.29}$$

da cui

$$\delta\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int \sqrt{-g}\left[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int \underbrace{\sqrt{-g}f'(R)\partial_\rho W^\rho}_{(*)} d^4x \ . \tag{1.30}$$

[5] In analogia con l'elettromagnetismo.

Svolgendo il secondo integrale$^{(*)}$ per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g} f'(R) \partial_\rho W^\rho d^4x = & \cancel{\int \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) W^\rho \right] d^4x} \\ & - \int \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] W^\rho d^4x \ .\end{aligned} \tag{1.31}$$

Il primo di questi integrali è nullo per il teorema della divergenza (ipotizzando che non esistano campi all'infinito). Si ottiene, quindi, che

$$\int \sqrt{-g} f'(R) \partial_\rho W^\rho d^4x = - \int \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] W^\rho d^4x \ . \tag{1.32}$$

Calcoliamo il termine W^ρ che compare nella (1.31) utilizzando la definizione delle connessioni affini di prima specie (1.2):

$$\begin{aligned}\delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} &= \delta \left[\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left[\partial_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_\alpha (\delta g_{\mu\nu}) \right] \ .\end{aligned} \tag{1.33}$$

Con alcune manipolazioni[6] troviamo le seguenti espressioni:

$$g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\rho (\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) - \partial^\mu (\delta g^{\alpha\nu} g_{\alpha\mu}) \ , \tag{1.34}$$

$$g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = - \frac{1}{2} \partial^\rho (g_{\nu\alpha} \delta g^{\alpha\nu}) \ . \tag{1.35}$$

Inserendo la (1.34) e (1.35) in W^ρ si ha

$$\begin{aligned}W^\rho &= g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} \\ &= \partial^\rho (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\rho\nu}) \ ,\end{aligned} \tag{1.36}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g} f'(R) \partial_\rho W^\rho d^4x = & - \int \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] \partial^\rho (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \, d^4x \\ & + \int \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] \partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\rho\nu}) \, d^4x \ .\end{aligned} \tag{1.37}$$

Integrando per parti ed eliminando i termini nulli per il teorema della divergenza, si ricava

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g} f'(R) \partial_\rho W^\rho d^4x = & \int \partial^\rho \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \, d^4x \\ & - \int \partial^\mu \partial_\rho \left[\sqrt{-g} f'(R) \right] g_{\rho\nu} \delta g^{\mu\nu} \, d^4x \ ,\end{aligned} \tag{1.38}$$

[6] Nel RIL è preservata la metrica, o equivalentemente $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

e quindi

$$\int \sqrt{-g} f'(R) \partial_\rho W^\rho d^4x = \int \sqrt{-g}\, \Box f'(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\, d^4x - \int \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla \nu f'(R) \delta g^{\mu\nu}\, d^4x \,. \tag{1.39}$$

Sostituendo nella (1.29) si ottiene

$$\delta \mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int \sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} \left[g_{\mu\nu}\, \Box f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) \right] \delta g^{\mu\nu}\, d^4x \,, \tag{1.40}$$

da cui

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{HE}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \Bigg[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu}\, \Box f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) \Bigg] \,. \tag{1.41}$$

2) Per quanto riguarda la variazione del secondo termine della (1.27), analogamente alla (1.23) si ha

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \,. \tag{1.42}$$

L' equazione di campo è

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \Box f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu} \,. \tag{1.43}$$

Riscriviamo tale equazione in termini del tensore di Einstein[7]:

$$f'(R) G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Bigg[f'(R) R - f(R) \Bigg] + g_{\mu\nu} \Box f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu} \,, \tag{1.44}$$

da cui

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{f'(R)} + \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Bigg[f(R) - f'(R) R \Bigg] + f'(R)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \Box f'(R) \right\} . \tag{1.45}$$

Queste sono equazioni differenziali alle derivate parziali del quarto ordine nella metrica in quanto R include già derivate seconde di quest'ultima, non come in RG. È importante sottolineare che se l'azione fosse lineare in R, allora i termini del quarto ordine svaniscono e la teoria si riduce alla Relatività Generale[8].
Il secondo termine nella seconda parte della (1.45) può essere considerato come

[7] Aggiungiamo e sottraiamo il termine $\frac{1}{2} f'(R) g_{\mu\nu} R$.

[8] Si può notare che con la scelta particolare $f(R) = R$ si recupera la Relatività Generale.

un contributo di curvatura al tensore totale energia–impulso, e quindi può essere definito come $T_{\mu\nu}^{(curv)}$:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{f'(R)} \left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(curv)} \right] . \tag{1.46}$$

È possibile notare un altro risultato importante calcolando la traccia della (1.44):

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = kT \ , \tag{1.47}$$

dove $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ è la traccia del tensore metrico energia-impulso.
È, quindi, possibile determinare una relazione differenziale tra R e T e non algebrica come in RG[9]. Ciò implica che le equazioni di campo della teoria $f(R)$ possono ammettere una più grande varietà di soluzioni rispetto a quelle della Relatività Generale $\Rightarrow$ La teoria $f(R)$ potrebbe concederci un'alternativa vantaggiosa per descrivere la gravità [7].

[9] R=-kT

Capitolo 2

Formulazione metrico-affine della Relatività Generale

Abbiamo visto che, partendo da principi variazionali opportuni, è possibile ricavare le equazioni del campo gravitazionale per alcune classi di teorie relativistiche (Relatività Generale inclusa) variando rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$. Questa procedura è giustificata, da un punto di vista lagrangiano, se consideriamo la metrica alla stregua delle coordinate configurazionali [6]. Volendo estendere il metodo da un punto di vista hamiltoniano, lo stesso Einstein evidenziò, non appena formulata la sua teoria, che occorreva qualcosa di analogo ai momenti coniugati. Si deve a Palatini, nel 1919, l'aver indicato le connessioni affini come possibili campi analoghi ai momenti. L'idea alla base del **formalismo di Palatini** è di considerare le connessioni affini $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, che entrano nella definizione del tensore di Ricci, come indipendenti dalla metrica $g_{\mu\nu}$. Tale approccio, se applicato all'azione di Einstein-Hilbert, risulta completamente equivalente ad una teoria puramente metrica: questo segue dal fatto che le equazioni dei campo stabiliscono che la stessa connessione $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, considerata dapprima indipendente, deve essere la connessione di Levi–Civita data da una combinazione lineare delle derivate prime della metrica. Da ciò, non c'è nessuna ragione pratica per imporre il principio variazionale di Palatini nell'azione di Einstein-Hilbert al posto del principio variazionale metrico (di Einstein). Da un punto di vista fisico, considerare la metrica e la connessione come campi indipendenti equivale a disaccoppiare la struttura metrica dello spazio–tempo dalla struttura geodetica (tecnicamente, la connessione non è più la connessione di Levi–Civita di g) che governano, rispettivamente, la struttura cronologica e le traiettorie delle particelle che si muovono in essa. Questo disaccoppiamento arricchisce la struttura geometrica dello spazio-tempo e generalizza il formalismo puramente metrico. Nel formalismo di Palatini lo spazio-tempo è descritto da una varietà differenziabile quadridimensionale $\mathcal{M}$, dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ sulla varietà e la connessione affine $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$.

La connessione affine è correlata al trasporto parallelo del tensore e perciò definisce le derivate covarianti come segue:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} v^\lambda \ , \tag{2.1}$$

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} w_\lambda \ , \tag{2.2}$$

$$\nabla_\mu T_\rho{}^\nu = \partial_\mu T^\nu{}_\rho + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\rho - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} T^\nu{}_\lambda \ . \tag{2.3}$$

È noto dalla geometria differenziale [8] che una generica connessione affine può essere decomposta nelle seguenti tre parti:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\lambda{}_{\mu\nu} + L^\lambda{}_{\mu\nu} \ , \tag{2.4}$$

dove il secondo termine è il tensore di contorsione, definito attraverso il tensore di torsione:

$$K^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(T_{\mu\rho\nu} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\nu\mu\rho} + T_{\rho\nu\mu} \right) = -K_{\nu\mu}{}^\lambda \ , \tag{2.5}$$

mentre il terzo termine è il tensore di deformazione, definito attraverso il tensore di non metricità:

$$L^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\rho\nu} - Q_{\nu\rho\mu} \right) = L^\lambda{}_{\nu\mu} \ . \tag{2.6}$$

Il tensore di torsione e di non metricità sono dati da

$$T^\lambda{}_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda{}_{[\mu\nu]} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \ , \tag{2.7}$$

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} \ . \tag{2.8}$$

Attraverso tali connessioni può essere definito il tensore di Riemann come

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \ . \tag{2.9}$$

È importante sottolineare che la curvatura, la torsione e la non metricità sono tutte proprietà della connessione (che determina la caduta libera e non la struttura casuale).

A ciascuno di questi oggetti si può dare un'interpretazione geometrica:

- Il tensore di curvatura è associato alla variazione di un vettore quando trasportato parallelamente lungo una curva chiusa;
- Il tensore di torsione descrive la non chiusura di un parallelogramma infinitesimale ottenuto dal trasporto parallelo di un vettore lungo la direzione di un altro vettore;
- Il tensore di non metricità porta al cambiamento della norma di un vettore quando viene trasportato parallelamente.

Matematicamente, il tensore di Riemann e la torsione competono nel calcolo del commutatore delle componenti delle derivate covarianti che agiscono su un tensore. Per una funzione, un vettore, un covettore e, in particolare, per il tensore metrico, l'azione del commutatore ci fornisce

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, f = -T^\lambda_{\ \mu\nu} \nabla_\lambda f \ , \tag{2.10}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, v^\rho = R^\rho_{\ \lambda\mu\nu} v^\lambda - T^\lambda_{\ \mu\nu} \nabla_\lambda v^\rho \ , \tag{2.11}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, w_\sigma = -R^\lambda_{\ \sigma\mu\nu} w_\lambda - T^\lambda_{\ \mu\nu} \nabla_\lambda w_\sigma \ , \tag{2.12}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, g_{\rho\sigma} = -R^\lambda_{\ \rho\mu\nu} g_{\lambda\rho} - R^\lambda_{\ \sigma\mu\nu} g_{\rho\lambda} - 2T^\lambda_{\ \mu\nu} \nabla_\lambda g_{\rho\sigma} \ . \tag{2.13}$$

Naturalmente segue che se il tensore di torsione e di non metricità sono "spenti", le connessioni ritornano ad essere quelle di Levi-Civita e la teoria si riduce alla formulazione puramente metrica.

2.1 Equazioni di Campo nel formalismo di Palatini

Per determinare le equazioni di campo prendiamo in considerazione la stessa densità Lagrangiana (1.7) tenendo conto, però, che lo scalare di Ricci è dipendente solo dalle connessioni affini. La densità Lagrangiana metrico-affine prende la seguente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R(\Gamma) + \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M \ . \tag{2.14}$$

Tale Lagrangiana presenta derivate del primo ordine di ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$, ma nessuna derivata di $g_{\mu\nu}$. In altre parole è di ordine zero nella metrica mentre del primo ordine nelle connessioni. Questa produce un interessante cambiamento dal punto di vista della dinamica, infatti ora, il tensore $g_{\mu\nu}$ non ha a priori una dinamica indipendente ma segue il comportamento dinamico di ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$. La connessione affine diventa, quindi, un campo fondamentale come il tensore metrico. Dato che le due variabili sono indipendenti, per ottenere le equazioni di campo [9] bisogna applicare due differenti principi variazionali:

$$\delta A = \delta \int \mathcal{L}\ d^4x = \int \left(\frac{1}{16\pi G} \underbrace{\delta(\sqrt{-g}R(\Gamma))}_{1} + \underbrace{\delta(\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M)}_{2} \right) d^4x \ , \tag{2.15}$$

dove $\mathcal{L}_M$ dipende dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e non dalla connessione affine ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ [1]:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \phi) \ . \tag{2.16}$$

1)Per quanto riguarda la variazione rispetto a g del primo termine della (2.15) si ha

$$\begin{aligned}\delta_g(\sqrt{-g}R(\Gamma)) &= \delta_g(\sqrt{-g})R + \delta_g(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma))\sqrt{-g} \\ &= \delta_g(\sqrt{-g})R + \delta_g(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}(\Gamma)\sqrt{-g} \ .\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dalla (1.13) si ottiene:

$$\delta_g(\sqrt{-g}R(\Gamma)) =^2 -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta_g g^{\mu\nu}R + \delta_g g^{\mu\nu}\sqrt{-g}R_{(\mu\nu)} \ , \tag{2.18}$$

da cui

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathcal{HE}}}{\delta_g g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\left[R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right] \ . \tag{2.19}$$

[1] Il caso in cui anche la densità lagrangiana dipenda dalla connessione affine viene trattato alla fine di questo paragrafo (formalismo metrico-affine).

[2] Per la simmetria della metrica $\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu}R_{(\mu\nu)}$, dove $R_{(\mu\nu)}$ è la parte simmetrica del tensore di Ricci.

2)Per quanto riguarda la variazione rispetto a g del secondo termine della (2.15) si procede in modo analogo al formalismo metrico:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta_g g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \ , \tag{2.20}$$

per cui la prima equazione di campo è

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \ . \tag{2.21}$$

1)Per quanto riguarda la variazione rispetto a Γ del primo termine della (2.15) si ha

$$\delta_\Gamma(\sqrt{-g}R(\Gamma)) = \delta_\Gamma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)) = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_\Gamma(R_{\mu\nu}(\Gamma)) \ . \tag{2.22}$$

Dalla (1) si ha che

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\alpha} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \ . \tag{2.23}$$

Determinando la variazione di $R_{\mu\nu}$ nel RIL si ha

$$\delta_\Gamma R\ _{\mu\nu} = \partial_\alpha\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} =^3 \nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} \ , \tag{2.24}$$

da cui

$$\delta_\Gamma A = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}\right]\ d^4x \ . \tag{2.25}$$

Integrando per parti ed eliminando i termini che sono nulli per il teorema della Divergenza si ottiene

$$\delta_\Gamma A = -\frac{1}{16\pi G}\int \nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\ d^4x + \frac{1}{16\pi G}\int \nabla_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}\ d^4x \ . \tag{2.26}$$

Mettendo in evidenza $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ si ha

$$\delta_\Gamma A = \frac{1}{16\pi G}\int\left[\delta^\nu_\alpha\nabla_\tau\left(\sqrt{-g}g^{\mu\tau}\right) - \nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\right]\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\ d^4x \ . \tag{2.27}$$

Le variazioni sono arbitrarie e simmetriche rispetto agli indici $\mu\nu$ poiché stiamo considerando spazi–tempi senza torsione. Pertanto, per ricavare l'equazione di campo, imponiamo che solo la parte simmetrica dell'integrando della (2.27) sia nullo, cioè che

$$\nabla_\alpha[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}] = 0 \ . \tag{2.28}$$

2)Per quanto riguarda il secondo termine della (2.15), non dipendendo da Γ, ha variazione nulla e la seconda equazione di campo è la (2.28).

[3]Nel sistema di riferimento piatto, possiamo sostituire la derivata parziale con la derivata covariante.

È importante sottolineare che nella seconda equazione (2.28) vincoliamo la connessione affine, che è arbitraria a priori, a coincidere a posteriori con la connessione di Levi-Civita della metrica $g_{\mu\nu}$. Il formalismo di Palatini, quindi, ci riconduce alle stesse equazioni di campo ed è completamente equivalente al formalismo puramente metrico di Einstein.

Si potrebbe, quindi, pensare che la Relatività Generale è inutile e futile, ma ciò non è vero per due principali motivi:

- La dipendenza di Γ sul tensore metrico è indotta dall'equazione di campo e non è un'assunzione come nella formulazione puramente metrica
- Fornisce un nuovo background dove la gravità è descritta sia da g che da Γ

Nella determinazione delle equazioni di campo abbiamo scelto che la densità lagrangiana non dipendesse dalle connessioni affini ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$. Generalizzando il discorso ad un formalismo metrico-affine allora è giusto considerare $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}, \phi)$ e quindi bisogna definire un nuovo tensore, detto tensore iperimpulso o tensore energia-impulso associato alle ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$:

$$ {\Delta^\lambda}_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}} \ . \tag{2.29} $$

Si noti, quindi, che la scomparsa di ${\Delta^\lambda}_{\mu\nu}$ implicherebbe l'indipendenza della materia dall'azione delle connessioni. Come abbiamo discusso, questo non sarebbe fisico in il contesto di gravità metrico-affine se si verifica per qualsiasi campo (ci ricondurremmo al formalismo di Palatini). Tuttavia ci sono campi specifici che hanno questo attributo; l'esempio più comune è il campo scalare [9].

2.2 Teoria $f(R)$ nel formalismo di Palatini

Abbiamo visto come in Relatività generale il formalismo di Palatini è equivalente a quello metrico come conseguenza del fatto che le equazioni di campo per le connessioni forzino $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ ad essere una connessione di Levi-Civita della metrica. La situazione cambia quando prendiamo in considerazione Teorie Estese. L'azione è formalmente la stessa ma ora il tensore di Ricci è costruito dalle connessioni indipendenti $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$. Ciò ci suggerisce che il principio variazionale di Palatini e Metrico ci conducano a differenti equazioni di campo e quindi a una fisica differente. La densità Lagrangiana prende sempre la seguente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g} f(R(\Gamma)) + \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M \ . \tag{2.30}$$

Dato che le due variabili sono indipendenti, per ottenere le equazioni di campo bisogna applicare due differenti principi variazionali:

$$\delta A = \delta \int \mathcal{L}\ d^4x = \int \left(\frac{1}{16\pi G} \underbrace{\delta(\sqrt{-g} f(R(\Gamma)))}_{1} + \underbrace{\delta(\sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}_M)}_{2} \right) d^4x \ , \tag{2.31}$$

dove $\mathcal{L}_M$ dipende dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e non dalla connessione affine $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$.

1)Per quanto riguarda la variazione rispetto a g della (2.31) si ha

$$\begin{aligned} \delta_g \mathcal{L} &= \frac{1}{16\pi G}\left[\delta_g\sqrt{-g} f(R(\Gamma)) + \sqrt{-g}\delta_g f(R(\Gamma))\right] + \delta_g \mathcal{L}_M \\ &= \frac{1}{16\pi G}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} f(R)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} f'(R)\delta_g R\right] + \delta_g \mathcal{L}_M \\ &= \frac{1}{16\pi G}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} f(R)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} f'(R)\delta g^{\mu\nu} R_{(\mu\nu)}\right] + \delta_g \mathcal{L}_M \ , \end{aligned} \tag{2.32}$$

da cui

$$\frac{1}{16\pi G}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) R_{(\mu\nu)}\right] + \frac{\delta_g \mathcal{L}_M}{\delta_g g^{\mu\nu}} = 0 \ . \tag{2.33}$$

Dalla (2.20) si ha

$$\frac{1}{16\pi G}\left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + f'(R) R_{(\mu\nu)}\right] - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.34}$$

oppure

$$-\frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + f'(R) R_{(\mu\nu)} = 8\pi G T_{\mu\nu} \ , \tag{2.35}$$

dove $R_{(\mu\nu)}$ è la parte simmetrica del tensore di Ricci, i.e. $R_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})$.

Si noti l'assenza delle derivate seconde covarianti di $f'(R)$, in contrasto con l'equazione (1.45).

2)Per quanto riguarda la variazione rispetto a $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ della (2.31), si procede analogamente al caso precedente e si ottiene

$$\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}) = 0 \ \ con \ \ \lambda \neq \mu \neq \nu \ . \tag{2.36}$$

Si osservi che il formalismo di Palatini conduce a quello metrico quando $f(R) = R$, e quindi quando $f'(R) = 1 \Rightarrow$ La struttura bi–metrica risulta dal fatto che possiamo sempre ottenere l'identificazione

$$\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu} = \sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu} \ , \tag{2.37}$$

che, inserita nella (2.36), ci dice che Γ è la connessione di Levi–Civita per la metrica $\hat{g}^{\mu\nu}$, essendo nulla la sua derivata covariante.(cfr.2.28). È possibile notare un altro risultato importante determinando la traccia della (2.35):

$$f'(R)R - 2f(R) = kT \ . \tag{2.38}$$

Questa equazione è detta "Master equation". È importante sottolineare che tale equazione è algebrica e non differenziale per $f'(R)$: per cui questa quantità non è dinamica, a differenza della (1.47). Questa equazione strutturale, se esplicitamente risolvibile, fornisce in linea di principio un'espressione $R = f(T)$ e, di conseguenza, sia $f(R)$ che $f'(R)$ possono essere espressi in termini di un tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Questa informazione ha profonde conseguenze per la descrizione del sistema fisico. Infatti, il contenuto di materia dello spazio-tempo governa la struttura bi-metrica di quest'ultimo (sia la struttura geodetica che metrica). Può essere utile considerare il caso per cui $T = 0$:

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \ ^{4} \ . \tag{2.39}$$

[4]Si osservi che tale equazione può essere identicamente soddisfatta anche se $f(R) \propto R^2$.

Capitolo 3

Teoria di Ehlers-Pirani-Schild

Prima di tutto riassumiamo l'analisi di Ehlers-Pirani-Schild (EPS) delle strutture matematiche che stanno alla base di tutte le teorie gravitazionali relativistiche "ragionevoli" [10-11-12]. All'inizio degli anni '70 l'EPS partiva da un insieme di proprietà fisiche della materia dei raggi di luce per derivare la struttura geometrica dello spaziotempo da oggetti potenzialmente osservabili. Ciò è particolarmente adatto per discutere quale struttura geometrica è osservabile e quali sono convenzionali. In questo modo fornisce una motivazione fisica più forte e una comprensione non solo della geometria spazio-temporale in quanto tale, ma anche rispetto a geometrie più generali (come candidati per modellare matematicamente lo spazio-tempo fisico).
La RG di Einstein utilizza idee matematiche avanzate, come lo spazio-tempo curvo quadridimensionale, che non sono facili da afferrare anche se si padroneggia la matematica che ci sta dietro, il significato fisico essenziale e il contenuto non sono ovvi. L'EPS è solo uno di una serie di tentativi di chiarire la fisica alla base della matematica. Sfortunatamente e inevitabilmente, arrivarci richiede una matematica ancora più astratta. A prima vista, questo sembra controproducente; tuttavia, alcune di queste idee matematiche sono scelte in modo da essere più vicine all'interpretazione fisica "operativa", rappresentando l'osservazione fisica, la misurazione e la costruzione più elementari. Alla fine, l'EPS finisce con la metrica lorentziana ($\mathcal{L}4$), piuttosto che accettarla come punto di partenza: l'idea è di ricostruire ($\mathcal{L}4$) da zero, utilizzando solo mattoni con significato fisico intuitivamente chiaro per quanto possibile, e al costo di un po' di matematica in più. Lo scopo dell'EPS è limitato alla cinematica dello spazio-tempo stesso; resta aperto il problema di ogni possibile derivazione assiomatica o ricostruzione delle equazioni di campo di Einstein (la dinamica) che governano materia e gravità all'interno di un tale modello spazio-temporale [20].

> "L'approccio mostra come misure quantitative di tempo, angolo e distanza, e una procedura di spostamento parallelo ... possono essere ottenuti in modo costruttivo da ipotesi "senza geometria" sui raggi di luce e sulle particelle che cadono liberamente; La geometria pseudo-Riemanniana (o Weyliana) è riconosciuta ancora più chiaramente di prima come il linguaggio appropriato per una cinematica generalizzata che consente le inevitabili e sempre presenti "distorsioni" chiamate campi gravitazionali." (Ehlers)

3.1 Punti principali della costruzione concettuale dell'EPS

Tenendo presenti le considerazioni di cui sopra, illustriamo i punti principali della costruzione concettuale dell'EPS. Dalla geometria differenziale si sa che le geodetiche determinano la "loro connessione affine" (supponendo che la torsione sia zero, per esempio) e quindi una metrica corrispondente. In contrasto con la metrica stessa, queste geodetiche possiedono un'interpretazione fisica immediata (come linee di mondo di raggi di luce per geodetiche nulle o linee di mondo di particelle materiali per geodetiche di tipo tempo). Quindi, in termini molto generali, si cerca di ricostruire la metrica cercata, a partire dalle geodetiche note che soddisfano determinati criteri qualitativi (postulati), che sono fisicamente significativi e plausibili. I postulati presi in considerazione sono:

- **Particelle e raggi luminosi nello spazio degli eventi.**
  L'EPS assume una serie $\mathcal{M}$ di eventi come sfondo atti determinare la varietà dello spaziotempo. Su questo si considera un insieme di particelle p e un insieme di raggi di luce l. Ogni particella e ogni raggio di luce sono identificati con la loro "linea di mondo" degli eventi.

- **Coordinate radar uniformi degli eventi**
  Come sottoinsiemi dello spazio degli eventi si assumano le linee di mondo delle particelle e dei raggi di luce che vengono considerate come varietà uniformi unidimensionali. Un possibile sistema di coordinate locale è rappresentato dal tempo misurato da un orologio locale. I raggi di luce tra le particelle "osservatore" p e q mettono in relazione i loro parametri temporali privati. Queste si propongono di mappare gli eventi circostanti assegnando 2 valori di tempo ognuna, e, quindi, un totale di 4 coordinate. Postulando che questo processo possa coprire l'intero insieme di eventi, gli eventi formano uno spazio quadridimensionale regolare (varietà).

- **La propagazione della luce garantisce la validità locale della causalità puntuale**
  In ogni punto dello spazio-tempo (evento), la propagazione della luce determina un cono nullo infinitesimale, pari a una struttura conforme $\mathcal{C}$ di segnatura lorentziana. Questa affermazione richiede che si possa (topologicamente) distinguere tra vettori di tipo tempo, di tipo spazio e di tipo luce in un evento.

- **Le particelle in caduta libera definiscono l'influenza della gravità sul movimento delle stesse**
  Le particelle in caduta libera formano una famiglia preferenziale di linee di mondo tra le curve di tipo tempo. L'imposizione di una legge di inerzia generalizzata (o il ricorso a requisiti generali di covarianza) fornisce una struttura proiettiva $\mathcal{P}$ [13], ovvero una classe di connessioni che condividono le stesse linee di mondo delle geodetiche. Sottolineiamo che nulla indica, a questo livello, che tali connessioni debbano essere connessioni metriche;

quindi le particelle vengono identificate con le linee di mondo in caduta libera come geodetiche $\mathcal{P}$.

- **Correlazione tra la luce e il movimento delle particelle**
  In linea con l'esperienza fisica, si presume che le particelle possano essere costrette a inseguire un fotone in modo arbitrario da vicino, il che significa che i loro percorsi "riempiono il cono di luce" in modo che ogni geodetica nulla C sia anche una geodetica P. Questa condizione di compatibilità collega la struttura conforme alla connessione e si può dimostrare che è equivalente a richiedere che le geodetiche nulle C (ovvero i raggi di luce) siano un sottoinsieme delle geodetiche P. Se una geodetica ha un carattere in un punto, mantiene lo stesso carattere per tutto il tempo (come accade nel RG standard in vista della metricità). Sempre in considerazione di questa condizione di compatibilità il collegamento utilizzato per descrivere la caduta libera è più generale di quello indotto dalla sola struttura metrica.

Secondo l'analisi EPS, affinché una teoria gravitazionale sia fisicamente ragionevole, dovrebbero esistere condizioni di compatibilità tra la metrica e la connessione:

1. La connessione definisce una famiglia di linee autoparallele (chiamate anche impropriamente geodetiche) che stabiliscono la caduta libera di "particelle di prova" puntiformi (in linea di principio massicce). $\Rightarrow$ La famiglia delle linee autoparallele della connessione determina una classe di equivalenza di *"Connessioni proiettivamente equivalenti"*. Lungo di loro, la caduta libera è la stessa, cambia solo il tempo appropriato.

2. La metrica definisce i coni di luce e una famiglia di geodetiche. Le geodetiche nulle della metrica sono percorsi dei raggi luminosi (fotoni). $\Rightarrow$ I coni di luce della metrica definiscono una classe di equivalenza di *"metriche conformemente equivalenti"*. Lungo di essi le unità e gli strumenti di misura cambiano punto per punto, ma i raggi di luce e le traiettorie dei fotoni sono le stesse.

La condizione di compatibilità richiesta consiste nel pretendere che la famiglia di linee autoparallele delle connessioni (classe di equivalenza proiettiva) e la famiglia di geodetiche nulle (classe di equivalenza conforme) siano in una relazione precisa: ciascuna geodetica nulla della metrica deve essere una delle linee autoparallele della connessione.A questo punto della loro nuova analisi, tutti gli assiomi fondamentali sono stati soddisfatti.

3.2 La teoria EPS nel formalismo puramente metrico

Per recuperare la Relatività Generale come Teoria Relativistica Unica della Gravitazione Elhers, Pirani e Schild fanno ulteriori ipotesi assiomatiche:

- **"Assioma della Metricità"**: Viene scelta una singola metrica nella classe di equivalenza conforme e la connessione viene scelta come connessione di Levi-Civita di questa metrica.

- **"Assioma Lagrangiano"**: La lagrangiana che governa le equazioni del campo gravitazionale (in assenza di materia) è lo scalare di curvatura R.

L'assioma della metricità e quello Lagrangiano non hanno reali basi fisiche:

3.2.1 Assioma della Metricità

Per la teoria EPS deve esistere una metrica per definire aste e orologi, ma non c'è bisogno di fingere fin dall'inizio che definisca anche il potenziale gravitazionale, cioè la connessione. Supporre che l'assioma della metricità valga è solo una "questione di gusti" e, in un certo senso, corrisponde ad avere una grande semplificazione matematica. Dal punto di vista della Meccanica Lagrangiana, è una restrizione puramente cinematica imposta a priori alla Dinamica.[1] Questo punto era perfettamente chiaro ad Albert Einstein quando, nel 1923, cercò di stabilire un contesto più generale per la gravità (e l'elettromagnetismo) assumendo a priori che sia una metrica che una connessione devono essere scelte, dall'inizio, come variabili dinamiche ⇒ Nasce il cosiddetto "formalismo di Palatini".

3.2.2 Assioma Lagrangiano

Una volta chiarite quali sono le variabili che devono entrare nella dinamica, la scelta di una lagrangiana nella teoria EPS è ancora una "questione di gusto" o dovrebbe essere almeno determinata sulla base della fenomenologia, per adattarsi ai dati osservativi. Quando Hilbert, nel 1916, nel quadro puramente metrico ipotizzò che la Lagrangiana fosse lo scalare di curvatura della metrica questa era, in un certo senso, una scelta obbligata [14], dettata dalla "semplicità". La scelta della Lagrangiana di Einstein-Hilbert R(g), fatta nel 1916, non fu solo la "più semplice" [15]. Infatti, ha anche soddisfatto la volontà di ottenere equazioni di campo del secondo ordine generalizzando adeguatamente la legge di Newton, adattandosi a tutte le previsioni astronomiche, soddisfacendo la conservazione della materia ed essendo compatibile con la teoria di Maxwell. Il risultato ben noto sono le equazioni di campo di Einstein (1.25).

[1] Dal punto di vista fisico è meglio non imporre a priori limitazioni puramente cinematiche alla dinamica ⇒ La fisica richiede che le possibili restrizioni siano ottenute dalla dinamica piuttosto che imposte a priori come vincoli

3.3 La teoria EPS nel formalismo metrico-affine

Nel nuovo quadro introdotto assumendo sia metrica che connessioni come variabili indipendenti, Einstein considerò nuovamente, nel 1923, la lagrangiana come curvatura scalare (di metrica e connessione), sempre per semplicità. A quel tempo c'erano pochissime osservazioni attendibili da essere utilizzate come test e tutte concordavano con il formalismo puramente metrico. Le equazioni di campo impongono, a posteriori, che la connessione non sia nient'altro che la connessione di Levi-Civita della metrica, in modo che il RG è recuperata.
Einstein non ha investigato, tuttavia, cosa succede quando la materia è accoppiata non minimamente alla gravità. In questo caso sono necessarie solo alcune lievi modifiche se la materia si accoppia con la metrica ma sorgono grandi difficoltà se la materia si accoppia con la connessione (come dovrebbe essere se si deve prendere in seria considerazione il formalismo dell'EPS).

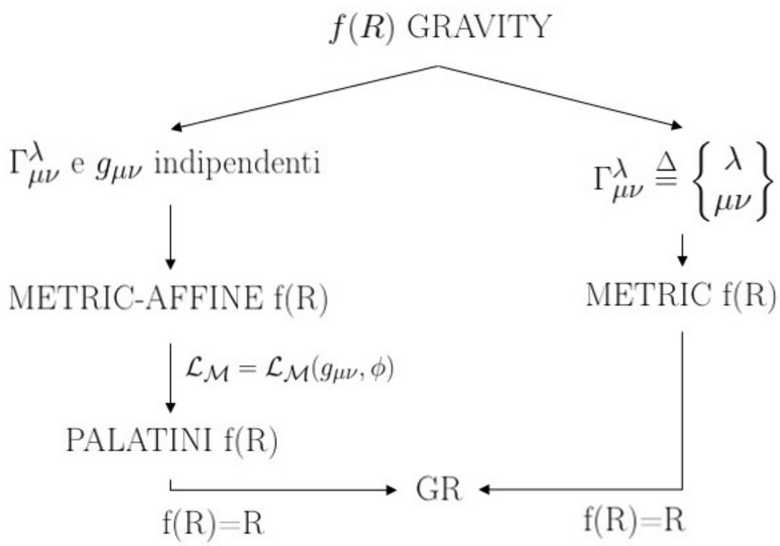

Figura 3.1. Legame tra le teorie della gravitazione

3.4 La teoria EPS rivisitata

Intorno agli anni Sessanta furono scritti numerosi articoli matematici sulle possibili generalizzazioni della RG di Einstein ritornando a Lagrangiane non lineari, più complicate di R(g). Queste teorie estese della gravitazione (ETG) [18-19] rimasero per molto tempo solo come un gioco matematico. Il rinnovato interesse verso le lagrangiane non lineari è stato recentemente determinato da nuovi aspetti fenomenologici, quali: inflazione, accelerazione nell'espansione, DM, gravità quantistica, limite di bassa energia dei modelli a stringa [16, 17].
L'analisi dell'EPS, riguardante i fondamenti matematici e fisici delle teorie relativistiche della gravitazione e la compatibilità tra (classi conformi di) metriche e (classi proiettive di) connessioni, deve ancora essere rivisitata nel framework dell' ETG. La nostra scelta si deve basare su due soli presupposti:

- Si assume il formalismo di Palatini $\Rightarrow$ In tale formalismo il campo gravitazionale è codificato da una connessione dinamica mentre la metrica dinamica determina le misure di distanza e la causalità. La dinamica, ed in particolare l'interazione con la materia, determinerà a posteriori le relazioni tra la metrica e la connessione, in modo da soddisfare i requisiti di compatibilità dell'EPS.

- Si assume che la lagrangiana sia una funzione non lineare in g e $\Gamma \Rightarrow$ la scelta più semplice è ovviamente quella per cui $\mathcal{L} = f(R(g, \Gamma))$ ma non è l'unica possibile [21].

È tuttavia noto che - sia nel formalismo puramente metrico (gravità di ordine superiore) che nell'approccio Palatini (gravità di primo ordine) - l'accoppiamento con la materia genera effetti relativistici che non sono presenti nel vuoto. Ciò è particolarmente evidente quando ci si affida a Lagrangiane non lineari di tipo $f(R)$. Nella teoria $f(R)$ della relatività (nell'approccio di Palatini) le equazioni di campo in presenza di materia indicano ancora che la connessione è metrica, ma ora è la connessione Levi-Civita di una nuova metrica $\hat{g}$, conforme alla metrica $g_{\mu\nu}$ [22] data nella Lagrangiana (2.37). Inoltre l'Eq. (1.46) ci indica che ci sono contributi extra provenienti dalla gravità $f(R)$ che possono essere gestiti come ulteriori contributi al tensore energia-impulso e le carenze osservative di cui sopra, legate a RG (ad esempio DM e DE), possono essere, in linea di principio, risolte in modo geometrico. In sintesi, il formalismo dell'EPS funziona anche per le ETG e ulteriori informazioni possono essere sempre racchiuse in un'adeguata definizione del tensore energia-impulso.

3.5 Conclusioni

Oggi, a seguito delle nuove evidenze fenomenologiche, si potrebbe affermare che i modelli non sono eterni e dovrebbero essere dettati dalla fenomenologia piuttosto che da regole prestabilite e pregiudizi. Perché dovremmo insistere su regole pregiudiziarie che impongano la metricità a priori e sulla scelta della più "semplice" Lagrangiana? Ci è suggerito, invece, dalla cosmologia e da questioni quantistiche di seguire rigorosamente l'analisi dell'EPS e lavorare, almeno a priori, nel quadro esteso del formalismo Palatini-EPS e quindi in una classe molto più ampia di Lagrangiane. A tale scopo, in questo lavoro si è analizzato il formalismo metrico-affine, con particolare attenzione alle ETG, aprendo la strada ad altre teorie molto interessanti della RG. La gravità $f(R)$ (*cfr.* 1.46) ingloba gradi di libertà aggiuntivi nel tensore energia-impulso che sono in grado di giustificare la DM e la DE, mai rivelata nei nostri laboratori. Numerosi, oggi, sono i progetti che hanno lo scopo di trovarla. Dal CERN di Ginevra, al Gran Sasso d'Abruzzo si tenta di scovare qualche segnale di particelle WIMPs, che potrebbero essere i costituenti della materia oscura. Tali particelle WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) sarebbero dotate di massa, ma non di carica elettrica e di carica di colore; perciò sarebbero soggette esclusivamente all'interazione gravitazionale e debole. Non essendo mai state osservate, la comunità scientifica si divide in due gruppi: da un lato c'è chi pensa che queste particelle non esistano e che quindi la materia oscura vada spiegata in qualche altro modo, dall'altro c'è chi pensa che la loro debolezza d'interazione porti ad una enorme fatica nel rivelarle. Tuttavia anche ammettendo l'esistenza della Dark Matter sotto forma di particelle WIMPs, rimarrebbero inspiegati i fenomeni inerenti all'energia oscura e perfino la stabilità delle stelle più massicce resterebbe un mistero. Quel che è certo è che abbiamo ancora molto da scoprire sul nostro universo e chissà se la strada intrapresa con le teorie $f(R)$, si rivelerà quella giusta. Nel frattempo continueremo ad alzare gli occhi al cielo con quel senso di ammirazione e rispetto che ci ha contraddistinti fin dall'antichità.

Bibliografia

[1] A. Palatini, *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **43** (1919) 203.

[2] S. Capozziello, G. Lambiase, *Open problems in gravitational physics*, Frascati Physics Series, **58** (2014).

[3] M. Kaku, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, Oxford, (1993).

[4] M. Paolella,*Cosmological Applications of Extended Theories of Gravity*, tesi di dottorato Università di Napoli "Federico II", (2016/2017).

[5] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, (2019) 513.

[6] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale con applicazioni all'Astrofisica Relativistica e alla Cosmologia*, Liguori Editore, (2006) 400.

[7] A. Di Dato, *The purely affine formulation of gravity theories*, tesi magistrale Università di Napoli "Federico II", (2011/2012).

[8] E. Snapper, R. J. Troyer, *Metric Affine Geometry*, Academic Press, (1971) 456.

[9] T. P. Sotiriou, S. Liberati, *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*, Annals Phys., **2** (2007) 40.

[10] J. Ehlers, F.A. E. Pirani, A. Schild, *The Geometry of free fall and light propagation*, Clarendon Press, **42** (1972) 63-84.

[11] J. Ehlers and E. Kohler, *Path structures on manifolds*, Journal of Mathematical Physics, **18** (1977) 2014.

[12] J. Ehlers, *The Nature and Structure of Spacetime*, in Mehra, J., The Physicist's Conception of Nature, (1973) 71-91.

[13] L.Fatibene, M.Francaviglia, G.Magnano, *On a Characterization of Geodesic Trajectories and Gravitational Motions*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **9** (2012) 6.

[14] T. Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, Blackie and Son, London (1929) 452 .

[15] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton University, New Jersey, (1955) 166.

[16] S. Capozziello, V. Faraoni,*Beyond Einstein Gravity: A Survey Of Gravitational Theories For Cosmology And Astrophysics*, Springer, New York, (2010) 467.

[17] S. Capozziello, M. De Laurentis, *Invariance Principles and Extended Gravity: Theory and Probes*, Nova Science Publishers, New York, (2011) 235.

[18] M. Di Mauro, L. Fatibene, M. Ferraris, M. Francaviglia, *Further Extended Theories of Gravitation: Part I*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **7**, (2010) 887.

[19] L. Fatibene, M. Francaviglia, S. Mercadante, *From the Ehlers-Pirani-Schild analysis on the foundations of gravitational theories to extended theories of gravity and dark matter* Int. J. Geom. Meth.Mod. Phys. **7**, 1185-1189 (2010).

[20] S. Capozziello, M. De Laurentis, L. Fatibene, M. Francaviglia, *The physical foundations for the geometric structure of relativistic theories of gravitation. From General Relativity to Extended Theories of Gravity through Ehlers-Pirani-Schild approach*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **9** (2018) 11.

[21] J. Kijowski, *Universality of the Einstein theory of gravitation*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **13** (2016) 19.

[22] G. Allemandi, M. Capone, S. Capozziello, M. Francaviglia, *Conformal aspects of Palatini approach in Extended Theories of Gravity*, Gen. Rel. Grav., **38**, (2006) 33.