UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Introduzione ai circuiti quantistici superconduttivi

Relatori:
Carmine Antonio Perroni

Candidato:
Valentina Barreca
Matr. N850001219

Anno Accademico 2019/2020

Contents

Introduzione

In questo lavoro di tesi si vuole introdurre il fenomeno della superconduttività, in particolare in relazione ai circuiti superconduttivi più semplici.
Per alcuni materiali, avvicinandosi allo zero assoluto, si osserva un brusco cambiamento dell'andamento della resistività (e, di conseguenza, della resistenza): essa, praticamente, diventa nulla ad una certa temperatura T_c, che prende il nome di temperatura critica e che è diversa per ogni materiale; ad esempio il niobio ha T_c =9.3K, per l'alluminio è T_c =1.2K, mentre metalli come l'oro o l'argento non presentano questa fase. Dal punto di vista pratico è, ovviamente, sconveniente utilizzare materiali a temperature così basse; per questo motivo si è cercato, e si cerca ancora, di realizzare materiali che presentino la fase superconduttiva a temperature più elevate. Ad aprire la strada a questa ricerca fu la realizzazione, negli anni '80, di un composto con T_c=92K. Inoltre sono state sviluppate delle tecniche per ottenere materiali superconduttivi, che consistono, ad esempio, nel sottoporli ad un'alta pressione, come nel caso del ferro o dell'ossigeno (la cui temperatura critica in tale regime è tra le più alte, circa 30K); per altri elementi, come l'idrogeno, la fase superconduttiva è stata, fino a poco tempo fa solo predetta (con T_c ≈300K). Un primo caso realizzato in laboratorio, molto recente, è un composto di idrogeno, zolfo e carbonio superconduttivo a T_c=287.7±1.2K e p=267±10GPa; pur essendo a temperatura ambiente, la pressione a cui il composto deve essere sottoposto è comunque troppo elevata per costruire dispositivi che possano davvero essere utilizzati, ma ciò conferma le predizioni che erano state precedentemente fatte riguardo le fasi superconduttive dell'idrogeno. E' da notare che quest'ultimo, così come altri materiali citati non è, a temperatura e pressione standard, nemmeno conduttore. D'altra parte sono anche state sviluppate tecniche per realizzare composti, anche organici, che siano superconduttori.
La ricerca di materiali superconduttivi in condizioni standard è importante, dal punto di vista pratico, per la realizzazione di numerosi dispositivi, tra cui i qubits (contrazione di quantum bits). Con questo termine ci si riferisce, spesso impropriamente, ad un qualsiasi sistema quantistico a due livelli; un esempio di sistema fisico che può essere considerato tale è la luce polarizzata, che ha i due autostati $|H\rangle$ e $|L\rangle$ (orizzontale e verticale).

Nell'ambito della computazione quantistica, invece, un qubit è l'unità base dell'informazione, in analogia con i bit binari. Uno dei metodi per costruire qubits si basa proprio sull'utilizzo di materiali superconduttivi: essi, infatti, sono vantaggiosi perchè permettono sia di avere una dissipazione d'energia nulla che di realizzare dispositivi piccoli, miniaturizzati.
In particolare l'obiettivo di questo elaborato è sviluppare un modello adatto a due tipi di qubits, di fase e di flusso, il cui funzionamento si basa sull'Effetto Josephson e sulla costruzione di giunzioni di tunneling. Per farlo sarà introdotto prima il modello BCS, che è microscopico, e poi si svilupperà un modello che permette di studiare le giunzioni come se fossero circuiti classici. D'altra parte tale modello è adatto a descrivere giunzioni di dimensioni relativamente grandi (dell'ordine del micron): poiché i dispositivi che si utilizzano sono molto più piccoli, diventa necessario sviluppare un modello quantistico. A questo punto ci sono più strade possibili: una consiste nello sviluppare la teoria BCS anche per le giunzioni, ma il modello che così si ottiene è molto complesso; un'altra possibilità è partire dalle equazioni classiche del circuito e quantizzarlo, utilizzando delle regole di corrispondeza. Questo è ciò che verrà fatto nel secondo capitolo della tesi.

Chapter 1

Modello classico per circuiti con giunzioni superconduttive

In questo primo capitolo si vuole analizzare il fenomeno della superconduttivà, che si osserva, per alcuni materiali, a temperature vicine allo zero assoluto. In tale regime la resistenza del materiale è nulla; ciò comporta una serie di conseguenze, che permettono di utilizzare questi materiali per realizzare dei qubit, ovvero dei sistemi a due livelli.

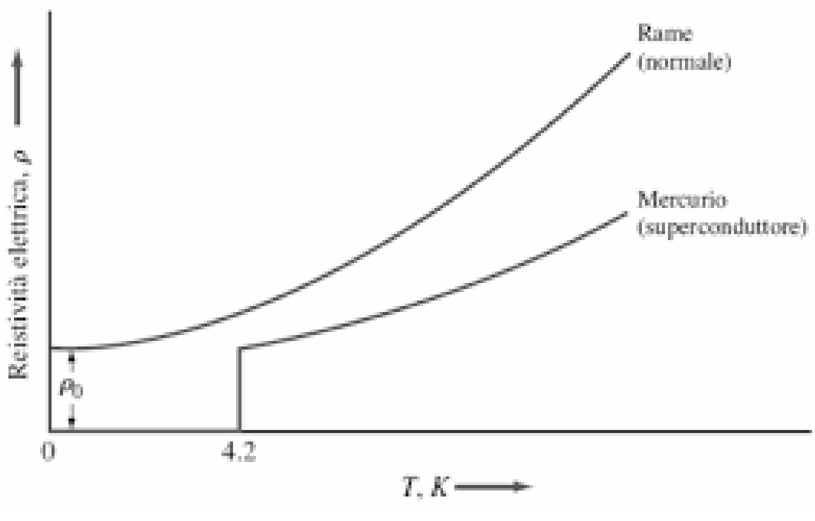

Figure 1.1: Andamento della resistività ρ, proporzionale alla resistenza R, in funzione della temperatura per un conduttore e per un superconduttore.

In particolare utilizzeremo il modello BCS per spiegare il comportamento dei materiali superconduttivi e ne studieremo una particolare struttura, ovvero la giunzione Josephson. Infine svilupperemo il modello RSJ (resistively shunted junction), che permette di schematizzare una giunzione, che è un sistema quantistico, come un circuito dell'elettromagnetismo classico, in cui, quindi, sono presenti resistenze, condensatori ed induttanze.

1.1 Introduzione al modello BCS

Il modello BCS è un modello microscopico, tramite il quale si riesce a spiegare il fenomeno della superconduttività, in particolare con l'esistenza delle coppie di Cooper. In pratica si considera il fatto che gli elettroni interagiscono tra loro formando coppie nelle quali i due elettroni hanno spin opposti. Risulta rilevante, quindi, la seguente funzione di correlazione:

$$S_{\uparrow\downarrow}\left(r_1, r_2\right) = \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}\left(r_1\right) \psi_{\downarrow}^{\dagger}\left(r_1\right) \psi_{\downarrow}\left(r_2\right) \psi_{\uparrow}\left(r_2\right)\rangle. \tag{1.1}$$

Una coppia di Cooper è formata da due elettroni che hanno spin e momenti opposti: di conseguenza esse si comportano come bosoni, avendo spin pari a 0, ed è possibile quindi ottenere un condensato. L'interazione elettrone-elettrone è, di fatto, quella residua dovuta alle oscillazioni del reticolo; si può capire, quindi, perché il fenomeno si osservi solo al di sotto di una certa temperatura, caratteristica del materiale che si sta considerando. All'aumentare della temperatura tale tipo di interazione è trascurabile, in quanto inizia a prevalere l'agitazione termica all'interno del reticolo. Inoltre è possibile misurare le dimensioni di una coppia di Cooper tramite la lunghezza di coerenza ξ , ovvero la lunghezza entro la quale la correlazione è non trascurabile. E' possibile vedere che ξ è molto maggiore della distanza media tra gli elettroni, quindi non è possibile trattare le coppie come quasiparticelle puntiformi.
Quando si utilizza questo modello cambia il significato fisico della funzione d'onda ψ, in quanto essa adesso descrive un gran numero di particelle nello stesso stato. Non si tratta più di una densità di probabilità, ma di una funzione macroscopica, che può essere implicitamente moltiplicata per la carica elettrica. In questo modo $\psi^*\psi$ può essere interpretata come una densità di elettricità. Si può considerare la formula (1.1) nel limite in cui $|r_1 - r_2|$ tende ad infinito

$$S_{\uparrow\downarrow}(r_1, r_2) = \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(r_1)\psi_{\downarrow}^{\dagger}(r_1)\rangle\langle\psi_{\downarrow}(r_2)\psi_{\uparrow}(r_2)\rangle. \tag{1.2}$$

Poiché l'interazione deve essere non nulla affinché si formino le coppie, i due valori medi devono essere non nulli. Ciò sarebbe impossibile in un "normale" stato quantistico: i due operatori, infatti, cambiano il numero di elettroni, in un caso aggiungendone due, nell'altro distruggendone altrettanti. Se lo stato ha un numero definito di particelle, allora i valori medi devono essere nulli. D'altra parte in questo caso abbiamo un numero di elettroni così alto da rendere trascurabile l'effetto di uno o due elettroni: di conseguenza abbiamo valor medio anomalo, diverso da zero. A partire da questo si può definire il parametro d'ordine di un superconduttore, che ha le dimensioni di un'energia

$$\Delta(r) \equiv g\langle\psi_\downarrow(r)\psi_\uparrow(r)\rangle. \tag{1.3}$$

Il fattore g è una misura dell'energia di legame tra gli elettroni nella coppia.
Utilizzando questo modello si sviluppa la teoria BCS, secondo la quale lo stato fondamentale del sistema è:

$$|BCS\rangle = \prod_k (|u_k| + |v_k| e^{i\phi} a^\dagger_{\uparrow k} a^\dagger_{\downarrow -k})|0\rangle \tag{1.4}$$

dove $|0\rangle$ è il vuoto e u_k e v_k sono dei coefficienti complessi, detti fattori di coerenza, che rispettano la condizione di normalizzazione:

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \tag{1.5}$$

Inoltre il prodotto è fatto sugli stati k ad un elettrone; dalla formula (1.4) si può notare che lo stato fondamentale è una sovrapposizione coerente di stati con un numero pari di elettroni. Quindi nello stato fondamentale di un superconduttore non ci sono elettroni di conduzione. Se si dà energia al sistema, invece, si rompono le coppie di Cooper e si ottiene un sistema formato sia da coppie che da elettroni di conduzione (è proprio ciò che accade aumentando la temperatura). L'energia necessaria per rompere una coppia è 2|Δ|. Da qui deduciamo che vi è un gap energetico finito tra stato fondamentale e stati eccitati.
Poiché sono presenti delle cariche all'interno di un superconduttore, si può individuare una corrente di coppie, che prende il nome di supercorrente. Per calcolarla si utilizza un'espressione formalmente uguale alla densità di corrente di elettroni, tenendo conto del fatto che tutte le coppie hanno la stessa fase, in quanto costituiscono un sistema coerente

$$J(r) = \frac{2e\hbar}{2im_e}\psi_s^*(r)\nabla\psi_s(r) = n_s(r)ev_s(r). \tag{1.6}$$

Da $\psi_s(r) \propto e^{i\theta(r)}$ si riesce a ricavare la supervelocità delle coppie:

$$v_s = \frac{\hbar}{2m_e}\nabla\theta(r). \tag{1.7}$$

Utilizzando le regole di corrispondenza è possibile scrivere la quantità di moto di una coppia come:

$$p_s = -i\hbar\nabla. \tag{1.8}$$

In presenza di campo magnetico quest'ultima va riscritta sommando il termine di fase, ovvero dipendente dal potenziale vettore $A(r)$, che una particella carica acquista in un campo elettromagnetico. La supervelocità può essere calcolata come il valor medio di p_s

$$2m_e v_s(r) = \frac{2}{n_s}\langle\psi_s(r)[-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}A(r)]|\psi_s(r)\rangle = \hbar\nabla\theta(r) - \frac{2e}{c}A(r). \quad (1.9)$$

Inoltre vale l'equazione di continuità, nella quale si nota che la fase θ è un'osservabile, poiché costituisce un pezzo della densità J

$$J = \frac{\hbar}{m_e}\left(\nabla\theta - q_e A\right)\rho \quad (1.10)$$

1.2 Effetti macroscopici

1.2.1 Effetto Meissner

Uno degli effetti macroscopici che si osservano nei superconduttori è l'espulsione del campo magnetico: in particolare consideriamo due bulk superconduttivi, uno che costituisce un dominio semplicemente connesso, l'altro no, ed immergiamo entrambi in un campo magnetico.
Per quanto riguarda il primo caso, per campi non troppo intensi, si osserva l'Effetto Meissner, ovvero l'espulsione del flusso magnetico. In realtà si osserva che, per una breve lunghezza, il flusso non viene espulso: si tratta della lunghezza di penetrazione, che dipende dal materiale e dalla temperatura a cui esso si trova. In particolare consideriamo una situazione di equilibrio, quindi $\nabla J = 0$ e supponiamo che $\nabla A = 0$, cosa che si può fare, in quanto il potenziale vettore è definito a meno di una fase. Inoltre supponiamo che la densità ρ sia costante. Applicando l'operatore ∇ all'equazione di continuità (1.10) si ottiene che, in queste condizioni, $\nabla^2\theta = 0$. Affinchè ciò valga ovunque, la fase deve necessariamente essere costante, quindi l'equazione di continuità diventa:

$$J = -\frac{\rho q}{m_e}A; \quad (1.11)$$

si ha, quindi, indipendenza dalla fase. A questo punto si può ricavare la lunghezza di penetrazione, partendo dalla relazione tra il potenziale vettore e J in elettromagnetismo:

$$\nabla^2 A = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2}J = \frac{\rho q}{\epsilon_0 c^2 m_e}A = \lambda^2 A. \quad (1.12)$$

Dalla soluzione della (1.12) è evidente che, se le dimensioni del superconduttore sono molto maggiori rispetto a λ, il campo è praticamente nullo al suo interno;

essa, infatti, è del tipo (si osservi che λ^2 è positivo, λ reale):

$$A(r) = Ce^{\lambda r} + De^{-\lambda r}. \tag{1.13}$$

Nel secondo caso, invece, osserviamo la quantizzazione del flusso magnetico. Usiamo ancora l'equazione di continuità, considerando che nel foro J=0, quindi

$$\hbar \nabla \theta = qA(r). \tag{1.14}$$

Scegliamo una curva γ chiusa su cui integrare, così da avere

$$\hbar \oint \nabla \theta ds = q \oint A(r) ds = q\Phi, \tag{1.15}$$

dove Φ è il flusso magnetico. D'altra parte, in generale:

$$\int_A^B \nabla \theta ds = \theta_B - \theta_A. \tag{1.16}$$

La formula (1.16) vale anche nel caso in cui A e B siano lo stesso punto; tale integrale non è nullo, perchè il dominio su cui è stata presa la curva non è semplicemente connesso. Ciò che deve essere uguale nei due punti è la funzione d'onda, che è nella forma $\psi_s \propto e^{i\theta}$; quindi deve valere la condizione

$$2\pi n \hbar = q\Phi. \tag{1.17}$$

Da questa condizione si vede che, nel caso di dominio non semplicemente connesso, c'è la quantizzazione del flusso del campo magnetico. In pratica un anello superconduttivo, immerso in un campo magnetico e poi estratto da esso, ne "cattura" una parte, quantizzata, quindi proporzionale ad una certa quantità elementare. Inoltre la carica che compare nella (1.17) è quella della coppia; ciò significa che il flusso elementare è

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{e}. \tag{1.18}$$

La supercorrente così descritta è non dissipativa, perché inizia a perdere energia ed impulso solo quando le coppie di Cooper si rompono: di conseguenza esiste una corrente critica, che dipende dal parametro d'ordine, quindi dal materiale utilizzato e dalla particolare configurazione geometrica. Tale densità di corrente è tipicamente dell'ordine di $10^5 - 10^6$A/cm^2 e, finché si hanno correnti meno intense, allora il sistema ha lunghi tempi di coerenza.

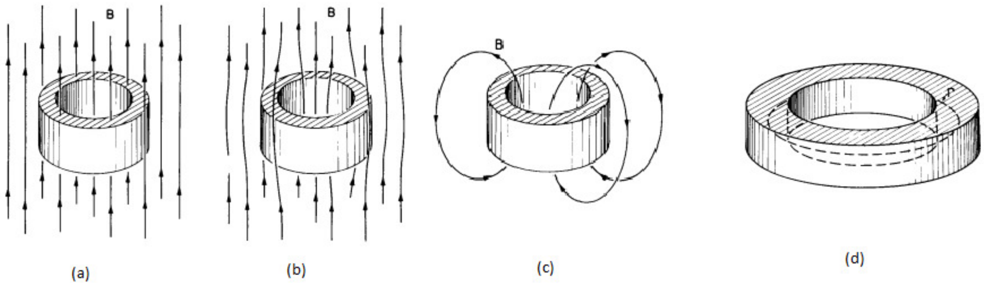

Figure 1.2: (a) Anello conduttore immerso in campo magnetico B; (b) anello superconduttivo immerso in campo magnetico B; (c) cattura del flusso magnetico per Effetto Meissner da parte di un anello superconduttivo; (d) curva Γ chiusa presa sull'anello superconduttivo.

1.2.2 Effetto e giunzioni Josephson

Un altro effetto macroscopico che si osserva riguarda le giunzioni Josephson. In particolare consideriamo il caso di giunzioni di tunneling: si tratta di dispositivi costituiti da due superconduttori affacciati, separati da un sottile layer isolante, che permette il passaggio di supercorrente, nel quale il parametro d'ordine è molto basso; inoltre il layer è molto sottile, in quanto ha uno spessore dell'ordine del nanometro.
Si osserva che Δ, nella giunzione, può anche essere nullo, ma questo è dovuto al fatto che g=0, non il valor medio anomalo, altrimenti non si avrebbe il tunneling.
Si tratta di un fenomeno di superconduttività debole, in quanto in questi dispositivi si raggiunge una densità di supercorrente al più di $10A/cm^2$, quindi molto più bassa del valore limite. Inoltre esso si divide, in realtà, in due regimi: l'Effetto Josephson dc e l'Effetto Josephson ac. Il primo si osserva all'equilibrio, mentre il secondo riguarda il caso in cui vi sia una differenza di potenziale tra le due giunzioni.
In un sistema di questo tipo gli elettroni, per effetto Tunnel, possono passare da un superconduttore all'altro, in quanto la zona intermedia può essere interpretata come una barriera di potenziale, come rappresentato in figura 1.3. D'altra parte la probabilità che un elettrone la attraversi è legata alla trasparenza D della barriera, che è molto bassa; ciò significa che tale corrente sarà trascurabile.
Ognuno dei bulk superconduttivi ha un proprio parametro d'ordine ed un proprio potenziale chimico. Si può descrivere il sistema in forma matriciale:

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n_{s1}}{2}} e^{i\theta_1} \\ \sqrt{\frac{n_{s2}}{2}} e^{i\theta_2} \end{pmatrix}; \tag{1.19}$$

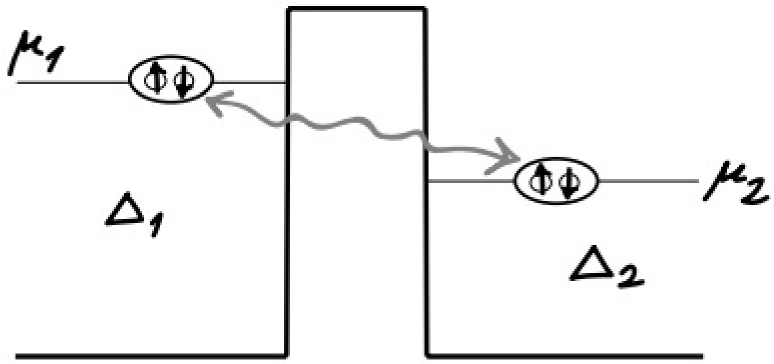

Figure 1.3: Giunzione Josephson vista come una barriera di potenziale tra due superconduttori.

$$H = \begin{pmatrix} eV & K \\ K & -eV \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

La (1.20) è l'hamiltoniana di tunneling del sistema: i termini sulla diagonale tengono conto della differenza di potenziale tra i due bulk (eV = $\mu_1 - \mu_2$), mentre i termini fuori diagonale sono proporzionali a D.
Si può scrivere l'equazione di Schrodinger del sistema, da cui ricavo due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dn_{s1}}{dt} = -\frac{dn_{s2}}{dt} = \frac{2Kn_{s0}}{\hbar}\sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d(\theta_1 - \theta_2}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \end{cases} \tag{1.21}$$

avendo supposto che, in assenza di tunneling, entrambi i bulk abbiano la stessa concentrazione di elettroni n_{s0}.
La prima di queste equazioni descrive l'effetto Josephson dc: il termine $\frac{dn_{s1}}{dt}$ è il rate di cariche che passano da un bulk all'altro, quindi si può riscrivere la prima equazione come

$$I_J = I_C \sin(\theta_1 - \theta_2). \tag{1.22}$$

Si osserva una dipendenza sinusoidale dalla differenza di fase, che però non è fondamentale: con altri tipi di giunzioni o con una diversa approssimazione su D, si ottengono andamenti diversi. Ciò che è importante è che si genera, all'interno della giunzione, una corrente, che prende il nome di corrente di Josephson, che dipende solo dalla differenza di fase tra i due bulk e dai parametri costruttivi. Inoltre tale flusso di cariche è non dissipativo e coerente e il parametro I_C prende il nome di corrente critica della giunzione.
Poiché siamo in equilibrio termodinamico, si può ottenere la corrente anche come

$$I_J = c\frac{\partial F}{\partial \Phi}, \tag{1.23}$$

dove F è l'oppurtuno potenziale termodinamico del sistema e $\Phi = \frac{\Phi_0 \theta}{2\pi}$.
Inoltre all'energia del sistema bisogna sommare un altro contributo, dato proprio da questo effetto, del tipo

$$U_J(\theta) = \frac{1}{c}\int d\Phi I_J = -\frac{I_c \Phi_0}{2\pi c}\cos\theta = -E_J \cos\theta; \tag{1.24}$$

la quantità E_J prende il nome di energia Josephson.
La seconda equazione, invece, descrive l'effetto Josephson ac; essa può essere riscritta come

$$V = \frac{\hbar}{2e}\frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{dt}. \tag{1.25}$$

Da qui è possibile vedere che, applicando una differenza di potenziale alla giunzione, aumenta la differenza di fase tra i due bulk e viceversa.
Si tratta di un fenomeno di non-equilibrio: ciò comporta che, all'interno della giunzione, scorra non solo la supercorrente, ma anche una corrente di elettroni, dissipativa, cosa che era stata precedentemente esclusa. Per spiegare il motivo per cui accade possiamo fare riferimento alla supercorrente critica, poiché essa costituisce un limite superiore: se si ha una differenza di potenziale tale che $I > I_c$, allora la corrente in eccesso è standard, dissipativa. Il modello RSJ, che sarà oggetto del prossimo paragrafo, descrive bene un sistema del genere.

1.3 Modello RSJ

1.3.1 Il modello

Il modello RSJ (resistively shunted junction) è un modello classico che permette di studiare giunzioni Josephson come se fossero circuiti: in pratica esso permette di descrivere un sistema quantistico in modo classico; per questo motivo esso è valido solo nel caso in cui gli oggetti considerati siano di dimensioni macroscopiche. In particolare schematizziamo il funzionamento della giunzione mettendo una resistenza finita R in parallelo (figura 1.4), del tipo $R \propto exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)$.
In questo modo si riescono a descrivere sia il comportamento superconduttivo che quello resistivo, data la dipendenza dalla temperatura T. Si nota, infatti, che nel limite per $T \to 0$, R tende ad infinito. Se $I < I_c$, allora, il ramo in cui è presente R è cortocircuitato; altrimenti esso descrive la dissipazione che si ha quando $I > I_c$.
In tale regime, quindi, si ha un ulteriore contributo alla corrente, che si può scrivere usando la legge di Ohm :

$$I = I_c \sin\theta(t) + \frac{V(t)}{R} = I_c \sin\theta(t) + \frac{\hbar}{2eR}\frac{d\theta}{dt}; \tag{1.26}$$

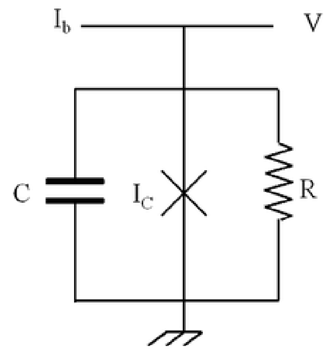

Figure 1.4: Schematizzazione di una giunzione Josephson con il modello RSJ: la X centrale è il simbolo circuitale per indicare proprio la giunzione; è presente anche un condensatore in parallelo alla giunzione, perchè il modello può essere esteso.

dove V(t) non è altro che il potenziale di Josephson della (1.25).
La (1.26) ha una soluzione implicita nella forma

$$t(\theta) = \frac{\hbar}{2eRI_c} \int \frac{d\theta}{\frac{I}{I_c} - \sin\theta}; \tag{1.27}$$

l'integrale della (1.27) può essere risolto nell'intervallo $[0, 2\pi]$, così da calcolare il periodo della fase (che coincide con quello della tensione):

$$T_{RSJ} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}} \frac{\hbar}{2eRIc} \equiv \frac{2\pi}{\omega_{RSJ}}. \tag{1.28}$$

Dalla (1.27) si può anche ricavare l'espressione del potenziale ai capi della giunzione

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e}\frac{d\theta}{dt} = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \cos\omega_{RSJ} t}. \tag{1.29}$$

In realtà il modello può essere esteso considerando anche la capacità di shunt che si sviluppa tra i due bulk, visti come due elettrodi; in tal caso si parla di modello RCSJ (resistively and capacitively shunted junction).
Inoltre dalla relazione valida in elettromagnetismo $V = \frac{L\dot{I}}{c^2}$, tramite la quale si definisce l'induttanza, si ricava, confrontando questa e la (1.25), che una giunzione Josephson può essere trattata come un'induttanza non lineare:

$$L_J(\theta) = \frac{\hbar c^2}{2eI_c \cos\theta}. \tag{1.30}$$

In particolare si nota che si ha una dipendenza dalla differenza di fase tra i due bulk: ciò costituisce una proprietà importante delle giunzioni, in quanto il valore

di L_J può essere tarato dall'esterno, modificando la fase.
Utilizzando il modello RCSJ non si ha solo la resistenza in parallelo alla giunzione, ma anche una capacità C. In questo modo si descrive la giunzione come un circuito LC parallelo, che costituisce un oscillatore armonico, in parallelo a sua volta con una resistenza R, che dà, invece, la dissipazione. Il comportamento di tale circuito dipende dai parametri costruttivi della sistema. In particolare definiamo due quantità:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \tag{1.31}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \tag{1.32}$$

il parametro α è detto costante di smorzamento, mentre ω_0 è la frequenza di risonanza. In base ai valori che assumono questi due parametri poniamo il circuito in diversi regimi.
Nel seguito della trattazione sarà utilizzato il modello RSJ.

1.3.2 Giunzione Josephson polarizzata nel caso non dissipativo

Consideriamo una giunzione Josephson polarizzata, ovvero sottoposta ad una differenza di potenziale. In questo modo ci poniamo in una situazione di non-equilibrio, quindi non è possibile trattare il sistema minimizzando un funzionale termodinamico.
Come prima cosa si considera l'energia della giunzione, utilizzando come variabile la fase θ:

$$U(\theta, I) = -\frac{I_c\Phi_0}{2\pi c}\cos\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta. \tag{1.33}$$

Supponiamo di polarizzare la giunzione in modo tale che la fase cambi lentamente nel tempo; tale condizione può essere realizzata supponendo che
$|eV| = \frac{\hbar}{2}|\dot{\theta}| < |\Delta|$, dove Δ è il parametro d'ordine. In questo modo pur essendo in una situazione di non-equilibrio si ha un flusso coerente di carica, perché non si ha abbastanza energia per rompere le coppie di Cooper. D'altra parte si ha anche un contributo dovuto alla tensione, quindi si ha energia totale

$$E(\theta, \dot{\theta}; I) = \frac{C\dot{\theta}^2}{2}\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 - \frac{I_c\Phi_0}{2\pi c}\cos\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta = K(\dot{\theta}) + U(\theta; I). \tag{1.34}$$

La formula (1.34) descrive in modo effettivo una particella immersa in un potenziale washboard (figura 1.5).
Dall'energia si può facilmente vedere che il termine $K(\dot{\theta})$ è assimilabile all'energia

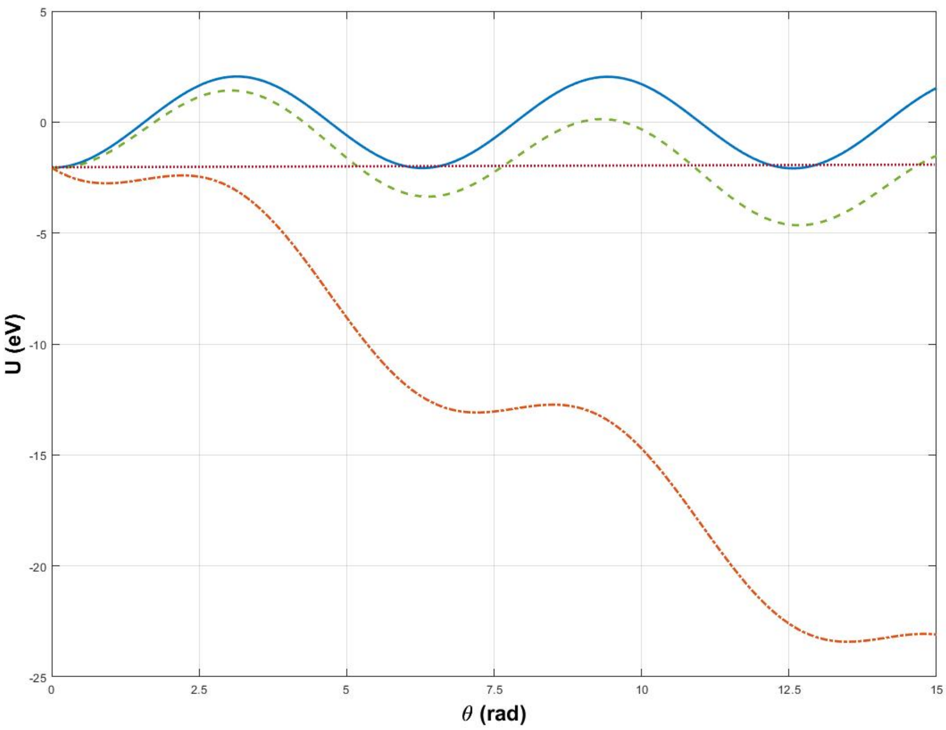

Figure 1.5: I grafici rappresentano lo stesso potenziale (1.33), parametrizzato in modi diversi: la giunzione resta la stessa, in quanto $I_c = 10^{-3}$A è fissata; ciò che cambia è la corrente di polarizzazione I. In particolare: blu→I=10^{-6}A; verde→ 10^{-4}A; arancione= $8 \cdot 10^{-4} A$. La linea rossa tratteggiata è il valore che l'energia potenziale assume quando θ=0; se si suppone che anche $\dot{\theta}$=0, coincide con l'energia meccanica.

cinetica, mentre $U(\theta; I)$ è un'energia potenziale. Si può, quindi, scrivere la lagrangiana del sistema, utilizzando θ e $\dot{\theta}$ come variabili:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; I) = K - U = \frac{C\dot{\theta}^2}{2}\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 + \frac{I_c\Phi_0}{2\pi c}\cos\theta + \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta. \tag{1.35}$$

Si può scrivere, quindi, l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L} = 0, \tag{1.36}$$

che si può risolvere numericamente esplicitando la forma della lagrangiana.
Poiché abbiamo supposto che la fase θ vari lentamente e, di conseguenza, la tensione è piccola, stiamo considerando piccole oscillazioni attorno ad un punto di

equilibrio. In particolare la particella che si sta considerando è immersa nel potenziale washboard della figura 1.5; da qui si vede che, fissando opportunamente la capacità e le condizioni iniziali, si può fare in modo che il sistema oscilli attorno ad un minimo locale. In particolare dall'equazione del moto si ricava che tali oscillazioni hanno una frequenza

$$\omega_p = \sqrt{\frac{E_J}{C(\frac{\hbar}{2e})^2}}, \tag{1.37}$$

che prende il nome di frequenza di plasma di Josephson. La (1.37) può essere riscritta introducendo l'energia di charging, ovvero l'energia elettrostatica di una singola coppia di Cooper

$$E_C = \frac{2e^2}{C}; \tag{1.38}$$

in questo modo la frequenza diventa

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2E_J E_C}{\hbar^2}}. \tag{1.39}$$

Tale frequenza è molto bassa quando si ha una giunzione molto grande ed aumenta man mano che le dimensioni diminuiscono; nel caso di giunzioni le cui dimensioni sono dell'ordine del micron ω_p è dell'ordine delle decine di GHz.

1.3.3 Giunzione Josephson polarizzata nel caso dissipativo

Nel paragrafo precedente è stata analizzata la giunzione Josephson polarizzata nel caso non-dissipativo, quindi per piccole oscillazioni. Ora vogliamo considerare il caso dissipativo, in cui non vale l'approssimazione precedentemente fatta su $\dot{\theta}$; ciò significa che si ha potenziale tale da rompere le coppie di Cooper. In questa situazione si ha sia la supercorrente che la corrente dissipativa; per tener conto di questo contributo si utilizza la funzione di dissipazione, che permette di riscrivere l'equazione di Lagrange

$$\mathcal{Q}(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\frac{dE}{dt}; \tag{1.40}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L} = -\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\dot{\theta}}. \tag{1.41}$$

La lagrangiana del sistema è quella della formula (1.35), mentre la funzione $\mathcal{Q}$, utilizzando il modello RSJ, può essere scritta come

$$\mathcal{Q} = \frac{V^2}{2R} = \left(\frac{1}{2R}\frac{\hbar\dot{\theta}}{2e}\right)^2, \tag{1.42}$$

dove è stata utilizzata la tensione Josephson della (1.25). Si può, quindi, riscrivere la (1.41) come equazione del moto nella variabile θ:

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\ddot{\theta} + \frac{I_c\Phi_0}{2\pi c}\sin\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c} = -\frac{\hbar}{2eR}\frac{\Phi_0}{2\pi c}\dot{\theta}. \quad (1.43)$$

Rispetto al caso precedente ora abbiamo un termine di frizione, che dipende da $\dot{\theta}$; dall'analisi dell'equazione (1.43) si ricava che è possibile raggiungere un valore limite stabile per $\dot{\theta}$, quindi per il potenziale di Josephson, che vi dipende.
Supponiamo di avere una giunzione macroscopica, quindi $E_c << E_J$: sotto questa ipotesi la derivata seconda nella (1.43) è trascurabile e torniamo allo stato resistivo precedentemente visto. In particolare quest'ultima equazione diventa analoga alla (1.26). Si può anche notare che, in regime dissipativo, θ è ancora definita a meno di $2m\pi$ (con m intero), ma è possibile distinguere, ad esempio, lo stato con fase $\theta = \theta_1$ e quello con $\theta = \theta_1 + 2\pi$ misurando l'energia dissipata.
Dalla modellizzazione appena sviluppata si vede che, per realizzare uno stato resistivo, si può aumentare le tensione ai capi della giunzione. Per capire che cosa accade possiamo fare nuovamente riferimento al potenziale washboard della figura 1.5: all'aumentare della corrente il minimo diventa man mano meno profondo, fino a non esserci più quando viene raggiunta I_c. Ciò significa che non si ha più un punto di equilibrio stabile e la particella può "scivolare" lungo la curva del potenziale.
Nella realizzazione di qubit è importante avere coerenza del sistema, cosa che non è generalmente valida quando si ha dissipazione: ciò significa che spesso si fa in modo da essere lontani da questo regime.

1.3.4 Soluzione numerica dell'equazione del moto

L'equazione (1.36) può essere riscritta esplicitamente e risolta numericamente:

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\ddot{\theta} + \frac{I_c\Phi_0}{2\pi c}\sin\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c} = 0. \quad (1.44)$$

In particolare ci si aspetta di avere due regimi al variare della corrente di polarizzazione: in particolare se $I << I_c$ ci si aspetta un andamento oscillante, in cui viene mantenuta la coerenza per tempi relativamente lunghi. Man mano che $I \rightarrow I_c$, invece, ci si avvicina allo stato resistivo, quindi ci si aspetta una decoerenza della fase.
Per osservare questo effetto si è scelto di risolvere, tramite MatLab, l'equazione (1.44), fissando la giunzione (quindi la sua corrente critica e la capacità) e variando la corrente di polarizzazione. In particolare è stata scelta I_c=1mA e C=0.1nF. In tutti i casi le condizioni iniziali sono θ=0 e $\dot{\theta}$=0.

Inizialmente l'equazione è stata risolta nel caso in cui I è di qualche ordine di grandezza minore rispetto alla corrente critica, così da essere nel caso coerente, quindi è stata scelta I=1μA.

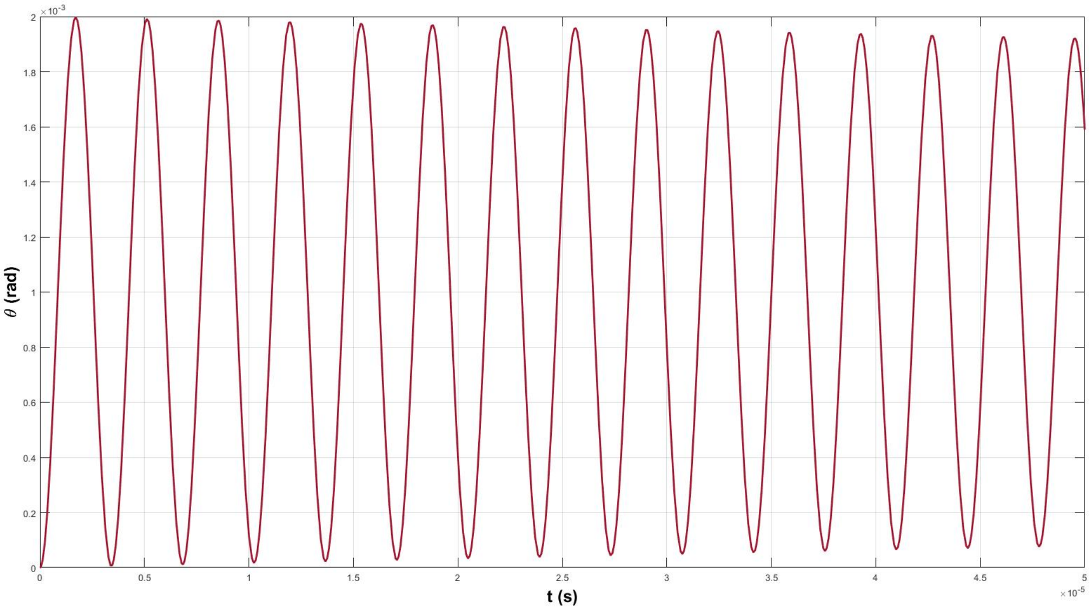

Figure 1.6: Soluzione della (1.44) nel caso I$<<$ I_c: andamento della fase in funzione del tempo con I_c=1mA, C=0.1 F e I=1μ A.

Si osserva dalla figura 1.6 che l'andamento è praticamente oscillante e che, quindi, almeno sulla scala dei tempi dell'ordine dei microsecondi, si può considerare la giunzione un sistema coerente (che è quello che, di fatto, ci serve nella pratica).
A questo punto si è immaginato di cambiare il generatore di corrente, collegandolo sempre allo stesso sistema, facendo così aumentare I fino a 100μA. In questo regime non si osservano ancora forti effetti di decoerenza (si può notare che i picchi si abbassano lentamente, così come anche nel caso precedente), ma l'ampiezza di oscillazione è aumentata.
Si può immaginare che su scale dei tempi maggiori vi siano effetti di decoerenza apprezzabili, ma essi si osserverebbero per tempi caratteristici molto più grandi rispetto a quelli che è utile considerare per sistemi microscopici. Si noti che l'asse temporale in figura 1.7 è esattamente uguale a quello del caso precedente.
A questo punto si vogliono riuscire a vedere gli effetti di decoerenza, quindi si è aumentata ulteriormente la corrente di polarizzazione, fino ad essere quasi uguale a quella critica della giunzione; in particolare è stata scelta I=0.8mA. Dalla figura 1.9 si nota che, adesso, non si ha più una soluzione periodica, ma

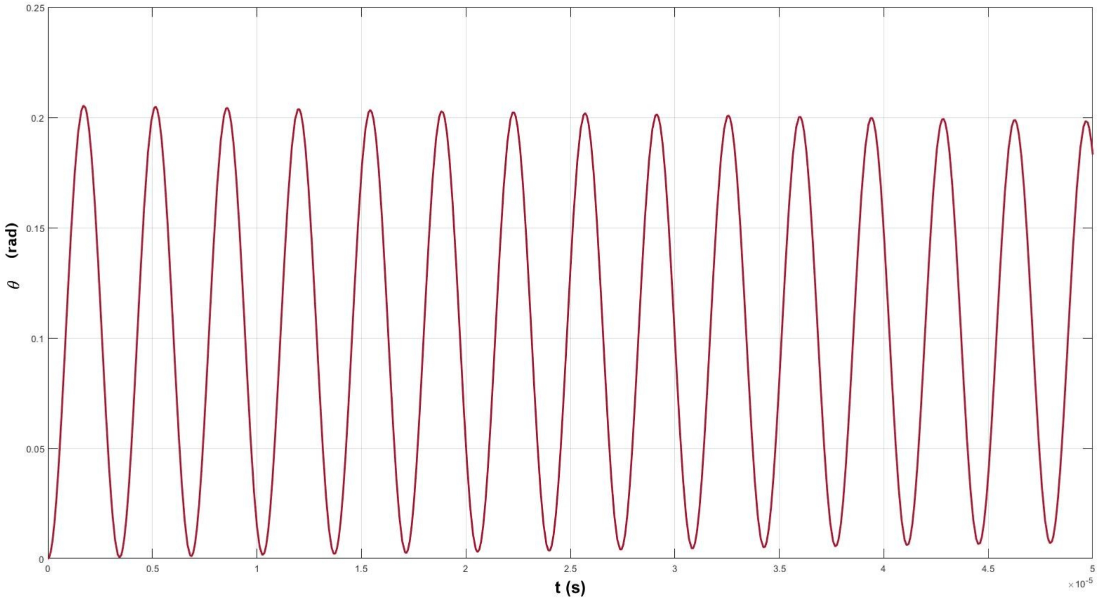

Figure 1.7: Soluzione della (1.44) con I=100μA, quindi nel caso in cui la corrente di polarizzazione inizia ad avvicinarsi a quella critica.

la fase tende a crescere: sono diventati, quindi, evidenti i fenomeni di decoerenza, poiché ci siamo avvicinati notevolmente al caso resistivo. Si può notare che la scala dei tempi è diversa rispetto al caso precedente, in quanto adesso si osserva l'andamento entro 10μs.
Si può confrontare questa soluzione con la figura 1.5: nel caso considerato si ha l'energia potenziale descritta dalla linea arancione. Tale energia non interseca la linea rossa, che coincide con l'energia meccanica data alla particella con le condizioni iniziali utilizzate: ci si sta avvicinando al caso resistivo e si osserva, quindi, dissipazione. L'energia meccanica non si conserva e, quindi, non si osservano oscillazioni della fase, ma essa aumenta indefinitamente.
Invece la soluzione oscillante della figura 1.6 descrive piccole oscillazioni attorno ad un minimo del potenziale washboard, come ci si aspetta dalla figura 1.5 (grafico blu): in tal caso l'energia meccanica coincide quasi esattamente con i minimi dell'energia potenziale.
E' da notare che, anche se la corrente di polarizzazione aumenta e si osservano fenomeni di decoerenza, essa resta sempre minore della corrente critica della giunzione: ciò significa che non c'è rottura delle coppie di Cooper e che si dovrebbe ancora parlare di supercorrente. Di fatto ci si avvicina al regime resistivo, ma non ci si arriva fino a quando la corrente critica non viene raggiunta.

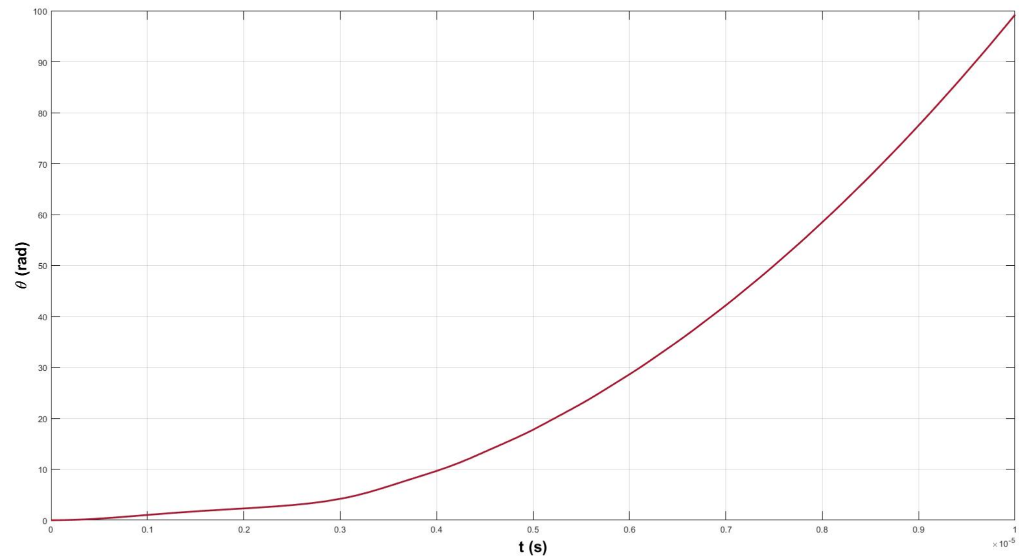

Figure 1.8: Soluzione dell'equazione (1.44) nel caso di corrente di polarizzazione molto vicina a quella critica, in particolare I=8$\cdot 10^{-4}$.

Ciò significa che, se si vuole risolvere l'equazione del moto per I>I_c, si deve considerare la (1.43). Si ha, in tal caso, un termine in $\dot{\theta}$ (funzione di dissipazione), assente nell'equazione precedente, che presenta la resistenza al denominatore. In realtà l'approssimazione fatta è proprio sulla derivata prima: nel caso non dissipativo essa è trascurabile, quindi lo è tutto il termine qui considerato. Precedentemente è stato detto che, dall'analisi della (1.43) si ricava che è possibile raggiungere un valore stabile per $\dot{\theta}$, il che significa che l'andamento della fase deve essere approssimativamente lineare. E' stata, quindi, risolta anche questa equazione (figura 1.9), supponendo di avere una resistenza R=100Ω e che la corrente di polarizzazione sia I=10mA (ricordiamo che I_c=1mA).
Si osserva dalla figura 1.9 che l'andamento di θ, su una scala di tempi confrontabile con quelle precedentemente utilizzate, è molto vicino ad una retta. Ciò implica che, come è stato detto nel paragrafo precedente, in questo regime $\dot{\theta}$ e, di conseguenza, il potenziale ai capi della giunzione, raggiungono un valore limite stabile.

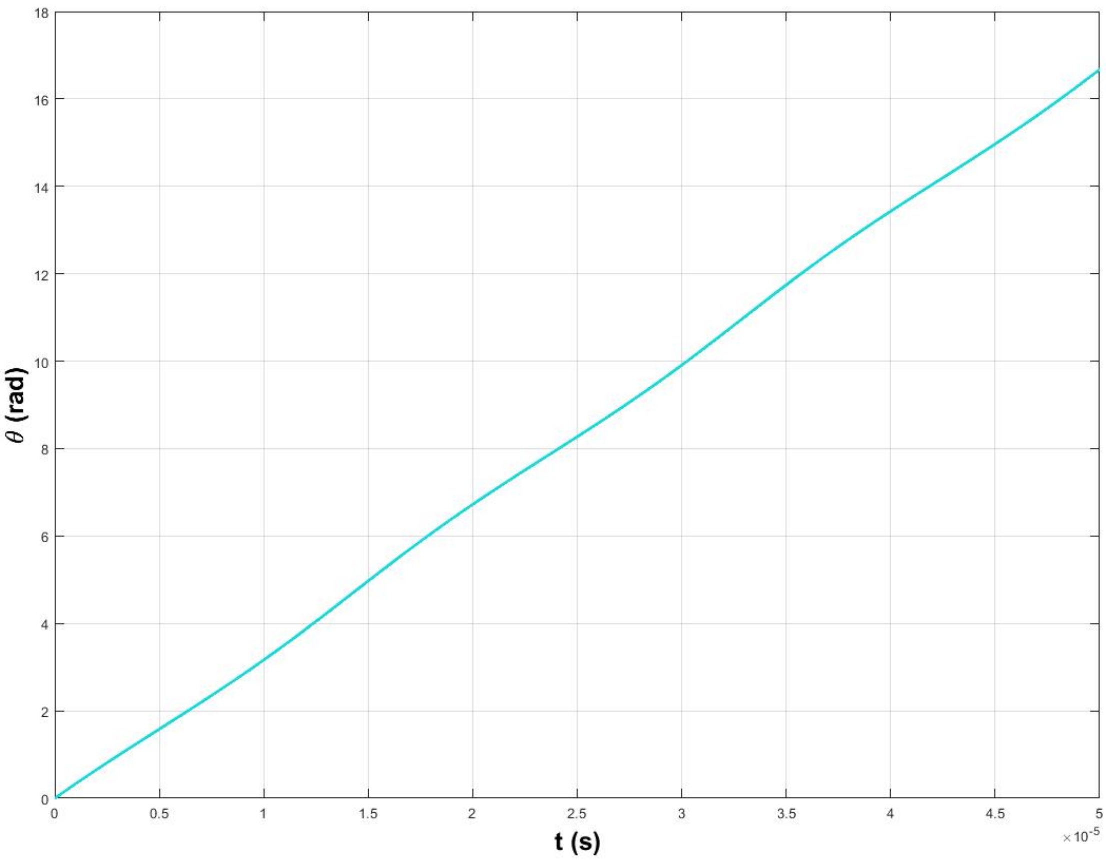

Figure 1.9: Soluzione dell'equazione (1.43) con I_c=1mA, I=10^{-2}A, C=0.1 F e R=100Ω, quindi con I>I_c. Si osserva l'andamento approssimativamente lineare in un intervallo temporale confrontabile con i casi precedenti.

Chapter 2

Quantizzazione del modello circuitale ed esempi di qubit

In questo capitolo si vuole sviluppare un modello quantistico per lo studio dei superconduttori, così da poter prendere in considerazione sistemi microscopici, ovvero quelli che, nella pratica, vengono utilizzati. Si potrebbe utilizzare la teoria BCS, che è stata introdotta nel capitolo precedente, ma tale trattazione sarebbe eccessivamente complicata. E' stato scelto, quindi, un altro metodo, che consiste nel quantizzare il modello RSJ esposto nel capitolo precedente. Per farlo costruiremo un operatore di fase (che, vedremo, può essere utilizzato solo in un determinato regime); tale operatore e l'operatore numero saranno le osservabili canoniche del sistema. In seguito, utilizzando questo approccio, studieremo due tipologie di qubit: di fase e di flusso.

2.1 Modello quantistico per lo studio di superconduttori

2.1.1 Numero e fase come osservabili quantistiche

Fino ad ora sono stati considerati superconduttori macroscopici, al limite infiniti, per i quali ha senso l'ipotesi, utilizzata nel modello BCS, che lo stato fondamentale sia una sovrapposizione coerente degli stati con tutti i possibili numeri di coppie di Cooper. Quando si considerano superconduttori microscopici questa assunzione non può più essere fatta, poiché bisogna considerare un superconduttore finito.
Si ha, quindi, uno stato con un numero fissato di coppie di Cooper. Per calcolarne lo stato fondamentale si utilizza il metodo di Anderson, ovvero si proietta sullo

stato BCS uno stato con un numero finito di coppie:

$$|N\rangle = \int_0^\theta d\theta e^{iN\theta}|BCS\rangle = \int_0^\theta d\theta e^{iN\theta}\prod_k(|u_k| + |v_k|e^{i\theta}a^\dagger_{\uparrow k}a^\dagger_{\downarrow -k}|0\rangle. \tag{2.1}$$

Si può notare dalla (2.1) che, in talm caso, la fase è indefinita. Inoltre si può osservare che l'integrale è non nullo soltanto se M=N, dove M è il numero di stati possibili. Di conseguenza la (2.1) descrive uno stato formato da 2N elettroni (N è il numero di coppie di Cooper).

Tale modello può essere applicato ad una giunzione Josephson: come prima cosa si deve considerare che, poiché si genera corrente, il numero di particelle non è fissato; di conseguenza si può interpretare il sistema introducendo un'incertezza su N. D'altra parte ci sono molti casi in cui non si hanno fluttuazioni libere e, quindi, non è più possibile utilizzare questo modello. Per trattare questo tipo di sistemi utilizziamo un approccio quantistico, in cui N e θ sono delle osservabili. Per quanto riguarda N sappiamo come esso viene scritto in funzione degli operatori di costruzione e distruzione

$$\hat{N} = a^\dagger a; \tag{2.2}$$

per quanto riguarda la fase, invece, sorgono dei problemi. Infatti, affinché si possa studiare il sistema utilizzando queste due osservabili, esse devono essere variabili coniugate, quindi deve valere la relazione di commutazione

$$[\hat{N}, \hat{\theta}] = -i, \tag{2.3}$$

nella quale si tiene conto del fatto che $\hat{H} = \hbar\omega_p\hat{N}$. D'altra parte, utilizzando queste informazioni, si può scrivere l'equazione di Heisenberg

$$i\hbar\dot{\hat{\theta}} = [\hat{\theta}, \hat{H}] = i\hbar\omega_p, \tag{2.4}$$

da cui si ricava che la fase è

$$\hat{\theta} = \omega_p t. \tag{2.5}$$

Inoltre, poiché deve valere la relazione di commutazione (2.3), deve essere valida anche la relazione di indeterminazione

$$\Delta N \Delta\theta \geq \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

A questo punto abbiamo due problemi: il primo riguarda la (2.5), in quanto stiamo trattando la variabile temporale come se fosse un operatore; inoltre se supponiamo di avere uno stato con N fissato, allora $\Delta\theta = \infty$. Questo è impossibile se si considera che la fase è definita nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e non necessario, poiché per

ottenere lo stato dalla formula (2.1) si integra proprio in questo intervallo.
Nonostante l'esistenza dell'operatore di fase porti a conclusioni assurde, continuiamo ad ipotizzare che esso esista; vedremo che, in un certo limite, è possibile utilizzarlo.
Scriviamo, quindi, gli operatori di costruzione e distruzione in funzione di $\hat{N}$ e $\hat{\theta}$: nella situazione che si sta trattando essi sono operatori di Bose, in quanto agiscono sulle coppie di Cooper; inoltre essi possono essere scritti anche in funzione dell'operatore di evoluzione temporale $U = e^{-i\theta}$:

$$b = e^{-i\theta}\sqrt{\hat{N}} = \hat{U}\sqrt{\hat{N}}; \tag{2.7}$$

$$b^\dagger = \sqrt{\hat{N}}e^{i\theta} = \sqrt{\hat{N}}\hat{U}. \tag{2.8}$$

Si può verificare che, come ci si aspetta,

$$b^\dagger b = \hat{N}. \tag{2.9}$$

I due operatori di Bose non commutano, quindi bisogna calcolare anche l'espressione di $bb^\dagger$; per farlo è necessario usare la seguente relazione di commutazione

$$[e^{-i\theta}, \hat{N}] = [\hat{U}, \hat{N}] = e^{-i\theta} = \hat{U}. \tag{2.10}$$

Si ottiene, quindi

$$bb^\dagger = \hat{N} + 1. \tag{2.11}$$

Essendo osservabili quantistiche $\hat{\theta}$ e $\hat{N}$, devono essere operatori hermitiani: supponiamo, quindi, che $\hat{\theta}$ lo sia. Vediamo, quindi, cosa accade per l'operatore numero:

$$\begin{gathered}[\hat{U}, \hat{N}] = \hat{U}\hat{N} - \hat{N}\hat{U} = \hat{U};\\ \hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{N} - \hat{U}^{+}\hat{N}\hat{U} = \hat{N} - \hat{U}^\dagger\hat{N}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1;\\ \hat{U}^\dagger\hat{N}\hat{U} = \hat{N} - 1.\end{gathered} \tag{2.12}$$

E' evidente dalla formula precedente che $\hat{N}$ non è hermitiano; ciò comporta che gli spettri di $\hat{N}$ e $\hat{U}^{+}\hat{N}\hat{U}$ non coincidono, cosa assurda date le ipotesi precedenti.
D'altra parte si può notare che, se si ha un gran numero di particelle, tale effetto è trascurabile. Quindi si può utilizzare l'operatore di fase con buona approssimazione se $\langle N\rangle >> 1$. Inoltre se si ha un gran numero di particelle, allora si ha una distribuzione uniforme delle fasi, quindi ci aspettiamo $\Delta\theta << 2\pi$.
A questo punto conosciamo l'azione degli operatori numero e fase sui rispettivi autostati:

$$\hat{\theta}|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle; \hat{N}|\theta\rangle = -i\frac{\partial}{\partial\theta}|\theta\rangle; \tag{2.13}$$

$$\hat{N}|N\rangle = N|N\rangle; \hat{\theta}|N\rangle = i\frac{\partial}{\partial N}|N\rangle. \tag{2.14}$$

Inoltre si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$|\theta\rangle = \sum_N e^{iN\theta}|N\rangle; \tag{2.15}$$

$$|N\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iN\theta}|\theta\rangle. \tag{2.16}$$

In particolare si può notare che la (2.16) è analoga alla (2.1).

2.1.2 Quantizzazione del sistema

Si vuole, ora, quantizzare il sistema utilizzando il modello finora sviluppato. Come prima cosa ricaviamo il momento canonico utilizzando la lagrangiana della (1.35):

$$\Theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{\hbar}{2e}^2 C\dot{\theta} \right) = \frac{Q\hbar}{2e} = \hbar N, \tag{2.17}$$

dove è stato utilizzato che $Q = \frac{\hbar}{2e}C\dot{\theta}$ e $N = \frac{Q}{2e}$.
Inoltre, essendo una variabile coniugata,

$$\Theta = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{2.18}$$

Scriviamo, quindi, l'hamiltoniana del sistema

$$\mathcal{H}(\Theta, \theta) = \Theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{C}\left(\frac{2e\Theta}{\hbar}\right)^2 - E_J \cos\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta = E_C \left(\frac{\Theta}{\hbar}\right)^2 - E_J \cos\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta, \tag{2.19}$$

nella quale è stata utilizzata l'energia di charging (1.38). A questo punto utilizziamo la regola di corrispondenza (2.18) per ottenere l'hamiltoniana quantizzata

$$H = -E_C \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - E_J \cos\theta - \frac{I\Phi_0}{2\pi c}\theta = -E_C \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - E_J \left(\cos\theta + \frac{I}{I_C}\theta\right). \tag{2.20}$$

E' possibile dimostrare che la (2.20) ha un minimo in $\theta_{min} = \arcsin \frac{I}{I_c}$ e che, attorno a tale minimo, si hanno piccole oscillazioni con la frequenza di plasma ω_p, incontrata anche nel capitolo precedente.
Ora, però, le equazioni del moto sono quelle di Heinsenberg, ovvero

$$i\hbar\dot{\theta} = \left[\theta, \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right] = -E_c \frac{\partial}{\partial \theta} = 2E_c x i\hat{N}; \tag{2.21}$$

$$i\hbar\dot{N} = [\hat{N}, \hat{H}] = -E_J \left[-i\frac{\partial}{\partial\theta}, \cos\theta + \frac{I}{I_C}\theta \right].$$

Introducendo la quantità $\eta = \theta - \theta_{min}$ e facendo uno sviluppo in serie, in quanto considero il limite in cui $I \rightarrow I_c$, le (2.21) portano all'equazione

$$\ddot{\eta} = -\frac{2E_C E_J}{\hbar^2} \left[1 - (\frac{I}{I_C})^2 \right]^{1/2} \eta = -\omega_p^2 \left[1 - (\frac{I}{I_C})^2 \right]^{1/2} \eta. \tag{2.22}$$

2.2 Qubit di fase

2.2.1 Giunzione Josephson come qubit di fase

Consideriamo il sistema descritto dall'hamiltoniana (2.20) nel limite in cui $E_J >> E_C$. In tale limite l'hamiltoniana diventa

$$H = -E_J \left(\cos\theta + \frac{I}{I_c}\theta \right). \tag{2.23}$$

Nel caso in cui il bias di corrente è 0, si ha soltanto il termine che oscilla con il coseno; in tal caso abbiamo un potenziale armonico, con livelli energetici tra loro equidistanti.
Per i nostri scopi è necessario avere un bias di corrente dell'ordine di $I = 0.95 - 0.98 I_c$; ciò comporta che il potenziale non è più armonico come nel caso precedente.
In particolare in questa situazione gli stati all'interno della buca di potenziale sono pochi e metastabili, cioè decadono, entro un certo tempo caratteristico, in uno stato resistivo; nel limite in cui ci è posti, però, la probabilità di decadimento è molto bassa. Inoltre si può considerare che il potenziale è fortemente anarmonico, ovvero le energie di transizione $\hbar\omega_{01}$ e $\hbar\omega_{12}$ sono molto diverse tra loro. Grazie alle proprietà appena descritte si può considerare un sistema a soli due livelli, cioè un qubit, la cui evoluzione degli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ è indipendente da ciò che accade agli altri livelli energetici. Poiché la variabile tramite la quale si sta descrivedo il sistema e che permette di distinguere i due stati è la fase, parleremo di qubit di fase. Nell'approssimazione fatta abbiamo trascurato il termine libero; di conseguenza l'energia U della figura 2.2 coincide con l'hamiltoniana del sistema.
E' evidente che essa è periodica e che presenta dei minimi e dei massimi locali: in particolare ci restringiamo ad una delle buche di potenziale, attorno ad un minimo che è possibile ricavare calcolando gli estremi relativi della (2.23). Si trova

$$\theta_{min} = \arcsin\frac{I}{I_c}. \tag{2.24}$$

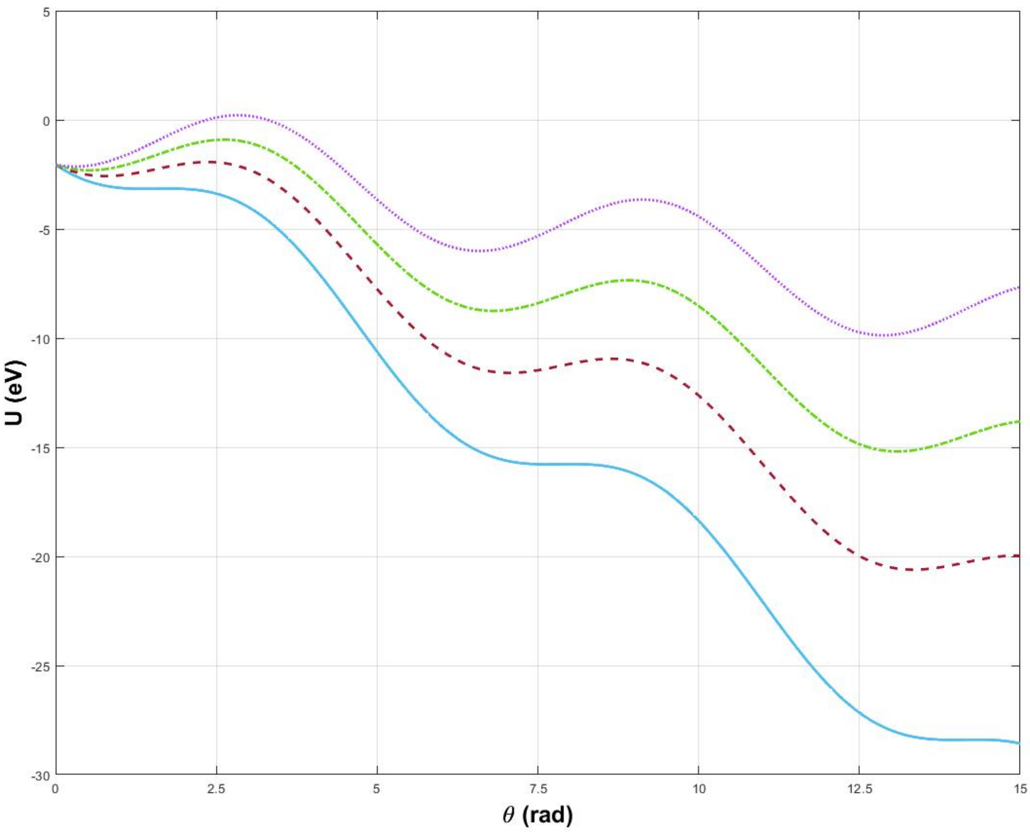

Figure 2.1: Il grafico rappresenta il potenziale di una giunzione Josephson nel caso di energia di charging piccola (equazione 2.23). In particolare per il qubit di fase è necessario che il potenziale sia anarmonico, quindi è stato fatto il plot al variare del rapporto I/I_c. In particolare: azzurro→I/I_c=0.98; rosso→I/I_c=0.7; verde→I/I_c=0.5; viola→I/I_c=0.3. Si nota che, all'aumentare di questo rapporto, aumenta l'anarmonicità.

Considero quindi l'espressione del potenziale per $\theta = \theta_{min} + \eta$:

$$U_J(\eta) = -E_J \left[\left(1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos\eta + \frac{I}{I_c} (\eta - \sin\eta) + \frac{I}{I_c} \arcsin\frac{I}{I_c} \right], \tag{2.25}$$

che si può sviluppare attorno ad η e sostituire nella (2.20). Si trova, in questo modo, l'hamiltoniana di un oscillatore anarmonico:

$$H = -E_C \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + E_J \left[\left(1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3 I}{6 I_c} \right]. \tag{2.26}$$

Essa è nella forma $H = H_0 + H'$, dove H_0 è l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico e H' è la perturbazione anarmonica:

$$H_0 = -E_C \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + E_J \left(1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^2}{2}; \tag{2.27}$$

$$H' = -E_J \frac{\eta^3 I}{6 I_c}.$$

Considerando solo il sistema H_0 nel limite di piccole oscillazioni otteniamo la frequenza di plasma "attenuata"

$$\omega_I = \omega_p \left[\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \approx \omega_p \left[2 \left(1 - \frac{I}{I_c} \right) \right]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.28}$$

Nel secondo passaggio della (2.28) è stato fatto uno sviluppo in serie al primo ordine del termine all'interno delle parentesi quadre.
Ricordando che $I = I_c \sin\theta$, la (2.28) porta a

$$\omega_I^2 = \omega_p^2 |\cos\theta| = \frac{c^2}{C |L_J(\theta)|}, \tag{2.29}$$

dove $L_J(\theta)$ è l'induttanza non lineare (1.30) del modello RSJ.
Dalla (2.28) si può anche notare che la dipendenza di ω_I dalla corrente di bias I è molto debole; inoltre c'è dipendenza dal materiale con cui è costruita la giunzione, mentre non dipende dalla sua area.
Poiché conosciamo il potenziale, si può anche calcolare l'altezza della barriera di potenziale

$$\Delta U \approx \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3} E_J \left[1 - \frac{I}{I_c} \right]^{\frac{3}{2}}. \tag{2.30}$$

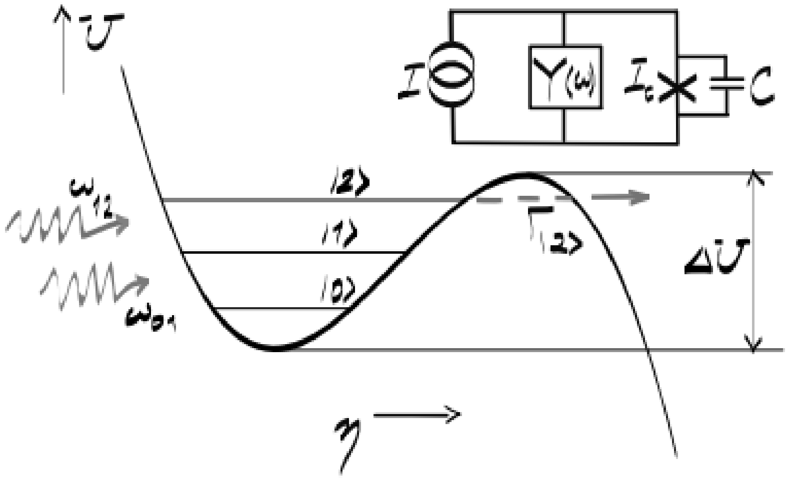

Figure 2.2: (In alto a destra) rappresentazione circuitale del qubit di fase; (al centro) barriera di potenziale in funzione della variabile η: le linee orizzontali sono i vari livelli energetici, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono i due che vengono considerati nel funzionamento del qubit.

Utilizzando il metodo perturbativo si possono calcolare le differenze di energia tra i primi livelli dell'hamiltoniana (2.26):

$$\hbar\omega_{01} \approx \hbar\omega_I \left(1 - \frac{5\hbar\omega_I}{36\Delta U}\right); \tag{2.31}$$

$$\hbar\omega_{12} = \hbar\omega_I \left(1 - \frac{5\hbar\omega_I}{18\Delta U}\right). \tag{2.32}$$

E' possibile verificare che la (2.31) e la (2.32) sono abbastanza diverse tra loro affinché si possano trattare i primi due livelli come indipendenti dagli altri.
In genere i qubit di fase sono basati su giunzioni di niobio con $\nu_{01} = 5 - 10$GHz e rate di decoerenza dell'ordine di 5MHz a temperature dell'ordine del mK. Si può quindi valutare il rapporto $\frac{\Delta U}{\hbar\omega_I} \approx 4$ e $\Delta\nu \approx 0.3$GHz e calcolare il rapporto tra le larghezze di decadimento tra due stati successivi, ottenendo

$$\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} \approx 1000; \tag{2.33}$$

è evidente che, data la grande differenza tra le larghezze di decadimento, gli stati successivi decadano molto velocemente nello stato resistivo.

2.2.2 Oscillazioni di Rabi in un qubit di fase

Se si fanno misure ripetute dello stato di un qubit di fase si osservano le oscillazioni di Rabi, ovvero delle oscillazioni della probabilità di trovare il sistema in un determinato stato del tipo $P \propto \left(\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right)^2$, dove Ω è la frequenza di Rabi.

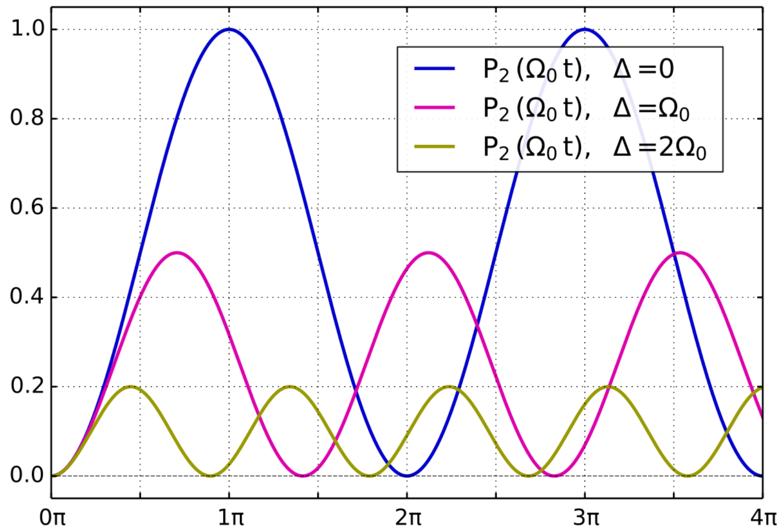

Figure 2.3: Grafico della probabilità in funzione del tempo per diverse frequenze; si noti che all'aumentare della differenza tra la frequenza di Rabi e quella a cui ci si trova, la probabilità che il sistema passi da uno stato all'altro diminuisce.

In particolare nel nostro caso possiamo tarare il qubit utilizzando la corrente di bias; affinché il sistema resti nel sottospazio $[|0\rangle, |1\rangle]$ la variazione dell'ampiezza della corrente deve essere lenta rispetto a $\Delta\nu$. Si ha:

$$I(t) = I_{dc} + \Delta I(t) \equiv I_{dc} + I_{1f}(t) + I_{rf,c}(t)\cos\omega_{01}t + I_{rf,s}(t)\sin\omega_{01}t, \quad (2.34)$$

quindi ognuno dei tre termini di variazione di corrente deve essere lento rispetto a $\Delta\nu$.
Riscriviamo l'hamiltoniana (2.26) in forma matriciale

$$H = H_0 + H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_{01} \end{pmatrix} + E_J \frac{\Delta I(t)}{I_c} \begin{pmatrix} \langle 0|\theta|0\rangle & \langle 0|\theta|1\rangle \\ \langle 1|\theta|0\rangle & \langle 1|\theta|1\rangle \end{pmatrix}; \quad (2.35)$$

trattandosi dell'hamiltonina di un qubit è possibile riscriverla, utilizzando l'approssimazione di onda rotante (che viene utilizzata quando si è vicino alla risonanza) come

$$H = \sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega_{01}}} \left(\frac{I_{rf,c}(t)}{2}\sigma_x + \frac{I_{rf,s}(t)}{2}\sigma_y \right) + \frac{\partial\hbar\omega_{01}}{\partial I_{dc}} \frac{I_{1f}(t)}{2}\sigma_z, \quad (2.36)$$

dove le matrici σ_i sono le matrici di Pauli sui tre assi cartesiani.
Un'hamiltoniana di questo tipo può essere trattata utilizzando i vettori di Bloch e

studiandone l'evoluzione temporale (Appendice)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R} = 2\mathcal{H}(t) \times \mathcal{R}(t), \tag{2.37}$$

dove $\mathcal{R}(t)$ è il vettore di Bloch e

$$\mathcal{H}(t) = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega_{01}}} \frac{I_{rf,c}(t)2}{,} \sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega_{01}}}) \frac{I_{rf,c}(t)}{2}, \frac{\partial \hbar\omega_{01}}{\partial I_{dc}} \frac{I_{1f}(t)}{2} \right)^T \tag{2.38}$$

Le transizioni tra stato $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono dovute alle oscillazioni di Rabi, indotte dalla perturbazione con frequenza ω_{01} dell'equazione (2.34). Se la corrente di controllo $\Delta I(t) = 0$, allora $\mathcal{H}(t) = 0$, quindi il vettore di Bloch è stazionario nel sistema rotante, mentre nel sistema del laboratorio ruota attorno all'asse z con frequenza ω_{01}.

2.2.3 Misura delle oscillazioni di Rabi

E' possibile misurare direttamente le oscillazioni di Rabi, così da avere una conferma della validità del modello quantistico che è stato sviluppato.
In particolare ci sono due metodi per eseguire questo tipo di misura: entrambi partono dal mettere il sistema nello stato fondamentale a t=0. In entrambi i casi, inoltre, si applica un campo risonante con il qubit per un periodo di tempo τ e si fanno misure ripetute, così da poter determinare la probabilità di trovare il sistema in un certo stato (nel nostro caso $|1\rangle$) dopo l'impulso.
In particolare il primo metodo consiste nell'applicare un ulteriore impulso all'istante τ, con frequenza ω_{12}, tale da ottenere la transizione $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. Sappiamo che tale stato, se funziona il modello precedentemente elaborato, decade velocemente in uno stato resistivo, quindi si genera un impulso di tensione. Ciò accade entro $\sim \frac{1}{\Gamma_2}$ (Γ_2 è la larghezza di decadimento) solo se a $t = \tau$ il qubit è nello stato $|1\rangle$, quindi si può ricostruire la probabilità di transizione obiettivo della misura. Utilizzando questo metodo si può anche effettivamente vedere come si può modificare in modo coerente un qubit: si può fissare la durata τ dell'impulso di controllo e variare la sua intensità $P_{10}^{1/2}$.
Nel caso in cui $\tau = 25$ns, la frequenza $\nu_{12} = 6.28$GHz e fissiamo i parametri costruttivi della giunzione, cioè $I_c \approx 21$mA e $C \approx 6$pF, otteniamo il grafico della figura 2.4.
Si osservano, quindi, le oscillazioni di Rabi al variare dell'intensità dell'impulso, nonostante il breve tempo di decoerenza di un qubit del genere ($\sim$ 10ns); considerando che per i dispositivi che vengono utilizzati il tempo di decoerenza è $\sim$ 80ns o più, allora è possibile manipolare lo stato del sistema dall'esterno.

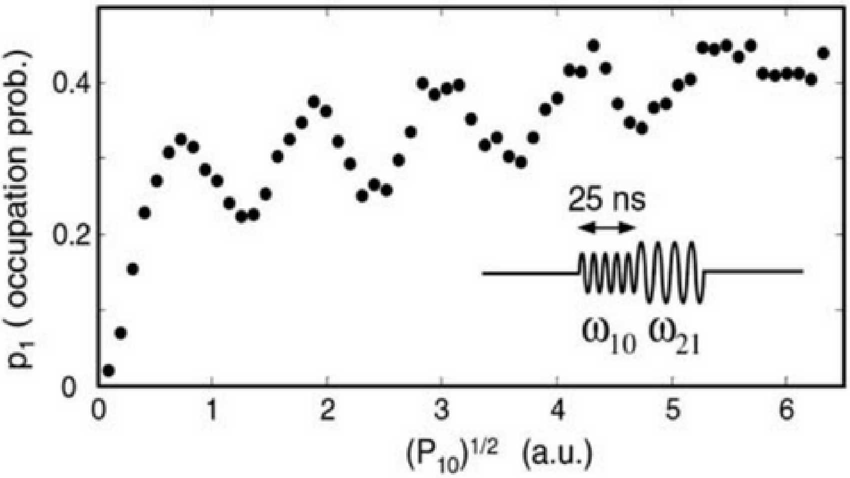

Figure 2.4: Sperimentalmente si osservano le oscillazioni di Rabi per un qubit di fase.

L'altro metodo di misurazione, invece, consiste nell'applicare un altro impulso, tale da rendere la buca meno profonda e aumentare la probabilità di transizione allo stato $|1\rangle$. In questo caso si misura il voltaggio che si genera entro $\sim \frac{1}{\Gamma_1}$. Da misure ripetute si ottiene la probabilità che il sistema sia nello stato $|1\rangle$ dopo l'impulso di durata τ.

2.3 Qubit di flusso

2.3.1 SQUID rf

Uno SQUID rf (superconducting quantum interference devices) è un dispositivo superconduttivo che può essere utilizzato per misurare deboli campi magnetici. Esso consiste in un anello superconduttivo macroscopico, interrotto in un solo punto da una giunzione Josephson. Possiamo, quindi, individuare un flusso magnetico esterno e uno interno, differenti tra loro; inoltre, non trattandosi di un anello chiuso, il flusso all'interno può essere una quantità arbitraria.
Esso può essere schematizzato come un'induttanza collegata ad un generatore di tensione costante, come nella figura 2.5.
Ricordando che il parametro d'ordine deve essere a singolo valore, deve essere valida la seguente condizione:

$$\theta + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n, \tag{2.39}$$

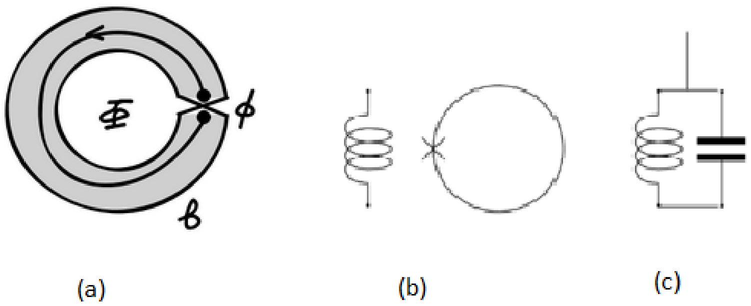

Figure 2.5: (a) anello superconduttivo interrotto da una giunzione Josephson: ϕ è il flusso magnetico esterno; (b) schematizzazione dello SQUID come un'induttanza ed un anello con una giunzione; (c) SQUID rf con il modello RSJ, in cui non è esplicitata la resistenza; il tratto verticale in alto è il collegamento alla tensione costante.

dove n è un intero e θ è la caduta di fase sulla giunzione.
Utilizzando la schematizzazione della figura 2.5 per lo SQUID, si può riscrivere il flusso interno come somma di quello esterno $\tilde{\Phi}$ e del flusso di schermaggio, dovuto all'autoinduttanza:

$$\tilde{\Phi} = \frac{LI_J(\theta)}{c} + \Phi. \tag{2.40}$$

Utilizzando questa espressione la (2.39) diventa:

$$\theta + \frac{\tilde{\Phi} - LI_J(\theta)/c}{\Phi_0} = \theta + \frac{\tilde{\Phi} - LI_c \sin(\theta)/c}{\Phi_0} = 2\pi n. \tag{2.41}$$

In realtà l'induttanza è formata da due contributi, uno magnetico (o geometrico) e uno cinetico; in particolare il secondo non è trascurabile per basse frequenze. Poiché gli SQUID rf funzionano a frequenze dell'ordine di 20-30MHz, nel nostro caso ci riferiremo all'induttanza considerando solo quella di tipo geometrico.
Dalla (2.41) si può capire come questo dispositivo può essere utilizzato come rivelatore di deboli campi magnetici: in particolare si nota che a piccole variazioni del flusso esterno corrisponde uno shift significativo di θ, quindi sia di $I_J(\theta)$ che dell'induttanza effettiva dell'anello (1.30). Ciò permette di misurare il flusso, accoppiando lo SQUID ad un circuito risonante.
Sono stati trattati gli SQUID rf poiché essi vengono utilizzati per realizzare qubit di flusso, che analizzeremo in seguito. Non si tratta, però, degli unici tipi di SQUID che possono essere realizzati: nel prossimo paragrafo sarà trattato brevemente lo SQUID dc.

2.3.2 SQUID dc

Gli SQUID dc sono degli anelli superconduttivi, interrotti da due giunzioni Josenphson, che vengono schematizzate come poste in parallelo tra loro. In questa configurazione abbiamo due cadute di fase θ_1 e θ_2, in generale diverse tra loro. Lo SQUID può essere schematizzato come nella figura 2.6.

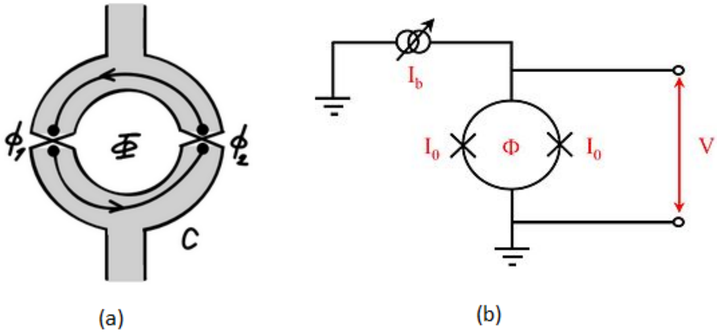

Figure 2.6: (a) anello superconduttivo interrotto da due giunzioni Josephson: ϕ_1e ϕ_2 sono i due flussi magnetici esterni; (b) schematizzazione circuitale dello SQUID dc.

Anche in questo caso si può ricavare la condizione di quantizzazione a partire dal fatto che il parametro d'ordine debba essere a singolo valore

$$\theta_1 + \theta_2 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n. \tag{2.42}$$

Ancora una volta si può riscrivere il flusso esterno come la somma di quello interno e di quello dovuto all'induttanza dell'anello

$$\tilde{\Phi} = \Phi + LI_{loop}(\theta/c), \tag{2.43}$$

dove I_{loop} è la corrente che circola in tutto l'anello, per cui deve valere
$I_{loop}(\theta) < min[I_{c1}, I_{c2}]$, cioè deve essere minore della più piccola tra le correnti critiche. La (2.42) diventa, quindi

$$\theta_1 + \theta_2 + 2\pi \frac{\tilde{\Phi} - LI_{loop}(\theta)}{\Phi_0} = 2\pi n. \tag{2.44}$$

Si può, quindi, scrivere la supercorrente che attraversa il loop

$$I = I_{c1} \sin\theta_1 - I_{c2} \sin\theta_2 = (I_{c1}+I_{c2}) \cos\left[\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right] \sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - (I_{c1}-I_{c2}) \sin\left[\phi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right] \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}; \tag{2.45}$$

se si suppone che le due giunzioni siano uguali, allora $I_{c1} = I_{c2}$, quindi il secondo termine si annulla.
Inoltre si può supporre che il termine di autoinduttanza sia trascurabile, quindi $\Phi \approx \tilde{\Phi}$; detta $\delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ si ottiene una forma più semplice per la supercorrente

$$I(\delta\theta, \tilde{\Phi}) = I_{c,eff}(\tilde{\Phi}) \sin\delta\theta, \tag{2.46}$$

dove si ha la corrente critica effettiva

$$I_{c,eff}(\tilde{\Phi}) = 2I_c \cos\left[\pi\frac{\tilde{\Phi}}{\Phi_0}\right]. \tag{2.47}$$

Dalla (2.47) si può vedere che, utilizzando un flusso esterno opportuno, si può far annullare la corrente critica efficace dello SQUID. Ciò viene utilizzato per rilevare campi magnetici molto deboli; in particolare uno SQUID dc utilizzando in questo modo ha una sensibilità maggiore rispetto ad uno SQUID rf.

2.3.3 Realizzazione di un qubit di flusso

Un modo per realizzare un qubit di flusso è utilizzare uno SQUID rf, visto precedentemente. In particolare, in tal caso, per polarizzare la giunzione Josenphson non si utilizza una corrente esterna, ma la supercorrente che si genera all'interno di un anello. Si ha, quindi, un potenziale del tipo

$$U(\theta) = \frac{\Phi^2}{2L} - E_J\cos\theta = \frac{\frac{\Phi_0\theta}{2\pi} - \tilde{\Phi}}{2L} - E_J\cos\theta, \tag{2.48}$$

dove è stata utilizzata la relazione (2.40). Si ha un potenziale simmetrico solo nel caso in cui $\tilde{\Phi} = \frac{\Phi_0}{2}$.
Si può calcolare il minimo del potenziale (2.48), che coincide con la condizione di quantizzazzione dello SQUID rf (2.41):

$$\theta = 2\pi\frac{\tilde{\Phi} - \frac{LI_c}{c}\sin\theta}{\Phi_0} + 2\pi n. \tag{2.49}$$

Ci si aspetta dalla (2.48) un andamento oscillante attorno ad un profilo parabolico. Nel caso considerato gli stati di fase si trovano all'interno delle buche di potenziale più piccole: ciò comporta che gli eventuali effetti di decoerenza siano limitati alla parte più bassa della buca di potenziale.
Per realizzare il qubit di flusso a partire da questo dispositivo ci si può mettere nella situazione in cui il potenziale è simmetrico, riscriverlo introducendo
$\eta = \theta - \pi$ e $\beta_L = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0 c}$ e facendo uno sviluppo in serie:

$$U(\eta)|_{\tilde{\Phi}=\frac{\Phi_0}{2}} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}\frac{\eta^2}{2} + E_J\cos\eta \approx -E_J\left(1 - \frac{\pi}{\beta_L}\right)\frac{\eta^2}{2} + E_J\frac{\eta^4}{24}. \tag{2.50}$$

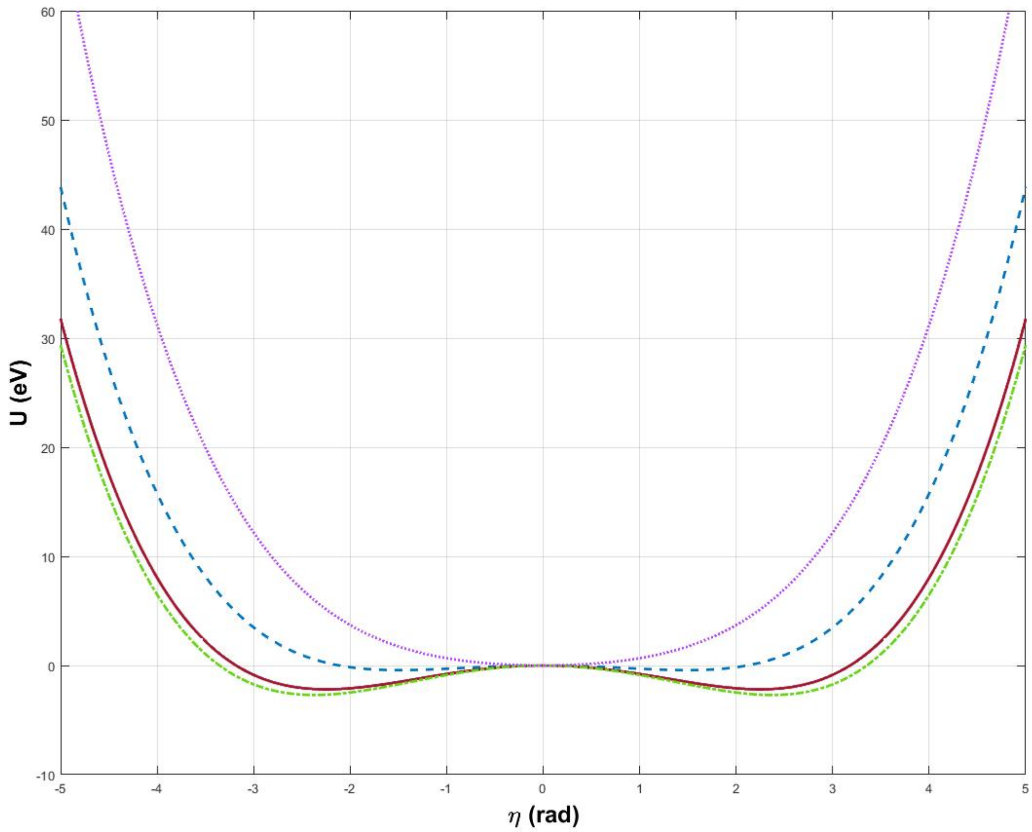

Figure 2.7: Potenziale di un qubit di flusso per diversi parametri di β_L, tracciato utilizzando la (2.50). In particolare: azzurro$\rightarrow$ β=7; rosso$\rightarrow$ β=20; verde$\rightarrow$ β=50.Si nota, quindi, come all'aumentare di β si delineino più nettamente le due buche di potenziale. Inoltre il grafico viola corrisponde al caso β=2: si vede, quindi, come non ci siano le due buche per $\beta < \pi$.

Lo stato fondamentale di questo sistema è due volte degenere, così come sono degeneri anche gli altri livelli energetici, a causa del tunneling che c'è attraverso la barriera. In particolare si formano degli stati bonding-antibonding del tipo $\frac{|L\rangle \pm |R\rangle}{\sqrt{2}}$, ovvero combinazioni lineari degli stati in cui la corrente scorre in senso orario e antiorario. Per rompere la degenerazione si fa variare il flusso magnetico di una quantità $\delta\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} - \frac{\Phi_0}{2}$.
In questo modo la forma del potenziale (2.48) varia, poiché vi si somma un termine aggiuntivo

$$\delta U(\eta) = -\frac{\Phi_0 \delta\tilde{\Phi}}{2\pi L}\eta + \frac{(\delta\tilde{\Phi})^2}{2L}; \tag{2.51}$$

a causa di questo termine e dell'anarmonicità del potenziale (2.48) lo stato fondamentale si divide in due stati non degeneri. L'hamiltoniana del sistema così costruito è quella tipica di un qubit immerso in un campo esterno

$$H_t = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_x + \epsilon(t)\sigma_z. \tag{2.52}$$

Dalla (2.50), inoltre, si può notare che β_L deve essere maggiore di π; di conseguenza poiché $\beta_L \propto L$, l'induttanza dello SQUID deve essere abbastanza grande. D'altra parte, se è presente un campo magnetico esterno, l'induttanza vi si accoppia (e l'accoppiamento aumenta con l'aumentare di L): di conseguenza un qubit realizzato in questo modo è molto sensibile al rumore magnetico; per questo motivo non è molto frequente che vengano utilizzati qubit di flusso costruiti con SQUID rf.

2.3.4 Misure di stati eccitati di qubit di flusso

Utilizzando un qubit costruito con uno SQUID rf è stata vista sperimentalmente l'esistenza di stati quantistici macroscopici. In questo caso non sono stati presi in considerazione i livelli energetici più bassi, come nel caso precedente, ma gli stati eccitati; in particolare è stata misurata la probabilità di transizione tra il quarto livello energetico di una delle due buche di potenziale ed il decimo dell'altra.
Per realizzare il qubit è stato utilizzato uno SQUID costruito con il niobio, con $E_{J,max}$=76K ed energia di induzione $\frac{\Phi_0^2}{2L}$=645K; poiché E_c era dell'ordine del mK, il qubit era posto in regime di fase. L'esperimento è stato realizzato ad una temperatura di 40mK.
Ciò che si osserva è che, quando si ha la transizione da uno stato all'altro, cambiano sia il flusso magnetico, di circa $\frac{\Phi_0}{4}$, che la corrente nell'anello, di qualche μA. Sono state effettuate delle misure ripetute, che hanno permesso di ricavare dei grafici della probabilità di transizione in funzione di $\delta\tilde{\Phi}$; ciò è stato fatto per diversi valori della barriera di potenziale.
Come ci si aspettava si può notare, dalla figura 2.8, che man mano che si innalza la barriera di potenziale, diminuisce la probabilità di transizione da uno stato all'altro. Inoltre si può osservare che i due picchi vengono shiftati al variare dell'altezza della barriera e che la loro distanza cambia, diminuendo fino a ΔU=8.956K, per poi allontanarsi nuovamente. Ciò può essere interpretato con il fatto che vari la differenza di energia tra i due stati del qubit. Si nota, in particolare, anticrossing per le curve che corrispondono a variazioni dell'energia di circa $0.1K$.
Questa misura ha costituito un primo esempio sperimentale di sovrapposizione coerente non microscopica; poiché i due stati differiscono per circa 10^{10} magnetoni di Bohr non si può ancora parlare di scala macroscopica, ma mesoscopica.

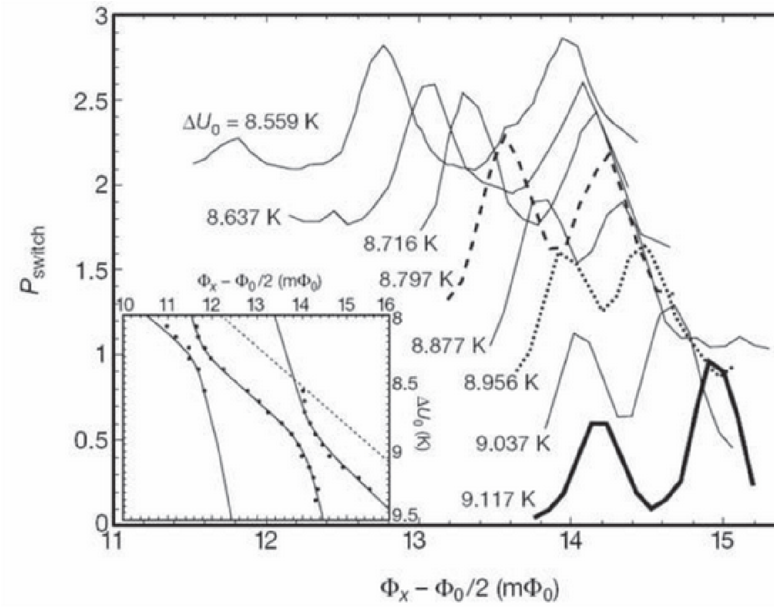

Figure 2.8: Grafico sperimentale della probabilità di transizione tra due stati eccitati (quarto e decimo) di un qubit di flusso in funzione della variazione di flusso usata per rompere la degenerazione, per varie altezze della barriera di potenziale.

Conclusioni

Nell'elaborato è stato sviluppato un modello per studiare semplici circuiti superconduttivi. In particolare siamo partiti dal fenomeno della superconduttività e dai suoi effetti, per poi introdurre il modello RSJ, che permette di studiare giunzioni macroscopiche come se fossero circuiti classici. In un secondo momento, poiché le giunzioni che vengono utilizzate sono microscopiche, tale modello è stato quantizzato; d'altra parte è stato visto che la teoria così sviluppata vale solo nel limite $\langle N \rangle >> 1$, altrimenti non è possibile utilizzare gli operatori fase e numero come canonici. Inoltre nel secondo capitolo sono stati presi in considerazione due esperimenti, uno riguardante un qubit di fase, l'altro un qubit di flusso. In entrambi i casi la misura è utile per verificare la validità del modello sviluppato. In particolare nel caso del qubit di fase sono state misurate le probabilità di transizione tra i primi due stati all'interno della buca. Si osservano in tal caso le oscillazioni di Rabi, come ci si aspetta dalla teoria, tra i due effettivi stati del qubit; inoltre si riesce a misurare il tempo di coerenza, che, se è abbastanza lungo, permette di manipolare lo stato del sistema.
Per quanto riguarda il qubit di flusso, invece, la misura analizzata non comprende i primi stati, ma due stati eccitati (il quarto e il decimo). Abbiamo visto che il potenziale di un dispositivo del genere è, approssimativamente, una doppia buca di potenziale e che gli stati in cui esso si può trovare sono combinazioni lineari degli stati delle due buche. Si può considerare il sistema a due livelli in quanto $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono praticamente indipendenti da tutti gli altri, ma si può anche indurre il qubit a stare in stati successivi. L'importanza della misura considerata non risiede solo nella possibilità di utilizzare tali sistemi nella computazione quantistica, ma anche nella realizzazione di stati quantistici macroscopici.
La ricerca riguardo la realizzazione di qubit utili per i computer quantistici è ancora aperta e non riguarda solo dispositivi superconduttivi. Altri tipi di sistemi che si stanno sviluppando utilizzano approcci molto diversi: ad esempio è possibile realizzare sistemi a due livelli utilizzando cavità ottiche, all'interno delle quali vengono "intrappolati" fotoni, i cui due stati possibili sono quelli di polarizzazione $|L\rangle$ e $|R\rangle$, ed eventualmente anche atomi. Altri metodi consistono nell'intrappolare ioni utilizzando campi elettrici e magnetici o sfruttare gli spin

(nucleari o elettronici) di sistemi macroscopici, solidi o liquidi. In ognuno di questi casi ci sono delle problematiche legate alla decoerenza, dovute a vari fattori, quali il funzionamento delle cavità ottiche (che non intrappolano per un tempo infinito), le fluttuazioni del campo elettromagnetico oppure l'influenza di gradi di libertà vibrazionali delle molecole coinvolte. Anche nei casi da noi analizzati esiste questo problema, infatti è stato visto come ci si metta in particolari limiti per realizzare un quantum-bit. In particolare per questi casi sono numerosi gli effetti di decoerenza, tanto che, inizialmente, la comunità scientifica era abbastanza scettica riguardo l'utilizzo, ad esempio, di SQUID come qubit. Solo dopo vari esperimenti e misure ci si è resi conto del fatto che tali effetti sono di minor entità rispetto a quello che ci sia aspettava teoricamente ed è risultato che tali dispositivi siano dei buoni candidati. In particolare un tipo di qubit che si è rivelato essere molto utile nella realizzazione di computer quantistici è il trasmone: si tratta di un particolare tipo di qubit di carica, che non è stato analizzato nell'elaborato in quanto, essendo formato da più giunzioni, necessita del formalismo lagrangiano per i circuiti. In particolare esso è costituito da due isole superconduttive accoppiate con due giunzioni Josephson ed è tale da avere una bassa sensibilità al rumore di carica, cosa dovuta al fatto che la dispersione di carica decada esponenzialmente con il rapporto $\frac{E_J}{E_c}$, che è molto grande (dell'ordine di 10^2). In particolare i trasmoni sono i qubit utilizzati sia da IBM nel 2016 per realizzare il primo dispositivo quantistico a 5 qubit, che da Google per il primo processore a 53 qubit, il Sycamore, tramite il quale sarebbe stata dimostrata la supremazia dei computer quantistici.

Vettore di Bloch

I qubit precedentemente descritti sono, di fatto, dei sistemi a due livelli. Essi possono essere studiati tramite i vettori e la sfera di Bloch. In particolare un generico stato di un qubit può essere scritto come

$$|\psi\rangle = \cos\alpha|0\rangle + e^{i\phi}\sin\alpha|1\rangle;$$

utilizzando il formalismo della matrice densità, invece, si ha

$$\rho = \frac{1}{2} + (1 + R_x\sigma_x + R_y\sigma_y + R_z\sigma_z) = \frac{1}{2} + (1 + R\cdot\sigma).$$

Nell'espressione le σ_i sono le matrici di Pauli, mentre i coefficienti R_i possono essere visti come le componenti di un vettore R, che prende il nome di vettore di Bloch. Si può verificare che tale vettore è al più unitario: esso ha norma 1 se descrive uno stato puro, minore se descrive una miscela.
Ciò implica che si possano rappresentare tutti i possibili stati di un sistema di questo tipo su una sfera di raggio unitario: i punti sulla superficie sono gli stati puri, mentre le miscele sono all'interno; si tratta della sfera di Bloch. La corrispondenza tra gli stati del sistema e i punti sulla sfera è biunivoca, eccetto per i punti
(0, 0, 1) e (0, 0, -1), che sono indipendenti da ϕ. Se si considera un qubit immerso in un campo esterno la sua hamiltoniana diventa

$$H(t) = -\frac{1}{2}(\Delta\sigma_x + \epsilon(t)\sigma_z);$$

il termine proporzionale a σ_x descrive il tunneling, mentre $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono gli autostati di σ_z. D'altra parte si può anche scrivere l'equazione del moto di Liouville-von Neumann

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho].$$

Quest'ultima può essere riscritta in funzione del vettore di Bloch utilizzando l'espressione vista precedentemente della matrice densità

$$\frac{dR}{dt} = M(t)\times R,$$

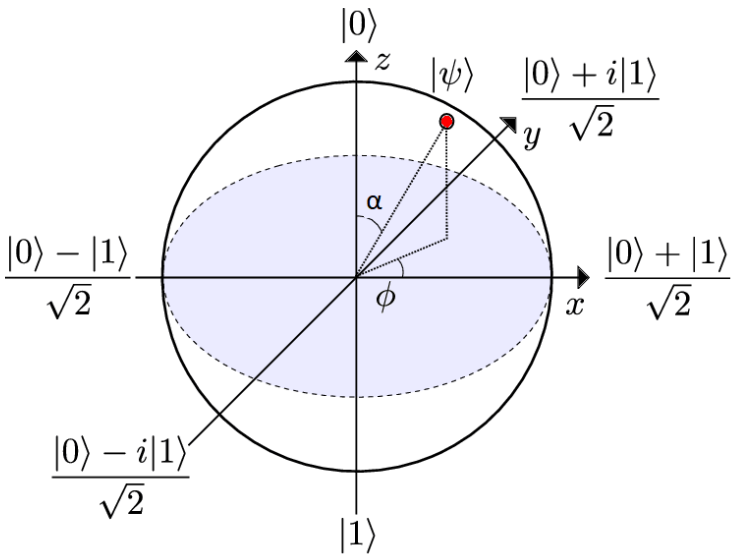

Figure 9: Sfera di Bloch: in particolare sono stati messi in evidenza i due autostati ai poli.

dove

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ -\Delta & 0 & \epsilon(t) \\ 0 & -\epsilon(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo modo si hanno delle equazioni del moto per il vettore di Bloch: nel caso di stati puri al variare dello stato del sistema R descrive una traiettoria sulla superficie sferica. Introducendo il vettore $\mathcal{H}(t) = (\frac{\Delta}{2}, 0, \epsilon(t))^T$, l'equazione per il vettore di Bloch può essere riscritta come

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{\hbar}\mathcal{H}(t) \times R.$$

Tale equazione descrive una rotazione del vettore di Bloch con velocità angolare $\Omega(t) = 2|\mathcal{H}(t)|/\hbar = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2(t)/\hbar}$, che non è altro che la frequenza di transizione da uno stato all'altro. Nel caso in cui la perturbazione sia costante si osservano oscillazioni, che corrispondono a delle rotazioni sulla sfera, se lo stato iniziale non è di equilibrio. Se lo è, invece, i vettori R e $\mathcal{H}$ sono paralleli, quindi il sistema resta nello stesso stato. Per indurre transizioni nel caso in cui a t=0 il sistema sia in un suo autostato bisogna utilizzare un campo armonico risonante: in tal caso l'hamiltoniana è del tipo

$$H(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_z + \hbar\eta\cos(\omega y)\sigma_x.$$

Ponendosi nel sistema solidale al campo rotante (approssimazione di onda rotante) si ottengono le oscillazioni di Rabi, che si misurano anche per un qubit di fase.

List of Figures

Bibliography

[1] James F. Annet. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford Master Series in Condensed Matter Physics. Oxford University Press, 2003. ISBN: 978-0198507567.

[2] Charles J. Joachain B. H. Bransden. *Physics of Atoms and Molecules*. Addison-Wesley, 2003. ISBN: 978-0582356924.

[3] Raymond McBride Elliot Snider Nathan Dasenbrock-Gammon et al. "Room temperature superconductivity in a carbonaceous sulfure hydride". In: *Nature* 586 (2020). DOI: `https://doi.org/10.1038/s41586-020-2801-z`.

[4] Richard Feynman. *Feynman Lectures on Physics-Volume 3: Quantum Mechainics*. Pearson India, 2012. ISBN: 978-8131792131.

[5] J. Patel et al. Friedman et al. "Quantum superposition of distinct macroscopic states". In: *Nature* 406 (2000). DOI: `https://doi.org/10.1038/35017505`.

[6] Dieter Heiss. *Fundamental of Quantum Information: Quantum Computation, Communication, Decoherence and All That*. Lectures Notes in Physics. Springer, 2002. ISBN: 3-540-43367-8.

[7] Jay Gambetta Jens Koch Terri M. Yu et al. "Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box". In: *Physical Review A* 76 (2007). DOI: `10.1103/PHYSREVA.76.042319`.

[8] J. Aumentado John M. Martinis S. Nam et al. "Rabi Oscillations in a Large Josephson-Junction Qubit ". In: *Physical Review Letters* 89 (2002). DOI: `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.117901`.

[9] Jochen Braumüller Morten Kjaergaard Mollie E. Schwartz et al. "Superconducting qubits: current state of play". In: *Annual Reviews of Condensed Matter Physics* 11 (2020). DOI: `10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605`.

[10] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill College, 1996. ISBN: 0-07-064878-6.

[11] A. M. Zagoskin. *Quantum engineering: Theory and Design of Quantum Coherent Structures*. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 978-0521113694.