

Università Degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



Laurea Triennale in Fisica

La Teoria delle Orbite in Meccanica Newtoniana e
Relativistica

Relatore: Prof. Salvatore Capozziello

Candidato
Antonio Capodagli
N85001186
Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	1
2	Le Leggi di Keplero	3
3	Le Orbite newtoniane	6
3.1	Tipologie di orbite	8
4	Le Orbite nel limite kepleriano e relativistico	11
4.1	L'Energia potenziale gravitazionale relativistica	12
5	La Teoria delle orbite relativistiche	15
5.1	La Soluzione di Schwarzschild	15
5.2	Il Moto planetario	17
5.3	Gli integrali del moto	21
6	Le Orbite relativistiche per particelle in campo gravitazionale	22
6.1	Particelle con massa diversa da zero	22
6.2	Particelle con massa nulla	26
7	Conclusioni	29

1 Introduzione

Il moto dei corpi celesti è stato oggetto di curiosità e di studio sin dall'alba della civiltà umana, partendo dagli studi delle teorie geocentriche tolemaiche fino all'età contemporanea. L'astronomia osservativa ha origini antiche con semplici analisi del cielo e persegue in una situazione di stallo fino al 1500, quando l'introduzione della teoria eliocentrica diede vita ad una vera e propria "rivoluzione copernicana": ciò diede la possibilità a figure come Galileo e Tycho Brahe, che riuscirono a identificare nuove stelle e delineare nuovi metodi di osservazione come la parallasse, di dare vita a quella che è definita come una vera e propria "rivoluzione astronomica". Il secolo successivo vede la nascita delle celeberrime leggi di Keplero, che rappresentano la base su cui si fonda l'intera teoria delle orbite; vengono compiuti tuttavia passi da gigante solo nel diciassettesimo secolo, con i progressi effettuati da Newton con la prima formulazione di una teoria gravitazionale classica, che riuscisse a spiegare sia il moto dei corpi celesti sia l'interazione tra la Terra e gli altri astri; l'anno decisivo fu il 1687, quando fu pubblicato il "Principi matematici della filosofia naturale", dove furono delineate, tra le altre, le formule delle sempiterni tre leggi della dinamica. La sua grande intuizione fu riuscire a comprendere come la forza gravitazionale che attrae gli astri fosse la stessa che attira i corpi cadenti al centro della terra. L'ingegno di Newton fu tale da formulare un'intera teoria utilizzando le informazioni dei fisici e degli astronomi che lo hanno preceduto: era solito dire "ho potuto vedere più lontano degli altri perché sono stato seduto sulle spalle dei giganti", implicando che i suddetti fossero proprio Copernico e Keplero[1]. Numerosi furono i risvolti di tali formulazioni, che portarono il sistema di osservazione celeste ad un livello superiore e alla formulazione di una teoria eliocentrica ben definita e tutt'ora valida. Questi traguardi fanno da base ad un graduale e costante processo nello studio dei corpi celesti, che si appropria anche dei successi matematici per rifinire la teoria classica di cui sopra; equazioni di Laplace, metodi perturbativi, teoria elettromagnetica. Lo studio della fisica è, tuttavia, soggetto ad un continuo manifestarsi di fenomeni e avvenimenti nuovi, inspiegabili con le teorie dell'epoca; si pensi, ad esempio, all'ipotesi di pianeti aggiuntivi agli otto allora conosciuti o all'assenza di una giustificazione valida dell'avanzamento del perielio di Mercurio, misurato da Le Verrier. Questi e tanti altri dilemmi vennero risolti solo nel ventesimo secolo con l'introduzione della teoria della relatività da parte di Einstein e la nascita della cosmologia come scienza. Il moto degli astri è legato a doppio filo con il concetto di spaziotempo e non sono avulsi dalla relatività del tempo; ciò porta inevitabilmente alla risoluzione dei quesiti posti da Einstein circa l'equazione di campo gravitazionale, che culmina in una risoluzione solo con il contributo di Schwarzschild [2]. Oggi lo studio delle orbite viene compiuto sia su scala teorica, facendo uso delle strutture matematiche tensoriali sviluppate nell'ultimo secolo, sia su scala osservativa, attraverso l'uso di radiotelescopi e di sonde. È un settore di studi in continua espansione che spazia su una grande pletora di fenomeni e che continua a ottenere risultati che validano tutt'ora le teorie della relatività proposte fino ad un secolo prima; si pensi, ad esempio, allo studio della pulsar 1913-16 [3] e la sua emissione di onde gravitazionali, oppure alla rilevazione delle stesse nel 2016 ad opera degli interferometri LIGO e VIRGO [4].

Questo elaborato si propone, come obiettivo, di definire;

- offrire, nei limiti delle conoscenze dei tre anni del corso di studio, una panoramica della teoria delle orbite analizzata sia in chiave newtoniana che relativistica;
- spiegare e risolvere il fenomeno del moto di precessione del perielio, una delle prove fondamentali della teoria della relatività generale;
- stabilire le correzioni relativistiche all'orbita kepleriana classica;
- delineare alcuni degli effetti e delle naturali conseguenze di queste teorie, compresi alcuni casi di orbite di particelle, come i fotoni;

2 Le Leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero agiscono da fondamenta per gli studi di teoria delle orbite in meccanica classica, per cui verranno qui riportate brevemente di seguito.

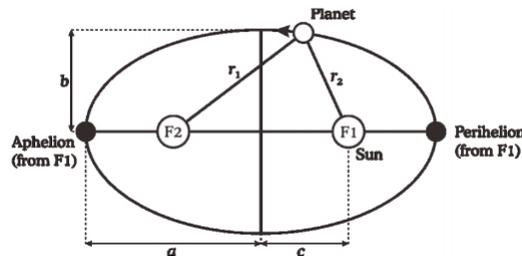
1. Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
2. Il raggio vettore congiungente il centro del Sole col centro di ogni pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle;
3. I quadrati dei periodi di rivoluzione (dei pianeti del Sistema Solare) sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche.

A titolo d'esempio, si prenderanno in esame i pianeti del Sistema Solare.

Prima legge L'enunciato stabilisce che la traiettoria del pianeta è un moto piano descrivente un'ellisse, di cui il sole occupa uno dei due fuochi. Si consideri r_1 ed r_2 la distanza del pianeta dai fuochi rispettivi; siano a e b rispettivamente semiassi maggiore e minore dell'ellisse e sia c , infine, il segmento di distanza che congiunge il centro dell'ellisse con il primo fuoco. Sussiste la seguente:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Il parametro c è necessario per definire l'eccentricità e della conica, pari a $e = \frac{c}{a}$. Quest'ultima è una misura della forma dell'ellisse, per la quale a valori bassi di e corrispondono orbite più vicine ad una forma circolare (e viceversa per valori alti di e). Il parametro di eccentricità è utile per definire anche in maniera univoca il periapside e l'apoapside, rispettivamente il punto di distanza minima e massima del corpo orbitante rispetto al centro di massa. Un sistema in cui il sole si trova nel primo fuoco permette di calcolare la distanza tra fuoco e perielio/afelio in maniera seguente;



$$d_p = (a - c) = a(1 - e)$$

$$d_a = (a + c) = a(1 + e)$$

La derivazione della prima legge viene effettuata considerando un potenziale efficace nella forma $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ [5]. Per comodità di dimostrazione, si consideri d'introdurre un sistema di coordinate polari (r, θ) , tale che $\vec{r} = r\hat{r}$. Allora sussistono le seguenti

$$\mathbf{r} = \dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \hat{\theta} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\mathbf{r} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Il momento angolare, sfruttando le proprietà di prodotto vettoriale, sarà allora pari a

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \dot{r}\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta} = \\ &= \mathbf{r}\dot{\theta}(\mathbf{r} \times \hat{\theta}) = r^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}) = r^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

ed è diretto ortogonalmente al piano in cui si svolge il moto. La conservazione del momento angolare implica che la quantità $r^2\dot{\theta}$ è un integrale del moto. A questo punto, si consideri un certo potenziale efficace nella forma

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2r^2} + V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

In un moto di campo centrale, la relazione tra l'angolo polare e la distanza dall'origine può essere ottenuta dall'integrale

$$\theta = \int \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2(E - V_{eff})}} = \cos^{-1}\left(\frac{L/r - \alpha/L}{\sqrt{(2E + \frac{k^2}{L^2})}}\right)$$

L'integrale è calcolato dalla posizione del perielio dell'orbita considerata [6]. Si definiscano ora le quantità

$$p = \frac{L^2}{\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2}}$$

e invertendo opportunamente l'espressione di θ si giunge all'equazione delle orbite

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

Ossia l'espressione di una conica in coordinate polari centrata su uno dei due fuochi. La quantità p viene chiamata semilato retto. È possibile determinare anche i due semiassi dell'ellisse in funzione delle variabili appena ottenute in maniera seguente

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (2)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2E}} \quad (3)$$

Seconda legge La seconda legge spiega come varia la velocità del corpo orbitante; essa non rimane costante lungo l'intera traiettoria, ma presenta una leggera accelerazione in corrispondenza del perielio e una decelerazione in corrispondenza dell'afelio. Questa è una conseguenza della legge di conservazione della velocità areolare, qui definita con il parametro C . Considerando valide le stesse condizioni precedenti e C come la derivata temporale dell'area spazzata dal raggio vettore, sussiste la seguente

$$dS = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt$$

La relazione sopra è ben posta, in quanto l'elemento d'area è dato dalla metà del quadrato di r per l'angolo al centro. D'altro canto, essendo

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2}$$

Ne consegue che anche la suddetta è un integrale del moto, pertanto una relazione adeguata per descrivere la seconda legge.

Terza legge La terza legge sancisce invece una dipendenza del periodo da parte del semiasse maggiore dell'ellisse, il quale, a sua volta, può essere definito come una funzione dell'energia come previsto dalla (2). Sia πab l'area dell'ellisse e assumendo la velocità come costante (pari a $L/2$):

$$T(E) = \frac{\pi ab}{C} = \frac{\pi k}{2E} \frac{L}{\sqrt{2E}} \frac{2}{L} = \pi \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} E^{-\frac{3}{2}}$$

Essendo valida la (2), $E = \frac{\alpha}{2a}$, e quindi

$$T(E) = \pi \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2a}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

da cui si ottiene la formulazione della legge e la dipendenza prevista, per la quale $T^2 \propto a^3$. [6]

3 Le Orbite newtoniane

Lo studio delle orbite newtoniane viene effettuato utilizzando l'approccio del centro massa al fine di semplificare i calcoli e la notazione utilizzata. Si considerino allora due corpi di massa m_1 e m_2 , la cui posizione viene identificata rispettivamente dai vettori r_1 ed r_2 , che esercitano un'attrazione gravitazionale vicendevole in un sistema isolato. Valgono le seguenti;

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= Gm_1m_2 \frac{(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= Gm_1m_2 \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}\end{aligned}\quad (5)$$

dove si indica con p_1 e p_2 le quantità di moto dei corpi in esame e con G la costante di gravitazione universale. Definito $P = p_1 + p_2$ la quantità di moto complessiva, sussiste la conservazione del momento totale, ossia

$$\frac{dP}{dt} = 0 \implies \mathbf{P} = \text{const.} \quad (6)$$

La suddetta vale come una prima legge di conservazione. Si effettui allora una trasformazione galileiana, nella forma

$$r_i \rightarrow r'_i = r_i - vt, \quad i = 1, 2$$

in un secondo sistema di riferimento, tale che quest'ultimo ammetta impulso totale nullo. Conseguenzialmente, definito $M = m_1 + m_2$, segue che

$$P \rightarrow P' = P - Mv$$

e che, scelto $v = P/M$, allora P sarà nullo anche in questo nuovo sistema di riferimento: il problema risulta effettivamente ben posto, perché la forza gravitazionale è invariante per trasformazioni di Galileo. Nel nuovo sistema di riferimento, le equazioni equivalenti saranno

$$P = 0, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}r \quad (7)$$

con $r = r_1 - r_2$, $r = |r|$, $p = p_1 - p_2$. Definito ora il vettore posizione del centro di massa come

$$R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$$

La qual cosa ci permette di scrivere

$$P = M \frac{dR}{dt}, \quad R = \text{const.}, \quad (8)$$

con l'ultima implicazione ottenuta da $P = 0$. Un sistema con le caratteristiche qui descritte prende il nome di "sistema del centro massa". Si indica la quantità $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ come "massa ridotta" e sussiste la seguente,

$$p = p_1 = m_1 \frac{dr_1}{dt} = \mu \frac{dr}{dt}$$

che permette di definire le equazioni del moto come

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{r}{|r|}.$$

Ad essa si possono aggiungere altre due leggi di conservazione se viene moltiplicata per il fattore $\frac{dr}{dt}$ e, attraverso un prodotto vettoriale, con r stesso. Ne consegue che, al primo membro,

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

Mentre, al secondo,

$$\frac{\hat{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Come risultato, vale la seguente;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\gamma}{r} \right) = 0, \quad \gamma = GM\mu$$

vale a dire una nuova legge di conservazione, ossia

$$\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\gamma}{r} = E = \text{cost.} \quad (9)$$

Sussiste l'uguaglianza con l'energia complessiva, ottenuta come somma di un termine cinetico e di un potenziale, che rappresenta una costante del moto. Per quanto concerne il prodotto vettoriale, invece, sussistono le seguenti;

$$r \times \mu \frac{d}{dt} \left(r \times \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (r \times p) = 0$$

Definito il momento angolare L come $L = r \times p$, allora è evidente che

$$\frac{dL}{dt} = 0 \implies \mathbf{L} = \text{cost}, \quad (10)$$

ossia alla conservazione del momento angolare totale prevista: L è costante in modulo e direzione, ne consegue che i vettori v ed r descrivono un piano che rimane costante nel moto. Ai fini della trattazione in oggetto, è utile considerare un piano xy (perpendicolare, quindi, a quello in cui L è definito) in cui porre i vettori posizione r , che a questo punto sono definiti da;

$$\mathbf{r} = (x, y) = r \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = (\cos \phi, \sin \phi)$$

con ϕ angolo polare. Una scrittura equivalente per L diventa quindi $L = r^2 \frac{d\phi}{dt}$, la quale sarà utile per semplificare la notazione dell'equazione del moto; si noti, infatti, che;

$$L^2 = (r \times p)^2 = r^2 p^2 - (r \cdot p)^2 \implies p^2 = \frac{L^2}{r^2} + p_r,$$

con $p_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}$ componente radiale della quantità di moto. Riutilizzando queste relazioni per riscrivere le equazioni del moto, si ottiene

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} = E. \quad (11)$$

La relazione (11) abbassa sensibilmente il numero di parametri necessari per risolvere il problema; l'equazione di partenza (4) richiedeva la risoluzione di 6 equazioni differenziali (due quantità di moto scomposte lungo tre assi differenti), laddove invece l'ultima relazione ottenuta, dipendente dalle due costanti del moto E ed L, richiede la sola determinazione della coordinata radiale $r(t)$ e quella polare $\phi(t)$. Ciò comporta una ridefinizione della velocità come $v = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$. L'energia potenziale sarà definita come

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}.$$

Il primo termine agisce come barriera repulsiva, il secondo come attrazione gravitazionale. Il minimo di questa funzione si trova in $r_0 = \frac{L^2}{\gamma\mu}$ e, quindi,

$$V_{min} = -\frac{\mu\gamma^2}{2L^2}.$$

Essendo l'energia cinetica non negativa, ne consegue che V_{min} rappresenta il minimo dell'intera funzione dell'energia E.

3.1 Tipologie di orbite

La funzione appena delineata è un ottimo descrittore per comprendere la traiettoria percorsa dal corpo in esame.

Table 1: Tipi di orbite

$E = E_{min}$	Orbita circolare
$E_{min} < E < 0$	Orbita ellittica
$E = 0$	Orbita parabolica
$E > 0$	Orbita iperbolica

Al variare di E vengono descritte orbite diverse. Il valore minimo e massimo di r può essere ricavato dalla condizione $E = E_{min} = V_{eff}$, la quale restituisce

$$r_{min,max} = -\frac{\gamma}{2E} \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2E} + \frac{L^2}{2\mu E}}$$

la cui unica soluzione accettabile è quella per $E > 0$. Si risolvano ora le equazioni differenziali per E effettuando un cambio di variabile;

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (12)$$

ponendo $u = \frac{1}{r}$, si riscrive la suddetta nella forma:

$$u'^2 + u^2 - \frac{2\mu\gamma u}{L^2} = \frac{2\mu E}{L^2}, u' = \frac{du}{d\phi}$$

Derivando ancora rispetto a ϕ :

$$u'(u'' + u - \frac{\gamma\mu}{L^2}) = 0$$

la quale si annulla per $u' = 0$ o per

$$u'' + u = \frac{\gamma\mu}{L^2}$$

ossia

$$u = \frac{\gamma\mu}{L^2} + C \cos(\phi + \alpha) \implies r = [\frac{\gamma\mu}{L^2} + C \cos(\phi + \alpha)]^{-1} \quad (13)$$

La (13) è la forma canonica delle sezioni coniche in coordinate polari, con le costanti d'integrazione C ed α delle due equazioni differenziali del secondo ordine[7]. Isolando C , in particolare, come

$$C^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + (\frac{\gamma\mu}{L^2})^2 \quad (14)$$

si ottiene una quantità non negativa che descrive i tipi di orbite riportati in tabella.

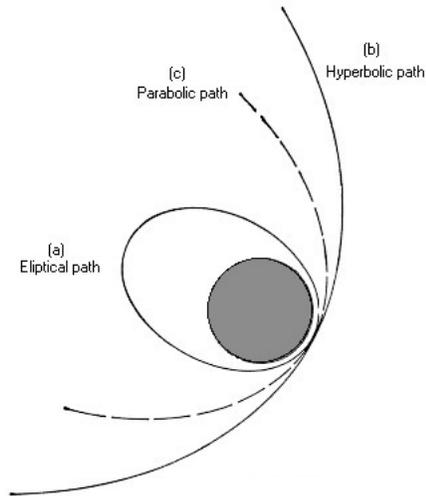


Figure 1: rappresentazione grafica dei vari tipi di orbite newtoniane

Orbite circolari Questa è la traiettoria corrispondente a $u' = 0$, ossia quella per cui $r_0 = \frac{L^2}{\mu\gamma}$ che corrisponde al minimo del potenziale V_{eff} . Il moto risultante è quello di due corpi in due cerchi concentrici con raggio inversamente proporzionale alle loro masse e sempre in opposizione vicendevole.

Orbite ellittiche Corrisponde all'orbita [a] della figura 1. Per $0 < |C| < \frac{\mu\gamma}{L^2}$, r rimane un valore finito per qualsiasi ϕ . Per $\alpha = 0$, l'asse maggiore dell'ellisse corrispondono a $\phi = 0$, ossia

$$r_{\phi=0} = r_{min} = \left[\frac{\gamma\mu}{L^2} + C \right]^{-1}, \quad r_{\phi=\pi} = r_{max} = \left[\frac{\gamma\mu}{L^2} - C \right]^{-1},$$

con $r_{min} + r_{max} = 2\alpha$ (α è il semiasse positivo dell'ellisse), si ottiene

$$\alpha = r_{\phi=0} = r_{min} = \frac{\gamma\mu}{L^2} \left[\left(\frac{\gamma\mu}{L^2} \right)^2 + C^2 \right]^{-1},$$

eliminando C usando la formula precedente e la (16), tuttavia,

$$a = -\frac{\gamma}{2E}.$$

Inoltre indicando con l la distanza $r_{\phi=\frac{\pi}{2}}$, vale a dire il semilato retto, si giunge a definire

$$l = \frac{L^2}{\gamma\mu},$$

e, di conseguenza, l'equazione della traiettoria:

$$r = \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\phi)}, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{1-l}{a}}. \quad (15)$$

ϵ è l'eccentricità dell'ellisse. L'equazione dell'orbita può anche essere riscritta come

$$r = a(1 - \epsilon \cos E);$$

questa relazione è nota come "equazione di Eulero", è trascendente in ϵ e quindi non presenta una soluzione analitica[8,9].

Orbite iperboliche e paraboliche Sono definite rispettivamente dall'orbita [b] e [c] della figura 1 e corrispondono ai sistemi con $E \geq 0$. La traiettoria è

$$r = l(1 + \epsilon \cos(\phi))^{-1} \quad (16)$$

dove $\epsilon \geq 1$ (il segno di uguaglianza è per la parabola, poichè sarebbe $E = 0$). Per cui, per potersi assicurare della positività di r, l'angolo polare ϕ deve essere definito in un range tale che

$$1 + \epsilon \cos(\phi) > 0, \cos(\phi) > -1$$

ossia $\phi \in (-\pi, \pi)$ e la traiettoria non è più chiusa: per $\phi \rightarrow \pm\pi$, vale $r \rightarrow \infty$. L'equazione (16), con $\epsilon = 1$, definisce esattamente una parabola; con $\epsilon < 1$, un'iperbole. Si tenga conto che traiettorie di questo tipo corrispondono a orbite aperte, "non returning object".[10]

4 Le Orbite nel limite kepleriano e relativistico

La seguente trattazione si basa su una teoria delle orbite dovuta sia a Newton che a Keplero, facente tuttavia uso di equazioni di Lagrange e dell'eccentricità come parametro descrittore del tipo di orbita. Quest'analisi di meccanica celeste descrive in maniera adeguata le orbite dei pianeti, per cui nel seguito si considereranno corpi celesti del Sistema Solare. Scelto $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$ e $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, si può identificare la lagrangiana relativa al problema dei due corpi in attrazione gravitazionale come [11]:

$$\mathcal{L} = -mc^2\gamma^{-1} + \frac{GMm}{r} \quad (17)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa del Sole, c è la velocità della luce nel vuoto e γ è il fattore di Lorentz. Le equazioni del moto derivano da quelle di Lagrange, con $q_i = (\theta, r)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

La risoluzione di queste è data da:

$$\frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (18)$$

$$\gamma \ddot{r} + \dot{\gamma} \dot{r} + \frac{GM}{r^2} - \gamma r \dot{\theta}^2 = 0 \quad (19)$$

Esattamente come nel capitolo precedente, si ottiene una legge di conservazione del momento angolare per unità di massa,

$$l = \gamma r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} \quad (20)$$

In questa maniera, possiamo sostituire la dipendenza esplicita dal tempo di θ , nella (19),

$$\gamma r^2 \dot{\theta} = \frac{l^2}{\gamma r^3} \quad (21)$$

Quest'ultima comporta una cancellazione della variabile temporale, poichè;

$$\dot{r} = -\frac{l}{\gamma} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \quad (22)$$

$$\gamma \ddot{r} = -\dot{\gamma} \dot{r} - \frac{l^2}{\gamma r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \quad (23)$$

Sostituendo la (21) e la (23) nella (19) restituisce una nuova equazione,

$$l^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} - \gamma GM + \frac{l^2}{r} = 0 \quad (24)$$

quest'ultima presenta una soluzione prossima a quella di Keplero e introduce il raggio di un'orbita circolare per una particella non relativistica con lo stesso momento angolare, ossia $r_c = l^2/GM$. Il risultato è

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{r_c}{r} + \frac{r_c}{r} = 1 + \lambda, \lambda = \gamma - 1 \quad (25)$$

dove λ è una correzione dipendente dalla velocità introdotta alle orbite newtoniane dovuta alla relatività speciale. Per $\lambda = 0$, $c \rightarrow \infty$, che implica

$$\frac{r_c}{r} = 1 + \epsilon \cos(\theta) \quad (26)$$

la quale restituisce una relazione per le orbite già nota, che richiama l'equazione di Eulero vista nel capitolo precedente. Anche qui ϵ è una misura di eccentricità: le orbite previste da Keplero sono descritte per $0 < \epsilon < 1$. I pianeti del Sistema Solare presentano tutte orbite simil-circolari ($\epsilon \ll 1$) e quindi richiedono correzioni relativistiche molto piccole ($\beta \ll 1$): Mercurio presenta l'eccentricità maggiore con $\epsilon = 0.2$ e lo segue Marte, con $\epsilon = 0.09$. Sapendo ciò, il fattore di dipendenza relativistica λ è di piccole dimensioni e viene approssimato uno sviluppo in serie al primo ordine trascurando momentaneamente la componente radiale della velocità;

$$\lambda \approx \frac{1}{2} \left(\frac{l}{rc^2} \right)^2$$

Usando nuovamente la (20) per eliminare la dipendenza temporale di θ in $\lambda \approx \frac{1}{2} \left(\frac{l}{rc} \right)^2 (1 + \lambda)^{-2}$ (o, più semplicemente, effettuando l'approssimazione $\lambda \approx \left(\frac{l}{rc} \right)^2$) è possibile riscrivere nuovamente l'equazione del moto come

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{r_c}{r} \right) + \frac{r_c}{r} \approx 1 + \frac{1}{2} \tilde{\epsilon} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2, \quad \tilde{\epsilon} = \left(\frac{GM}{lc} \right)^2 \quad (27)$$

L'insieme delle soluzioni della suddetta, quando $\tilde{\epsilon} \neq 0$ (quindi $c \rightarrow \infty$), descrive le orbite kepleriane con una piccola correzione relativistica, quindi adatto allo studio dei pianeti del Sistema Solare [12].

4.1 L'Energia potenziale gravitazionale relativistica

A questo punto è possibile affrontare il problema dell'energia dei corpi in esame utilizzando un approccio lagrangiano, ipotizzando di avere una forza gravitazionale conservativa anche in contesti relativistici, dalla quale sia possibile derivare un potenziale [13]. L'approssimazione da usare prevede una lagrangiana classica con la sostituzione $m \rightarrow \gamma m$, passando quindi in masse relativistiche;

$$F_g = -\gamma \frac{GMm}{r^2} = -\frac{GMm}{r^2} (1 + \lambda), \quad \lambda = \gamma - 1 \quad (28)$$

dove, anche in questo caso, λ è una correzione relativistica alla gravità newtoniana. In maniera simile, il momento angolare relativistico per unità di massa sarà $l = \gamma r^2 \dot{\theta}$.

Utilizzando l'approssimazione di λ vista precedentemente ($\lambda \approx \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}(\frac{r_c}{r})^2$), si può determinare una forza gravitazionale in approssimazione di relatività speciale:

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \right]$$

Il potenziale associato sarà

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \left[1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{6} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \right] \quad (29)$$

La lagrangiana complessiva ($\mathcal{L} = -mc^2\gamma^{-1} - U(r)$) restituisce le due equazioni del moto seguenti;

$$\frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (30)$$

$$\gamma \ddot{r} + \dot{\gamma} \dot{r} + \frac{GM}{r^2} \left[1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \right] - \gamma r \dot{\theta}^2 = 0 \quad (31)$$

La prima verifica la definizione del momento angolare relativistico, la seconda include una piccola correzione relativistica alle orbite classiche. Un rapido raffronto con quelle ottenute in trattazione classica mostra che l'approssimazione effettuata con λ è da considerarsi valida; la casistica precedente mostrava, infatti, che una buona equazione d'orbita potesse essere la (25), con $\tilde{\lambda} = \gamma \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 - 1 \right]$. Una volta sviluppata quest'ultima al primo ordine e considerando nuovamente la sola componente radiale della velocità, risulterà che le due orbite sono legate, nei termini d'approssimazione, dalla relazione $\tilde{\lambda} = 2\lambda$: l'equazione dell'orbita verrà ottenuta con la sola sostituzione $\tilde{\epsilon} \rightarrow 2\tilde{\epsilon}$, ossia

$$\frac{r_c}{r} (1 - \tilde{\epsilon}) \approx 1 + \epsilon (1 + \tilde{\epsilon}) \cos(1 - \tilde{\epsilon})\theta \quad (32)$$

L'espressione (32) esplicita alcune delle caratteristiche delle orbite simil-kepleriane e predice alcuni fenomeni rimasti irrisolti fino all'introduzione della relatività in teoria delle orbite; un esempio è lo shift del perielio di Mercurio, pari a $\Delta\theta \approx 2\pi\epsilon$ per rivoluzione. Questa predizione è pari al doppio di quella prevista classicamente da Newton stesso prima e da Le Verrier poi (oltrechè valida per i valori tradizionalmente utilizzati in orbite kepleriane). A questo punto allora è possibile considerare una sostituzione del parametro di eccentricità classico a quello relativistico, ossia

$$\tilde{\epsilon} \approx \frac{GM}{c^2 a (1 - \epsilon)^2} \quad (33)$$

Questa correzione risulta più alta per pianeti più vicini al Sole o con orbite più "schiate". A titolo d'esempio, si consideri il semiasse maggiore di Mercurio, $a = 5.79 \times 10^{10} m$ ed il suo parametro d'eccentricità classico, $\epsilon = 0.2056$; la $\tilde{\epsilon}$ corretta sarà pari a $\tilde{\epsilon} = 2.66 \times 10^{-8}$ e lo shift del perielio di Mercurio, di conseguenza,

$$\Delta\theta = \frac{2\pi GM}{c^2 a (1 - \epsilon^2)} = 2\pi\tilde{\epsilon} = 1.67 \times 10^{-7} rad \approx 14.3 arcsec/secolo \quad (34)$$

per rivoluzione. Si tenga conto che il valore qui riportato presenta una semplice correzione dovuta alla Relatività Speciale: lo stesso fenomeno analizzato usando avvalendosi esclusivamente della Relatività Generale riporta un valore più accurato pari a circa

il triplo di quello appena stabilito. Il dato qui presente è di un'importanza storica non indifferente, in quanto rappresenta una prova della validità generale dell'intera teoria [14,15].

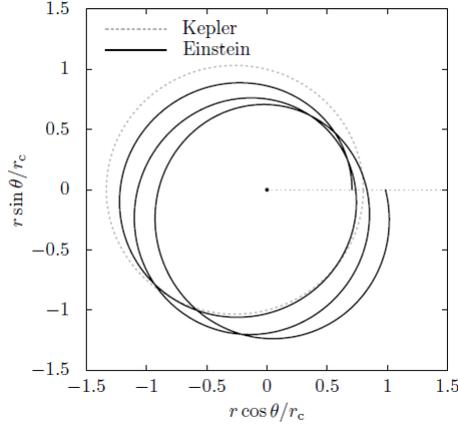


Figure 2: esempio di orbita newtoniana in limite kepleriano (linea tratteggiata) e semirelativistica (linea scura). Si nota da subito che la traiettoria della seconda non è una linea chiusa ed è dovuto alla presenza del moto di precessione predetto dalla Relatività generale. Quella qui mostrata, non in scala, è una rappresentazione di due orbite diverse dello stesso corpo celeste, con $\epsilon = 0.25$ e $\tilde{\epsilon} = 0.1$.

Nello studio del moto di un corpo rispetto ad una grande massa centrale, si fa uso di una correzione dovuta alla relatività generale, che indica un potenziale effettivo nella forma

$$V_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3}, \quad (35)$$

la quale restituisce la forma classica per $c \rightarrow \infty$. Derivando rispetto a r e calcolando il minimo per V_{eff} , si ottiene il raggio di un'orbita circolare stabile

$$R_c = \frac{1}{2}r_c + \frac{1}{2}r_c\sqrt{1 - 12\tilde{\epsilon}} \approx r_c(1 - 3\epsilon)$$

Ciò comporta che $R_c - r_c \approx -3\epsilon r_c$, ossia si riduce il raggio di un'orbita circolare di un fattore pari 3 volte al fattore correttivo. Si noti che, ancora una volta, è presente questo fattore 3 dinanzi a ϵ ; anche qui, il valore previsto dalla Relatività Generale è pari al triplo di quanto ottenuto con la Relatività Speciale.[16]

5 La Teoria delle orbite relativistiche

Lo studio delle orbite in contesti relativistici fa uso necessariamente della soluzione di Schwarzschild alle celeberrime equazioni di campo gravitazionale di Einstein. La trattazione di queste ultime tuttavia viene considerata nota al lettore, per cui nel presente elaborato si riporta esclusivamente la soluzione appena citata. Per questa ragione, la presente sezione sarà divisa in una breve parte introduttiva per identificare le soluzioni di campo e una seconda, più elaborata, riguardo agli integrali del moto e come queste due soluzioni matematiche si legano allo studio di particelle (sia massive che non) in campo gravitazionale relativistico [2,20].

5.1 La Soluzione di Schwarzschild

Si consideri un campo gravitazionale a simmetria sferica, in cui la materia che lo genera è ferma o si muove di moto radiale: la metrica più generica che lo può descrivere è la seguente

$$ds^2 = A(r,t)c^2 dt^2 - B(r,t)dr^2 - 2C(r,t)drdt - D(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (36)$$

dove A, B, C e D sono funzioni di spazio e tempo arbitrarie. Effettuando la seguente sostituzione

$$r' = F(r,t), \quad t' = G(r,t)$$

e passando al sistema di coordinate di r' e t' è possibile ottenere $C' = 0$ e $D' = r'^2$. Ancora, scegliendo una forma esponenziale per i coefficienti A' e B', possiamo riscrivere la metrica come

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt'^2 - e^\lambda dr'^2 - r'^2 d\Omega'^2, \quad d\Omega'^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (37)$$

Si noti che la struttura scelta è ben posta: in assenza di campo gravitazionale, per $\nu, \lambda \rightarrow 0$, si ottiene nuovamente la metrica di Minkowski per la relatività speciale [17]. Tuttavia, la sola metrica non è sufficiente a determinare una soluzione al problema in esame; l'equazione di campo nel vuoto, descritta dal tensore di Ricci

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad (38)$$

richiede di determinare i simboli di Christoffel ad esso associati. Si consideri allora la lagrangiana

$$L = e^\nu (\dot{x}^0)^2 - e^\lambda (\dot{x}^1)^2 - r^2 (\dot{x}^2)^2 - r^2 \sin^2\theta (\dot{x}^3)^2$$

e le equazioni di Lagrange associate

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}$$

esplicitandole rispetto alle derivate di ordine massimo, è possibile riconoscere i simboli di Christoffel. Il calcolo in esame tuttavia non verrà trattato in questa sede e ci si limiterà a riportare solo le componenti del tensore di Ricci necessarie. Le soluzioni sono le seguenti;

$$R_{01} = \frac{\lambda_t}{cr} = 0 \quad (39)$$

$$R_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} \right) = 0 \quad (40)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) = 0 \quad (41)$$

dove il pedice t indica una derivata temporale e l'apice una derivata rispetto a r . Il fattore λ non dipende dal tempo. Le altre dipendenze possono essere risolte sottraendo membro a membro la (40) dalla (41), la cui operazione restituisce

$$\nu' + \lambda' = 0 \implies \nu' = -\lambda', \quad \nu + \lambda = \text{cost.} \quad (42)$$

Tali costanti d'integrazione devono necessariamente essere nulle, in maniera tale che per $r \rightarrow \infty$, si ha $e^\nu, e^\lambda \rightarrow 1$, ossia $e^\nu = e^{-\lambda}$. Sostituendo nella (40)

$$R_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} \right) = 0$$

la quale può essere riscritta, integrando, come

$$\frac{1}{r} (re^\nu)'' = 0 \rightarrow (re^\nu)' = \text{cost.} \rightarrow re^\nu = Ar + B$$

e, ancora, come

$$e^\nu = A + \frac{B}{r}$$

Il limite per grandi distanze fornisce il valore della costante A, poichè, per $r \rightarrow \infty$

$$e^\nu = A + \frac{B}{r} = 1 \implies A = 1$$

In approssimazione di campo debole, inoltre,

$$e^\nu = g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

dove con g_{00} ci si riferisce all'elemento del tensore metrico g e con R_s ci si riferisce al "Raggio di Schwarzschild", una grandezza propria di ogni corpo definita come la distanza dal centro della distribuzione di massa a simmetria sferica che dà origine alla metrica di Schwarzschild. Per $r = R_s$ si ottiene la soluzione singolare. In conclusione, la metrica di Schwarzschild sarà pari a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (43)$$

ed è soluzione dell'equazione (41), determina totalmente il campo gravitazionale nel vuoto, creato da una qualsiasi distribuzione a simmetria sferica centrale [18].

5.2 Il Moto planetario

Come visto nel capitolo precedente, la scoperta dello shift del perielio di Mercurio fu un fenomeno classico privo di spiegazione in meccanica classica. Nonostante i calcoli di Le Verrier, l'unica risoluzione del problema si ottiene solo con l'introduzione della relatività generale in meccanica celeste. Un rapido confronto nella seguente sezione tra le equazioni del moto mostra una risoluzione qualitativa del fenomeno [20].

In meccanica newtoniana Nel capitolo precedente delle orbite kepleriane e semi-relativistiche sono state delineate delle valide equazioni del moto e la rispettiva lagrangiana del problema; per comodità di notazione, nel seguente paragrafo si farà uso di una scrittura leggermente differente che tenga conto della soluzione di Schwarzschild. Si consideri allora il moto di una particella di prova di massa trascurabile che transita in una zona in cui è presente un campo gravitazionale a simmetria sferica; allora, dal principio variazionale sussiste la seguente

$$\delta \int \mathcal{L} dt = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r}$$

In coordinate spaziali polari, con $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$,

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

le equazioni di Lagrange corrispondenti sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, 3$$

A questo punto si risolve per ogni singolo valore di k. Ad esempio, per $k = 3$,

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \implies r^2 \dot{\phi} = \text{cost} = H$$

si ottiene una definizione quantitativa delle già discusse leggi di Keplero, ossia la conservazione della velocità aerolare. Per $k = 2$, sussiste la seguente

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

la quale è soddisfatta per $\theta = \pi/2$: ancora una volta, si ipotizza la conservazione del momento angolare, la cui conseguenza è la validità dell'ipotesi di moto piano. Per $k = 1$, vale

$$\ddot{r} = r \dot{\phi}^2 - \frac{GM}{r^2} \tag{44}$$

Si effettua un cambio di variabile nella forma $u(\phi) = \frac{1}{r}$ (con $u' = \frac{du}{d\phi}$), da cui ne consegue, avvalendosi della conservazione della velocità aerolare,

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -r^2 \dot{\phi} u' = -H u'$$

e, a sua volta, facendo uso della precedente

$$\ddot{r} = -H \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = -H \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{dt} \right) = -H \dot{\phi} u'' = -\frac{H^2}{r^2} u'' = -H^2 u^2 u''$$

Sostituendo adeguatamente nella (54), si ottiene l'equazione delle orbite ellittiche necessaria per r

$$u'' + u = \frac{GM}{H^2}$$

Una soluzione per la suddetta è data per

$$u = \frac{GM}{H^2} + B \cos(\phi - \phi_0) \quad (45)$$

ossia una combinazione di una soluzione generale e di una oscillante che, per $\phi_0 = 0$, può essere riscritta in una forma più familiare

$$r = \frac{H^2/GM}{(1 + \epsilon \cos \phi)} = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (46)$$

L'insieme di queste soluzioni rinvenute per i tre valori di k restituisce esattamente le tre condizioni previste dalle leggi di Keplero.

1. La soluzione per θ da' la conferma che il moto si svolge su un piano;
2. La soluzione per ϕ restituisce la conservazione della velocità aerolare;
3. La soluzione per r è la nota equazione dell'ellisse.

In meccanica relativistica Lo studio del caso relativistico si avvale della soluzione di Schwarzschild delineata precedentemente: anche in questo caso si utilizza il principio variazionale e lagrangiana di Schwarzschild per definire le equazioni del moto.

$$\int \mathcal{L} ds = 0, \mathcal{L} = e^\nu (\dot{x}^0)^2 - e^\lambda (\dot{r}^2) - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Il caso per $k = 2$ non verrà qui trattato perchè uguale alla controparte classica, con conseguente presenza del moto piano con $\theta = \pi/2$. Per $k = 0$ (quindi $x^0 = ct$) e $k = 3$ (quindi $x^3 = \phi$) si ottengono rispettivamente gli integrali primi dell'energia e del momento angolare:

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{x}^0 = l, \quad r^2 \dot{\phi} = h$$

Questa posizione è valida, non essendo la lagrangiana dipendente da x^0 e da x^3 . Il caso $k = 1$ è più complesso e la determinazione dell'equazione dell'orbita per r passa per l'uso dell'integrale primo banale nella forma $\mathcal{L} = 1$: essendo, infatti, valida la posizione $e^\nu = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)$ per la metrica di Schawzschild, ne consegue che

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{r^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 1 \quad (47)$$

D'altro canto le soluzioni per gli altri tre valori di k sono noti (ad esempio $\theta = \pi/2$), per cui si può riscrivere la formula precedente nella maniera seguente

$$l^2 - \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = 1 - \frac{R_s}{r} \quad (48)$$

Un cambio di variabili effettuato con le stesse modalità del caso newtoniano, con $u = \frac{1}{r}$, fa sì che sia valida la condizione

$$\dot{r} = -hu' \implies l^2 - h^2(u')^2 - h^2u^2(1 - R_s u) = 1 - R_s u \quad (49)$$

Derivando nuovamente la suddetta rispetto a ϕ e ricordando che sussiste $\dot{r} = -hu^2u''$,

$$u'' + u = \frac{R_s}{2h^2} + \frac{3R_s u^2}{2} \quad (50)$$

Una breve analisi di questa mostra che il primo termine al secondo membro è una riscrittura del caso classico, per cui è il secondo termine ad introdurre un'espansione relativistica: per basse velocità risulta che

$$h \approx \frac{r^2}{c} \dot{\phi} = \frac{H}{c}$$

Ricordando a quanto equivale il raggio di Schwarzschild, ne consegue:

$$\frac{R_s}{2h^2} \approx \left(\frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{c^2}{H^2}\right) = \frac{GM}{H^2} \quad (51)$$

Un ragionamento simile può essere utilizzato per espandere il secondo termine, che è sufficientemente ridotto per passare alla teoria perturbativa: infatti

$$\frac{\frac{3}{2}R_s u^2}{\frac{R_s}{2h^2}} = 3h^2 u^2 \approx \frac{3H^2}{r^2 c^2} = 3\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (52)$$

e quindi di piccola entità per basse velocità. La soluzione della (50) si può decomporre in due fattori con uno sviluppo perturbativo al primo ordine tale che

$$u = u_0 + \epsilon u_1, \quad u_0 = \frac{R_s}{2h^2} + b \cos \phi, \quad u_1 = b \cos \phi + P$$

con il fattore correttivo pari a $\epsilon = \frac{3R_s^2}{4h^2}$. Il termine P aggiunge una serie di fattori periodici che descrivono il movimento di precessione e di nutazione che il pianeta compie rispetto alla linea degli apsi. Complessivamente sussiste la seguente

$$u = \frac{R_s}{2h^2} + b \cos(1 - \epsilon)\phi + \epsilon P \quad (53)$$

Come ritrovato nel capitolo precedente, la linea degli apsi si sposta nella direzione del moto di una quantità pari a

$$\Delta\phi = 2\pi\epsilon = \frac{3\pi R_s^2}{2h^2} \quad (54)$$

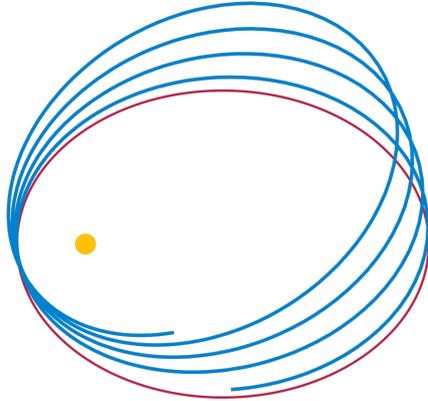


Figure 3: Esempio dello shift del perielio dal piano dell'eclittica. La traiettoria in rosso è quella classica.

È tuttavia più comune misurare l'avanzamento per unità di secolo e non di rivoluzione; considerato S come la stima di tale avanzamento e T come periodo di rivoluzione

$$S = \frac{\Delta\phi}{T} \approx \frac{6\pi}{T} \left(\frac{GM}{c^2 H^2} \right)$$

i quali, per orbite semi-circolari come quelli dei pianeti del Sistema Solare, presentano un'approssimazione nella forma

$$T \sim r^{3/2}, H \sim r^{1/2} \implies S \sim r^{-5/2} \quad (55)$$

che corrisponde al risultato già descritto, ossia $43''$ per secolo, e concorde con le osservazioni e le stime astronomiche. Qui sorge la differenza sostanziale tra meccanica celeste classica e relativistica: in assenza di qualsiasi altra forza, una particella orbitante un'altra sotto l'influenza della gravità newtoniana segue inevitabilmente e costantemente lo stesso ellisse perfetto. La presenza di altre forze (come la gravità di altri pianeti), fa sì che questa ellisse ruoti gradualmente e si allontani sempre più dal piano dell'eclittica previsto classicamente. La velocità (rate) del moto di precessione orbitale può essere misurata con estrema precisione solo con le teorie relativistiche che, come mostrato nel capitolo precedente, corrispondono al triplo dello shift previsto dalla meccanica classica[15].

5.3 Gli integrali del moto

Dal paragrafo precedente sulla metrica si può estrapolare un dato rilevante, ossia che ogni volta che la metrica non dipende da una coordinata x^α , la componente omonima della quadrivelocità u^α della particella di prova è una costante del moto (una formulazione particolare del noto teorema di Noether). La dimostrazione del paragrafo precedente sulla soluzione di Schwarzschild è una semplificazione di quanto appena detto. S'ipotizzi di avere la componente $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$ (dove la virgola indica la derivata rispetto a x^α), allora le equazioni di Lagrange del principio variazionale sono descritte da

$$\delta \int (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = 0$$

e le equazioni delle geodetiche associate riportano

$$\frac{d}{ds}(g_{\alpha\beta} u^\beta) = 0 \implies u^\alpha = \text{cost.}$$

La relazione a destra, quando $\alpha = 0$, esprime la conservazione dell'energia che, come visto anche nel capitolo precedente, diventa una costante del moto. Per dimostrare ciò, si consideri innanzitutto che, se $g_{0k} \neq 0$, allora

$$u_0 = g_{00}u^0 + g_{0k}u^k, \text{ per } \alpha = 0 \implies \frac{g_{00}}{ds} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right) = \text{cost.} \quad (56)$$

per alleggerire la notazione, si definisce $\gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}$, in maniera tale da riscrivere l'elemento di distanza nella forma

$$ds^2 = g_{00} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right)^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k \quad (57)$$

Se la particella di prova il cui moto risolve le equazioni di Lagrange transita da un punto A di coordinate x^k al tempo coordinato x^0 , al punto B di coordinate $x^k + dx^k$ e $x^0 + dx^0$; il fattore con γ definito precedentemente determina la distanza percorsa fra i due. Poichè l'evento contemporaneo di (x^0, x^k) è $(x_*^0, x^k + dx^k)$, l'intervallo di tempo coordinato è dato da

$$(x^+ dx^0) - x_*^0 = dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \quad (58)$$

che, in tempo proprio, sarà pari a

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right) \quad (59)$$

Si può dunque riscrivere la (57) come

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right)^2 \left(1 - \frac{\gamma_{ik} dx^i dx^k}{g_{00} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right)^2} \right) = \\ &= g_{00} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right)^2 \left(1 - \frac{dl^2}{c^2 d\tau^2} \right) = g_{00} \left(dx^0 + \frac{g_{0k} dx^k}{g_{00}} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Inserendo la (58) nella (56), si ottiene

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = cost \quad (61)$$

che è una formula di conservazione dell'energia, a meno di un fattore mc^2 : infatti, per campi gravitazionali deboli ($g_{00} \approx 1 - \frac{2U}{r}$) e per basse velocità, la suddetta restituisce la ben più nota

$$\frac{1}{2}v^2 - U = cost \quad (62)$$

6 Le Orbite relativistiche per particelle in campo gravitazionale

Noto l'integrale del moto ottenuto nel paragrafo precedente, possibile utilizzare queste informazioni per tracciare la traiettoria di una particella di prova in campo gravitazionale. Si fa distinzione tra particelle massive e non.

6.1 Particelle con massa diversa da zero

Partendo dal caso newtoniano, si hanno a disposizione i due integrali classici di momento angolare ed energia, rispettivamente

$$rv_\phi = a \quad (63)$$

$$E = mc^2 + \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\phi^2) - \frac{GMm}{r} \quad (64)$$

La presenza del fattore mc^2 viene inserita per comodità di notazione e per rendere meno complesso il passaggio al caso relativistico che verrà riportato in seguito. Sostituendo la (63) nella (64), dovendo v_r^2 essere necessariamente non negativa, si ottiene una condizione particolarmente importante;

$$\frac{E}{mc^2} \geq 1 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2 r^2} \quad (65)$$

La suddetta separa le zone dove il moto è possibile e dove non lo è. Quando $a \neq 0$, la curva ammette un solo minimo, che si riscontra nel punto $r = \frac{a^2}{GM}$: corrisponde alle orbite circolari quando forze centrifughe e attrazione gravitazionale sono in equilibrio. Come suggerisce la figura, la linea di separazione fra moto iperbolico ed ellittico (analizzati nel primo capitolo dell'elaborato) ha equazione $E = mc^2$, con moto iperbolico quando $E > mc^2$ e parabolico quando $E < mc^2$. Si tenga conto del fatto che non c'è una cattura gravitazionale quando $a \neq 0$; $E(r)$ agisce come un potenziale efficace, ragion per cui quando questi è positivo impedisce alla particella di prova di giungere all'origine. Nell'ipotesi di campo forte, con metrica $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dt^2$ è possibile

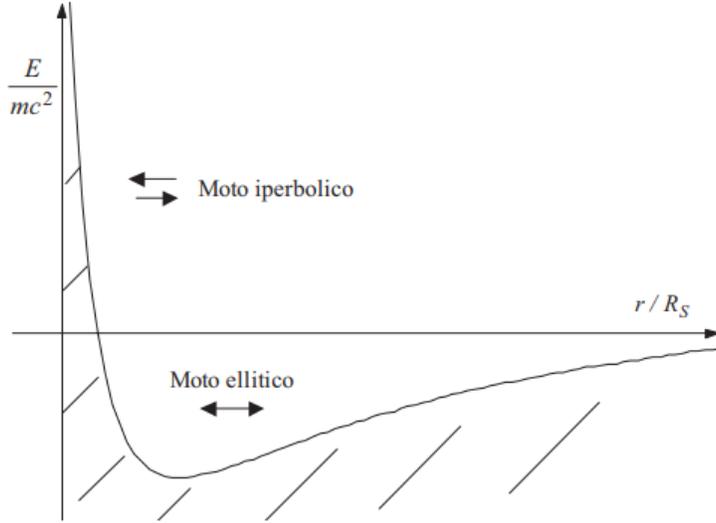


Figure 4: Possibili moti della particella soggetto al campo gravitazionale newtoniano

effettuare una sostituzione con $v = dl/d\tau$ e $d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}dx^0}}{c}$, si può scrivere l'elemento di linea in una più comoda notazione;

$$ds = \sqrt{g_{00}}dx^0 \sqrt{1-\beta^2} = cd\tau \sqrt{1-\beta^2}$$

A questo punto, avvalendosi delle note relazioni del tensore metrico e dell'elemento di linea,

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = ds^2 = c^2 d\tau^2 (1-\beta^2)$$

Da cui segue

$$1-\beta^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (66)$$

dove $dl = e^{\frac{\lambda}{2}} dr$ è l'elemento di distanza nella direzione radiale. Il moto per comodità di dimostrazione viene considerato piano, con $\theta = \pi/2$. Si riprenda la seconda delle (56), in quel caso l'energia rinvenuta era

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

la quale riduce la (66) alla forma

$$\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\right] \quad (67)$$

D'altro canto, valendo la conservazione del momento angolare, è verificato che $r^2\dot{\phi} = cost$ e, utilizzando la formula precedente, si ottiene

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \left(\frac{E}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} = a$$

Avendo una definizione univoca di $\frac{d\phi}{d\tau}$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2 = 1 - \left(\frac{E}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \left(1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right) \quad (68)$$

Ma dovendo necessariamente essere $\left(\frac{dl}{d\tau} \right)^2 \geq 0$, si giunge alla (65) con correzione relativistica, ossia

$$\left(\frac{E}{mc^2} \right) \geq \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \left(1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right) \quad (69)$$

che restituisce, appunto, la stessa per campi deboli e basse velocità. L'analisi di quest'ultima relazione porta con sé una serie di conseguenze; R_s può al massimo essere uguale ad r , ma non minore, e al secondo membro è presente una dipendenza da r^{-3} . Ne consegue che l'andamento di $\frac{E}{mc^2}$ in funzione di $\frac{R_s}{r}$ differisce da quello newtoniano. I punto di massimo e minimo sono ottenibili come soluzione dell'equazione

$$c^2 R_s r^2 - 2a^2 r + 3a^2 R_s = 0 \quad (70)$$

con soluzione

$$r = \frac{1}{c^2 R_s} \left[a^2 \pm \sqrt{a^4 - 3a^2 R_s^2 c^2} \right]$$

Una breve analisi dell'equazione (69) mostra che, in ordine, sono presenti un termine di gravità newtoniana, una forza centrifuga repulsiva e un termine attrattivo relativistico. È utile introdurre il parametro $\alpha = \frac{a}{c R_s}$ in maniera tale da distinguere tre casistiche in base alla risoluzione dell'equazione di secondo grado precedente.

- Per $\alpha < \sqrt{3}$, la (70) non ammette soluzioni reali, non sono presenti massimi o minimi nella funzione dell'energia, quindi non c'è alcuna barriera in grado di precludere il passaggio della particella nell'origine: non vi è differenza con il caso newtoniano con $a = 0$.
- Per $\alpha = \sqrt{3}$, la (70) ha due soluzioni coincidenti in $r = R_s$, che restituisce un flesso in $E = mc^2 \sqrt{\frac{8}{9}}$.
- Per $\alpha > \sqrt{3}$, la (70) ammette due soluzioni distinte che corrispondono ad un massimo ed un minimo:

$$r_{max} = \alpha^2 R_s \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\alpha^2}} \right]$$

$$r_{min} = \alpha^2 R_s \sqrt{1 + \frac{3}{\alpha^2}}$$

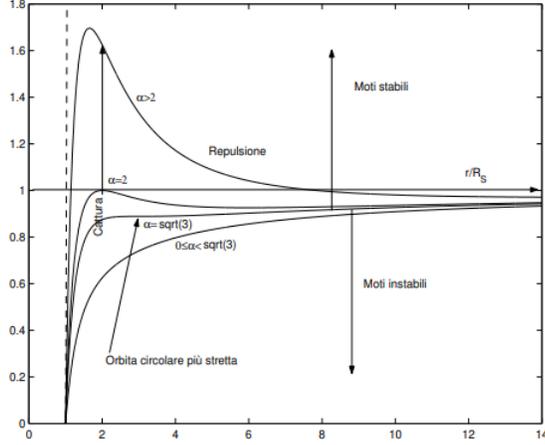


Figure 5: rappresentazione dei possibili moti di una particella con massa posta in campo gravitazionale nel caso relativistico

La presenza di r_{max} e r_{min} può essere spiegata come segue; le orbite circolari sono possibili nei punti in cui la (70) è verificata, ossia quando i due termini d'attrazione gravitazionale (newtoniano e relativistico, ossia il primo e terzo elemento dell'equazione) sono controbilanciati dalla forza centrifuga repulsiva. Questa condizione si manifesta esattamente nei due raggi sovracitati. Si tenga presente che r_{max} è una posizione d'instabilità, poichè, per piccoli valori di r , la forza attrattiva relativistica aumenta molto più velocemente degli altri due termini: se la particella è attratta dalla singolarità verso l'interno da r_{max} (ossia una posizione d'equilibrio), il terzo termine domina sugli altri due e, inevitabilmente, la particella viene trascinata verso l'interno in $r = 0$. Il raggio esterno presenta, invece, orbite circolari stabili e il comportamento delle non è molto differente dal solo caso newtoniano. Un caso particolare da riportare è quello per cui $a = 2R_s c$: con questa condizione, $r_{max} = 2R_s$, $E(r_{max}) = mc^2$. Delle tre casistiche analizzate prima, si ottengono moti stabili solo per $\alpha \geq \sqrt{3}$, orbite circolari per $r = r_{min}$, non chiuse per $r \neq r_{min}$, con conseguente moto di precessione per il perielio. Per $\alpha = \sqrt{3}$ si ottiene l'orbita circolare più stretta ($r = 3R_s$) e

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{c}{6R_s}$$

Inoltre

$$T_{prop} = \frac{2\pi}{d\phi/d\tau} = \frac{12\pi R_s}{c}, \quad T_\infty = \sqrt{\frac{3}{2}} T_{prop}, \quad v = \frac{c}{2} \quad (71)$$

Un rapido calcolo suggerisce che una particella che dall'infinito giunge in $R = 3R_s$ e su orbite circolari successive libera una quantità di energia pari a $mc^2(1 - \sqrt{8/9}) = 0.06mc^2$. Il risultato è di una notevole importanza, perchè equivale a dire che, per ogni valore di $E > E(r_{max})$, per ogni valore di a la particella viene attratta irrimediabilmente nella singolarità [19, 20]. Lo stesso vale per $E = mc^2$ quando $0 < \alpha \leq 2$, ma non per

$\alpha > 2$, dove si manifesta una repulsione. Convenzionalmente si utilizza una vera e propria sezione d'urto di Schwarzschild per cattura di particelle, per la quale $v_\infty \ll c$, $E \approx mc^2$, si manifesta la cattura per $\alpha \ll 2$, ossia

$$a = bv_\infty \ll 2R_s c, \sigma_{catt} = \pi b^2 = 4\pi R_s^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2$$

Due singolarità interagenti che presentano una sezione d'urto simile a quella rinvenuta sono detti "in coalescenza".

6.2 Particelle con massa nulla

Ci si riferisce in questa sezione a particelle massless che si muovono con velocità c e, quindi, che non hanno analogo newtoniano. Gli integrali del moto possono ugualmente essere utilizzati;

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow hv$$

ossia, riscrivendo le (61) e (62),

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} hv = E, hvr v_\phi = N$$

Dividendo membro a membro queste ultime, si ottiene la seguente

$$rv_\phi = \frac{N}{E} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = lc \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (72)$$

con l parametro d'impatto all'infinito. Poichè tuttavia le particelle in esame sono prive di massa, $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2$; ciò comporta, nella precedente equazione,

$$v_r^2 = c^2 \left[1 - \frac{l^2}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\right] \quad (73)$$

Dovendo necessariamente v_r essere non negativa affinché il moto sia possibile, si perviene nuovamente ad una condizione simile al caso precedente, quindi

$$l^2 \leq \frac{r^2}{1 - \frac{R_s}{r}} \quad (74)$$

Anche qui, il secondo membro agisce alla stregua di un potenziale; anche il fotone può essere attratto dalla o rimbalza all'infinito, a seconda di come l sia legato al fattore $\frac{3}{2}\sqrt{3}R_s$. La situazione particolare con $r = \frac{3}{2}R_s$ è uguale al caso con particelle massive. Un fenomeno peculiare è quello per cui il fotone emesso in r riesce ad allontanarsi fino all'infinito. Si può notare, dalla figura successiva, che se il fotone parte da $r < \frac{3}{2}R_s$, riesce a non essere risucchiato dalla singolarità solo per $l < \frac{3}{2}\sqrt{3}R_s$. Tuttavia già è stata presentata la condizione limite, che qui viene riportata

$$\left(\frac{v_r}{v_\phi}\right)^2 = \frac{1 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{1 - \frac{R_s}{r}} \quad (75)$$

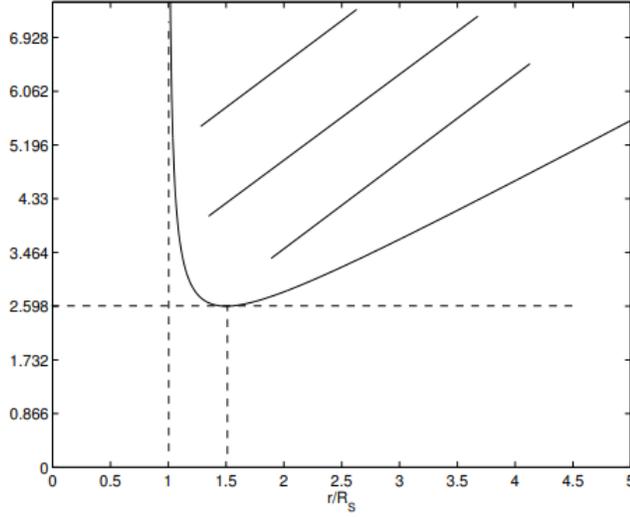


Figure 6: moti di una particella con massa nulla in campo gravitazionale

Avvalendosi della condizione della (74) e (75), ne consegue che

$$l^2 = \frac{r^2}{(1 - \frac{R_s}{r})(1 + \frac{v_r^2}{v_\phi^2})} \leq \frac{27}{4} R_s^2 \implies$$

$$\implies \left(\frac{v_r^2}{v_\phi^2}\right) = \frac{\frac{4}{27} \left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}}{1 - \frac{R_s}{r}} \quad (76)$$

Definito ψ l'angolo che la direzione del moto del fotone forma con la direzione radiale, cioè tale che $\tan \psi = \frac{v_\phi}{v_r}$, allora, riprendendo l'ultima equazione, segue

$$\psi \leq \psi_{max} = \tan^{-1} \left[\frac{1 - \frac{R_s}{r}}{\frac{4}{27} \left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

In particolare

$$\psi(r = R_s) = 0, \quad \psi\left(r = \frac{3}{2}R_s\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ora, si consideri il fotone emesso in posizione $r \geq \frac{3}{2}R_s$, esso si ritrova all'infinito se $v_r > 0$ (ossia si muove in direzione opposta alla sorgente della singolarità), ma se $v_r < 0$ e quindi si muove verso l'interno, deve sussistere la condizione

$$l \geq \frac{3}{2} \sqrt{3} R_s$$

che, come nel caso precedente, si traduce in

$$\left(\frac{v_r^2}{v_\phi^2}\right) \leq \frac{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}}{1 - \frac{R_s}{r}}$$

questa volta, tuttavia, si considera χ come l'angolo formato con la direzione radiale negativa, ossia

$$\chi \geq (\chi_{min}) = \tan^{-1} \left[\frac{1 - \frac{R_s}{r}}{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{R_s}\right)^2 - 1 + \frac{R_s}{r}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (78)$$

In conclusione, anche il moto di una particella a massa nulla presenta una fenomenologia differente in base alle varie zone in cui si muove.[20]

7 Conclusioni

Dal lavoro di tesi qui proposto è possibile trarre le seguenti conclusioni;

- L'utilizzo delle teorie newtoniane ha fatto sì che si raggiungessero enormi risultati nella determinazione di traiettorie di corpi celesti partendo da leggi empiriche come quelle di Keplero. Nell'elaborato in questione è stato delineato un percorso che utilizza le leggi e le orbite kepleriane come punto di partenza e le utilizza per dare una panoramica di meccanica celeste classica in merito alle orbite newtoniane.
- Si è determinato entro quali limiti valga la suddetta teoria e in che contesti sia possibile considerare orbite semirelativistiche:
- Il fenomeno della precessione del perielio di Mercurio è stata una prova determinante per la conferma della validità della teoria della Relativa Generale ed è stato analizzato in questa sede in virtù della sua importanza storica. Allo stesso modo, mostra come il fenomeno sia più prominente quanto più il pianeta si avvicina alla sorgente di campo gravitazionale.
- In seguito, la recente teoria della Relatività Generale ha fatto sì che vi fossero enormi avanzamenti nello studio del campo gravitazionale, avendo conseguenze particolarmente rilevanti per la teoria delle orbite; nell'elaborato in esame è stato fatto uso della metrica di Schwarzschild come mezzo per poter descrivere il moto planetario relativistico.
- Infine, sulla base di quest'ultimo, si può delineare una panoramica di come le particelle interagiscano con sorgenti di campo gravitazionale e che tipo di orbita seguano a velocità elevate.

Bibliografia

- [1] Isaac Newton, *Isaac Newton letter to Robert Hooke*, 1675, reperibile al seguente link: "<https://digitallibrary.hsp.org/index.php/Detail/objects/9792>
- [2] Karl Schwarzschild, *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, The Abraham Zelmanov Journal, Volume 1, pag 10-19, 2008.
- [3] Weisberg, J.M.; Taylor, J.H., *The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*, Binary Radio Pulsar, Volume 328, pag 25-31, 2016.
- [4] S. Capozziello, M. De Laurentis, F. de Paolis, G. Ingrosso, A. Nucita, *Gravitational waves from hyperbolic encounters*, Modern Physics Letters, Volume 23, pag 99-107, 2008.
- [5] Galuh Titi Fatimah, *Analysis of Kepler's Law to the movement of celestial bodies*, Journal of Physics, 2019.
- [6] Vladimir Igoravič Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Edizione Mir, Mosca, pag 36-44, 1979.
- [7] Smart WM. *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, 1977.
- [8] Roy AE. *Orbital Motion*, Terza edizione, Adam Hilger, 1988.
- [9] Salvatore Capozziello e Mariafelicia De Laurentis, *Gravitational waves from stellar encounters*, Astroparticle Physics Volume 30, seconda edizione, pag 105-112, 2008.
- [10] Mariafelicia De Laurentis, *The Newtonian and Relativistic Theory of Orbits and the Emission of Gravitational Waves*, The Open Astronomy Journal (pag 108-113), Volume 4, 2011.
- [11] J. V. Jose and E. J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, pag 209-212 e pag 276-277.
- [12] Tyler J. Lemmon and Antonio R. Mondragon, *Alternative derivation of the relativistic contribution to perihelic precession,*, American Journal of Physics, volume 77, 2009.
- [13] M. A. Abramowicz, A. M. Beloborodov, X. Chen, and I. V. Igumenshchev, *Special Relativity and pseudoNewtonian potential*, inedito, 1996.
- [14] Tyler J. Lemmon and Antonio R. Mondragon, *Kepler's Orbits and Special Relativity in Introductory Classical Mechanics*.
- [15] Helmut Kling, *The Precession of Mercury's Perihelion in View of the (Lorentz) Covariant Gravitational Field Theory*, Covariant Gravitational Field Theory, 2017.

- [16] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, pag 191-198, Edizione Addison-Wesley, San Francisco, 2003. pp. 191–204.
- [17] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [18] Christian Heinicke e Friedrich W. Hehl, *Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction*, pag 19-23, Internation Journal of Modern Physics, Volume 24, 2015.
- [19] Robert. M. Wald, *General Relativity*, pag 140-142, The University of Chicago, Prima Edizione, 1984.
- [20] Salvatore Capozziello e Maria Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, 2005, Napoli; Liguori Editore.