UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

L'invarianza di Poincaré nelle teorie di gauge

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello
Dott. Francesco Bajardi

Candidato:
Alfonso Lamberti
Matr. $N85001011$

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le teorie di gauge sono una classe di teorie di campo, basate sull'ipotesi che alcune simmetrie siano possibili non solo globalmente, ma anche localmente.

Precisiamone alcuni aspetti. Sottolineando, anzitutto, che le teorie di campo sono teorie che si propongono di descrivere la dinamica dei campi, ovvero l'evoluzione nel tempo di enti che esistono in ogni punto dello spazio e che regolano la creazione e l'annichilazione delle particelle. Questo avviene definendo la lagrangiana di campo, che può essere concepita come la lagrangiana di un sistema a infiniti gradi di libertà, discendendo a sua volta da un funzionale dei campi stessi, ovvero l'azione. I campi devono soddisfare delle equazioni dinamiche dipendenti dalla specifica lagrangiana del sistema, e che vengono ottenute imponendo la condizione di stazionarietà per il funzionale, così come previsto dal principio di minima azione.

Se l'azione risulta invariata a seguito di una trasformazione che può coinvolgere sia i campi che le coordinate, allora si dice che la trasformazione è di simmetria per il sistema. Questa, in effetti, costituisce la più generale condizione di simmetria, ed è detta "simmetria variazionale". L'importanza in fisica delle trasformazioni di simmetria, è dovuta alla connessione che sussiste tra quest'ultime e le leggi di conservazione, come stabilito dal teorema di Noether. A seconda del tipo di trasformazione agente sul sistema, possiamo distinguere le simmetrie in *locali* e *globali*. Le trasformazioni che vengono eseguite identicamente in ogni punto dello spaziotempo e rispetto alle quali l'azione risulta invariata, sono dette trasformazioni di simmetria globale. Le trasformazioni che dipendono dal punto dello spaziotempo considerato e che mantengono invariata l'azione, sono dette simmetrie locali.

Il concetto che sta alla base delle teorie di gauge, è appunto quello di postulare che il sistema debba possedere anche simmetrie locali, ovvero che sia possibile riconoscere puntualmente l'invarianza dell'azione, rispetto a trasformazioni che dipendono dal punto dello spaziotempo considerato. Vedremo che questo aspetto potrà essere garantito soltanto ricorrendo a opportuni operatori differenziali covarianti per i campi, costruiti impiegando i campi gauge associati alla simmetria in esame.

Il motivo per cui lo studio delle teorie di gauge risulti particolarmente importante, è da ricercare nel Modello standard delle interazioni fondamentali.

Negli ultimi anni si è compreso come, a livello microscopico, tutta la fenomenologia della materia e della radiazione, sia riportabile a tre sole classi di interazioni fondamentali: l'interazione forte, elettromagnetica e debole. Queste tre tipologie di interazione sono descritte nel quadro dei principi della meccanica quantistica e della relatività ristretta, da una teoria locale e relativistica di campi quantizzati, che si basa su un principio di simmetria di gauge. Il modello teorico al quale fanno riferimento è noto come Modello standard, che è una teoria di gauge.

La quarta interazione fondamentale che sfugge a questo schema è l'interazione gravitazionale, che viene descritta mediante la teoria della relatività generale di Einstein, ovvero una teoria classica volta a schematizzare il comportamento del campo gravitazionale tramite la geometrizzazione dello stesso. Infatti secondo la relatività generale la rappresentazione dell'interazione gravitazionale si esplicita per mezzo del linguaggio della geometria differenziale, che è interamente basato sulla nozione di metrica (pseudo-riemanniana) per lo spaziotempo e di connessione affine. In questa teoria la curvatura della varietà spaziotemporale, la sua evoluzione dinamica e l'interazione con le sorgenti materiali, è descritta mediante equazioni differenziali formulate per le sole componenti del tensore metrico (quando la connessione è di Levi-Civita).

L'assenza di una teoria quantistica della gravitazione costituisce uno dei problemi centrali della fisica teorica contemporanea, per diversi motivi; in prima istanza, è possibile che gli effetti quantistici siano rilevanti solamente a scale energetiche che esulano dal controllo sperimentale. In secondo luogo, a differenza delle altre interazioni del modello standard onde i campi quantistici evolvono in un background piatto, in un'ipotetica teoria quantistica della gravità il background coinciderebbe con il campo quantistico dinamico.

Alcuni tentativi volti a riformulare la relatività generale come teoria di gauge, sono stati fatti nel secolo scorso. Nel 1956 Utiyama propose un modello in grado di descrivere la relatività generale, come una teoria di gauge basata su un gruppo di simmetria locale, il gruppo di Lorentz $SO(1,3)$. Infatti esiste un modo alternativo ma completamente equivalente di descrivere la geometria di una varietà pseudo-riemanniana, interamente basato sulla nozione di tetrade e di connessione di Lorentz. Questo diverso linguaggio, che è particolarmente appropriato per descrivere la dinamica dei campi quantistici su uno spaziotempo curvo, permette anche di formulare la teoria della relatività generale come teoria di gauge per un gruppo di simmetria locale, adeguando il formalismo descrivente la gravità a quello delle altre interazioni fondamentali.

In questo lavoro di tesi, mi propongo di studiare le trasformazioni globali e locali di Poincaré nella teoria dei campi, spiegando come queste possano ricondursi a trasformazioni di simmetria per l'azione. Cercherò quindi di delineare le caratteristiche essenziali della teoria, mettendo in evidenza le problematiche emergenti in riferimento alle trasformazioni locali di Poincaré, quando si richiede che queste possano essere trasformazioni di simmetria per l'azione.

Nella prima parte della tesi analizzerò come il formalismo delle tetradi sia in grado di rendere un modello geometrico general-covariante formulato su una varietà spaziotemporale curva, localmente Lorentz-invariante rispetto allo spaziotempo piatto tangente alla varietà. Questo formalismo sarà di fondamentale importanza per mettere in relazione la simmetria locale di Lorentz e lo spaziotempo tangente allo spaziotempo curvo, giocando un ruolo importante nel rendere le trasformazioni locali di Poincaré trasformazioni di simmetria per l'azione.

Invece, nella seconda parte del lavoro di tesi, mostrerò il formalismo variazionale e lagrangiano della teoria dei campi, nelle ipotesi che l'interazione gravitazionale sia trascurabile e che lo spaziotempo sia di Minkowski. Sarà in questo contesto che descriverò quali grandezze sono conservate rispetto a trasformazioni globali di Poincaré, che risulteranno essere trasformazioni di simmetria per l'azione.

Infine prenderò in considerazione le trasformazioni locali di Poincaré e spiegherò come sia necessario, se si vuole rendere invariante l'azione rispetto a queste trasformazioni (che diventeranno trasformazioni di simmetria locale), ricorrere a opportuni operatori differenziali covarianti, costruiti utilizzando i campi di gauge associati alla trasformazione di simmetria in esame. Questo permetterà di definire la derivata covariante di Lorentz, ed essendo le trasformazioni locali di Poincaré trasformazioni generali di coordinate, si otterrà anche la formulazione lagrangiana della teoria su uno spaziotempo localmente minkowskiano.

Capitolo 2

Le Tetradi

2.1 La covarianza generale e la covarianza di Lorentz

Nella meccanica newtoniana, lo spazio e il tempo vengono assunti come unità separate; il primo è descritto da una varietà tridimensionale euclidea, ortogonale ad una unidimensionale il tempo. Invece nella teoria della relatività ristretta di Einstein, prima teoria che pone una velocità limite alle interazioni, lo spaziotempo viene rappresentato da una varietà differenziabile quadridimensionale $\mathcal{M}_4$ minkowskiana. Tale teoria non include nel proprio formalismo la descrizione della gravità, che viene trattata dalla teoria della relatività generale.

Nella teoria della relatività generale, Einstein rappresenta lo spaziotempo come una varietà differenziabile quadridimensionale lorenziana $\mathcal{V}_4$ a torsione nulla, la cui curvatura dipende dalla distribuzione di materia ed energia in esso presente. Il principio di equivalenza, che sta alla base di questa teoria, permette di connettere localmente lo spaziotempo tangente alla varietà spaziotemporale e lo spaziotempo di Minkowski, conferendo alla teoria un'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Al fine di mettere in relazione la simmetria locale di Lorentz dello spaziotempo tangente e l'invarianza per diffeomorfismi nello spaziotempo curvo, è necessario trovare un legame formale tra lo spaziotempo tangente e lo spaziotempo curvo. Mostriamo come gli strumenti matematici che permettono questa "saldatura" siano i cosiddetti campi di tetrade.

Iniziamo ricordando che su uno spaziotempo di Minkowski $\mathcal{M}_4$, una base locale $\{e_i\}$ può essere definita a partire da operatori di derivazione $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, rispetto alle coordinate locali (x^i), che etichettano un generico punto.

Il tensore metrico può essere definito come il prodotto tensoriale tra i vettori di base e_i e e_j che si specifica come:

$$\eta_{ij} := e_i \cdot e_j \qquad i,j = 0,1,2,3 \tag{2.1}$$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Allo stesso modo, per uno spaziotempo qualsiasi che può essere rappresentato da una varietà differenziabile $\mathcal{V}_4$, definita una carta che mappa un punto $p \in \mathcal{V}_4$ e un suo intorno, in un intorno di $\mathbb{R}^4$, abbiamo un sistema di coordinate locali. Possiamo quindi introdurre una base per lo spazio tangente alla varietà in quel punto $T_p\mathcal{V}_4$. Questa base, può essere interpretata come un insieme di operatori di derivazione rispetto alle curve coordinate uscenti dal punto. Una base per lo spazio tangente è data dai vettori $\{e_\mu\}$ descritti da $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, mentre la base dello spazio duale $T_p^*\mathcal{V}_4$ è data da $\{dx^\mu\}$ e può essere ottenuta dall'azione per dualità sugli elementi di base $dx^\mu\left(\partial_\nu\right) = \delta^\mu_\nu$. In questo caso il tensore metrico assume forma:

$$g_{\mu\nu} := e_\mu \cdot e_\nu \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{2.3}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

dove gli elementi $g_{\mu\nu}$ del tensore metrico rappresentano generiche funzioni delle coordinate; inoltre è facile verificare che il tensore metrico gode della proprietà di simmetria rispetto allo scambio dei suoi indici. Chiameremo le (x^i) coordinate non olonome e per queste utilizzeremo gli indici latini, mentre le (x^μ), dette coordinate olonome, verranno contraddistinte da indici greci. Essendo le $\{e_i\}$ e le $\{e_\mu\}$ insiemi massimali di vettori indipendenti e minimali di generatori, possiamo scrivere:

$$e_\mu = e^i_\mu(x) e_i \tag{2.5}$$

le quantità e^i_μ sono chiamate tetradi, e costituiscono le matrici di trasformazione che mappano dal riferimento di Lorentz con coordinate non olonome (x^i) alla totalità delle coordinate (x^μ). Inoltre le tetradi laddove vengano soddisfatte le condizioni di integrabilità

$$\partial_\mu e^i_\nu - \partial_\nu e^i_\mu = 0 \tag{2.6}$$

ovvero le rotazioni negli indici olonomi di $\partial_{[\mu,\nu]}e^i$ conducono a quantità nulle, soddisfano le proprietà:

$$e^i_\mu \cdot e^\nu_i = \delta^\nu_\mu \qquad e^i_\mu \cdot e^\mu_j = \delta^i_j \tag{2.7}$$

$$e^i_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu} \tag{2.8}$$

Questo comporta che il tensore metrico η_{ij} e $g_{\mu\nu}$ possano essere ottenuti l'uno dall'altro nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = e^i_\mu e_i \cdot e^j_\nu e_j = e^i_\mu\, e^j_\nu e_i \cdot e_j = e^i_\mu\, e^j_\nu\, \eta_{ij} \tag{2.9}$$

Pertanto affermare che la varietà spaziotemporale è differenziabile e lorenziana (le ipotesi di differenziabilità portano le condizioni di integrabilità ad essere automaticamente soddisfatte), equivale ad affermare che ad ogni punto $p \in \mathcal{V}_4$ corrisponda una base di $T_p\mathcal{V}_4$ tale che la metrica sia di Minkowski. Questo particolare sistema di coordinate prende il nome di riferimento inerziale locale.

Una base naturale per lo spazio tangente $T_p\mathcal{V}^4$ alla varietà nel punto p, è data dalle derivate parziali rispetto le coordinate x^μ di quel punto $\{e_\mu = \partial_\mu\}$. Tuttavia è altresì possibile introdurre un nuovo sistema di vettori di base rispetto al quale il prodotto scalare è minkowskiano. In ogni punto della varietà lorenziana, una quaterna di vettori covarianti può essere scelta in modo da soddisfare la condizione:

$$g^{\mu\nu}\, e^i_\mu\, e^j_\nu = \eta^{ij} \tag{2.10}$$

In questo modo grazie ai campi di tetrade possiamo formare una base ortonormale dello spazio tangente alla varietà in ogni punto portandolo ad essere minkowskiano. Inoltre osserviamo che a seguito di una generica trasformazione di coordinate $x^\mu \to \bar{x}^\mu$ le tetradi si trasformano come un tensore generalcovariante, mentre come un tensore di Lorentz rispetto a trasformazioni di Lorentz locali $x^i \to x'^i = \Lambda^i_j\, x^j$. Esplicitamente:

$$\bar{e}^i_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^i}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} e^i_\nu \tag{2.11}$$

$$e'^i_\mu = \Lambda^i_j \frac{\partial x^j}{\partial x^\mu} = \Lambda^i_j\, e^j_\mu \tag{2.12}$$

Osserviamo che utilizzando la (2.9) e invertendo la (2.10) si ottiene:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij}\, e^i_\mu\, e^j_\nu \quad e \quad g^{\mu\nu} = \eta^{i,j} e^\mu_i\, e^\nu_j \tag{2.13}$$

sicché è possibile calcolare le componenti del tensore metrico, a partire dalle tetradi. In altre parole, la conoscenza del campo di tetrade determina localmente e univocamente la metrica $g_{\mu\nu}(x)$ in ogni punto della varietà a meno di una residua arbitrarietà nella scelta delle tetradi, dovuta alle rotazioni di Lorentz che possono essere effettuate sui vettori di base dello spazio tangente. Infatti si può verificare che e^i_μ e $e'^i_\mu = \Lambda^i_j\, e^j_\mu$ (Λ^i_j rappresenta una trasformazione di Lorentz locale) determinano la stessa metrica:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{ij}\, e'^i_\mu\, e'^j_\nu = \eta_{ij}\, \Lambda^i_a\, \Lambda^j_b\, e^a_\mu\, e^b_\nu = \eta_{ab}\, e^a_\mu\, e^b_\nu = g_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

Nello scrivere l'equazione (2.15), si è usata la condizione di gruppo per le matrici di Lorentz $\eta = \Lambda^T \eta\, \Lambda$ che in componenti si scrive $\eta_{ab} = \eta_{ij}\, \Lambda^i_a\, \Lambda^j_b$. Mediante le tetradi e i loro inversi, qualunque oggetto geometrico definito sulla varietà lorenziana può essere localmente proiettato nello spazio minkowskiano tangente, semplicemente contraendo i suoi indici (olonomi) con quelli della tetrade e^j_μ o e^μ_j. É importante sottolineare cosa accade a seguito della proiezione. A tal fine, a seguito della contrazione una generica grandezza vettoriale A_μ e una tetrade e^μ_i si ha:

$$A_\mu \longrightarrow A_i = e^\mu_i A_\mu \tag{2.15}$$

$$A^\mu \longrightarrow A^i = e^i_\mu A^\mu \tag{2.16}$$

Naturalmente si può passare dallo spazio tangente minkowskiano alla varietà lorenziana mediante la proiezione inversa. Osserviamo che partendo da un tensore per trasformazioni generali di coordinate, dopo la proiezione otteniamo una quantità tensoriale per trasformazioni di Lorentz sullo spazio tangente, e scalare rispetto a trasformazioni generali di coordinate (in quanto non ha indici olonomi "curvi", ma solo indici anolonomi "piatti"). In questo senso le tetradi sono oggetti di tipo "misto", che si trasformano come vettori general-covarianti rispetto all'indice curvo, e come vettori nello spazio tangente, rispetto all'indice piatto. In altre parole, a seguito della proiezione, l'invarianza per diffeomorfismi nella varietà lorenziana $\mathcal{V}_4$ può essere ricondotta all'invarianza per trasformazioni di Lorentz nello spazio di Minkowski tangente $\mathcal{M}_4$. Lo spazio tangente però, varia in generale da punto a punto, e quindi la corrispondente trasformazione di Lorentz è una trasformazione di tipo locale, rappresentata da matrici $\Lambda(x)$.

Infine mostriamo come il determinante del tensore metrico, con cui caratterizzeremo l'elemento di volume invariante, può essere descritto a partire dal determinate delle tetradi.

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|det(e^i_\mu) det(e^i_\nu)|} = |det(e^i_\mu)| \tag{2.17}$$

Capitolo 3

Il Principio di minima azione

3.1 IL formalismo lagrangiano e la variazione dell'azione

In questo capitolo presentiamo il principio di minima azione nella teoria dei campi e il teorema di Noether grazie al quale è possibile stabilire una profonda connessione tra simmetrie e leggi di conservazione. L'intera trattazione, verrà basata sull'assenza di campo gravitazionale, ipotizzando che i sistemi fisici considerati possano essere correttamente descritti nel contesto della relatività ristretta.

Sia $\chi(x)$ una variabile di campo, definita su ogni punto x dello spaziotempo di Minkowski, e sia $\mathcal{L}(\chi(x), \partial_i\chi(x), x)$ la densità lagrangiana del sistema. L'integrale di azione I su un quadri-volume Ω è dato da:

$$I(\Omega) = \int_\Omega \mathcal{L}(\chi(x), \partial_i\chi(x), x) d^4x \tag{3.1}$$

Consideriamo quindi una variazione infinitesima delle coordinate e delle variabili di campo

$$x^i \longrightarrow x'^i = x^i + \delta x^i \tag{3.2}$$

$$\chi(x) \longrightarrow \chi'(x') = \chi(x) + \delta\chi(x) \tag{3.3}$$

la corrispondente variazione dell'integrale d'azione sarà:

$$\delta I = \int_{\Omega'} \mathcal{L}'(x') d^4x' - \int_\Omega \mathcal{L}(x) d^4x \tag{3.4}$$

Poiché la trasformazione infinitesima dell'elemento di quadri-volume è regolata dal determinante dello jacobiano relativo alla trasformazione di coordinate, possiamo scrivere:

$$\delta I = \int_\Omega \mathcal{L}'(x') det \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right) d^4x - \int_\Omega \mathcal{L}(x) d^4x \tag{3.5}$$

Derivando la (3.2) rispetto a x^j e mantenendo un'approssimazione al primo ordine il determinante risulta essere:

$$det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) = det \left(\delta^i_j + \frac{\partial}{\partial x^j}(\delta x^i) \right) = 1 + \partial_i \delta x^i + \mathcal{O}(\delta x^i)^2 \tag{3.6}$$

Sostituendo l'equazione sovrastante nell'azione (3.5) abbiamo:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \mathcal{L}'(x') \left(1 + \partial_i \delta x^i \right) - \mathcal{L}(x) \right\} d^4x \tag{3.7}$$

A questo punto utilizzando la variazione totale della densità lagrangiana, possiamo scrivere la variazione dell'integrale di azione come:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ \delta\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) \frac{\partial}{\partial x^i}(\delta x^i) \right\} d^4x \tag{3.8}$$

La variazione (3.9) può essere ulteriormente semplificata, a tal fine, introduciamo il formalismo che permetterà di scrivere l'azione sovrastante nella forma richiesta dal teorema di Noether. Per ogni funzione Φ è possibile definire la variazione di punto fisso δ_0 che distingueremo dalla variazione totale δ; questa, fissato x o qualsiasi altro punto x', è definita come:

$$\delta_0 \Phi = \Phi'(x) - \Phi(x) = \Phi'(x') - \Phi(x') \tag{3.9}$$

e coinvolge solo i campi e non le coordinate, a differenza della variazione totale

$$\delta\Phi = \Phi'(x') - \Phi(x) \tag{3.10}$$

Espandendo in serie di Taylor al primo ordine in δx^i, è possibile mostrare come collegare tra loro la variazione totale e quella di punto fisso. Utilizzando la (3.2), possiamo scrivere

$$\Phi(x') = \Phi(x) + \partial_j \Phi(x) \delta x^j \tag{3.11}$$

e dunque si ottiene:

$$\delta\Phi = \Phi'(x') - \Phi(x) = \left[\Phi'(x') - \Phi(x') \right] + \Phi(x') - \Phi(x)$$

$$\delta\Phi = \delta_0\Phi + \partial_j\Phi(x)\delta x^j \tag{3.12}$$

Il vantaggio di aver introdotto le variazioni di punto fisso δ_0 è dovuto al fatto che queste commutano con la derivazione $\partial_i(\delta_0\Phi) = \delta_0(\partial_i\Phi)$. É quindi possibile scrivere la variazione totale della derivata del campo Φ utilizzando la variazione di punto fisso. A tal fine, è sufficiente valutare le quantità:

$$\delta\left(\partial_i\Phi\right) = \frac{\partial\Phi'}{\partial x'^i}(x') - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x)$$

$$\delta\left(\partial_i\Phi\right) = \frac{\partial\Phi'}{\partial x'^i}(x') - \frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}(x') + \frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}(x') - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x)$$

$$\delta\left(\partial_i\Phi\right) = \delta_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}(x') - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x) = \delta_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\right)\Big|_x - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x)$$

e ricordando che $x^j = x'^j - \delta x^j$, si ottiene:

$$\delta\left(\partial_i\Phi\right) = \delta_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\delta_i^j - \frac{\partial(\delta x^j)}{\partial x'^i}\right)\Big|_x - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x)$$

Ricorrendo infine alla definizione di variazione di punto fisso, possiamo scrivere

$$\delta\left(\partial_i\Phi\right) = \delta_0\left(\partial_i\Phi\right) - \partial_i(\delta x^j)\partial_j\Phi \tag{3.13}$$

Le formule (3.13) e (3.14) ci permettono di ottenere le variazioni dei campi e delle loro derivate, in termini delle variazioni di punto fisso delle stesse. Saranno quindi impiegate sia per le variabili di campo χ che per la densità lagrangiana $\mathcal{L}$. Utilizzando la (3.13) possiamo riscrivere la variazione della densità lagrangiana nella variazione dell'integrale d'azione (3.9), ottenendo:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{\delta_0\mathcal{L} + \partial_i(\mathcal{L})\delta x^i + \mathcal{L}\partial_i(\delta x^i)\right\} d^4x$$

$$\delta I = \int_\Omega \left\{\delta_0\mathcal{L} + \partial_i(\mathcal{L}\delta x^i)\right\} d^4x \tag{3.14}$$

Quindi l'integrando potrà scriversi come somma della variazione di punto fisso della densità lagrangiana più una quadridivergenza.

3.2 La condizione di Invarianza

Nella sezione precedente abbiamo ricavato la variazione totale dell'azione utilizzando la definizione di variazione di punto fisso per la densità lagrangiana. Per imporre la condizione di invarianza, notiamo che l'integrale d'azione definito su ogni regione Ω è invariante sotto una variazione arbitraria dei campi e delle coordinate, se la variazione totale dell'azione è nulla:

$$\delta I = 0 \tag{3.15}$$

Questa condizione, stante l'arbitrarietà di Ω, porta l'integrando ad essere identicamente nullo:

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_i(\delta x^i) = \delta_0\mathcal{L} + \partial_i(\mathcal{L}\delta x^i) = 0 \tag{3.16}$$

Possono quindi presentarsi due situazioni, che saranno di fatto discriminanti per le trasformazioni globali e locali di Poincaré, la prima si manifesta nel caso in cui $\partial_i(\delta x^i) = 0$ che automaticamente implica $\delta\mathcal{L} = 0$; in tal caso diremo che $\mathcal{L}$ è una densità lagrangiana invariante. Mentre se $\partial_i(\delta x^i) \neq 0$ allora $\delta\mathcal{L} \neq 0$; in questo caso $\mathcal{L}$ si trasformerà come una densità scalare. Quindi può essere conveniente introdurre una funzione $h(x)$ che si comporti come una densità scalare che soddisfi la relazione:

$$\delta h(x) + h(x)\partial_i(\delta x^i) = 0 \tag{3.17}$$

tramite cui è possibile costruire una densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_i\chi(x), x) = h(x)L(\chi(x), \partial_i\chi(x), x) \tag{3.18}$$

nella quale $L(\chi(x), \partial_i\chi(x), x)$ è detta lagrangiana scalare. Assumendo valida la condizione (3.17) e sostituendo la precedente equazione nella (3.16), si ottiene:

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_i(\delta x^i) = \delta h(x)L + h(x)\delta L + Lh(x)\partial_i(\delta x^i) = h(x)\delta L$$

La condizione di invarianza dell'integrale d'azione

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_i(\delta x^i) = \delta_0\mathcal{L} + \partial_i(\mathcal{L}\delta x^i) = h(x)\delta L = 0 \tag{3.19}$$

è automaticamente soddisfatta purché L abbia variazione nulla $\delta L = 0$. Equivalentemente è possibile dire che l'integrale d'azione resta invariato sotto una trasformazione infinitesima per i campi e le coordinate, se la corrispondente variazione dell'azione può essere scritta, come l'integrale di una quadri-divergenza

$$\delta I = \int_\Omega \partial_i F^i d^4x$$

dove F^i rappresenta un quadrivettore proporzionale in generale alla variazione dei campi e alle loro derivate prime. Richiedendo che, sia i campi che le derivate di questi siano localizzate in una porzione finita di spazio e vadano a zero in modo abbastanza rapido fuori da questa regione, possiamo assumere che F^i sia identicamente nullo sul bordo del dominio spaziotemporale considerato.

Fino a questo punto abbiamo visto quali condizioni devono essere verificate affinché l'integrale d'azione resti invariato a seguito di una trasformazione infinitesima dei campi e delle coordinate. Adesso mostriamo come valutare la variazione di punto fisso della densità lagrangiana, con la quale ricostruiremo la variazione completa dell'azione. Tale variazione può essere scritta come:

$$\delta_0\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi}\delta_0\chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0(\partial_i\chi) \tag{3.20}$$

Ricordando la commutazione tra la derivazione e la variazione di punto fisso, nonché le regole della derivazione del prodotto, possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\delta_0(\partial_i\chi) = \partial_i(\delta_0\chi) \tag{3.21}$$

$$\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0\chi\right) = \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\right)\delta_0\chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\partial_i(\delta_0\chi) \tag{3.22}$$

sostituendo il secondo termine della (3.22) nel secondo termine della (3.20), otteniamo:

$$\delta_0\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\right)\right]\delta_0\chi + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0\chi\right)$$

$$\delta_0\mathcal{L} = [\mathcal{L}]_\chi\delta_0\chi + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0\chi\right) \tag{3.23}$$

A seguito delle relazioni sovrastanti, la variazione dell'azione può essere scritta come:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{\delta_0\mathcal{L}+\partial_i(\mathcal{L}\delta x^i)\right\}d^4x = \int_\Omega \left\{[\mathcal{L}]_\chi\delta_0\chi+\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0\chi\right)+\partial_i(\mathcal{L}\delta x^i)\right\}d^4x$$

$$= \int_\Omega \left\{[\mathcal{L}]_\chi\delta_0\chi + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)}\delta_0\chi + \mathcal{L}\delta x^i\right)\right\}d^4x \tag{3.24}$$

Sostituendo l'espansione al primo ordine dell'equazione $\delta_0\chi = \delta\chi - \partial_k\chi\delta x^k$ nel secondo termine della (3.24) si ottiene:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ [\mathcal{L}]_\chi \delta_0\chi + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \delta\chi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \partial_k\chi\delta x^k + \mathcal{L}\delta x^i \right) \right\} d^4x$$

$$= \int_\Omega \left\{ [\mathcal{L}]_\chi \delta_0\chi + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \delta\chi - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \partial_k\chi - \delta^i_k \mathcal{L} \right] \delta x^k \right) \right\} d^4x$$

e indicando con T^i_k la densità del tensore canonico Energia-Impulso definito come:

$$T^i_k = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \partial_k\chi - \delta^i_k \mathcal{L} \right] \delta x^k$$

la variazione dell'azione diventa:

$$\delta I = \int_\Omega \left\{ [\mathcal{L}]_\chi \delta_0\chi + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \delta\chi - T^i_k \delta x^k \right) \right\} d^4x$$

La condizione di invarianza dell'integrale d'azione (3.20), è soddisfatta se

$$[\mathcal{L}]_\chi \delta_0\chi + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\chi)} \delta\chi - T^i_k \delta x^k \right) = 0 \tag{3.25}$$

e verrà usata come condizione generale di simmetria, per una variazione dei campi e delle coordinate.

3.3 Le equazioni di Eulero-Lagrange e il Teorema di Noether

Abbiamo visto come la condizione di invarianza dell'azione porti l'integrando ad essere identicamente nullo, e come sia possibile riscriverlo in una forma nella quale compaia la divergenza di una grandezza vettoriale. Con riferimento all'equazione (3.26) possiamo dedurre che: se le variazioni sono scelte in modo tale che $\delta x^i = 0$ in Ω, laddove accorrano solo variazioni di punto fisso dei campi, e se le variazioni dei campi si annullano alla frontiera del dominio spaziotemporale considerato, allora:

$$[\mathcal{L}]_\chi = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \chi)} \right) = 0 \qquad \forall i = 0, 1, 2, 3 \tag{3.27}$$

ovvero i campi devono soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange. Proviamo a descrivere con maggiore dettaglio la precedente sequenza di implicazioni. La richiesta che le variazioni delle coordinate siano nulle in ogni punto di Ω ci consente di rientrare in una situazione nella quale la variabilità è delegata ai soli campi, sicché l'azione dipenderà solo dai campi e dai gradienti di questi. Inoltre se le variazioni dei campi si annullano al bordo, applicando il teorema di Gauss al secondo termine della (3.25), questi risulta essere identicamente nullo a causa dipendenza dalle variazioni dei campi. Pertanto il principio di minima azione, sotto le condizioni dette, è soddisfatto se i campi sono soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange. Inoltre le condizioni imposte sul comportamento dei campi alla frontiera, ci permettono di definire le soluzioni delle equazioni (3.27) come soluzioni di un problema di Sturm-Liouville.

È a questo punto possibile presentare il **Teorema di Noether**, che esprime lo stretto legame esistente tra simmetrie e leggi di conservazione. Ad ogni trasformazione di simmetria, cioè ad ogni trasformazione per i campi o le coordinate $\{\delta x\, , \, \delta\chi\}$ che lascia invariata l'azione nel senso della (3.25) possiamo sempre associare una corrente vettoriale conservata che dunque soddisfa la condizione di divergenza nulla:

$$\partial_i J^i = \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \chi)} \delta\chi - T^i_k \delta x^k \right) = 0 \tag{3.28}$$

Va comunque notato che tale definizione non è univoca, in generale infatti è sempre possibile aggiungere alla densità lagrangiana una quadridivergenza che non cambi le equazioni, e che quindi non rompa la simmetria del sistema. La densità lagrangiana così modificata porta a definire una nuova corrente, diversa dalla precedente, anch'essa conservata.

Per ottenere le quantità conservate, è sufficiente integrare l'equazione di continuità $\partial_i J^i = 0$ su una regione dello spaziotempo quadridimensionale. Nell'ipotesi che tale regione si estenda all'infinito spazialmente e che sia limitata lungo l'asse temporale da due ipersuperfici, applicando il teorema di Gauss e assumendo che i campi che definiscono J^i siano localizzati a distanza finita, otteniamo:

$$0 = \int_\Omega \partial_i J^i dx^4 = \int_{\partial\Omega} J^i dS_i = \int_{\Sigma 1} J^i dS_i - \int_{\Sigma 2} J^i dS_i$$

la quale comporta che:

$$\int_{\Sigma 1} J^i dS_i = \int_{\Sigma 2} J^i dS_i$$

ovvero il flusso di J^i è conservato poiché è indipendente dalla ipersuperficie considerata. É possibile valutare il prodotto $J^i dS_i$ nel riferimento di un osservatore inerziale la cui quadri-velocità è parallela alla normale uscente n^i. In altre parole rispetto ad un osservatore la cui linea di mondo interseca ortogonalmente l'ipersuperfice di omogeneità spaziale $\Sigma(t)$ al tempo proprio t, abbiamo che $n^i = \delta^i_0$ e $dS_0 = dx^3$. Quindi essendo gli iperpiani Σ_1 e Σ_2, ipersuperfici a t-costante che intersecano l'asse temporale nei tempi t_1 e t_2, la precedente equazione definisce una quantità Q indipendente dal tempo (ovvero una quantità conservata):

$$Q(t_1) = \int_{\Sigma_1} J^i dS_i = \int_{\Sigma_2} J^i dS_i = Q(t_2)$$

$$Q = \int_{\Sigma_t} J^i dS_i = \int_{\Sigma_t} J^0 dS_0 = \int_t J^0 dx^3 = const \tag{3.29}$$

Nell'equazione sovrastante, abbiamo indicato con "t" l' ipersuperficie di omogeneità spaziale che è intersecata dalla linea di mondo dell'osservatore all'istante t considerato (si tratta di un volume nello spazio quadridimensionale).

Capitolo 4

L'Invarianza globale di Poincaré

4.1 Le traformazioni globali di Poincaré

Come accennato in precedenza, uno spaziotempo dove non accorrano effetti di campo gravitazionale, è uno spaziotempo di Minkowski $\mathcal{M}_4$. Il gruppo di isometria su $\mathcal{M}_4$ è il gruppo delle trasformazioni di coordinate di Poincaré (PT), che consiste nel gruppo delle trasformazioni di Lorentz $SO(1,3)$ e nel gruppo delle traslazioni $T(1,3)$. Le trasformazioni di Poincaré sono date da:

$$x^i \xrightarrow{PT} x'^i = a^i_j x^j + b^i \tag{4.1}$$

Nel caso in cui la trasformazione sia di tipo globale, i coefficienti a^i_j delle matrici di Lorentz, così come le componenti b^i del vettore di traslazione, sono costanti e reali, inoltre le matrici a^i_j sono invertibili $a^i_k\, a^k_j = \delta^i_j$.

Prendendo in considerazione una trasformazione infinitesima di Poincaré, possiamo espandere le a^i_j al primo ordine intorno all'identità e considerare una traslazione infinitesima di parametri ε^i

$$x'^i = (\delta^i_j + \varepsilon^i_j)x^j + \varepsilon^i \quad \longrightarrow \quad x'^i - x^i = \varepsilon^i_j x^j + \varepsilon^i$$

$$\delta x^i = \varepsilon^i_j x^j + \varepsilon^i \tag{4.2}$$

Le matrici di Lorentz a^i_j devono soddisfare la condizione di gruppo $\eta_{hk} = \eta_{ij}\, a^i_h\, a^j_k$ e questa consente di ottenere una proprietà per le matrici ε^i_j associate alla trasformazione infinitesima

$$\eta_{hk} = \eta_{ij}(\delta^i_h + \varepsilon^i_h)(\delta^j_k + \varepsilon^j_k)$$

In particolare, al primo ordine si ottiene:

$$\eta_{hk} = \eta_{ij}(\delta^i_h\delta^j_k + \varepsilon^i_h\delta^j_k + \varepsilon^j_k\delta^i_h) \longrightarrow \eta_{hk} = \eta_{hk} + \varepsilon_{ik}\delta^i_h + \varepsilon_{jh}\delta^j_k$$

ovvero le matrici, come mostrato dalla precedente equazione, devono essere antisimmetriche: $\varepsilon_{hk} + \varepsilon_{kh} = 0$.

In matematica un gruppo è un insieme non vuoto dotato di una operazione binaria interna, che soddisfa gli assiomi di associatività, di esistenza dell'elemento neutro e di inverso. Un gruppo si dice *finito* se il numero di elementi è finito, *infinito* se il numero di elementi è infinito numerabile, *continuo* se il numero di elementi è un'infinità non numerabile. Gli elementi di un gruppo possono essere numeri, matrici, funzioni e altro; è comunque possibile definire un omomorfismo tra gruppi diversi, e quindi associare ad ogni elemento di un gruppo l'elemento di un altro, preservando la legge di composizione interna (in questo consiste la rappresentazione del gruppo). Un gruppo di Lie è un gruppo continuo, i cui elementi sono funzioni analitiche di un numero finito di parametri. Si dice che il numero di parametri fissa univocamente la dimensione del gruppo, il quale può essere compatto se i parametri sono definiti su un intervallo chiuso e limitato, oppure non compatto in caso contrario. Se il gruppo è di Lie, ogni elemento può essere scritto in forma esponenziale per mezzo dei parametri di opportuni operatori detti *generatori del gruppo* (che saranno di numero uguale al numero dei parametri). E le proprietà del gruppo, a loro volta, si traducono in relazioni di commutazione tra i generatori. Si dice propriamente che le regole di commutazione dei generatori definiscono l'algebra del gruppo di Lie. Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo di Lie a sei parametri, perché vi sono tre parametri per descrivere le rotazioni spaziali e altri tre per descrivere la rotazione della componente temporale, in cui vengono coinvolte le componenti della velocità. Le trasformazioni di Poincaré invece formano un gruppo di Lie a dieci parametri, costituiti dai sei del gruppo di Lorentz, più altri quattro per le traslazioni. Il gruppo di Poincaré non è compatto a causa delle traslazioni spaziotemporali e delle trasformazioni di Lorentz: infatti i parametri che si associano alle traslazioni assumono una continuità di valori non limitati e anche le trasformazioni di Lorentz, che risultano come rotazioni iperboliche, si descrivono da parametri che non sono definiti su intervallo chiuso e limitato. L'algebra di Lie per i dieci generatori del gruppo di Poincaré, è data da:

$$[\Xi_{ij}, \Xi_{kl}] = \eta_{ik}\Xi_{jl} + \eta_{jl}\Xi_{ik} - \eta_{jk}\Xi_{il} - \eta_{il}\Xi_{jk}$$

$$[\Xi_{ij}, T_k] = \eta_{jk}T_i - \eta_{ik}T_j \quad e \quad [T_i, T_j] = 0$$

dove i Ξ_{ij} sono i generatori di Lorentz di una opportuna rappresentazione, mentre i T_i sono i generatori delle traslazioni quadridimensionali.

4.2 L'invarianza rispetto a trasformazioni globali di Poincaré e le grandezze conservate

Nello spaziotempo di Minkowski, prendiamo in considerazione una trasformazione infinitesima di Poincaré di tipo globale. Supponiamo poi, che essa sia di simmetria per una azione, i cui campi soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange. Mostriamo quindi come dalla richiesta che l'integrale d'azione resti invariato $\delta I = 0$, è possibile ottenere delle leggi di conservazione.

Per risalire alla variazione dell'azione, iniziamo osservando che sotto la trasformazione delle coordinate (4.2) le derivate delle variazioni rispetto alle coordinate sono nulle, esplicitamente:

$$\partial_i(\delta x^i) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon^i_j x^j + \varepsilon^i) = 0 \tag{4.3}$$

Tale risultato è motivato dal fatto che gli indici i e j sono diversi e i parametri relativi alla trasformazione sono costanti e indipendenti dal punto considerato (essendo la trasformazione globale). Quindi la richiesta che la variazione dell'azione sia nulla, comporta che la densità lagrangiana sia invariante $\delta\mathcal{L} = 0$. In questo caso la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ coincide con la lagrangiana scalare L, avendo $h(x) = 1$.

Dimostriamo che sotto la trasformazione di coordinate (4.2) vi sia anche una variazione totale per le variabili di campo, scrivibile

$$\delta\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij}\chi(x) \tag{4.4}$$

Indichiamo con $\varepsilon^{ij} = \eta^{ik}\varepsilon^j_k$ i parametri relativi alla trasformazione di Lorentz infinitesima, mentre con S_{ij} i generatori del gruppo di Lorentz di una opportuna rappresentazione, che soddisfano le seguenti relazioni:

$$S_{ij} = -S_{ij} \qquad [S_{ij}, S_{kl}] = \eta_{ik}S_{jl} + \eta_{jl}S_{ik} - \eta_{jk}S_{il} - \eta_{il}S_{jk} \tag{4.5}$$

Gli elementi del gruppo, in generale, dipendono dal tipo di rappresentazione adottata; ad esempio nello spazio delle coordinate, gli elementi del gruppo e i rispettivi generatori hanno una rappresentazione matriciale. Invece se lo spazio vettoriale di riferimento, su cui rappresentare gli elementi del gruppo, è lo spazio di Hilibert di funzioni a quadrato sommabile, i generatori saranno descritti da operatori sulle funzioni di questo spazio. Adesso al fine di risalire alla variazione dell'azione, dobbiamo conoscere la variazione della derivata delle variabili di campo, che può essere ottenuta anche senza ricorrere alla definizione di variazione di punto fisso.

Utilizzando la definizione di variazione totale abbiamo:

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{\partial\chi'(x')}{\partial x'^k} - \frac{\partial\chi(x)}{\partial x^k}$$

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{\partial\chi'(x')}{\partial x'^k} - \frac{\partial\chi(x)}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}$$

e ricordando che $x'^j = x^j + \delta x^j$ si ottiene

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{\partial\chi'(x')}{\partial x'^k} - \frac{\partial\chi(x)}{\partial x'^j}(\delta^j_k + \frac{\partial}{\partial x^k}(\delta x^j))$$

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{\partial}{\partial x'^k}(\chi'(x') - \chi(x)) - \partial_k(\delta x^j)\frac{\partial\chi}{\partial x'^j}$$

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{\partial}{\partial x'^k}(\delta\chi) - \partial_k(\delta x^j)\frac{\partial\chi}{\partial x'^j}$$

$$\delta(\partial_k\chi) = \partial_k(\delta\chi) - \partial_k(\delta x^j))\partial_j\chi \tag{4.6}$$

Facendo uso della (4.4) e della (4.2), la (4.6) diventa:

$$\delta(\partial_k\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_k\chi - \varepsilon^i_k\partial_i\chi \tag{4.7}$$

Nell'ipotesi che la scelta dei parametri infinitesimi ε^i e ε^{ij} sia arbitraria, e che i campi χ soddisfino le equazioni di Eulero-Lagrange, mostriamo come la variazione nulla della densità lagrangiana porti a due equazioni di conservazione. Valutiamo l'uguaglianza $\delta\mathcal{L} = 0$ nel seguente modo:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi}\delta\chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\chi)}\delta(\partial_k\chi) = 0 \tag{4.8}$$

Sostituendo la (4.4) e la (4.7) nella (4.8) si ha:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\chi)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_k\chi - \varepsilon^i_k\partial_i\chi\right) = 0 \tag{4.9}$$

moltiplicando la precedente per $2\varepsilon_{ij}$ e utilizzando l'antisimmetria delle matrici ε_{ij} [1] si ottiene:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi}S_{ij}\chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\chi)}\left(S_{ij}\partial_k\chi - \left(\eta_{ki}\varepsilon^k_j - \eta_{kj}\varepsilon^k_i\right)\varepsilon^i_k\partial_i\chi\right) = 0 \tag{4.10}$$

[1] In dettaglio: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) = \frac{1}{2}(\eta_{ki}\varepsilon^k_j - \eta_{kj}\varepsilon^k_i)$

Ricordando che $\varepsilon^i_k\,\varepsilon^k_j = \delta^i_j$ si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} S_{ij}\chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} \left(S_{ij}\partial_k\chi - \eta_{ki}\partial_j\chi + \eta_{kj}\partial_i\chi\right) = 0 \tag{4.11}$$

Questa equazione può essere ulteriormente semplificata, sostituendo al primo membro della (4.11) le equazioni di Eulero-Lagrange. Per farlo ricorriamo alla seguente identità

$$\partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi\right) = \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\right) S_{ij}\chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\partial_k\chi \tag{4.12}$$

e sostituendo nella (4.11) i termini della (4.12) otteniamo:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\right)\right] S_{ij}\chi + \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\eta_{ki}\partial_j\chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\eta_{kj}\partial_i\chi = 0$$

poiché i campi soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange, il primo termine è identicamente nullo e abbiamo:

$$\partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\eta_{ki}\partial_j\chi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\eta_{kj}\partial_i\chi = 0 \tag{4.13}$$

Utilizzando l'espressione della densità del tensore canonico Energia-Impulso

$$T^k_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\partial_j\chi - \delta^k_j \mathcal{L} \tag{4.14}$$

possiamo scrivere:

$$\eta_{ki}T^k_j - \eta_{ji}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)}\eta_{ki}\partial_j\chi \tag{4.15}$$

Sostituendo la (4.15) nel secondo e nel terzo termine della (4.13) invertendo gli indici i e j di quest'ultima, si ottiene:

$$\partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi\right) - \left(\eta_{ki}T^k_j - \eta_{ji}\mathcal{L}\right) + \left(\eta_{kj}T^k_i - \eta_{ij}\mathcal{L}\right) = 0 \tag{4.16}$$

Per via della simmetria di η_{ij} gli ultmi due termini si semplificano in modo che l'equazione (4.16) può essere scritta come:

$$\partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi\right) - \eta_{hi}\delta^h_k T^k_j + \eta_{hj}\delta^h_k T^k_i = 0 \tag{4.17}$$

esplicitando la quantità $\eta_{ki} = \eta_{hi}\delta^h_k$ come $\eta_{ki} = \eta_{hi}\frac{\partial x^h}{\partial x^k}$ e ponendo $\partial_k T^i_k = 0$, l'equazione sovrastante può essere scritta come

$$\partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi - \eta_{hi} x^h T^k_j + \eta_{hj} x^h T^k_i \right) = 0 \tag{4.18}$$

Definendo:

$$S^k_{ij} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \chi)} S_{ij}\chi \tag{4.19}$$

si perviene alle seguenti leggi di conservazione:

$$\partial_k T^k_i = 0 \quad e \quad \partial_k \left(S^k_{ij}\chi - x_j T^k_i + x_i T^k_j \right) = 0 \tag{4.20}$$

Esse implicano che il quadrimpulso P_i e il tensore di momento angolare totale J_{ij} siano conservati.

$$P_i = \int_t T^0_i dx^3 \tag{4.21}$$

$$J_{ij} = \int_t \left(S^0_{ij} - x_j T^0_i + x_i T^0_j \right) dx^3 \tag{4.22}$$

Possiamo dire, come conseguenza del teorema di Noether, che un sistema che è invariante sotto un gruppo di simmetria a dieci parametri (nel nostro caso il gruppo di simmetria è di Poincaré) avrà dieci quantità conservate. Infatti l'invarianza rispetto alle traslazioni spazio-temporali comporta la conservazione delle quattro componenti del quadrimpulso, una per ogni parametro di traslazione, mentre l'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz, porta alla conservazione del momento angolare totale, con sei elementi di matrice indipendenti. In particolare il primo termine che figura nella densità di momento angolare totale S^0_{ij}, fornisce il momento angolare di spin, mentre il secondo, il momento angolare orbitale. Si può dire che l'invarianza di un sistema, che è definito su tutti i punti dello spaziotempo, rispetto a trasformazioni globali di Poincaré, implica che lo spaziotempo sia omogeneo, cioè tutti i punti dello spaziotempo sono equivalenti (questo viene fornito dall'invarianza per traslazioni) e isotropo, cioè tutte le direzioni intorno a un punto dello spaziotempo sono equivalenti (questo invece viene fornito dall'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz).

4.3 Il legame tra i generatori di Lorentz di due rappresentazioni

Valutiamo adesso la variazione di punto fisso delle variabili di campo, dalla quale si perviene al legame che sussiste tra due rappresentazioni dei generatori del gruppo di Lorentz:

$$\delta_0\chi = \delta\chi - \delta x^i\partial_i\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - (\varepsilon^i_j + \varepsilon^i)\partial_i\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - \varepsilon^i_j x^j\partial_i\chi - \varepsilon^i\partial_i\chi$$

Analizziamo il secondo termine, essendo i e j saturi possiamo scrivere:

$$\varepsilon^i_j x^j\partial_i\chi = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^i_j x^j\partial_i\chi + \varepsilon^k_h x^h\partial_k\chi\right] = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^i_j\eta^{jk}x_k\partial_i\chi + \varepsilon^k_h\eta^{hi}x_i\partial_k\chi\right]$$

$$\varepsilon^i_j x^j\partial_i\chi = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{ik}x_k\partial_i\chi + \varepsilon^{ki}x_i\partial_k\chi\right]$$

Utilizzando l'antisimmetria delle matrici ε^{ik} la relazione sovrastante può essere scritta come

$$\varepsilon^i_j x^j\partial_i\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ik}\left[x_k\partial_i\chi - x_i\partial_k\chi\right] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left[x_i\partial_j\chi - x_j\partial_i\chi\right]$$

e la variazione di punto fisso della variabile di campo diventa:

$$\delta_0\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left[x_i\partial_j\chi - x_j\partial_i\chi\right] - \varepsilon^i\partial_i\chi$$

da cui

$$\delta_0\chi = \frac{1}{2}\eta^{ik}\varepsilon^j_k\ \Xi_{ij}\chi - \varepsilon^i\partial_i\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^j_k\ \Xi^k_j\chi + \varepsilon^i T_i\chi$$

Quindi possiamo interpretare $T_i = -\partial_i$ come i generatori delle traslazioni, mentre $\Xi^k_j = \eta^{ik}\left[S_{ij} + x_i\partial_j - x_j\partial_i\right]$ come i generatori delle trasformazioni di Lorentz sullo spazio degli stati. Analogamente, le quantità S_{ij} sono i generatori delle trasformazioni di Lorentz sullo spazio delle coordinate e sono riferibili a gradi di libertà interni come lo spin.

Capitolo 5

Invarianza locale di Poincaré

5.1 Le trasformazioni locali di Poincaré

Consideriamo adesso una modifica alle trasformazioni di Poincaré definite in precedenza, assumendo che i parametri infinitesimi ε^i_k e ε^i siano funzioni delle coordinate spaziotemporali. Scriviamo quindi una trasformazione di Poincaré infinitesima, che dipenda dal punto dello spaziotempo considerato della forma

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu_\nu(x) x^\nu + \varepsilon^\mu(x) = \xi^\mu(x) \tag{5.1}$$

che chiameremo trasformazione locale di Poincaré o generica trasformazione di coordinate.[1] La variazione delle variabili di campo $\chi(x)$ definite in un punto x, è la stessa delle trasformazioni globali di Poincaré, mentre la corrispondente variazione di punto fisso assume la forma:

$$\delta_0 \chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij} \chi - \xi^\nu \partial_\nu \chi \tag{5.2}$$

Differenziando la precedente rispetto a x^μ otteniamo:

$$\partial_\mu(\delta_0\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} S_{ij} \partial_\mu \chi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varepsilon^{ij}) S_{ij} \chi - \partial_\mu \left(\xi^\nu \partial_\nu \chi\right) = \delta_0(\partial_\mu \chi) \tag{5.3}$$

che è motivata dal fatto che i generatori S_{ij} non dipendono dal punto dello spaziotempo considerato.

[1] Per fare una distinzione tra le trasformazioni globali, con coordinate anolonome, e le trasformazioni locali con coordinate olonome, usiamo gli indici latini per le prime ($j, k = 0, 1, 2, 3$) e gli indici greci ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) per le seconde.

5.2 La variazione dell'azione rispetto a trasformazioni locali di Poincaré

Abbiamo visto come ottenere la variazione di punto fisso dei campi e delle loro derivate quando consideriamo una trasformazione locale di Poincaré. Adesso studiamo la variazione di punto fisso della densità lagrangiana, con la quale costruire la variazione dell'azione. Consideriamo l'integrando associato alla variazione dell'azione

$$\delta\mathcal{L} + \partial_\mu(\delta x^\mu)\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = h(x)\delta L \tag{5.4}$$

Sviluppando il primo termine abbiamo:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi}\delta_0\chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\delta_0(\partial_\mu\chi) + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) \tag{5.5}$$

Al fine di riprodurre le equazioni di Eulero-Lagrange al primo membro utilizziamo la (3.22) ricordando che le coordinate sono olonome, e sostituendo si ha:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\right)\right]\delta_0\chi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\delta_0\chi + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\delta x^\nu\right)$$

e, se i campi soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange, possiamo scrivere:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\delta_0\chi + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\delta x^\nu\right) \tag{5.6}$$

Utilizzando la (5.2), e la (5.1) si ottiene:

$$\begin{aligned}\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - \xi^\nu\partial_\nu\chi\right] + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\xi^\nu\right)\\ &= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - \xi^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\partial_\nu\chi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\right)\\ &= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi - \xi^\nu T^\mu_\nu\right)\end{aligned}$$

e dalla definizione (4.19) possiamo scrivere:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = -\partial_\mu\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ S^\mu_{ij} + \xi^\nu T^\mu_\nu\right) \tag{5.7}$$

Sviluppiamo la derivata dell'equazione (5.7) ottenendo:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varepsilon^{ij}\ S^\mu_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \partial_\mu\xi^\nu T^\mu_\nu - \xi^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu \tag{5.8}$$

mostriamo come il terzo e quarto termine della equazione (5.8) permettano di ottenere le equazioni di conservazione per il quadrimpulso e per il momento angolare totale. Dunque analizziamo il seguente termine:

$$Q = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \xi^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu \tag{5.9}$$

e sostituiamovi ξ^ν con l'aiuto della (5.1)

$$Q = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \varepsilon^\nu_\rho x^\rho\partial_\mu T^\mu_\nu - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \varepsilon^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho}x^\rho\partial_\mu T^\mu_\nu - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \varepsilon^{\nu\sigma}x_\sigma\partial_\mu T^\mu_\nu - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu$$

rinominando gli indici saturi, ν e σ con i e j (ricordando che le coordinate sono olonome) si ha:

$$Q = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\ \partial_\mu S^\mu_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}x_j\partial_\mu T^\mu_i - \frac{1}{2}\varepsilon^{ji}x_i\partial_\mu T^\mu_j - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu \tag{5.10}$$

Utilizzando la proprietà di antisimmetria delle matrici ε^{ij} e le regole di Leibniz per la derivazione del prodotto otteniamo:

$$Q = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left\{\partial_\mu\left(S^\mu_{ij} + x_jT^\mu_i - x_iT^\mu_j\right) - T_{ji} + T_{ij}\right\} - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu$$

Se il tensore energia-impulso è simmetrico, il secondo termine della precedente equazione si annulla e la (5.8) diventa:

$$\delta_0\mathcal{L} + \partial_\nu(\mathcal{L}\delta x^\nu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varepsilon^{ij}\ S^\mu_{ij} - \partial_\mu\xi^\nu T^\mu_\nu + Q \tag{5.11}$$

dove Q risulta:

$$Q = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left\{\partial_\mu\left(S^\mu_{ij} + x_jT^\mu_i - x_iT^\mu_j\right)\right\} - \varepsilon^\nu\partial_\mu T^\mu_\nu \tag{5.12}$$

Osserviamo che imponendo la condizione di invarianza dell'azione, con l'annullamento della (5.11), non si avrebbe più $Q = 0$. É la presenza dei primi due termini non nulli (diventano nulli soltanto se i parametri divengono indipendenti dal punto) a comportare questo. Le due equazioni di conservazione che discendono dall'annullamento di Q non sarebbero più riproducibili, e queste in riferimento alla (5.12) sarebbero risultate esattamente le stesse descritte nel caso di invarianza rispetto a trasformazioni globali di Poincaré. D'altra parte è noto che per un sistema isolato queste grandezze sono conservate, quindi un loro eventuale annullamento non comporterebbe necessariamente l'annullarsi dell'azione totale. Ne concludiamo che l'integrale d'azione per una data densità lagrangiana $\mathcal{L}$, non rimane più invariante rispetto a trasformazioni locali di Poincaré.

5.3 La derivata covariante di Lorentz e i campi di gauge

Al fine di rendere le trasformazioni locali di Poincaré trasformazioni di simmetria per l'azione, apportiamo una minima modifica alla densità lagrangiana del sistema, cosicché sarà possibile ricavare in modo naturale la conservazione del quadrimpulso e del momento angolare totale. Il motivo è da ricercarsi nel fatto che, come detto in precedenza, la variazione (5.11) non si annulla, dunque l'integrale di azione per una data densità lagrangiana $\mathcal{L}$, non rimane più invariante rispetto a trasformazioni locali di Poincaré. Osserviamo anche che la quantità $\partial_i(\delta x^i)$ si annulla per una trasformazione di Poincaré globale, mentre per una trasformazione di Poincaré locale, si ha

$$\partial_\mu(\delta x^\mu) = \partial_\mu(\xi^\mu) \neq 0 \tag{5.13}$$

Da questo ci aspettiamo che $\mathcal{L}$ non sia una lagrangiana scalare, ma una densità lagrangiana. Per definire la lagrangiana scalare L, possiamo quindi selezionare una appropriata densità scalare $h(x)$, che soddisfi la relazione (3.17), ovvero:

$$\delta h(x) + h(x)\partial_\mu\xi^\mu = 0 \tag{5.14}$$

Per rendere invariante l'integrale d'azione a seguito di una trasformazione locale di Poincaré, prendiamo in considerazione una derivata covariante che si trasformi come:

$$\delta(\nabla_k\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\nabla_k\chi - \varepsilon^i_k\nabla_i\chi \tag{5.15}$$

in completa analogia con la (4.7). In questo modo, se la lagrangiana scalare modificata è $L'(\chi, \partial_k\chi, x) = L(\chi, \nabla_k\chi, x)$, ottenuta sostituendo in $L(\chi, \partial_k\chi, x)$

al posto di $\partial_k \chi$ la nuova derivata $\nabla_k \chi$, si ha che L' rimane invariante sotto una trasformazione locale di Poincaré, ovvero:

$$\delta L' = \frac{\partial L'}{\partial \chi}\delta\chi + \frac{\partial L'}{\partial(\nabla_k \chi)}\delta(\nabla_k \chi) = 0 \tag{5.16}$$

La precedente è una diretta conseguenza della richiesta espressa nella (5.15). Infatti, se viene soddisfatta la (5.15), riusciamo a sviluppare la variazione dell'azione esattamente come fatto per le trasformazioni globali di Poincaré, non comparendo più i primi due termini della (5.18).

Per trovare la forma esplicita di questa nuova derivata, introduciamo dei campi antisimmetrici, detti campi di gauge

$$A_\mu^{ij} = -A_\mu^{ji} \tag{5.17}$$

con i quali possiamo costruire una derivata covariante nelle coordinate olonome avente la forma

$$\nabla_\mu \chi = \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} A_\mu^{ij} S_{ij} \chi \tag{5.18}$$

Essa è detta derivata covariante di Lorentz. Se richiediamo che sia linearmente correlata tramite tetradi alla derivata ∇_k che è la sua proiezione sullo spazio tangente, possiamo costruire una derivata che soddisfi la (5.16) e che ci permetta di rendere l'azione invariante rispetto a trasformazioni locali di Poincaré. Dunque la richiesta che facciamo è:

$$\nabla_k \chi = e_k^\mu \nabla_\mu \chi \tag{5.19}$$

É possibile intuire il significato che rivestono i campi di gauge nella (5.25). Si può infatti dimostrare che come accade per la derivata covariante di Riemann (nella quale i simboli di Cristoffel definiscono la variazione spuria rendendo possibile il trasporto parallelo e garantiscono l'invarianza per diffeomorfismi della derivata) allo stesso modo i campi di gauge consentono di descrivere la variazione spuria rendendo la derivata del campo invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz locali.

5.4 Le proprietà di trasformazione dei campi di gauge

Analizziamo adesso il caso in cui i campi di gauge non siano noti, ma vengono esplicitamente introdotti per garantire l'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni locali di Poincaré. Iniziamo osservando che al fine di rispettare la condizione di invarianza (5.16), è necessario che la derivata covariante di Lorentz si trasformi a seguito di una variazione di punto fisso nel seguente modo:

$$\delta_0(\nabla_\mu\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\nabla_\mu\chi - (\partial_\mu\xi^\nu)\,\nabla_\nu\chi \tag{5.20}$$

Questa scelta determinerà delle specifiche proprietà di trasformazione per i campi di gauge. Inoltre possiamo valutare la variazione totale della derivata covariante di Lorentz, sfruttando le proprietà di linearità della variazione, ottenendo:

$$\delta(\nabla_\mu\chi) = \delta(\partial_\mu\chi) + \frac{1}{2}\delta A_\mu^{ij}S_{ij}\chi + \frac{1}{2}A_\mu^{ij}S_{ij}\delta\chi \tag{5.21}$$

Usando la (3.13), la precedente diventa:

$$\delta(\nabla_\mu\chi) = \partial_\mu(\delta_0\chi) - (\partial_\mu\xi^\nu)\partial_\nu\chi + \frac{1}{2}\delta A_\mu^{ij}S_{ij}\chi + \frac{1}{2}A_\mu^{ij}S_{ij}\delta\chi \tag{5.22}$$

Mostriamo come le proprietà di trasformazione dei campi di gauge si possano ottenere richiedendo che la variazione totale e quella di punto fisso coincidano, ovvero:

$$\delta\chi = \delta_0\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi \tag{5.23}$$

da cui

$$\delta\nabla_\mu\chi = \delta_0\nabla_\mu\chi \tag{5.24}$$

Sotto la condizione (5.23) la (5.22) diventa:

$$\delta(\nabla_\mu\chi) = \partial_\mu(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\chi) - (\partial_\mu\xi^\nu)\partial_\nu\chi + \frac{1}{2}\delta A_\mu^{ij}S_{ij}\chi + \frac{1}{2}A_\mu^{ij}S_{ij}(\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}S_{kl}\chi)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\chi - (\partial_\mu\xi^\nu)\partial_\nu\chi + \frac{1}{2}\delta A_\mu^{ij}S_{ij}\chi + \frac{1}{2}A_\mu^{ij}S_{ij}(\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}S_{kl}\chi)$$

utilizzando la definizione di derivata covariante di Lorentz invece, la (5.20) diventa:

$$\delta_0(\nabla_\mu\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\left(\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}A_\mu^{kl}S_{kl}\chi\right) - (\partial_\mu\xi^\nu)\left(\partial_\nu\chi + \frac{1}{2}A_\nu^{kl}S_{kl}\chi\right)$$

A questo punto eguagliando le due variazioni della derivata covariante di Lorentz, possiamo ottenere l'equazione che descrive la variazione dei campi di gauge

$$\delta\nabla_\mu\chi = \delta_0\nabla_\mu\chi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\chi+\frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ij})S_{ij}\chi-(\partial_\mu\xi^\nu)\partial_\nu\chi+\frac{1}{2}\delta A^{ij}_\mu S_{ij}\chi+\frac{1}{2}A^{ij}_\mu S_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}S_{kl}\chi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\left(\frac{1}{2}A^{kl}_\mu S_{kl}\chi\right) - (\partial_\mu\xi^\nu)\,\partial_\nu\chi + (\partial_\mu\xi^\nu)\,\frac{1}{2}A^{kl}_\nu S_{kl}\chi$$

semplificando i termini comuni ed eseguendo un raccoglimento a fattore di quelli che contengono i prodotti dei generatori di Lorentz, si perviene a:

$$\delta A^{ij}_\mu S_{ij}\chi + \frac{1}{2}\left(A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl} - A^{kl}_\mu\varepsilon^{ij}\right)S_{ij}S_{kl}\chi + \partial_\mu(\varepsilon^{ij})S_{ij}\chi + (\partial_\mu\xi^\nu)A^{ij}_\nu S_{ij}\chi = 0 \tag{5.25}$$

Osserviamo che il secondo termine tra parentesi, può essere riscritto ricorrendo al commutatore dei generatori di Lorentz:

$$\frac{1}{2}\left(A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}S_{ij}S_{kl} - A^{kl}_\mu\varepsilon^{ij}S_{ij}S_{kl}\right) = \frac{1}{2}\left(A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}S_{ij}S_{kl} - A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}S_{kl}S_{ij}\right) = \frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}\left[S_{ij}S_{kl}\right]$$

e, ricordando la (4.5)

$$\frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}[S_{ij},S_{kl}] = \frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^l_i S_{jl} - \frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^k_j S_{ik} - \frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^l_j S_{il} + \frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^k_i S_{jk}$$

possiamo sfruttare l'antisimmetria dei campi di gauge e dei generatori, ottenendo:

$$\frac{1}{2}A^{ij}_\mu\varepsilon^{kl}[S_{ij},S_{kl}] = A^{ij}_\mu\varepsilon^l_i S_{jl} - A^{ij}_\mu\varepsilon^k_j S_{ik} = \left(A^{jc}_\mu\varepsilon^i_c - A^{ic}_\mu\varepsilon^j_c\right)S_{ij} \tag{5.26}$$

Infine, sostituendo la (5.26) nella (5.25) si ottiene:

$$\delta A^{ij}_\mu + \partial_\mu\varepsilon^{ij} + \left(A^{jc}_\mu\varepsilon^i_c - A^{ic}_\mu\varepsilon^j_c\right) + (\partial_\mu\xi^\nu)A^{ij}_\nu = 0 \tag{5.27}$$

Abbiamo mostrato quali sono le proprietà di trasformazione dei campi di gauge sotto una variazione, senza realizzare un modello in grado di descriverli.

5.5 La scelta della densità scalare

Definita la derivata covariante di Lorentz, abbiamo detto che è possibile costruire la lagrangiana scalare modificata, sostituendo nella lagrangiana scalare $L(\chi, \partial_k\chi, x)$ la nuova derivata $\nabla_k\chi$.

A questo punto possiamo dire che l'estensione del formalismo lagrangiano da uno spaziotempo di Minkowski ad uno spaziotempo localmente minkowskiano, tangente ad una varietà spaziotemporale curva, può dirsi realizzato se riusciamo a risalire alla densità scalare del sistema. Per ricavare questa, utilizziamo le proprietà della derivata covariante di Lorentz. In particolare consideriamo la sua proiezione sullo spaziotempo tangente, tramite l'uso delle tetradi:

$$\nabla_k\chi = e_k^\mu \nabla_\mu\chi \tag{5.28}$$

la cui variazione porta a

$$\delta(\nabla_k\chi) = (\delta e_k^\mu)\nabla_\mu\chi + e_k^\mu \delta(\nabla_\mu\chi) \tag{5.29}$$

e usando la (5.15), il primo termine può essere scritto come

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\nabla_k\chi - \varepsilon_k^i\nabla_i\chi = (\delta e_k^\mu)\nabla_\mu\chi + e_k^\mu\delta(\nabla_\mu\chi) \tag{5.30}$$

Rimanendo nella condizione definita dalla (5.24) scriviamo il termine $\delta(\nabla_\mu\chi)$ della (5.30) usando l'equazione (5.20)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\nabla_k\chi - \varepsilon_k^i\nabla_i\chi &= (\delta e_k^\mu)\nabla_\mu\chi + e_k^\mu\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}\nabla_\mu\chi - (\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu\chi\right) \\ &= (\delta e_k^\mu)\nabla_\mu\chi + \left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}S_{ij}e_k^\mu\nabla_\mu\chi - e_k^\mu(\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu\chi\right)\end{aligned}$$

di questa due termini si semplificano e otteniamo:

$$\delta e_k^\mu\nabla_\mu\chi - e_k^\mu(\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu\chi + \varepsilon_k^i\nabla_i\chi = 0 \tag{5.31}$$

Moltiplicando per e_α^k troviamo infine

$$e_\alpha^k\delta e_k^\mu\nabla_\mu\chi - e_\alpha^k e_k^\mu(\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu\chi + e_\alpha^k\varepsilon_k^i\nabla_i\chi = 0 \tag{5.32}$$

Riscrivendo il terzo termine della precedente come $e_i^\nu\nabla_\nu\chi = \nabla_i\chi$, e ricordando che $e_\alpha^k e_k^\mu = \delta_\alpha^\mu$ si ha:

$$e_\alpha^k\delta e_k^\nu\nabla_\nu\chi - \delta_\alpha^\mu(\partial_\mu\xi^\nu)\nabla_\nu\chi + e_\alpha^k\varepsilon_k^i e_i^\nu\nabla_\nu\chi = 0 \tag{5.33}$$

$$e^k_\alpha \delta e^\nu_k - (\partial_\alpha \xi^\nu) + e^k_\alpha \varepsilon^i_k e^\nu_i = 0 \tag{5.34}$$

$$\delta e^\nu_k = e^\alpha_k \partial_\alpha \xi^\nu - \varepsilon^i_k e^\nu_i \tag{5.35}$$

Si noti come le tetradi e^ν_k si trasformano esattamente come una densità scalare. Quindi per apportare una minima modifica alla densità lagrangiana, possiamo riformulare tale quantità in termini della densità scalare $h(x)$. Ovvero possiamo scegliere:

$$h(x) := |det(e^\nu_k)|^{-1} = |det(e^k_\nu)|$$

per descrivere l'elemento di volume invariante. A questo punto sostituendo la densità lagrangiana $\mathcal{L}(\chi, \partial_k \chi, x)$, invariante rispetto a trasformazioni globali di Poincaré, con la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(\chi, \partial_k \chi, x) \longrightarrow h(x) L(\chi, \nabla_k \chi, x)$$

otteniamo che l'integrale d'azione resta invariato rispetto a trasformazioni locali di Poincaré. Nel caso limite, cioè considerando trasformazioni di Poincaré che non siano dipendenti dal punto dello spaziotempo considerato, abbiamo $e^k_\mu \longrightarrow \delta^k_\mu$ e $h(x) \longrightarrow 1$, in modo che ci si possa ricondurre al caso di invarianza rispetto a trasformazioni globali di Poincaré. Pertanto poiché le trasformazioni locali di Poincaré non sono altro che trasformazioni generali di coordinate, i campi e^k_μ e A^{ij}_μ vengono interpretati rispettivamente come i campi di tetrade che impostano il frame locale di coordinate, e la connessione affine locale rispetto al frame definito dalle tetradi.

Conclusioni

In questo lavoro è stato mostrato come le trasformazioni globali di Poincaré siano trasformazioni di simmetria per l'azione e come questo conduca in modo naturale a leggi di conservazione. Diversamente, le trasformazioni locali di Poincaré non sono trasformazioni di simmetria per l'azione. Pertanto se si vuole rendere invariante l'azione rispetto a queste ultime, é necessario ricorrere a opportuni operatori differenziali covarianti, costruiti impiegando i campi di gauge associati alla simmetria in esame. Da questo si ottiene la derivata covariante di Lorentz.

Nel lavoro di tesi è stato anche visto come il formalismo delle tetradi possa rendere un modello geometrico general-covariante quando è formulato su una varietà spazio-temporale curva, localmente Lorentz-invariante quando è riferito allo spazio-tempo di Minkowski tangente alla varietà. Questo è dovuto alle proprietà delle tetradi, che consentono di ottenere la proiezione degli enti geometrici dalla varietà spazio-temporale pseudo-riemanniana nello spaziotempo locale di Minkowski tangente alla varietà. Inoltre la derivata covariante di Lorentz costruita mediante i campi di gauge, costituisce una derivata covariante per gli enti che vengono proiettati, tale da preservare l'invarianza rispetto a trasformazioni locali di Lorentz nel frame delle tetradi. Esattamente come i simboli di Christoffel preservano l'invarianza per diffeomorfismi della derivata covariante di Riemann nel frame locale.

Possiamo a questo punto anche chiederci se vi sia una relazione tra la derivata covariante di Lorentz e quella di Riemann, e se la connessione di Levi-Civita e quella di Lorentz (campi di gauge) possano essere tra loro collegate. La risposta è affermativa in quanto, se la connessione può esprimersi a partire dalla metrica e se il tensore metrico si può descrivere in termini delle tetradi, è possibile riconoscere l'esistenza di una relazione che permette di calcolare la connessione di Lorentz in funzione delle tetradi. Tensore metrico e connessione affine, tetradi e connessione di Lorentz, sono perfettamente equivalenti sotto tutti i punti di vista, sicché queste ultime risultano essere adeguate per una formulazione consistente del modello geometrico dell'interazione gravitazionale.

Bibliografia

[1] S. A. Ali et al. «On the Poincaré Gauge Theory of Gravitation».In:*International Journal of Theoretical Physics*48.12(set.2009), pp.3426–3448.

[2] Maurizio Gasperini. *Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*. Springer,2015.

[3] Y. Kosmann-Schwarzbach,*The Noether theorems.Invariance and conservation laws in the XX Century*, Springer 2011

[4] D.W. Sciama, "On the analog between charge and spin in general relativity," in *Recent Developments in General Relativity,Festschrift for Leopold Infeld*,(Pergamon Press, New York, 1962) 415

[5] G. Sardanashvily,*Noether's Theorems. Applications in Mechanics and Field Theory*, Atlantis Press 2016

[6] T.W. Kibble Lorentz invariance and the gravitational field, J. Math. Phys. 2 (1960) 212

[7] G. Grignani et *al.* Gravity and the Poincaré group, Phys. Rev. D 45 (1992) 2719

[8] F. W. Hehl et *al.* Metric-affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance, Phys. Rep. 258 (1995) 1-171