

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base**

**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Triennale in Fisica*

**Introduzione al Paradosso dell’informazione di Hawking**

**Relatori:**

Massimo Taronna

**Candidato:**

Giuseppe Rivieccio

Matr. N85001248

**Anno Accademico 2019/2020**

# Indice

<b>1</b>	<b>Pillole di Relatività Generale</b>	<b>3</b>
1.1	Concetti base . . . . .	3
1.2	La metrica e il principio di equivalenza . . . . .	4
1.3	La metrica di Schwarzschild . . . . .	6
1.4	Buco nero . . . . .	6
1.4.1	Singolarità delle coordinate all'orizzonte . . . . .	7
1.5	Coordinate di Kruskal . . . . .	8
1.5.1	Estensione della metrica del buco nero . . . . .	10
1.5.2	Continuità delle coordinate . . . . .	12
1.6	Allontanamento delle geodetiche dall'orizzonte . . . . .	14
1.7	Diagrammi di Penrose . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Pillole di Teoria Quantistica dei campi</b>	<b>18</b>
2.1	Introduzione . . . . .	18
2.2	Modello di campo . . . . .	18
2.2.1	Quantizzazione del campo . . . . .	20
2.2.2	Campo quantistico in uno spazio curvo . . . . .	21
2.3	Creazione di coppie . . . . .	22
2.3.1	Oscillatori armonici accoppiati . . . . .	24
2.4	Modi d'onda delle particelle nello spazio curvo . . . . .	25
2.5	Stati entangled . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Il Paradosso di Hawking</b>	<b>30</b>
3.1	Evaporazione del buco nero . . . . .	30
3.2	Perdita di Informazione . . . . .	31
3.3	Ridefinizione degli stati . . . . .	33
3.4	Entropia del buco nero . . . . .	34
3.5	Il teorema No-Hair . . . . .	37
3.6	Remnants . . . . .	39

## Introduzione

Stephen Hawking (1942-2018) è stato uno dei fisici teorici più famosi del XX secolo al punto da diventare un'icona come era già accaduto per Albert Einstein. Egli era affetto da una malattia neurodegenerativa che gli impediva di muoversi e parlare al punto da aver bisogno di un sintetizzatore vocale. In figura è rappresentato Stephen Hawking al 50° anniversario della NASA nel 2008.



Figura 1:

Tra i vari contributi più rilevanti in cosmologia ed in astrofisica si ricorda la radiazione di Hawking. Questa è la radiazione emessa dai buchi neri a causa di effetti fluttuazioni quantistiche che provocano la formazione di coppie di particelle in un intorno dell'orizzonte degli eventi. Si osserva come questa radiazione provoca una diminuzione dell'energia totale del buco nero che quindi a rigor di logica diventa sempre più piccolo fino ad esaurire tutta l'energia e scomparire dall'universo. Il fenomeno di creazione di coppie di particelle è indipendente dalla materia che forma il buco nero e quindi non ne contiene informazione, ma questo vuol dire che questa informazione scompare insieme al buco nero e nelle teorie fino ad ora elaborate nessuna ammette una perdita irreversibile di informazione. Questo è il paradosso dell'informazione del buco nero di Hawking, presentato per la prima volta in una pubblicazione del fisico britannico nel 1976.

Lo stesso Stephen Hawking affermò: "Einstein sbagliò quando disse: "Dio non gioca a dadi". La considerazione dei buchi neri suggerisce infatti non solo che Dio gioca a dadi, ma che a volte ci confonda gettandoli dove non li si può vedere".

In realtà con gli anni e in particolare con l'avvento del principio olografico è sempre più chiaro che l'informazione presente in un buco nero non scompare. Il problema del paradosso dell'informazione è pertanto quello di riconciliare l'approssimazione di teoria effettiva della teoria della gravitazione con un'evoluzione unitaria del processo fisico dell'evaporazione.

In questo elaborato si affronteranno gli elementi essenziali di Relatività Generale e Teoria Quantistica dei Campi per comprendere il fenomeno ed alla fine si farà una descrizione del paradosso.

# 1 Pillole di Relatività Generale

## 1.1 Concetti base

Il primo tentativo efficace di descrivere l'interazione gravitazionale fu fatto da Isaac Newton il quale codificò il principio di equivalenza classico nell'espressione per la forza gravitazionale

$$F = -\frac{GMm}{r^2},$$

dove  $m$  è la massa del corpo di cui si è interessati al moto. Applicando il secondo principio della dinamica si vede banalmente che nella relazione si semplifica  $m$  e quindi il moto in questione risulta indipendente dalla massa implicando che ogni oggetto compirebbe lo stesso moto. Nel 1907 Albert Einstein formulò quello che egli stesso definì "il pensiero più felice della mia vita", ovvero egli comprese che per un osservatore in caduta libera la gravità scompare e con questa idea riformulò il principio di equivalenza. Questo nella sua forma forte afferma che in ogni punto dello spazio-tempo è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento locale che possa essere considerato piatto nell'intorno del punto, in questo sistema le leggi della fisica sono le stesse che in un sistema in assenza di campo gravitazionale, ovvero uno spazio piatto locale (tangente).

Un moto non accelerato è un moto rettilineo, partendo da questa idea Einstein immaginò che le masse curvassero lo spazio in modo da curvare anche le traiettorie che vi risiedono. In altri termini si dice che i corpi si muovono lungo delle geodetiche ovvero lungo delle linee che indicano moti ad accelerazione nulla. Un tale moto in relatività galileiana è rettilineo mentre in una teoria in cui lo spazio-tempo stesso è curvo tali traiettorie sono curvate. Per spiegare ciò si spinge il lettore ad effettuare un piccolo esperimento: si prenda una superficie rettangolare piatta 2-dimensionale con dimensioni finite (un foglio di carta rettangolare) e si disegni un segmento rettilineo che tocchi 2 estremità, a questo punto si curvi la superficie in modo da far congiungere perfettamente gli spigoli opposti (si incurvi il foglio in modo da formare un cilindro magari fissando con del nastro adesivo), si osserva ora che il segmento precedentemente rettilineo non appare più tale ma un punto che si trova sulla linea tracciata percorrerà un tratto rettilineo per muoversi lungo il tragitto disegnato.

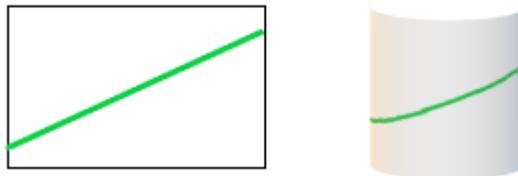


Figura 2:

Lo spazio immaginato da Einstein è curvato intrinsecamente dalle masse, ossia lo spazio non si può riportare globalmente ad un piano senza distorsioni ma solo localmente grazie al principio

di equivalenza. L'idea originale era a riguardo dello spazio 3-dimensionale classico con una dimensione aggiunta ossia il tempo, da qui il termine spazio-tempo. La prima prova sperimentale effettuata dallo scieziato inglese Arthur Eddington di questo fenomeno si basava sull'idea che i fotoni, anche se hanno massa nulla, sentissero questa curvatura; egli misurò la posizione di un gruppo di stelle (le ladi) durante l'eclissi solare, questa appunto sarebbe dovuta cambiare per via del passaggio nei pressi di una sorgente gravitazionale (il sole) come in figura.

Le proprietà più importanti della teoria della relatività generale sono: l'energia curva lo spaziotempo e la materia si muove lungo geodetiche, nelle parole di John Wheeler: "Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve".

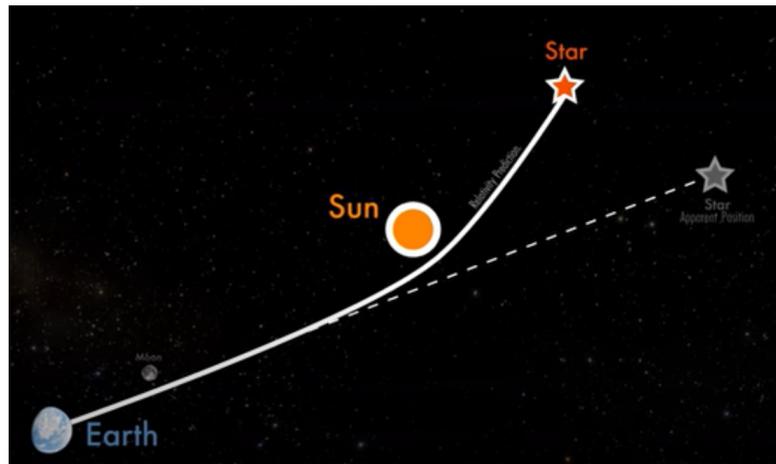


Figura 3:

## 1.2 La metrica e il principio di equivalenza

Vi è la necessità di dare una caratterizzazione matematica per descrivere sia lo spazio-tempo. In geometria riemanniana uno spazio è caratterizzato dalla maniera in cui si misurano le "distanze" tra i punti, per esempio nello spazio tridimensionale euclideo si usa il teorema di Pitagora per conoscere la lunghezza del segmento che separa 2 punti. In generale nella teoria della relatività generale si definisce l'elemento metrico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

dove con  $x_\mu$  si indicano le coordinate dello spazio-tempo. Si definisce quindi lo spazio-tempo come una varietà differenziabile pseudo-riemanniana, nel caso 4-dimensionale piatto di Minkowski la metrica assume una forma diagonale

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

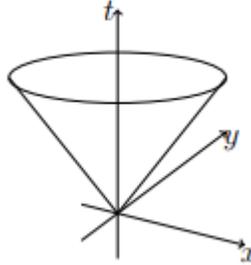


Figura 4:

con la metrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Una prima distinzione tra i punti di questo spazio è la seguente:

- punti tipo luce se  $ds^2 = 0$ , quindi se per esempio ci restringe alle coordinate  $x$  e  $t$  otteniamo che  $\frac{dx}{dt} = \pm c$ ;
- punti tipo spazio se  $ds^2 > 0$  da cui si ottiene  $|\frac{dx}{dt}| > c$ ;
- punti tipo tempo se  $ds^2 < 0$  da cui si ottiene  $|\frac{dx}{dt}| < c$ .

Si osserva quindi che ci può essere connessione causale solo nelle direzioni tipo tempo, queste sono all'interno del cosiddetto cono di luce del quale la superficie è di tipo luce. Il fatto che lo spazio-tempo curvo sia associato a geodetiche curve si può immaginare considerando una successione di coni di luce locali con una inclinazione relativa in ogni punto diversa rispetto alla direzione che avrebbe nel caso di assenza di sorgente di campo, così le particelle localmente si muoveranno sempre in linea retta mentre il loro moto complessivo sarà dato dall'effetto cumulativo delle inclinazioni progressive.

Se il campo non è sufficientemente forte si può avere una condizione per cui dei corpi riescono a non cadere l'uno sull'altro ma ad allontanarsi all'infinito, nel caso del buco nero questa condizione non è soddisfatta poichè all'interno di quello che viene definito "orizzonte degli eventi" nulla può più sfuggire il centro del buco nero. Questo fenomeno lo si può vedere come un'inclinazione progressiva del cono di luce fino a quando le direzioni di tipo tempo non puntano tutte verso il centro del buco nero. L'orizzonte è quindi definito come la distanza dal centro di gravitazione tale che la velocità di fuga è uguale alla velocità della luce e quindi per distanze minori neanche i fotoni riescono a fuggire.

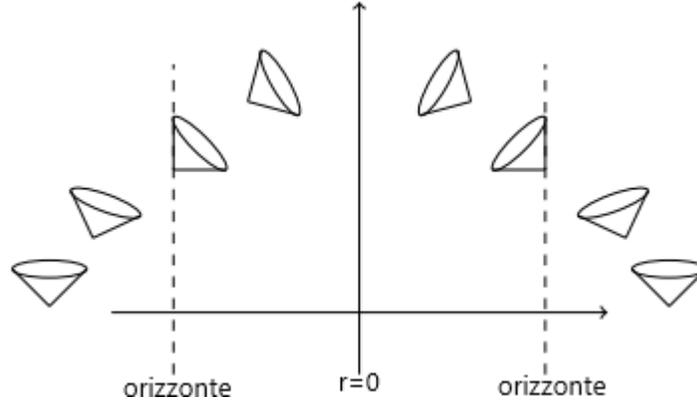


Figura 5:

### 1.3 La metrica di Schwarzschild

Le equazioni di Einstein appena pubblicate risultavano essere un problema ambito e il primo a risolverle fu Karl Schwarzschild. Per trovare la soluzione egli impose l'ipotesi di simmetria sferica per lo spazio-tempo vuoto semplificando di molto il problema. In seguito Birkhoff dimostrò che questa soluzione nel vuoto è l'unica possibile con questa simmetria affermando inoltre che una soluzione a simmetria sferica è anche stazionaria e asintoticamente stabile. La soluzione di Schwarzschild ha la forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (1.3)$$

dove  $M$  è la massa che compone il centro di gravitazione,  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ; da questa si osserva che per  $r$  molto grandi la metrica diventa asintoticamente la metrica di Minkowski discussa nel paragrafo precedente. Una proprietà interessante di questa metrica è l'esistenza di un orizzonte degli eventi per  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$  detto Raggio di Schwarzschild. Si vede infatti che per  $r = R_S$  la componente della metrica che corrisponde alla coordinata temporale si annulla  $g_{00} = 0$  e la componente radiale diverge  $g_{11} = \infty$ . Per  $r < R_S$  la componente temporale e la componente radiale cambiano di segno, questo lo possiamo interpretare come uno scambio di ruoli, ovvero prima una superficie di tipo spazio era data da una equazione tipo  $t = 0$  ed ora è data da  $r = r_0$ . Si vede che il tempo al di fuori dell'orizzonte ha un verso privilegiato, allo stesso modo lo ha anche il raggio per distanze minori dell'orizzonte perchè la curvatura implica che le geodetiche di tipo tempo e luce sono destinate convergere al punto  $r = 0$ , questa inversione è quindi qualitativamente giustificata dal punto di vista fisico.

### 1.4 Buco nero

Uno dei modi di generare un buco nero è a partire dal collasso gravitazionale di una stella. In una stella gli atomi che la compongono hanno una energia enorme derivante dai processi nucleari che

alimentano la stella e che ne mantengono la temperatura. Quindi l'energia media delle particelle è elevata al punto da contrastare l'attrazione gravitazionale. Quando l'energia dei processi nucleari non è più sufficiente a bilanciare l'attrazione gravitazionale va tenuto in considerazione anche un contributo dovuto al fatto che le componenti degli atomi sono fermioni. Dato che i fermioni rispettano il principio di Pauli, questo si oppone al collasso perché non è possibile avere due fermioni nello stesso stato. Questo contributo è detto "pressione di degenerazione" che mantiene la stella nello stadio di nana bianca fino ad una densità di circa  $10^3 \text{ kg/cm}^2$ , se la massa della stella è maggiore di un valore critico pari a 1,44 masse solari la pressione suddetta non è sufficiente e vi è un fenomeno di contrazione della stella. A questo punto si presenta una pressione di degenerazione dei componenti nucleari, in particolare succede che elettroni e protoni collidendo producono neutroni, neutrini ed una enorme quantità di energia che risulta complessivamente in una supernova, i neutrini riescono ad allontanarsi mentre i neutroni compongono un nuovo corpo celeste detto stella di neutroni, data la massa maggiore dei neutroni rispetto agli elettroni risulta che la lunghezza d'onda dei neutroni nella stella di neutroni sia molto più piccola di quella degli elettroni nella nana bianca e quindi si può ottenere un corpo più compatto dove il collasso è impedito grazie alla "pressione di degenerazione neutronica" e che arriva a densità di  $10^{11} \text{ kg/cm}^3$ . Se la massa totale è maggiore di 2,4 masse solari invece il corpo si contrae indefinitamente fino ad avere, per quanto ne sappiamo, densità infinita. Questo è detto Buco Nero. Un buco nero con la massa della terra  $M_{\oplus} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  avrebbe raggio di Schwarzschild pari a circa  $9 \text{ cm}$  mentre per il sole, con massa  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , avrebbe un raggio pari a circa  $3 \text{ km}$ .

Una proprietà intuitivamente ambigua è il fatto che la formazione di un buco nero non dipende dalla densità ma solo dalla massa, infatti assumendo la densità costante si ha

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

e il raggio di Schwarzschild relativo a questa massa è

$$R_S \propto R^3. \quad (1.4)$$

Quindi grandi valori di  $R$  si trova  $R_S > R$  e questo significa che per ogni valore della densità è possibile formare un buco nero a patto di scegliere  $R$  abbastanza grande.

#### 1.4.1 Singolarità delle coordinate all'orizzonte

Come si è visto precedentemente, all'orizzonte sussiste una singolarità di tipo spazio. È importante controllare se effettivamente questa è una singolarità dello spazio-tempo.

Per semplificare il problema è conveniente porsi in un intorno dell'orizzonte

$$r = R_S + r' \quad \text{con} \quad |r'| \ll R_S. \quad (1.5)$$

Ora approssimando in Taylor la (1.3) si ottiene la seguente metrica

$$ds^2 = -\frac{r'}{R_S} c^2 dt^2 + \frac{R_S}{r'} dr'^2 + R_S^2 d\Omega, \quad (1.6)$$

nella quale si è sostituito  $dr = dr'$ . L'annullamento di una componente della metrica in generale non è un problema, spesso significa che la metrica non è adatta a descrivere quel punto, per esempio si prenda la metrica di Minkowski in coordinate sferiche

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (1.7)$$

si vede che in questa si annullano i termini  $g_{22} = g_{33} = 0$  per  $r = 0$ . Il problema della metrica (1.6) sorge nel termine  $g_{11}$  che diverge, si può effettuare un cambio di variabile del tipo

$$\sqrt{\frac{R_S}{r'}} dr' = d\tilde{r} \quad (1.8)$$

e quindi

$$r' = \frac{\tilde{r}^2}{4R_S}. \quad (1.9)$$

La metrica (6) diventa

$$ds^2 = -\frac{\tilde{r}^2}{4R_S^2} c^2 dt^2 + d\tilde{r}^2 + R_S^2 d\Omega \quad (1.10)$$

e sostituendo  $\tilde{t} = \frac{t}{R_S}$  per semplificare si ottiene

$$ds^2 = -\tilde{r}^2 c^2 d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + R_S^2 d\Omega. \quad (1.11)$$

Questa metrica si può vedere come la somma di 2 contributi:

1. la parte angolare è una sfera di raggio  $R_S$
2. la parte radiale è uno spaziotempo bidimensionale del tipo 1+1 in coordinate polari

Si vede così che la singolarità è stata eliminata da un cambio di variabili. Questo vuol dire che la singolarità che si osserva è essere una singolarità delle coordinate e non una singolarità dello spazio-tempo come invece è la singolarità per  $r = 0$  (questa è detta così perché la curvatura diverge).

## 1.5 Coordinate di Kruskal

L'obiettivo di questa sezione è trovare un set di coordinate che permetta di estendere la metrica di Schwarzschild all'interno dell'orizzonte degli eventi e fino alla singolarità. Si vede che nello spaziotempo minkoskiano 1+1 del tipo

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2, \quad (1.12)$$

si possono definire delle coordinate di tipo luce

$$u = t + x \quad e \quad v = t - x. \quad (1.13)$$

In sostanza si osserva che ponendo costante una delle due coordinate si ottengono traiettorie di tipo luce. Nel paragrafo precedente si è visto come, in prima approssimazione, è possibile trascurare la divergenza della metrica all'orizzonte, ora invece si affronta il problema di avere una visione più approfondita della (1.3) e ricavare tutte le sue proprietà. Questa si può riscrivere come

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} dr^2\right) + r^2 d\Omega \quad (1.14)$$

dove si è posto  $c = 1$  e  $G = 1$ , quindi  $R_S = 2M$ . Si definisce quindi una nuova coordinata  $r^*$  come

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr = dr^* \quad (1.15)$$

dalla quale risulta integrando con una opportuna costante di integrazione

$$r^* = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (1.16)$$

Si ottiene quindi la metrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega. \quad (1.17)$$

Definendo adesso le coordinate di tipo luce  $u = t + r^*$  e  $v = t - r^*$ , e considerando variabili angolari fissate si ottengono geodetiche radiali di tipo luce come

1. la geodetica data da  $u = t + r^* = u_0$  fissato, sarà entrante;
2. la geodetica  $v = t - r^* = v_0$  fissato, sarà uscente.

Osserviamo che per  $2M < r < +\infty$  si ottiene  $-\infty < r^* < +\infty$  e questo significa che anche  $v$  e  $u$  si estenderanno su tutto l'asse reale. In sostanza una particella che cade verso il buco nero in una geodetica radiale di tipo luce avrà  $u = u_0$  e

$$v = t - r^* = u_0 - 2r^*. \quad (1.18)$$

La particella che cade verso il buco vede un "orizzonte futuro", nel senso che è destinata a caderci in un tempo futuro, questo è determinato da

$$-\infty < u_0 < +\infty, \quad v = \infty. \quad (1.19)$$

In queste coordinate si può descrivere lo spazio fino all'orizzonte ma l'obiettivo è passare in maniera continua da dentro l'orizzonte a fuori e viceversa dato che non c'è una singolarità dello spazio-tempo. Si deve quindi attribuire all'orizzonte valore finito di coordinate e metrica e per questo si definisce

$$U = e^{\alpha u} \quad e \quad V = -e^{-\alpha v}, \quad (1.20)$$

supponendo  $\alpha > 0$  costante e reale. La regione al di fuori dell'orizzonte sarà descritta dalle regioni  $U > 0, V < 0$  e l'orizzonte sarà

$$0 < U < +\infty, \quad V = 0. \quad (1.21)$$

Si vede facilmente che la metrica (1.17) la si può scrivere come

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega, \quad (1.22)$$

allora nelle coordinate (1.20) si ottiene

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{e^{-\alpha(u-v)}}{\alpha^2} dU dV + r^2 d\Omega. \quad (1.23)$$

Si nota che

$$e^{-\alpha(u-v)} = e^{-2\alpha r^*} = e^{-2\alpha\{r+2M\log(\frac{r}{2M}-1)\}} = e^{-2\alpha r} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-4\alpha M}, \quad (1.24)$$

quindi scegliendo  $\alpha = \frac{1}{4M}$  si semplifica l'espressione restituendo la metrica

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\Omega. \quad (1.25)$$

Questa nuova metrica è scritta nelle coordinate  $U, V, \theta, \phi$  che sono le coordinate di Kruskal ed è chiamata metrica completamente estesa di Schwarzschild.

La distanza radiale è definita tramite la seguente equazione trascendente

$$UV = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (1.26)$$

e non sarà necessario dare quindi una espressione esplicita per il raggio lasciando la scrittura della metrica così com'è.

### 1.5.1 Estensione della metrica del buco nero

Nell'ultimo paragrafo si è detto che la regione esterna all'orizzonte degli eventi (dalla metrica di Schwarzschild in coordinate radiali  $2M < r < +\infty$  e il tempo  $t$  che può avere un qualsiasi valore reale) è descritta in coordinate di Kruskal dalla regione

$$U > 0, \quad V < 0. \quad (1.27)$$

Si possono ricavare quindi altre proprietà dalla metrica nelle suddette coordinate. Si vede che sussiste ancora la singolarità per  $r = 0$  e quindi imponendo questo valore nella (1.26) si trova l'equazione

$$UV = 1 \quad (1.28)$$

che in figura 5 è rappresentata dalle linee di tratteggiate. La (1.28) è rispettata in 2 quadranti del piano, ovvero:

1. per  $U < 0, V < 0$  che indica la cosiddetta singolarità passata;
2. per  $U > 0, V > 0$  che indica la singolarità futura.

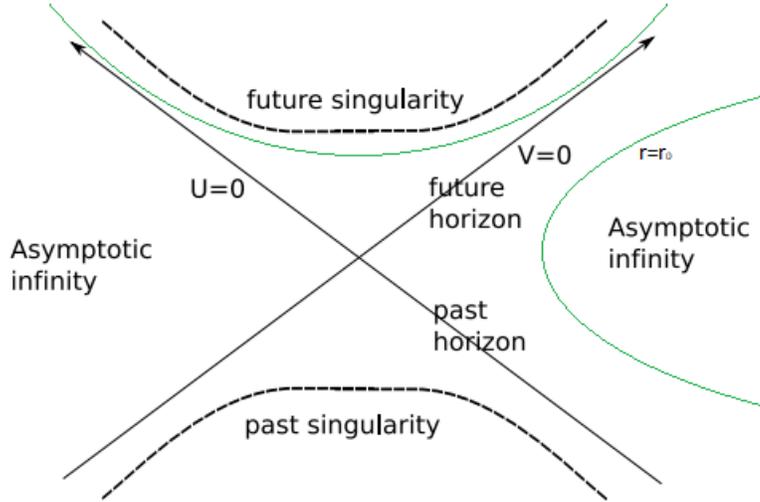


Figura 6:

Sicché non si può andare oltre la singolarità fisica, ci si deve restringere alla regione per cui  $UV < 1$ . Dalla (1.26) si vede subito una simmetria nello scambio tra  $U$  e  $V$  e questo significa che alla regione esterna definita all'inizio nelle (1.27) si può scrivere anche la simmetrica come

$$U < 0, \quad V > 0 \quad (1.29)$$

e quindi se l'orizzonte futuro era definito come (1.21) in questa copia della regione precedente diventa

$$0 < V < +\infty, \quad U = 0 \quad (1.30)$$

(dove per futuro si intende che un corpo sta cadendo all'interno di esso e quindi è descrivibile solo nel in un tempo futuro rispetto al moto in questione). A questo punto si può trovare anche un orizzonte passato che funziona esattamente al contrario con

$$-\infty < U < 0 \quad e \quad V = 0, \quad (1.31)$$

$$-\infty < V < 0 \quad e \quad U = 0 \quad (1.32)$$

Nella figura 5 ci sono delle linee verdi, esse corrispondono alle superfici ipervoliche a  $r = const$  e si vede che quella a destra è per  $r > 2M$  (quindi per la simmetria appena descritta ce ne sarà una esattamente simmetrica nella regione di destra), mentre quella in alto (che avrà una simmetrica rispetto in basso) è descritta per valori costanti di  $r < 2M$ , quindi si identificano le diagonali come

gli orizzonti. A questo punto ci si chiede cosa sia l'orizzonte passato e la singolarità passata, essi sono definiti come degli oggetti da cui i corpi si possono solamente allontanare, possiamo vedere questo nuovo sistema come un buco bianco e il suo orizzonte degli eventi dal quale tutto può uscire ma niente può entrare.

Queste proprietà però non la si aspetta da un buco nero formatosi per collasso, questo perché il buco bianco è una singolarità che esiste nel passato e quindi per ottenere questa soluzione si dovrebbero avere delle condizioni iniziali singolari.

### 1.5.2 Continuità delle coordinate

In questo paragrafo si affronta il problema di collegare le coordinate naturali  $u$  e  $v$  di uno spazio piatto con le coordinate di Kruskal rispettivamente all'interno e all'esterno dell'orizzonte. Per fare ciò si considera un guscio sferico infinitesimamente spesso di massa  $M$  che quindi genera un campo gravitazionale che dal teorema di Birkoff si deduce essere costante nella regione interna al guscio, mentre nella regione esterna è lo stesso di un corpo pieno sfericamente simmetrico con la stessa massa (metrica di Schwarzschild).

Si consideri il problema un guscio sferico di tipo luce, questa scelta è giustificata perché tramite la metrica estesa di Schwarzschild si vede che l'orizzonte, il quale corrisponde al valore  $U = 0 \vee V = 0$ , implica l'annullamento della metrica e quindi esso risulta essere una singolarità delle coordinate di tipo luce. All'interno del guscio si è detto che la metrica è piatta del tipo

$$ds_p^2 = -dt_p^2 + dr^2 + r^2 d\Omega \quad (1.33)$$

dove abbiamo posto dei pedici ( $p \equiv \text{piatta}$ ) per differenziarli dalle variabili all'esterno. Questo pedice non è stato posto nelle variabili angolari poiché si è posta l'ipotesi di simmetria sferica mentre per la parte radiale non si è posto il pedice perché questa variabile ha solamente il significato geometrico di raggio di una ipersuperficie sferica in tutto lo spazio. Effettuando il cambio di coordinate

$$u_p = t_p + r, \quad v_p = t_p - r \quad (1.34)$$

la metrica diventa

$$ds_p^2 = -du_p dv_p + r^2 d\Omega. \quad (1.35)$$

Dato che il guscio è di tipo luce, scegliendo accuratamente l'origine dei tempi si ottiene  $u_p = 0$  e quindi

$$r_{\text{guscio}} = \frac{u_p - v_p}{2} = -\frac{v_p}{2}. \quad (1.36)$$

La metrica all'esterno, dalla (1.25), è

$$ds_B^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\Omega \quad (1.37)$$

con  $U, V$  coordinate di Kruskal definite come in (1.20), con la differenza che in questo caso

$$u_K = t_K + r^*, \quad v_K = t_K - r^* \quad (1.38)$$

dove con il pedice ( $K \equiv Kruskal$ ) si indica che questa è la coordinata esterna. In questo caso le geodetiche tipo luce entranti nel guscio avranno  $U = U_0$  fissato e ricordando la definizione (1.20) si può porre

$$u_K = 0 \rightarrow U = 1. \quad (1.39)$$

Per imporre la condizione di continuità delle coordinate si ricorda che la componente radiale ha significato solamente geometrico, quindi la variazione  $dr$  deve essere sui rispettivi punti da entrambi i lati del guscio. Quindi dalla (1.36) si ottiene

$$dr = -\frac{1}{2}dv_p, \quad (1.40)$$

mentre dall'altro lato imponento  $U = 1$  si ottiene dalla (1.26)

$$dV = -\frac{r}{4M^2}e^{\frac{r}{2M}}dr \quad (1.41)$$

e sostituendo adeguatamente si ottiene

$$dV = -\frac{v_p}{16M^2}e^{-\frac{v_p}{4M}}dv_p, \quad (1.42)$$

integrando si ricava

$$V = \left(\frac{v_p}{4M} + 1\right)e^{-\frac{v_p}{4M}} + c. \quad (1.43)$$

La costante si fissa imponendo la condizione di  $r = 2M$  ossia  $v_p = -4M$  e dalla proprietà dell'orizzonte (1.21) si ottiene  $V = 0$ , quindi  $c = 0$  e

$$V = \left(\frac{v_p}{4M} + 1\right)e^{-\frac{v_p}{4M}}. \quad (1.44)$$

Le traiettorie per  $V < 0$  risiedono al di fuori dell'orizzonte (si tenga a mente che  $U = 1$ ) e quindi le geodetiche possono allontanarsi all'infinito anche se nascono per distanze prossime all'orizzonte, in particolare si vede che la coordinata naturale  $v$  ricavata dalla (1.20) quindi

$$v_K = -4M \log(-V) = v_p - 4M \log\left(-\frac{v_p + 4M}{4M}\right), \quad (1.45)$$

che per distanze prossime all'orizzonte diventa

$$v_K \approx -4M \log\left(-\frac{v_p + 4M}{4M}\right). \quad (1.46)$$

In sostanza abbiamo trovato un modo per connettere direttamente le geodetiche subito fuori l'orizzonte con le geodetiche subito dentro l'orizzonte. Analogamente si può fare il caso opposto imponendo la metrica di Schwarzschild all'interno, ossia per  $V > 0$ , e considerando uno spazio piatto all'esterno giungendo al risultato

$$\tilde{v}_K = v_p - 4M \log\left(-\frac{v_p + 4M}{4M}\right) \quad e \quad \tilde{v}_K \approx -4M \log\left(-\frac{v_p + 4M}{4M}\right),$$

dove con  $\tilde{v}_K$  si intende la coordinata all'interno dell'ipersuperficie che si vuole differenziare dalla coordinata  $v_K$  che risiede all'esterno.

## 1.6 Allontanamento delle geodetiche dall'orizzonte

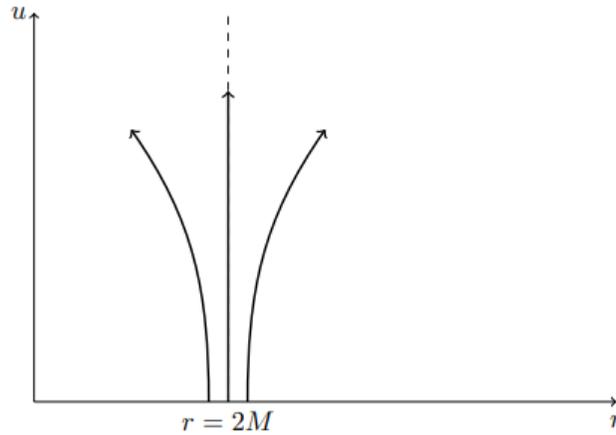


Figura 7:

Si ricordi la metrica di Schwarzschild (1.3) e si considerino particelle che cercano di scappare dal campo gravitazionale, per semplicità si analizzano particelle massless su geodetiche radiali tipo luce (queste sono inoltre le particelle che più facilmente riusciranno nell'impresa). Per queste geodetiche ( $ds^2 = 0$ ) si hanno in particolare 3 casi (come in figura 6):

1. Una particella che parte giusto fuori l'orizzonte ad una distanza radiale  $r = 2M + \varepsilon$ . Per questa vale l'equazione

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (1.47)$$

che per una particella uscente avrà segno positivo. Si ora quanto tempo ci mette la particella per allontanarsi fino ad una distanza  $r_f$  che si considera sufficientemente lontana da considerare la particella libera. Si esegue allora

$$\int_{2M+\varepsilon}^{r_f} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \int_0^T dt,$$

quindi

$$T = r_f - 2M - \varepsilon + 2M \left[ \log\left(\frac{r_f}{2M} - 1\right) - \log(\varepsilon) \right]. \quad (1.48)$$

Da questa si evidenzia la dipendenza dal valore  $\varepsilon$ , in particolare si vede che

$$T \approx \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (1.49)$$

e quindi più la particella parte vicino l'orizzonte più tempo ci metterà per scappare.

2. Dall'ultima relazione si vede che per  $\varepsilon = 0$  il tempo diverge e quindi il fenomeno non è osservabile, in particolare una geodetica di tipo luce inizialmente sull'orizzonte rimane su questo infatti si vede che l'unico modo per imporre  $ds^2 = 0$  sull'orizzonte è forzare  $dr = 0$  e quindi la particella rimane ad una distanza radiale fissa pari a  $r = 2M$ .
3. Ora si osserva una particella che parte giusto all'interno rispetto all'orizzonte, ovvero ad  $r = 2M - \varepsilon$  (supponendo sempre  $\varepsilon$  definita positiva). Si prenda quindi la (1.47) col segno negativo, svolgendo l'integrale che segue tra i punti  $2M - \varepsilon$  e  $r_f$  tale che quest'ultimo sia  $0 < r_f < 2M$ . Si osserva un tempo analogo con lo stesso andamento in  $\varepsilon$ , ossia (1.49), e questo vuol dire che più la particella è vicina all'orizzonte più tempo ci metterà per cadere nella singolarità fisica.

Si osserva quindi che le geodetiche di tipo luce che nascono dai lati opposti dell'orizzonte divergono e questo comportamento sarà chiave nella enunciazione del paradosso dell'informazione.

## 1.7 Diagrammi di Penrose

I diagrammi di Penrose sono delle rappresentazioni in 2 dimensioni dello spaziotempo in cui attraverso delle trasformazioni di coordinate si rappresentano gli infiniti in regioni finite dello spazio. Questo serve ai fini di comprendere indicativamente le relazioni causali dei punti dello spaziotempo. Per fare ciò la trasformazione deve essere conforme, ovvero una trasformazione biunivoca in cui si conservano gli angoli tra le curve coordinate. Nella sua generalità si scrive quindi

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \xi(x)g_{\mu\nu}(x),$$

dove tramite il fattore  $\xi$  dipendente dalla posizione spaziotemporale si vuole analizzare la varietà differenziabile presumibilmente infinita tramite un range finito di variabili. Questo processo ci assicura che una geodetica di qualsiasi tipo rimane tale anche dopo la trasformazione. Per semplificare la rappresentazione si usa disegnare le direzioni di tipo luce come dei segmenti con pendenza  $\pm 1$ . In orizzontale si hanno le direzioni tipo spazio e in verticale le tipo tempo, segue la rappresentazione quindi dello spazio di Minkowski:

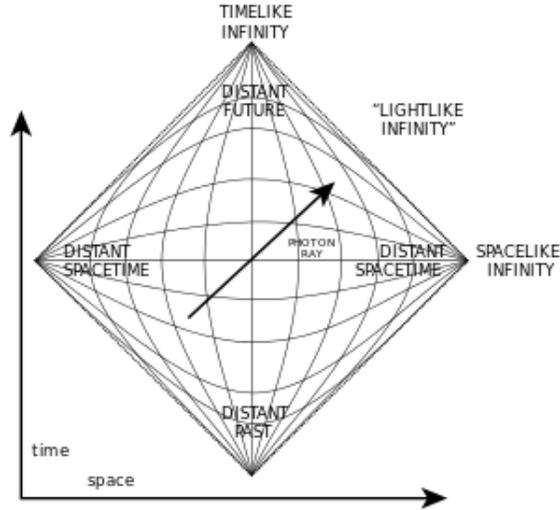


Figura 8:

In questo si vede subito che se si pone a mezza altezza l'istante  $t = 0$  allora le linee che scendono sono passate e quelle che salgono sono future, quindi la linea verticale rappresenta la direzione temporale alla posizione fissata che quindi corre da  $-\infty$  a  $+\infty$  e stessa cosa per la direzione spaziale. Ultima ma non meno importante si ha che la direzione tipo luce può esistere in maniera analoga per  $t$  positivi o negativi simmetricamente, quindi si avranno direzioni passate e future e tracciando una geodetica tipo luce. Questa risulta obliqua, in particolare se si prende la freccia in figura, nel suo verso tende a tempi futuri all'infinito, nel verso opposto tenderà a tempi passati. Si definiscono così gli infiniti passati e futuri di tipo tempo e luce! Per ottenere questo risultato si è presa la metrica (1.1) che per semplicità si riscrive in coordinate sferiche

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

con un cambio di variabili tipo (1.34) questa diventa (1.35), anche se in figura si sono prese coordinate più simili alle cartesiane dato lo spazio è simmetrico rispetto alla direzione temporale mentre  $r$  è definita positiva. La trasformazione conforme consiste nel definire allora

$$U = \tanh(u_p) \quad V = \tanh(v_p),$$

e si ottiene così la metrica

$$ds^2 = -dUdV + r^2 (1 - U^2) (1 - V^2) d\Omega^2 \quad \text{con } -1 < U < 1 \quad -1 < V < 1$$

dove trascurando la parte angolare non interessante si estrae

$$ds^2 = -dUdV$$

rappresentata proprio in figura 7.

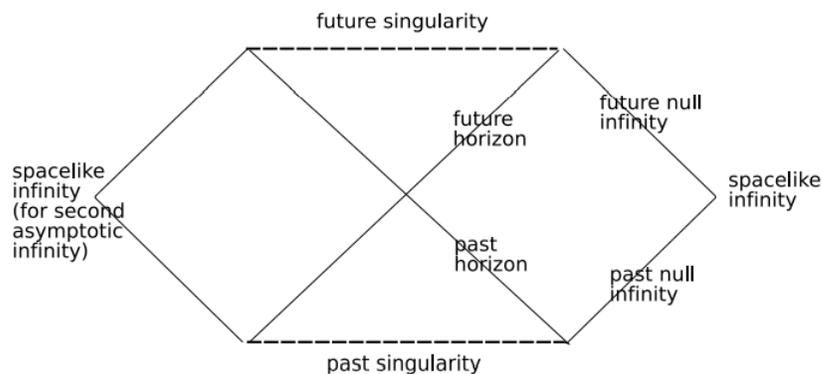


Figura 9:

Con un procedimento analogo si può giungere al diagramma di Penrose della metrica completamente estesa di Schwarzschild in (1.25) osservabile in figura 8. Si osserva che questo ricorda vagamente la rappresentazione in figura 5, in particolare le singolarità passata e futura, che figurano rispettivamente il buco bianco e buco nero, sono rappresentate con delle linee tratteggiate orizzontali poichè sono delle singolarità tipo spazio dato che la superficie ad  $r = 0$  costante si trova all'interno dell'orizzonte.

Si osserva che il buco nero formatosi per collasso non è rappresentato da questa metrica estesa ma dalla metrica di Schwarzschild normale dalla quale discende il diagramma di Penrose in figura 9. Questo deriva direttamente dal precedente e si vede che sono conservati l'orizzonte futuro e la singolarità futura ma non gli eventi nel passato data l'assenza di condizioni iniziali singolari. Al di fuori dell'orizzonte si rappresenta quindi lo spazio piatto di Minkowski, o meglio lo spazio che asintoticamente diventa piatto.

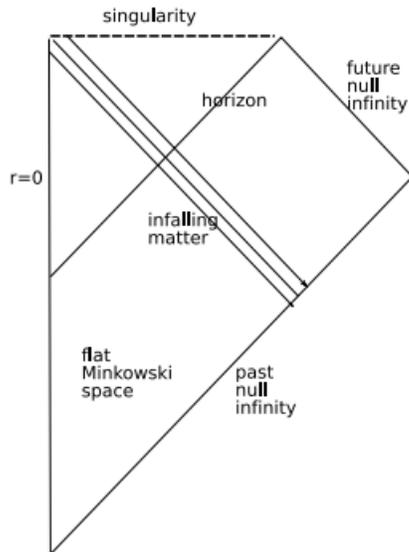


Figura 10:

## 2 Pillole di Teoria Quantistica dei campi

### 2.1 Introduzione

Descriviamo ora il fenomeno quantistico della creazione di coppie che sarà un punto chiave nella descrizione del paradosso dell'informazione.

Storicamente il concetto di campo classico nasce dall'esigenza di dover spiegare le "azioni a distanza" ed in seguito è stato utilizzato per spiegare numerosi fenomeni che non sarebbero possibili altrimenti, la stessa propagazione della luce si descrive tramite l'utilizzo del campo elettromagnetico. La teoria quantistica dei campi nasce dalla necessità di combinare la meccanica quantistica con la relatività ristretta.

L'idea essenziale consiste nel pensare alle particelle come perturbazioni o increspature di un campo quantistico che funge da mezzo, ad esempio i fotoni sono eccitazioni del campo elettromagnetico.

### 2.2 Modello di campo

Si suppongano un numero di punti materiali di massa  $m$  su di una retta che interagiscono tramite delle molle di lunghezza a riposo  $a$  e costante elastica  $k$ . La funzione che descrive gli spostamenti



Figura 11:

dalla posizione di equilibrio è  $\phi(x_n)$ . Nel limite in cui  $a \rightarrow 0$  si vede che  $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$  diventa una funzione continua che rappresenta la propagazione di un'onda sul reticolo e quindi segue la legge di evoluzione temporale

$$\square\phi(x) = \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

che ha come soluzioni  $\phi(x) = f(x - ct) + g(x + ct)$  dove la prima funzione rappresenta un'onda che si propaga avanti nel tempo (progressiva) mentre la seconda al contrario si propaga indietro nel tempo (regressiva), entrambe alla velocità  $c$ . Si osserva che questa relazione nello spaziotempo di Minkowski corrisponde all'equazione  $\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) = 0$  dove queste derivate sono covarianti e quindi l'equazione è invariante per trasformazioni di Lorentz, ossia compatibile con la relatività ristretta, se  $c$  è scelta uguale alla velocità della luce.

Il campo così definito è formato da una serie di oscillatori armonici accoppiati descritti da una lagrangiana complessiva, dalla Meccanica Quantistica si sa inoltre che l'energia dello stato fondamentale per ogni modo normale è pari a  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , ossia non nulla. Lo stato in cui tutti gli oscillatori sono allo stato fondamentale sarà considerato stato di vuoto. Si possono ora considerare due tipi di eccitazione, un primo tipo descrive una eccitazione di energia elevata rispetto alla separazione dei livelli energetici dei singoli oscillatori, si può quindi trattare il problema con buona approssimazione in modo statistico tramite l'equazione (2.2)). Il secondo tipo di riguarda i singoli oscillatori dei quali, dato che hanno autovalori discreti, si può considerare l'ordine dell'eccitazione come il numero di particelle che sono state formate (se  $n = 1$  si ha una sola particella e così per ogni valore di  $n$ ), così facendo attraverso operatori di creazione e di distruzione le particelle si possono generare e annichilire.

Per completezza scriviamo la (2.2) considerando una particella generica con massa (eq. di Klein-Gordon)

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} - m^2\phi(x) = 0 \quad (2.2)$$

con  $c = 1$ . La lagrangiana che permette di ottenere la (2.2) come equazione del moto è

$$\tilde{L} = \int L dx,$$

dove si è definita la densità di lagrangiana  $L$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - m^2\phi^2. \quad (2.3)$$

Si ponga adesso il sistema in un volume finito dato da un cubo di lato di lunghezza  $l$ , espandendo il campo scalare  $\phi(x)$  in serie di Fourier come

$$\phi(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) e^{ik_n x} \quad (2.4)$$

con  $k_n = \frac{2\pi n}{l}$ . Dato che il campo è reale allora i modi d'onda devono soddisfare le condizioni di realtà

$$\phi_n = \phi_{-n}^*, \quad (2.5)$$

quindi se si pone  $\phi_n = \phi_n^R + i\phi_n^I$  allora si ottengono le seguenti proprietà

$$\phi_n^R = \phi_n^R \quad e \quad \phi_n^I = -\phi_n^I, \quad (2.6)$$

che sostituite nella (2.4) e riscrivendo  $\phi_n(t)e^{ik_n x} = \phi_n$  restituiscono la densità di lagrangiana

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} [(\dot{\phi}_n^R)^2 - \omega_n^2 (\phi_n^R)^2] + \sum_{n=1}^{+\infty} [(\dot{\phi}_n^I)^2 - \omega_n^2 (\phi_n^I)^2] + \frac{1}{2} [\dot{\phi}_0 - \omega_0^2 \phi_0]. \quad (2.7)$$

Inoltre dall'equazione (2.2) si ricava la relazione di dispersione dei modi d'onda

$$\omega_n^2 = k_n^2 + m^2 \quad (2.8)$$

con al primo membro le frequenze proprie di oscillazione del sistema.

### 2.2.1 Quantizzazione del campo

Si è descritto fin qui un campo scalare classico. In questo paragrafo descriveremo la quantizzazione. Il campo classico lo si può scrivere dalla (2.5) come

$$\phi(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\phi_n^R(t) + i\phi_n^I(t)) e^{ik_n x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\phi_n^R(t) \cos(k_n x) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\phi_n^I(t) \sin(k_n x) + \phi_0(t), \quad (2.9)$$

dove le  $\phi_n^R$  e  $\phi_n^I$  costituiscono le coordinate della posizione del n-esimo oscillatore. La quantizzazione canonica associa ad ogni modo del campo classico un corrispondente operatore

$$\phi_n^R \rightarrow \hat{\phi}_n^R = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} (\hat{a}_n^R + (\hat{a}_n^R)^\dagger) \quad (2.10)$$

$$\phi_n^I \rightarrow \hat{\phi}_n^I = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} (\hat{a}_n^I + (\hat{a}_n^I)^\dagger), \quad (2.11)$$

dove abbiamo anche introdotto  $\hat{a}_n^{R/I}$  e  $(\hat{a}_n^{R/I})^\dagger$  rispettivamente operatore di distruzione e creazione correlati ai modi d'onda attraverso l'apice  $R$  o  $I$  e il pedice  $n$ . Definendo

$$\hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_n^R + i\hat{a}_n^I) \quad e \quad \hat{a}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_n^R - i(\hat{a}_n^I)^\dagger) \quad \text{per } n \neq 0,$$

allora la (2.10) si può riscrivere come

$$\hat{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} (\hat{a}_n e^{ik_n x} + \hat{a}_n^\dagger e^{-ik_n x}). \quad (2.12)$$

Si nota che questa è ancora indipendente dal tempo, l'evoluzione temporale degli operatori di creazione e distruzione è

$$\hat{a}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{a} e^{-i\hat{H}t} \equiv \hat{a} e^{-i\omega t} \quad (2.13)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{a}^\dagger e^{-i\hat{H}t} \equiv \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (2.14)$$

quindi aggiungendo il termine di normalizzazione si arriva a

$$\hat{\phi}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_n}} (\hat{a}_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + \hat{a}_n^\dagger e^{-i(k_n x - \omega_n t)}). \quad (2.15)$$

### 2.2.2 Campo quantistico in uno spazio curvo

Il campo (2.15) è scritto in uno spazio 1 + 1 dimensionale di Minkowski e quindi nello spazio-tempo 4-dimensionale si può estendere come:

$$\hat{\phi}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}), \quad (2.16)$$

dove la nuova relazione di dispersione analoga alla (2.9) è

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2 + m^2. \quad (2.17)$$

Dalle proprietà degli operatori di creazione e distruzione si definisce lo stato di vuoto come lo stato annichilito da tutti gli operatori di distruzione

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0. \quad (2.18)$$

Agendo con l'operatore di creazione sul vuoto si ottiene una eccitazione osservabile come una particella.

In relatività generale si vede che questo campo può essere definito in qualsiasi istante di tempo ed ovviamente in base a come verrà definito cambieranno anche i modi d'onda. Il campo scalare si può scrivere, conservando le proprietà, in uno spazio 1+1 dimensionale come segue

$$\hat{\phi}(x) = \sum_n (\hat{a}_n f_n(x) + \hat{a}_n^\dagger f_n^*(x)), \quad (2.19)$$

dove le  $f_n(x)$  rappresentano i modi d'onda detti positivi (dalla direzione del tempo) mentre  $f_n^*(x)$  sono negativi. Si ottengono 3 situazioni generali:

1. lo spazio piatto restituisce una situazione analoga a quella del paragrafo precedente con  $f_n(x) = e^{i(k_n x - \omega_n t)}$ , in questo caso si vede che anche definendo due campi in  $t \neq t'$  si ottiene lo stesso campo finale. Ciò vuol dire che la definizione di stato di vuoto è unica e che la ridefinizione cambia gli operatori di creazione e distruzione, i quali però rimangono con le stesse proprietà;

2. nello spazio curvo non si può avere una definizione precisa di particella in questa formulazione ma c'è un caso in cui ciò è possibile. Se la lunghezza d'onda della particella è molto più piccola del raggio di curvatura  $\lambda \ll l$ , grazie al principio di equivalenza, ci si può mettere in un sistema di riferimento localmente piatto che permette una trattazione adeguata;
3. per lunghezze d'onda non così "piccole" non c'è una definizione univoca. Questo deriva dal fatto che la sorgente del campo gravitazionale, ovvero il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , non è necessariamente nullo quando lo spazio è vuoto, infatti con questa interpretazione lo stato di vuoto ha energia non nulla.

### 2.3 Creazione di coppie

Si consideri in una fase preliminare il toy model di un singolo oscillatore armonico nel caso di un improvviso cambio di frequenza. La lagrangiana dell'oscillatore armonico è data da

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\omega^2\phi^2, \quad (2.20)$$

dove si sono considerati come prima  $\hbar = 1, m = 1$ . La  $\phi$  rappresenta la posizione e gioca un ruolo analogo al campo descritto in precedenza. Nella visione di Heisenberg della meccanica quantistica, sono gli operatori ad evolvere nel tempo e non gli stati, quindi si definisce

$$\hat{\phi} = f(t)\hat{a} + f^*(t)\hat{a}^\dagger \quad (2.21)$$

che assomiglia alla definizione standard nel caso unidimensionale piatto. Si deve trovare quindi la forma esplicita della  $f(t)$ , per farlo si può cominciare considerando una particella creatasi al tempo  $t_1$  e annichitarsi al tempo  $t_2$ , quindi si misuri la propagazione nello spazio tra i 2 istanti considerati calcolando la funzione a due punti

$$\begin{aligned} {}_a\langle 0|\hat{\phi}(t_2)\hat{\phi}(t_1)|0\rangle_a &= {}_a\langle 0|(f(t_2)\hat{a} + f^*(t_2)\hat{a}^\dagger)(f(t_1)\hat{a} + f^*(t_1)\hat{a}^\dagger)|0\rangle_a \\ &= f(t_2)f^*(t_1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si vuole che lo stato abbia energia positiva tra i tempi considerati, quindi ci si può aspettare un'evoluzione temporale esponenziale con  $f(t) = Ne^{-iEt}$  definendo così le funzioni di frequenza dette positive. La (2.23) diventa

$$f(t_2)f^*(t_1) = |N|^2 e^{-i\omega(t_2-t_1)} \quad (2.23)$$

e lo stato si scrive

$$\hat{\phi}(t) = Ne^{-i\omega t}\hat{a} + N^*e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger. \quad (2.24)$$

Dalla regola di commutazione posizione-momento (dove si indica l'operatore impulso relativo al sistema con  $\hat{\pi} = f(t)\hat{a} - f^*(t)\hat{a}^\dagger$ )

$$[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i$$

è possibile calcolare la costante di normalizzazione che risulta  $N = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$  e quindi

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega t} \hat{a} + e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger). \quad (2.25)$$

Si consideri ora un improvviso cambio della frequenza propria dell'oscillatore  $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$  nell'istante di tempo  $t = 0$ . Svolgendo le equazioni di Eulero-Lagrange con la rappresentazione (2.22), potendo considerare i coefficienti di  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  indipendenti si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{f} + \omega^2 f = 0 & t < 0 \\ \ddot{f} + \tilde{\omega}^2 f = 0 & t > 0 \end{cases}$$

che si risolvono con

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \quad \text{per } t < 0 \quad (2.26)$$

$$f = N_1 e^{-i\tilde{\omega}t} + N_2 e^{-i\tilde{\omega}t} \quad \text{per } t > 0, \quad (2.27)$$

dove le costanti  $N_1, N_2$  si determinano tramite le condizioni di continuità di  $f$  e della sua derivata  $\dot{f}$  nell'istante  $t=0$ . Con la variazione della frequenza è ovviamente variato anche lo stato di vuoto e questo vuol dire che si può ridefinire la (2.22) anche per  $t > 0$  in maniera del tutto simile alla precedente

$$\hat{\phi} = g(t)\hat{b} + g^*(t)\hat{b}^\dagger. \quad (2.28)$$

Si vede quindi che oltre alla frequenza, si sono modificati gli operatori di creazione e distruzione, questi agiranno sul nuovo stato di vuoto poichè a priori  $\hat{a}|0\rangle_b \neq 0$ . Il nuovo stato di vuoto sarà definito quindi come segue

$$\hat{b}|0\rangle_b = 0. \quad (2.29)$$

Con questa nuova formulazione si trovano le forme analoghe delle  $g(t)$

$$g = M_1 e^{-i\omega t} + M_2 e^{-i\omega t} \quad \text{per } t < 0 \quad (2.30)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\tilde{\omega}t} \quad \text{per } t > 0. \quad (2.31)$$

Bisogna ora correlare le due formulazioni della  $\hat{\phi}$ , per fare ciò definiamo una operazione di prodotto interno tale che

$$(h, k) = i(h^* \dot{k} - \dot{h}^* k), \quad (2.32)$$

che risulta avere le seguenti proprietà

$$(h, h) = 1, \quad (h, h^*) = (h^*, h) = 0, \quad (h^*, h^*) = -1. \quad (2.33)$$

Ora eguagliando le due forme di  $\hat{\phi}$

$$f(t)\hat{a} + f^*(t)\hat{a}^\dagger = g(t)\hat{b} + g^*(t)\hat{b}^\dagger$$

si ottiene la decomposizione

$$\hat{a} = \alpha \hat{b} + \beta \hat{b}^\dagger \quad (2.34)$$

dove i coefficienti possono essere espressi come  $\alpha = (f, g)$  e  $\beta = (f, g^*)$ .

Si vede così che lo stato al tempo  $t = 0$  non cambia repentinamente ma esegue una variazione continua. Dalla meccanica quantistica si sa che gli autostati dell'oscillatore sono una base dello spazio di Hilbert e quindi la variazione di frequenza corrisponde ad una eccitazione del campo nella nuova base  $\{|n\rangle_b\}$  dopo il cambio di frequenza.

### 2.3.1 Oscillatori armonici accoppiati

In vista dell'analisi del paradosso dell'informazione è importante considerare il caso di oscillatori armonici accoppiati. Si definiscono gli stati degli oscillatori dal lato interno all'orizzonte degli eventi  $\hat{\phi}_L$  e dal lato esterno  $\hat{\phi}_R$  descritti dai rispettivi modi d'onda  $f_L$  e  $f_R$  (dove per L e R si intende rispettivamente "left" e "right"). Il livello di eccitazione di questi stati indicherà il numero di particelle presenti nel singolo stato. Dal punto di vista fisico ci si aspetta che i due oscillatori per tempi piccoli siano accoppiati e che per tempi grandi, dato che nascono dai lati opposti dell'orizzonte, risultino disaccoppiati allontanandosi all'infinito, come si è visto in precedenza nel paragrafo 1.6. Si presenta si seguito un modello semplificato in cui gli oscillatori sono accoppiati per  $t < 0$  e disaccoppiati per  $t > 0$ , la lagrangiana di questo sistema si presenta come

$$L = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{\phi}_R^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_L^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \phi_R^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \phi_L^2 - q \phi_R \phi_L & t < 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\phi}_R^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_L^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \phi_R^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \phi_L^2 & t > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Si vede per il caso di  $t < 0$  che si possono definire subito gli oscillatori disaccoppiati

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L + \phi_R) \quad e \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_L - \phi_R), \quad (2.36)$$

che semplificano la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_2^2 - \frac{1}{2} \omega_1^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 \phi_2^2 \quad t < 0, \quad (2.37)$$

con  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + q}$  e  $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 - q}$ . Si osserva inoltre che entrambe le variabili  $\phi_1$  e  $\phi_2$  hanno i propri operatori di creazione e distruzione, in particolare si cerca di ritornare alla notazione con la quale è stato affrontato il problema nei paragrafi precedenti. Dato che gli oscillatori sono stati disaccoppiati si può scrivere il campo  $\phi$  come

$$\hat{\phi} = f_1 \hat{a}_1 + f_1^* \hat{a}_1^\dagger + f_2 \hat{a}_2 + f_2^* \hat{a}_2^\dagger, \quad (2.38)$$

con i rispettivi stati di vuoto

$$\hat{a}_i |0\rangle_a = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2. \quad (2.39)$$

Le  $f(t, x)$  risultano

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} e^{-i\omega_1 t} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-i\omega_2 t} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2 \quad (2.40)$$

che rispettano le precedenti regole del prodotto interno

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad (f_i^*, f_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (f_i, f_j^*) = 0. \quad (2.41)$$

Per  $t > 0$  gli oscillatori sono già disaccoppiati poichè supposti già molto distanti e quindi, nei termini della trattazione appena affrontata, i modi d'onda risultano

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_R, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_L \quad (2.42)$$

e l'operatore di campo diventa

$$\hat{\phi} = g_1 \hat{b} + g_1^* \hat{b}^\dagger + g_2 \hat{c} + g_2^* \hat{c}^\dagger, \quad (2.43)$$

dove si sono utilizzate lettere diverse per evidenziare il fatto che fossero oscillatori disaccoppiati e con frequenze proprie diverse.

Si vuole trovare quindi una espressione che descriva lo stato di vuoto  $|0\rangle_a$  definito in (2.39) in termini degli stati  $|0\rangle_b, |0\rangle_c$  e dei loro stati eccitati. Per farlo si confrontano la (2.43) con la (2.38), imponendo

$$f_1 \hat{a}_1 + f_1^* \hat{a}_1^\dagger + f_2 \hat{a}_2 + f_2^* \hat{a}_2^\dagger = g_1 \hat{b} + g_1^* \hat{b}^\dagger + g_2 \hat{c} + g_2^* \hat{c}^\dagger, \quad (2.44)$$

che si può risolvere per  $t = 0$ , semplificando i prodotti interni. Applicando  $(f_1, \cdot)$  al membro sinistro rimane solamente  $\hat{a}_1$  e quindi effettuando gli altri prodotti interni per  $f_1^*, f_2$  e  $f_2^*$  si trova un sistema lineare dal quale si deduce che la combinazione lineare  $\hat{b} + \frac{q}{4\omega^2} \hat{c}^\dagger$  è composta da soli operatori  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$  di distruzione, quindi dopo alcuni calcoli è possibile mostrare la seguente equazione soddisfatta da  $|0\rangle_a$ :

$$\left( \hat{b} + \frac{q}{4\omega^2} \hat{c}^\dagger \right) |0\rangle_a = 0, \quad (2.45)$$

la cui soluzione è

$$|0\rangle_a = N e^{-\frac{q}{4\omega^2} \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger} |0\rangle_b \otimes |0\rangle_c. \quad (2.46)$$

Si osserva così la natura entangled degli oscillatori armonici disaccoppiati ma precedentemente accoppiati (si veda nel paragrafo 2.5 per una discussione sull'entanglement).

## 2.4 Modi d'onda delle particelle nello spazio curvo

Avendo descritto un modello giocattolo di evaporazione si vogliono applicare queste idee nel caso di spazio curvo. Per prima cosa si vogliono definire le funzioni d'onda delle particelle nelle varie regioni dello spazio nel caso del buco nero. Si ricordi la metrica (1.22) e le definizioni delle variabili

$$u = t + r^* \quad e \quad v = t - r^*. \quad (2.47)$$

In generale la soluzione dell'equazione delle onde  $\square\phi = 0$  non può essere radialmente uscente o radialmente entrante e questo perché la metrica di Schwarzschild dipende esplicitamente dalla variabile  $r$ . Ci si mette quindi in approssimazione iconale, assumendo che la lunghezza d'onda sia molto più piccola del raggio di curvatura, questo significa che la funzione d'onda di una particella uscente, su una geodetica di tipo luce ( $u = \text{cost.}$ ), avrà simmetria sferica con modi d'onda del tipo

$$h_k \approx Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-ikv}. \quad (2.48)$$

In questa approssimazione si avrà in particolare

$$k \gg \frac{1}{M}. \quad (2.49)$$

Nel seguito ci si concentrerà per semplicità su stati con  $l = m = 0$  ossia  $Y_{00} = 1$ . A priori la funzione  $h$  dipende arbitrariamente da  $r$  e quindi per conservare i risultati (2.34) il prodotto interno (2.33) tra i modi d'onda nelle varie regioni dello spazio-tempo si introduce un prefattore che varia lentamente con  $r$  del tipo

$$h_k = A(r) e^{-ikv}. \quad (2.50)$$

Usando questo ansatz nell'equazione delle onde si trova allora

$$h_k = \frac{C}{(4\pi r)^2} e^{-ikv}, \quad (2.51)$$

e quindi come ci si aspetta qualitativamente si trova che la progressiva propagazione comporta una diminuzione dell'ampiezza dell'onda. Si può vedere che questi stati sono normalizzati non solo per i valori di  $k$  considerati ma per tutti i valori, allora dato che la radiazione di Hawking ha  $k \sim \frac{1}{M}$  perché si fa l'approssimazione iconale? Questa approssimazione permette di semplificare i conti, inoltre le proprietà termiche della radiazione sono descritte in maniera esatta in questa approssimazione così come è ben descritto l'entanglement tra le particelle create ai due lati dell'orizzonte.

I modi d'onda nello spazio piatto quindi sono simili a quelli già trattati con una dipendenza dal valore di  $k$ . Si può scrivere

$$f_{k_a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k_a}} \frac{1}{4M} e^{-ik_a(v_p+4M)}, \quad (2.52)$$

che corrisponde alla (2.48) ridefinita nello spazio piatto con un cambio di coordinate infatti si nota che all'esponente si ha una differenza  $v_p + 4M = v_p - \bar{v}_p$  con  $\bar{v}_p = -4M$  che è il valore di  $v_p$  in corrispondenza dell'orizzonte dalla (1.36). Eseguendo i prodotti interni per  $k, k'$  si trova

$$(f_{k_a}, f_{k'_a}) = \delta(k_a - k'_a), \quad (f_{k_a}^*, f_{k'_a}^*) = -\delta(k_a - k'_a), \quad (f_{k_a}^*, f_{k'_a}) = 0. \quad (2.53)$$

Per  $r \gg 2M$ , ossia "vicino l'infinito", si trova una situazione simile dato che lo spazio è asintoticamente piatto e quindi i modi d'onda saranno

$$g_{k_b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k_b}} \frac{1}{4M} e^{-ik_b v}, \quad (2.54)$$

dove si è usata la variabile  $v = t - r^*$  con il tempo coordinato  $t$ . Seguendo le traiettorie per  $v = cost$  dall'infinito all'orizzonte, ci si accorge che queste non vi cadono mai all'interno ma risiedono sempre nella regione al di fuori dell'orizzonte. I prodotti interni in questa regione di spazio si eseguono assumendo una superficie di tipo spazio nelle coordinate  $x - t$ , ossia con  $t = cost$ , e questo perchè lo stesso orizzonte in queste coordinate è una singolarità di tipo spazio. Risultano quindi

$$(g_{k_b}, g_{k'_b}) = \delta(k_b - k'_b), \quad (g_{k_b}^*, g_{k'_b}^*) = -\delta(k_b - k'_b), \quad (g_{k_b}, g_{k'_b}^*) = 0, \quad (2.55)$$

dove l'elemento di volume usato è

$$d\Sigma = \sqrt{-g}dV = 4\pi r^2 \frac{dr}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})}} \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (2.56)$$

In questo modo abbiamo delle  $g_{k_b}$  ben definite per  $2M < r < +\infty$ .

Si può definire la variabile  $\tilde{v}$  analogamente a (1.45) all'interno dell'orizzonte, ovvero (in coordinate di Kruskal) per

$$U > 0, \quad V > 0, \quad (2.57)$$

così è possibile definire

$$h_{k_c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k_c}} \frac{1}{4M} e^{-ik_c \tilde{v}}. \quad (2.58)$$

Si osserva che le  $h_{k_c}$  sono definite per  $0 < r < 2M$ . Quindi l'elemento di volume sarà

$$d\Sigma = 4\pi r^2 \sqrt{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)} dt \quad (2.59)$$

Si ottiene così una forma per i prodotti interni simili a (2.56) (sostituendo le  $g_k$  con le  $h_k$ ).

A questo punto è possibile scrivere nella regione di spazio piatto l'operatore di campo nello spazio piatto

$$\hat{\phi} = \int_{k_a} dk_a \left( f_{k_a} \hat{a}_{k_a} + f_{k_a}^* \hat{a}_{k_a}^\dagger \right). \quad (2.60)$$

Dopo la creazione della coppia di particelle, (ossia in una sezione del tempo seguente che così divide lo spaziotempo) questo diventa

$$\hat{\phi} = \int_{k_b} dk_b \left( g_{k_b} \hat{b}_{k_b} + g_{k_b}^* \hat{b}_{k_b}^\dagger \right) + \int_{k_c} dk_c \left( h_{k_c} \hat{c}_{k_c} + h_{k_c}^* \hat{c}_{k_c}^\dagger \right). \quad (2.61)$$

Con una procedura analoga alla precedente, queste due forme si possono eguagliare per  $t = 0$  ovvero l'istante in cui la coppia si crea. Dato che i modi di frequenza  $g_{k_b}$  e  $h_{k_c}$  sono localizzati e si riferiscono a sezioni molto diverse dell'ipersuperficie considerata allora i prodotti interni misti tra questi modi sono nulli. Si vede però che i prodotti con  $f_{k_a}$  sono tutt'altro che nulli, da questi

è possibile ricavare una forma esplicita degli operatori  $\hat{b}, \hat{b}^\dagger, \hat{c}, \hat{c}^\dagger$ . Eguagliando (2.61) e (2.62) e applicando ad ambo i membri per  $(g_{k_b}, \cdot)$  tramite prodotto interno allora si trova

$$\hat{b}_{k_b} = \int_{k_a} dk_a \left( (g_{k_b}, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} + (g_{k_b}, f_{k_a}^*) \hat{a}_{k_a}^\dagger \right) \quad (2.62)$$

e analogamente si trovano

$$\hat{b}_{k_b}^\dagger = \int_{k_a} dk_a \left( (g_{k_b}^*, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} + (g_{k_b}^*, f_{k_a}^*) \hat{a}_{k_a}^\dagger \right), \quad (2.63)$$

$$\hat{c}_{k_c} = \int_{k_a} dk_a \left( (h_{k_c}, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} + (h_{k_c}, f_{k_a}^*) \hat{a}_{k_a}^\dagger \right), \quad (2.64)$$

$$\hat{c}_{k_c}^\dagger = \int_{k_a} dk_a \left( (h_{k_c}, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} + (h_{k_c}^*, f_{k_a}^*) \hat{a}_{k_a}^\dagger \right). \quad (2.65)$$

Senza eseguire i calcoli in maniera esplicita con la condizione  $k = k_b = k_c$  si trova infine

$$(g_k, f_{k_a}^*) = -e^{4\pi M k} (h_k, f_{k_a}^*)$$

e quindi

$$\hat{b}_k + e^{-4\pi M k} \hat{c}_k^\dagger = \int_{k_a} dk_a \left( (g_k, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} + e^{-4\pi M k} (h_k, f_{k_a}) \hat{a}_{k_a} \right), \quad (2.66)$$

che è una combinazione di soli operatori di distruzione. In questo modo si ottiene la seguente equazione

$$\left( \hat{b}_k + e^{-4\pi M k} \hat{c}_k^\dagger \right) |0\rangle_a = 0, \quad (2.67)$$

che a meno del coefficiente dell'operatore  $\hat{c}^\dagger$  è analoga alla (2.45) e permette di esprimere  $|0\rangle_a$  in termini di  $|0\rangle_b$  e  $|0\rangle_c$ . Questa ha come soluzione

$$|0\rangle_a = \prod_{k>0,s} e^{-e^{4\pi M k} \hat{b}_{k,s}^\dagger \hat{c}_{k,s}^\dagger} |0\rangle_b \otimes |0\rangle_c. \quad (2.68)$$

## 2.5 Stati entangled

L'entanglement quantistico è un fenomeno di correlazione tra particelle che viola il principio di località di Einstein, questo afferma che se 2 eventi sono separati da una distanza di tipo spazio allora l'azione su uno di questi non deve modificare l'altro. Si osserva che 2 particelle entangled si “influenzano” indipendentemente dalla loro distanza e questo fenomeno si descrive matematicamente attraverso il prodotto tensoriale tra gli spazi in cui le particelle sono definite.

Si considerino 2 sistemi A e B con dei rispettivi spazi di Hilbert associati  $H_A$  e  $H_B$  allora lo spazio di Hilbert che descrive il sistema complessivo è

$$H = H_A \otimes H_B.$$

Si definiscono quindi le 2 funzioni d'onda dei rispettivi sistemi  $|\phi\rangle_A$  e  $|\chi\rangle_B$  allora lo stato complessivo è

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$$

che può essere riscritto più in generale nei termini delle rispettive basi

$$\sum_{n,m} |\phi_n\rangle_A \otimes |\chi_m\rangle_B. \quad (2.69)$$

Se una misura effettuata su una delle due funzioni d'onda influenza l'altra allora lo stato si dice entangled. In particolare uno stato entangled è non separabile, ossia uno stato dove le particelle non sono indipendenti e non si possono considerare le funzioni d'onda separatamente.

Nella formula (2.47) (e ovviamente in maniera analoga nella (2.69)) si vede che nella creazione delle particelle si ridefinisce lo stato di vuoto in funzione di queste, in particolare lo stato di vuoto per tempi minori risulta una combinazione di stati eccitati del nuovo campo dove questi risultano stati entangled tra la regione interna e la regione esterna all'orizzonte degli eventi. Espandendo quindi in serie la (2.47) si trova una combinazione lineare degli stati eccitati del tipo

$$|0\rangle_a = N \left[ |0\rangle_b \otimes |0\rangle_c - \frac{q}{4\omega^2} |1\rangle_b \otimes |1\rangle_c + \left( \frac{q}{4\omega^2} \right)^2 |2\rangle_b \otimes |2\rangle_c + \dots \right], \quad (2.70)$$

dove il primo termine esprime l'assenza di particelle, il secondo indica la presenza di 1 particella da ambo i lati, il terzo 2 particelle e così via. Si ricava da questa la probabilità di non avere emissione che risulta

$$P_{0_b 0_c} = |N|^2,$$

allo stesso modo la probabilità di ottenere l'emissione di 1 particella per ogni lato è

$$P_{1_b 1_c} = |N|^2 \left( \frac{q}{4\omega^2} \right)^2$$

e di conseguenza anche le probabilità degli altri eventi.

### 3 Il Paradosso di Hawking

#### 3.1 Evaporazione del buco nero

Si supponga un corpo di massa  $M$  e uno di massa  $m$ , questi interagiscono tramite i campi gravitazionali da loro generati e nel caso in cui  $M \gg m$  risulta che il campo generato dalla massa piccola sia trascurabile. In prima approssimazione si può descrivere l'interazione come quella newtoniana, la particolarità di questa è che risulta avere energia potenziale negativa

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

dove con  $r$  si indica la distanza dei corpi. L'energia di un corpo a riposo di massa  $m$  posto ad una distanza  $r$  dal centro di un buco nero quindi

$$E_p = mc^2 - \frac{GMm}{r},$$

dalla quale si vede che se il corpo si trova ad una distanza critica di  $\frac{GM}{c^2}$  alla quale l'energia totale si annulla. Con l'intervento della relatività generale si scopre che tale distanza è proprio il raggio di Schwarzschild  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$  e per distanze minori quindi l'energia diventa negativa. Si deduce che se una particella a riposo si trova nella regione interna dell'orizzonte allora l'energia del buco nero diventerà la massa a riposo di questo sommata all'energia della particella e quindi

$$E_{BH} = Mc^2 + E_p < Mc^2. \quad (3.1)$$

La diminuzione dell'energia totale del buco nero si può tradurre in una diminuzione della massa efficace del tipo  $E_{BH} = M_{eff}c^2$  con  $M_{eff} < M$ .

Nasce spontanea la domanda sul come si possa far trovare una particella a riposo ad una distanza  $r < R_S$ , si può pensare di:

- lasciar cadere la particella da una posizione all'esterno dell'orizzonte ma si vede che la particella ha così una energia iniziale positiva che ovviamente conserverà;
- calare questa particella magari con una fune, ossia applicando una forza verso l'esterno che inducesse un moto quasi statico fino al raggiungimento ed eventualmente al superamento dell'orizzonte ma si vede che al raggiungimento di questo la forza da applicare diverge in intensità (quindi la fune si spezza).

Si capisce che la particella non può essere inserita dall'esterno ma che deve essere già presente in quel punto, ma come fa una particella a "trovarsi già lì"? Si è visto nel secondo capitolo che in teoria quantistica dei campi che il vuoto non è realmente tale ma che è sempre presente un campo oscillante ad una energia minima, questo fenomeno è detto di fluttuazioni del vuoto. Può accadere che la densità di energia nel vuoto sia tale da far nascere una coppia di particelle, ovvero l'energia minima deve essere

$$\Delta E = 2mc^2.$$

Questa coppia di particelle si deve annichilire in un tempo tale da rientrare nel principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

e proprio per questo le particelle son dette virtuali. In uno spazio piatto non sarebbe possibile creare particelle reali, nel caso in esame lo spazio curvo permette di creare una particella nella regione interna e una nella regione esterna all'orizzonte degli eventi in modo da risultare

$$\Delta E_p = 0 \implies \Delta t \rightarrow +\infty,$$

quindi dato che le particelle possono esistere per qualsiasi istante di tempo non devono per forza annichilirsi e possono essere considerate particelle reali.

Le particelle che si creano attraverso questo processo, che causano la progressiva diminuzione della massa del buco nero compongono la Radiazione di Hawking.

### 3.2 Perdita di Informazione

Dopo avere descritto vari aspetti della fisica dei buchi neri si descriverà ora il paradosso dell'informazione:

1. Si immagini un corpo A in uno stato  $|\psi_A\rangle$  che per semplicità si assumerà come stato puro, e si lasci che questo collassi in un buco nero che sarà in uno stato  $|\tilde{\psi}_A\rangle$ .
2. A questo punto in un certo istante nel tempo si avrà una creazione di coppie come descritto in precedenza dalla (2.48) e quindi ci si troverà in uno stato tipo

$$|\Psi\rangle = |\tilde{\psi}_A\rangle \otimes (|0\rangle_{b_1} \otimes |0\rangle_{c_1} + a_1 |1\rangle_{b_1} \otimes |1\rangle_{c_1}).$$

Questo significa che si trova uno stato entangled, lo stato che descrive il vuoto insieme alle particelle che si sono create. Dopo che le particelle create si sono allontanate sufficientemente si ritorna alla situazione stazionaria con solo il vuoto all'orizzonte in attesa della creazione di altre coppie di particelle.

3. In seguito ad un numero  $n$  di creazioni di coppie, lo stato finale sarà qualcosa di simile a

$$|\Psi\rangle = |\tilde{\psi}_A\rangle \otimes (|0\rangle_{b_1} \otimes |0\rangle_{c_1} + a_1 |1\rangle_{b_1} \otimes |1\rangle_{c_1}) \otimes (|0\rangle_{b_2} \otimes |0\rangle_{c_2} + a_2 |1\rangle_{b_2} \otimes |1\rangle_{c_2}) \otimes \dots \otimes (|0\rangle_{b_n} \otimes |0\rangle_{c_n} + a_n |1\rangle_{b_n} \otimes |1\rangle_{c_n}). \quad (3.2)$$

4. Questo fenomeno implica che la massa del buco nero sta diminuendo ma che la sua struttura interna sta aumentando. In teoria si potrebbe iterare questo processo all'infinito, o meglio finchè non si esaurisce la massa del buco nero, a questo punto la soluzione più plausibile per Hawking risulta essere l'annichilamento del sistema per  $R_S = 0$  restituendo lo stato di vuoto, di fatto l'energia si conserverebbe perché l'energia del buco nero si trasformerebbe tutta in radiazione di Hawking anche se i due processi non sono correlati.

Quest'ultimo punto lascia però alcune perplessità che si traducono nel paradosso:

- Quando il buco nero si annichila, perde la sua massa (o energia) ma la struttura interna accumulata dove finisce?
- Tutte le particelle che sono “scappate” dal campo gravitazionale inizialmente erano entangled con le particelle all'interno come in (3.2) ma quando il buco nero scompare dall'universo queste particelle a cosa sono entangled? Dalla meccanica quantistica si sa che 2 particelle restano entangled a meno di altre interazioni e quindi in questo caso non potendo assegnare uno stato preciso alla radiazione che si misura all'esterno ciò si traduce in una perdita di informazione.
- Si sa dalla meccanica quantistica che attraverso una hamiltoniana di interazione si stabilisce una biunivocità tra lo stato iniziale e lo stato finale del tipo

$$|\psi\rangle_f = e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_i \quad (3.3)$$

dove con  $i$  e  $f$  si intende iniziale e finale, l'operatore nel mezzo è detto di evoluzione temporale. Dato che la materia che genera il buco nero è scorrelata con le particelle create all'orizzonte si ottiene che diversi stati iniziali del buco nero possono avere la stessa radiazione di Hawking, manca così l'univocità.

- Nel paragrafo 1.4 si è descritto il processo di formazione di un buco nero per collasso, ma la meccanica quantistica è capace di descrivere lo stato fino allo stadio di stella di neutroni e non può descrivere le particelle e le loro interazioni all'interno di un buco nero che si suppone avere densità infinita. Allo stesso modo quindi non è possibile descrivere a pieno neanche il processo di evaporazione poichè le particelle che cadono all'interno del buco nero si aggiungono a questo sistema. L'assunzione che è stata fatta in all'inizio di questo paragrafo, nel quale si è ipotizzato il buco nero in uno stato quantistico, è errata nelle fondamenta della teoria e quindi non è possibile applicare l'operatore di evoluzione temporale utilizzato per stati quantistici che permette di ricavare la cronologia passata e futura dello stato, in questo modo si determina una effettiva perdita di informazione. Per la descrizione del buco nero si fa riferimento teorie di gravità quantistica qui non trattate ma la soluzione ci si aspetta che sia semiclassica data la descrizione semiclassica del paradosso stesso.

Ma si può avere perdita di informazione? Questo fenomeno comporterebbe la violazione del teorema di Liouville che è alla base di tutte le teorie che si conoscono. Il teorema afferma che la derivata temporale della densità di stati nello spazio delle fasi è nulla per ogni sistema conservativo che evolve nel tempo. Si osserva che il buco nero contiene ancora un certo numero di stati e quindi di informazione, allora se il buco nero scompare dall'universo nella sua evoluzione si viola il suddetto teorema risultando in un paradosso.

### 3.3 Ridefinizione degli stati

Hawking propose una possibile soluzione, ovvero descrivere gli stati solamente attraverso le loro matrici di densità. Le particelle 1 e 2 create nella creazione di coppie sono entangled, si immagini siano ad esempio in uno stato di singoletto di spin del tipo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_1|+\rangle_2 - |+\rangle_1|-\rangle_2). \quad (3.4)$$

Quando la particella 1 scompare dall'universo come si scrive lo stato? Si potrebbe immaginare semplicemente di togliere i ket relativi alla particella 1 lasciando una sovrapposizione coerente di stati della sola particella 2 come segue

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_2 - |-\rangle_2). \quad (3.5)$$

Nella base in cui  $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  allora risulta che lo stato (3.5) è autovettore della matrice di pauli  $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  con autovalore  $-1$ . Il problema nasce quando si effettua un cambio di base, infatti se si ruota un vettore della base dello stato (3.4) del tipo

$$|-\rangle_1 \rightarrow e^{-i\theta}|-\rangle_1, \quad (3.6)$$

ruotandolo quindi di un angolo  $\theta$  e lasciando tutti gli altri invariati. Si ha così lo stato riscritto come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_1|+\rangle_2 - e^{i\theta}|+\rangle_1|-\rangle_2) \quad (3.7)$$

ed eseguendo la stessa procedura di prima si ottiene che

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_2 - e^{i\theta}|-\rangle_2). \quad (3.8)$$

Si osservi ora che ponendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  si ottiene lo stato  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  che è autostato della matrice di pauli  $\sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  con autovalore  $-1$ . Insomma la definizione della base dell'autospazio delle singole particelle è essenziale e quindi elidere i componenti che rappresentano una particella non basta per descrivere completamente lo stato dell'altra e che per questo lo stato si dice entangled.

Hawking nota che anche se si ridefiniscono tutti i vettori dello stato come in (3.6) la matrice di densità rimane sempre la stessa, questa ha la proprietà di indicare sulla diagonale la probabilità di trovarsi nello stato relativo alla posizione in matrice, se la base in cui si descrive lo spazio è ortogonale e completa allora si avranno solo elementi sulla diagonale. In sostanza la probabilità di

avere spin up o spin down non dipende da (3.6), se ho quindi uno stato generico con un numero  $n$  di particelle come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} \left( |-\dots-\rangle + e^{i\theta_1} |-\dots-\rangle + \dots e^{i\theta_N} |+\dots+\rangle \right), \quad (3.9)$$

la probabilità di essere in un vettore qualsiasi di questa combinazione è  $\frac{1}{2^N}$  poichè  $N = 2^n$  è il numero di autostati possibili. La matrice di densità relativa a (3.9) sarà

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^N} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^N} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Definendo gli stati con le loro matrici di densità ovviamente si perde informazione sulla forma dello stato poichè si conoscono solamente le probabilità relative alle misure, persino l'evoluzione temporale perde di informazione poichè ad evolvere non sarà uno stato ma la matrice di densità correlata che a priori può rappresentare più stati.

In meccanica quantistica l'operatore di evoluzione temporale è unitario relativo agli stati mentre Hawking si accorse che l'unica soluzione fosse un operatore  $\$$  non unitario che descrivesse l'evoluzione delle matrici di densità. In pratica si attaccano le fondamenta della teoria mettendo in discussione una teoria che ha messo le basi della fisica moderna.

### 3.4 Entropia del buco nero

Si veda ora anche un argomento "classico" sul perché il buco nero debba "evaporare".

Si ricordi che la radiazione di Hawking è indipendente dalla materia che genera il campo gravitazionale, questo vuol dire che a priori possono essere emessi tutti i tipi di particelle con una qualsiasi energia iniziale e qualitativamente ci si aspetta che le particelle più massive siano più rare. Questo comportamento può essere tradotto nei termini più generali della meccanica statistica e della termodinamica, si fanno quindi ipotesi iniziali di ergodicità (ovvero che dalla terra si osserverebbe una radiazione approssimativamente continua e non le singole particelle attraverso le misure) e di equilibrio ad una temperatura  $T$  (ovvero che l'energia media del sistema è fissata). Si può quindi immaginare che questo corrisponda ad un insieme grancanonico, quindi la possibilità di trovare una particella con energia  $E_1$  risulta

$$P(E_1) \propto e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \quad (3.11)$$

con  $k_B$  la costante di Boltzmann. Questo risultato è confacente con quello riscontrato da Hawking nello studio della radiazione emessa, la temperatura relativa a questa formulazione si trova essere

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \quad (3.12)$$

che è detta Temperatura del Buco Nero, con  $M$  la massa di questo. Si deduce dalla (3.11) che saranno emesse particelle preferibilmente massless a discapito di quelle più massive, si giustifica così la trattazione nel paragrafo 1.7 di sole geodetiche di tipo luce.

Si immagini ora di poter considerare il buco nero come un sistema classico, quindi senza la radiazione di Hawking, in sostanza l'orizzonte può solo crescere, al limite mantenersi di dimensioni costanti ma non può decrescere. Questo comportamento unidirezionale ricorda la seconda legge della termodinamica al punto tale che Jacob Bekestein (ben prima della trattazione di Hawking) postulò che

$$S_{BH} \propto A \quad (3.13)$$

dove con  $A$  si intende l'area che copre l'orizzonte il quale con buona approssimazione può essere visto come un guscio sferico e quindi

$$A = 4\pi R_S^2. \quad (3.14)$$

Dato che il buco nero non emette allora l'unico modo per misurare l'entropia è osservando le variazioni di dimensioni dell'orizzonte, in sostanza aumentando l'area che copre quando qualcosa cade all'interno e quindi aumentando l'entropia stessa dalla relazione (3.13) (senza violare la seconda legge della termodinamica). Si consideri la prima legge della termodinamica e considerando il calore scambiato col sistema universo

$$dS = \frac{dE}{T} = \frac{8\pi G}{\hbar c} M dM,$$

dove si è sostituito  $dE = c^2 dM$  e la (3.12). Integrando si ottiene

$$S = \frac{4\pi G}{\hbar c} M^2 \quad (3.15)$$

e dalla definizione del raggio di Schwarzschild si ricava

$$S = \frac{4\pi R_S^2 c^3}{4G\hbar} = \frac{Ac^3}{4G\hbar}. \quad (3.16)$$

Si vede che con la trattazione di Hawking, che comprende tutti gli effetti precedentemente discussi, si arriva allo stesso valore dell'entropia. Inoltre definendo la quantità

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 1,6 \cdot 10^{-35} m \quad (3.17)$$

detta lunghezza di planck, si trova subito

$$S_{BH} = \frac{A}{4l_p^2} \quad (3.18)$$

dove si osserva che l'entropia si può scrivere in maniera diretta esprimendo l'area dell'orizzonte in unità di planck. Questo significa che in qualche modo l'entropia del buco nero si raccoglie sulla

superficie ma essa è una regione vuota dello spazio! Si può evitare questo paradosso affermando che in realtà le proprietà termodinamiche sono solo una analogia ma ciò non si può fare con i punti precedentemente descritti.

In meccanica statistica l'entropia misura il numero di gradi di libertà del tipo

$$S = \log N$$

con  $N$  il numero di possibili stati del sistema, si può quindi immaginare questa come formata da placchette delle dimensioni delle unità di planck che contengono un bit di informazione (come se avessero spin), così l'entropia di una placchetta è

$$S_{bit} = \log 2.$$

Questa considerazione risulta essere confacente con il risultato numerico dell'entropia di un buco nero con una massa pari a quella del sole che ha  $R_S \sim 3km$ , quindi dalla (3.18)

$$S_{SunBH} \sim 10^{77}.$$

Ci si aspetta dalla (3.11) che la radiazione di Hawking sia composta principalmente da fotoni, inoltre dato che la temperatura del buco nero è molto bassa si prevedono fotoni con lunghezza d'onda media pari a

$$\lambda \sim R_S \sim 3km \quad (3.19)$$

dove si è supposta la massa pari a circa una massa solare, quindi l'energia dei fotoni emessi è in media  $E_f = \frac{hc}{\lambda}$ . Il numero di fotoni emessi sarà quindi

$$N \sim \left( \frac{E}{E_f} \right) \sim \frac{MR_{Sc}}{h} = \frac{2M^2G}{hc}, \quad (3.20)$$

dove si può definire l'unità di massa di planck come

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar}{Gc}} \approx 10^{-5}g \quad (3.21)$$

e quindi risulta

$$N \sim \left( \frac{M}{m_p} \right)^2 \sim \left( \frac{R_s}{l_p} \right)^2 \sim \frac{A}{l_p^2} \sim S_{BH}. \quad (3.22)$$

Questo vuol dire che se ogni fotone portasse 1 bit di informazione allora al consumarsi del buco nero i fotoni avranno portato via tutta l'entropia di Bekestein. A questo punto si può notare che il tempo tra 2 emissioni consecutive è circa il tempo che ci mette il sistema a tornare in equilibrio dopo l'emissione, ovvero il tempo per cui il fotone esce completamente dall'orizzonte

$$\Delta t \sim \frac{R_S}{c} \quad (3.23)$$

e quindi il tempo che ci metterà per consumarsi sarà

$$t_{tot} \sim N\Delta t \sim \left(\frac{M}{m_p}\right)^3 t_p, \quad (3.24)$$

dove  $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-44} s$  è l'unità di tempo di planck. Si vede che per un buco nero di una massa solare il tempo di evaporazione risulta

$$t_{tot} \sim 10^{63} \text{anni}$$

che è molto più grande dell'età dell'universo  $\sim 10^{10} \text{anni}$ .

### 3.5 Il teorema No-Hair

Per risolvere il paradosso si può immaginare che attorno a buco nero ci sia altro, i cosiddetti "capelli". Si vedano qualitativamente 3 casi:

1. Delle particelle che orbitano attorno al buco create insieme al buco e che quindi conservino l'informazione sul buco nero. Si vede che l'orbita circolare stabile più vicina al buco nero esiste per  $r = \frac{3}{2}R_S$  (solo per geodetiche di tipo luce) quindi ogni oggetto che si trovi all'interno di questo raggio prima o poi vi cade all'interno, comprese le particelle considerate.
2. Una sfera di fluido che circonda il buco avente raggio  $r = R_S + l_p$ , ma si vede che già per  $r = \frac{9}{8}R_S$  la pressione diverge.
3. Un campo elettromagnetico stazionario nei pressi dell'orizzonte ma si osserva che questo dovrebbe avere densità di energia infinita per  $r = R_S$ .

Nel corso degli anni si è dimostrato per moltissime strutture che non potessero esistere nell'intorno dell'orizzonte, questo significa che vi è uno stato di puro vuoto. Questa affermazione si traduce nell'enunciato del teorema No-Hair il quale afferma che la metrica di Schwarzschild non può avere deformazioni e che quindi un buco nero in questa metrica è definito solamente dalla sua massa. Nelle parole di John Wheeler: "a black hole has no hair".

Si veda ora più nello specifico il terzo punto. Si considera un campo quantistico scalare nello spazio piatto che si quantizza in una scatola di volume  $V$  impostando quindi condizioni al contorno periodiche trovando

$$\hat{\phi} = \sum_{\vec{k}} \left( f_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + f_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right) \quad \text{con} \quad f_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (3.25)$$

dove la forma della  $f_{\vec{k}}$  soddisfa l'equazione delle onde  $\square f = 0$ . Quindi lo stato di vuoto si ricava da

$$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0,$$

mentre le eccitazioni e quindi la presenza di particelle si scrive come

$$|\psi\rangle = \hat{a}_{\vec{k}_n} \hat{a}_{\vec{k}_{n-1}} \dots \hat{a}_{\vec{k}_1} |0\rangle.$$

Nel caso di una stella di neutroni con metrica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.26)$$

ci si aspetta una simmetria sferica per i modi d'onda che devono soddisfare l'equazione

$$\square_g \hat{\phi} = 0, \quad (3.27)$$

che è diversa dalla precedente per via della metrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-A(r), B(r), r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta)$ . Si trova allora che

$$\hat{\phi} = \sum_{n,l,m} \left( f_{nlm} \hat{a}_{nlm} + f_{nlm}^* \hat{a}_{nlm}^\dagger \right) \quad f_{nlm} = f_{nlm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (3.28)$$

e quindi lo stato di vuoto è

$$\hat{a}_{nlm} |0\rangle_{star} = 0, \quad (3.29)$$

mentre lo stato con particelle è

$$|\psi\rangle = \hat{a}_{n_N l_N m_N}^\dagger \dots \hat{a}_{n_1 l_1 m_1}^\dagger |0\rangle_{star}. \quad (3.30)$$

La dipendenza temporale  $e^{-i\omega t}$  dei modi d'onda definisce le funzioni d'onda stazionarie. Non ci si aspetta oggetti di questo tipo all'interno del buco nero perché ogni cosa collassa verso il centro e quindi si veda solo il caso di  $r > 2M$ . Si è visto in precedenza che è lecito esaminare questo campo per  $r' = 2M + \varepsilon > 2M$ , si può quindi effettuare una trasformazione di coordinate per approssimare la metrica a quella di uno spazio piatto

$$d\bar{t} = g_{tt}^{\frac{1}{2}}(r') dt = \sqrt{1 - \frac{2M}{r'}} dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2M + \varepsilon}} dt, \quad (3.31)$$

$$d\bar{r} = g_{rr}^{\frac{1}{2}}(r') dr = \sqrt{\frac{2M + \varepsilon}{\varepsilon}} dr. \quad (3.32)$$

In queste variabili si può scrivere l'equazione delle onde classica  $\square f = 0$  che ha come soluzione

$$f \propto e^{-i\bar{\omega}\bar{t}}, \quad (3.33)$$

quindi

$$-\bar{\omega}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r}^2} = \frac{2M + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{2M + \varepsilon}{\varepsilon} \omega^2 f \quad (3.34)$$

che conduce alla relazione

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2M + \varepsilon}{\varepsilon}} \omega. \quad (3.35)$$

Da questa si vede che per  $r' \rightarrow 2M$  allora la frequenza  $\bar{\omega} \rightarrow +\infty$  e dato che la densità di energia è proporzionale alla frequenza dell'onda allora diverge anch'essa, si trova così un assurdo. Dato che questa analisi si può fare in maniera analoga per ogni armonica sferica allora si giunge alla conclusione che non esistono soluzioni stazionarie regolari per l'equazione delle onde nell'intorno del buco nero ed è per questo che all'inizio si è considerata una stella di neutroni, in sostanza se questa collassa in un buco nero allora si perde la possibilità di avere un'onda stazionaria. Stessa cosa avviene per un campo vettoriale tipo  $\hat{A}_\mu$ .

Si giunge quindi alla proprietà più importante: la metrica di Schwarzschild risulta unica e non soggetta a variazioni non perturbative come quelle appena viste, si può dimostrare che vale lo stesso per aggiunte perturbative.

### 3.6 Remnants

Sia la relatività generale che la teoria quantistica dei campi hanno forti argomenti alla base e prove sperimentali quindi non c'è motivo per dubitare della teoria piuttosto si è visto che la radiazione di Hawking ha lunghezza d'onda pari a circa il raggio di Schwarzschild ma cosa conferma che ciò accade anche per lunghezze confrontabili con  $l_p$ ? Si osserva che fino a quelle distanze il contributo gravitazionale risulta essere trascurabile nell'interazione tra due corpi microscopici, è quindi possibile che ci sia qualche effetto ancora non compreso di gravità quantistica che magari ferma l'evaporazione del buco nero. Gli oggetti che risultano alla fine come scarto di questo processo di evaporazione ormai terminato sono detti appunto "remnants". L'esistenza di tali oggetti risolverebbe il paradosso poichè l'informazione si potrebbe conservare, ma l'accettare tale scelta porterebbe altri problemi concettuali come:

- Ciò che limita la quantità di informazione che può essere conservata è lo spazio delle fasi, si prenda per esempio la nascita stessa dell'universo durante la quale esso era compresso in un volumetto fisico infinitesimo ma aveva una energia (ed un impulso) enormi. Nel caso dei remnants si sta ponendo un limite non solo al volume fisico, determinato tramite  $R_S$ , ma anche all'impulso, determinato tramite  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Risulta che  $\Delta x \sim l_p$  poichè si è ristretto il buco a questo ordine di grandezza, inoltre  $E \sim m_p c^2$  limitando anche l'impulso ad ordini  $\Delta p \sim \frac{\hbar}{l_p}$  allora il volume nello spazio delle fasi è circa

$$V_{ps} \sim \hbar^3 \quad (3.36)$$

il quale consente un unico stato possibile per il remnant. Si può vedere che in base alla moltitudine dei possibili stati iniziali e della quantità di particelle ad energia negativa entrate nel buco nero si ha bisogno di un numero alto di possibili stati e quindi si trova la prima problematica. Se si considerano sono le particelle entranti immaginando che siano tutti elettroni o positroni, data la doppia possibilità se si considerano tutte le  $N$  particelle entrate allora si hanno  $2^N$  combinazioni possibili per descrivere lo stato di queste. Dato che la massa del buco nero può essere arbitrariamente grande allora ci sarebbe bisogno di un numero arbitrario di particelle entranti ossia di una infinità di stati possibili per fare in modo che un remnant possa descrivere a pieno lo stato finale.

- Si è visto che tramite le fluttuazioni di vuoto può esserci la creazione di una coppia di particelle, a priori ci può essere la formazione anche di remnants. Questi hanno una massa enorme per fenomeni di questo tipo ma dato che possono assumere una infinità di stati allora sommando le probabilità sugli stati questa diverge poiché a priori questi sono equivalenti. Un modo per effettuare una discriminazione è in funzione della massa e quindi la probabilità può essere soppressa esponenzialmente con essa ma purtroppo non si ha una teoria delle interazioni tra remnants e quindi non si possono effettuare predizioni.

## Conclusioni

Dal 1976 il paradosso dell'informazione ha minacciato l'integrità delle teorie moderne al punto che lo stesso Stephen Hawking propose di modificare i principi della meccanica quantistica. Nel 1997 i fisici teorici Kip Thorne, Hawking e John Preskill fecerò una scommessa sulla soluzione del paradosso. I primi due sostenevano che la teoria esatta fosse la relatività generale affermando la necessità di riscrivere i postulati della meccanica quantistica nella quale l'informazione non si conserva mentre Preskill affermava che data la causalità dei fenomeni quantistici nell'intorno dell'orizzonte allora la formulazione relativista sarebbe dovuta cambiare. Il premio in palio è una enciclopedia a scelta del perdente dalla quale l'informazione non si perde.

Nel 2004, Hawking dichiarò di aver perso la scommessa dato che egli stesso provò che gli orizzonti dovessero perdere informazione in qualche modo ma che questa fosse inutilizzabile, decise così di mandare a Preskill l'ottava edizione della "Total Baseball, The Ultimate Baseball Encyclopedia" affermando che questa contenesse informazioni inutili tanto quanto quelle uscenti dal buco nero, in seguito si corresse affermando che probabilmente gli avrebbe dovuto mandare solo le ceneri dell'enciclopedia per fare una analogia migliore. Thorne però non contribuì alla proclamazione di sconfitta poichè non convinto dalla prova di Hawking, così come gran parte della comunità scientifica. L'immagine rappresenta il momento in cui Hawking (a sinistra) dona pubblicamente l'enciclopedia a Preskill (a destra) in segno di sconfitta.



Figura 12:

Nel 1997 ci fu una proposta valida da parte del fisico argentino Juan Maldacena: assumendo la dualità del buco nero si può mostrare il teorema di corrispondenza AdS/CFT (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory), si deduce che un buco nero può essere descritto quantomeccanicamente risolvendo il problema dell'unitarietà dell'evoluzione temporale, in questa teoria le radiazioni di Hawking non sono termiche ma ricevono correzioni quantistiche. Il problema di come tale interpretazione olografica sia codificata in una teoria effettiva gravitazionale rimane comunque aperto nonostante ci siano stati progressi recenti nel connettere l'AdS/CFT alla quantum error correction che permetterebbe di ricostruire l'informazione apparentemente persa.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Hawking SW. Particle creation by black holes Communications in Mathematical Physics. 46: 206. DOI: 10.1007/BF01608497
- [2] Hartle JB, Hawking SW. Path-integral derivation of black-hole radiance Physical Review D. 13: 2188-2203. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.2188
- [3] Salvatore Capozziello e Maria Funaro. Introduzione alla Relatività Generale. Liguori Editore, 2005.
- [4] Misner, Thorne, Wheeler (1973). Gravitazione . WH Freeman and Company. ISBN 0-7167-0344-0
- [5] Report on Hawking's 2004 theory at New Scientist
- [6] Report on Hawking's 2004 theory at Nature
- [7] Jacob D. Bekenstein, Black holes and entropy, in Physical Review D
- [8] S. W. Hawking, Ellis, G. F. R., The Large Scale Structure of Space-time, New York, Cambridge University Press, 1973, ISBN 0-521-09906-4
- [9] Stephen W. Hawking, The Nature of Space and Time, in ArXiv e-print, 1994, arXiv:hep-th/9409195v1
- [10] Hartle, James B. (1998) Generalized Quantum Theory in Evaporating Black Hole Spacetimes . Black Holes and Relativistic Stars.
- [11] "Do black holes destroy information?", John Preskill (1992), hep-th/9209058
- [12] John Preskill, Black hole information bet, su theory.caltech.edu.
- [13] Stephen Hawking, Information Loss in Black Holes, Cambridge, 2005.
- [14] Hawking SW. Black holes and thermodynamics Physical Review D. 13: 191-197. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.191
- [15] S. Carroll. Spacetime and Geometry: Pearson New International Edition. Pearson Education Limited, 2014, Santa Barbara
- [16] W. Rindler. Relativity: Special, General, and Cosmological. Oxford University Press, 2001, Oxford.
- [17] P.K. Townsend sui buchi neri. [https://arxiv.org/PS\\_cache/gr-qc/pdf/9707/9707012v1.pdf](https://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9707/9707012v1.pdf)
- [18] Albert Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (1915) 778, Addendum-ibid. (1915) 799