

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Teoria della diffusione in meccanica quantistica

Relatore:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Giuseppe Alifano
N85001146

Anno accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	1
2	Sezione d'urto	3
3	Diffusione elastica in meccanica quantistica	5
3.1	Forma asintotica degli stati stazionari	6
4	Metodo delle onde parziali	9
4.1	Calcolo della sezione d'urto nel modello di onde parziali	12
4.2	Calcolo degli sfasamenti	13
4.3	Potenziale Coulombiano	14
4.4	Potenziale Coulombiano modificato da potenziale a corto raggio	16
5	Metodo dell'approssimazione di Born	17
5.1	Serie di Born	18
5.2	Calcolo dell'approssimazione di Born al primo ordine	19
5.3	Validità dell'approssimazione di Born	21
5.4	Potenziale di Yukawa	23

Capitolo 1

Introduzione

La tesi in esame si prefigge di dare una trattazione adeguata della teoria della diffusione in meccanica quantistica, in particolare nei processi elastici dove le energie cinetiche delle reazioni sono molto più piccole del valore delle energie legate alle masse a riposo dei proiettili.

Fin dalla nascita della fisica moderna, lo strumento più efficace atto a studiare la natura della materia, degli atomi e delle particelle è stato l'analisi delle collisioni. Sperimentalmente, infatti, l'unico modo per individuare una particella è osservare come essa interagisce con l'apparato sperimentale nei processi collisionali, i quali danno vita al fenomeno della diffusione.

Con processo di diffusione si intende, infatti, un processo nel quale un fascio di particelle viene fatto incidere contro un bersaglio (fisso o mobile) e viene deflesso di un certo angolo θ rispetto alla direzione iniziale.

Un esempio molto comune di scattering della luce è dato dal colore blu del cielo: la luce (bianca) del sole incide sull'atmosfera terrestre la quale diffonde con più facilità le frequenze più alte (ovvero più vicine all'ultravioletto); di conseguenza, mentre la luce bianca ci arriva direttamente se guardiamo dritti nel sole, la luce blu diffusa ci sembra provenire da tutte le direzioni. I processi di diffusione possono essere divisi in:

- **elastico**, che può essere identificato tramite la relazione:

$$a+b \rightarrow a+b$$

dove a indica il proiettile e b il bersaglio. In questo tipo di reazione le particelle dello stato finale sono le stesse dello stato iniziale e quindi vi è solamente uno scambio di energia cinetica tra proiettile e bersaglio. Indicando con \mathbf{p}_i l'impulso della particella i -esima prima della collisione e con \mathbf{p}'_i l'impulso dopo la collisione si ottiene, dalla conservazione dell'impulso:

$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b \quad ; \quad \mathbf{p}_a - \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}'_b - \mathbf{p}_b = \mathbf{q} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{q} è l'impulso trasferito. Inoltre indicando con $p = |\mathbf{p}|$ e nelle ipotesi in cui $\mathbf{p}_b = 0$, l'energia cinetica di questo processo può essere scritta come :

$$\frac{p_a^2}{2m_a} + 0 = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{p_b'^2}{2m_b} = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{q^2}{2m_b} = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{p_a^2 + p_a'^2 - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}'_a}{2m_b} \quad (1.2)$$

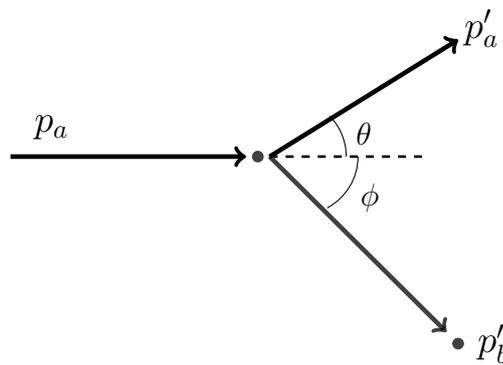
$$\frac{p_a^2}{2m_a} = \frac{p_a'^2}{2} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) - p_a' \frac{p_a}{m_b} \cos\theta + \frac{p_a^2}{2m_b} \quad (1.3)$$

per cui:

$$\frac{p_a'^2}{2} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) - p_a' \frac{p_a}{m_b} \cos\theta + \frac{p_a^2}{2} \left(\frac{1}{m_b} - \frac{1}{m_a} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Questa espressione dimostra come nei processi di diffusione elastica è possibile trovare una relazione univoca tra p_a, p_a' e θ .

Inoltre in processi di questo tipo l'energia cinetica totale è conservata.



Schema di un processo di collisione elastica

- **anaelastico**, che può essere identificato tramite le relazioni:

$$a+b \rightarrow a'+b' \quad ; \quad a+b \rightarrow c+d+e+\dots$$

In questo caso i prodotti delle reazioni sono differenti rispetto ai reagenti e l'energia cinetica totale non è conservata.

Nel discutere i processi di diffusione, in questo elaborato verranno evidenziati il comportamento e gli aspetti caratterizzanti dei processi elastici non relativistici dove si ha solamente una modifica della traiettoria o dell'energia cinetica delle singole particelle conservando, invece, l'energia cinetica totale.

Capitolo 2

Sezione d'urto

L'interazione tra particelle avviene il più delle volte attraverso una collisione, la cui possibilità di verificarsi è descritta da una certa probabilità. Quest'ultima dipende dal tipo di particelle che interagiscono, dal tipo di interazione e dall'apparato sperimentale. Nasce così l'esigenza di introdurre una grandezza, nota come *sezione d'urto*, che sia utile alla comprensione dell'interazione e proporzionale alla probabilità che si verifichi un fenomeno.

Si consideri allora un tipico esperimento di scattering. Si supponga di avere un fascio monoenergetico di particelle di uno stesso tipo che incide contro un bersaglio (costituito, ad esempio, da una lastra rettangolare). Le ipotesi che facciamo sono:

1. limitiamo la trattazione ai fenomeni di diffusione elastica;
2. le particelle del fascio non interagiscono tra di loro ed hanno tutte la stessa velocità;
3. le particelle coinvolte sono prive di spin;
4. il bersaglio è costituito da una serie di componenti discreti disposti in modo che la particella incidente possa interagire solo con uno di essi, evitando fenomeni di diffusione multipla;
5. nel bersaglio le distanze tra i centri diffusori sono tali da evitare una diffusione coerente.
6. supponiamo che l'interazione tra particella incidente e bersaglio sia espressa da un potenziale $V(\mathbf{r})$, dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è la distanza relativa tra le due particelle.

A questo punto, indicando con N_a il numero di particelle incidenti, allora definiamo:

$$n_a = \frac{N_a}{V} \quad (2.1)$$

il numero di particelle inviate per unità di volume. Essendo dotate della stessa velocità \mathbf{v} , il flusso è definito come:

$$\Phi_a = n_a |\mathbf{v}| = \frac{N_a}{V} v \quad (2.2)$$

ovvero il numero di particelle per unità di tempo e superficie che possiamo scrivere:

$$\Phi_a = \frac{1}{S} \frac{dN_a}{dt} \quad (2.3)$$

Sperimentalmente si osserva che il numero di particelle interagenti per unità di tempo $\frac{dN_a}{dt}$ è proporzionale non solo al flusso, ma anche al numero di particelle bersaglio N_b attraverso un fattore che viene indicato come sezione d'urto σ :

$$\frac{dN_a}{dt} = \sigma N_b \Phi_a \quad (2.4)$$

Dalla seguente espressione si deduce che la sezione d'urto ha le dimensioni di una superficie misurata attraverso il barn:

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} m^2 \quad (2.5)$$

In generale la sezione d'urto non è espressa in maniera indipendente, ma in funzione di parametri misurabili sperimentalmente. Preso allora un tipico esperimento di scattering, individuato l'angolo $d\Omega$ entro cui sono riemerse le particelle, è possibile definire la sezione d'urto differenziale come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{dt} \frac{1}{N_b \Phi_a} \quad (2.6)$$

dove $dN(\Omega)$ è il numero di particelle deflesse per unità di angolo solido. Questa espressione è utile per poter esprimere la sezione d'urto totale:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.7)$$

Un'altra espressione per la sezione d'urto differenziale può essere ricavata a partire dall'espressione del numero di particelle diffuse dn per unità di tempo:

$$dn = J_i d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.8)$$

Questo numero è quindi proporzionale al flusso incidente J_i e all'angolo solido $d\Omega$ mediante un fattore di proporzionalità che è proprio la sezione d'urto differenziale.

Dividendo ora dn per la superficie S_d del rivelatore otteniamo il flusso J_d di particelle diffuse per unità di tempo e area:

$$J_d = \frac{dn}{S_d} = \frac{J_i d\Omega}{r^2 d\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_i}{r^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.9)$$

Per cui la sezione d'urto differenziale :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_d r^2}{J_i} \quad (2.10)$$

Capitolo 3

Diffusione elastica in meccanica quantistica

Per studiare i fenomeni di diffusione elastica da potenziale in meccanica quantistica non relativistica supporremo che le particelle coinvolte abbiano spin nullo, come descritto precedentemente. In queste condizioni il problema consiste nel trovare la soluzione all'equazione di Schrodinger che descrive il moto di due particelle che interagiscono:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m_1} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.1)$$

Definiamo allora le seguenti variabili,rispettivamente massa totale e massa ridotta :

$$M = m_1 + m_2 \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.2)$$

coordinata del centro di massa e coordinata relativa:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (3.3)$$

impulso del centro di massa e relativo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_r = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.4)$$

In questo modo l'hamiltoniana del sistema:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

Si è quindi separato il moto del centro di massa del sistema e il moto relativo delle due particelle. La funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ può essere scritta come il prodotto di due funzioni $\phi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r})$: la prima, relativa al moto del centro di massa, indica il moto di una particella libera, mentre la seconda indica il moto relativo tra le due particelle.

Il problema quindi si riduce alla determinazione della soluzione dell'equazione di Schrodinger per il moto relativo:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

Bisogna pertanto determinare la forma della funzione d'onda e trovare gli autovalori dell'hamiltoniana. In particolare si andranno a studiare gli autostati con valori positivi dell'energia E , cioè quelli relativi a stati non legati, in quanto, se lo stato fosse legato, sarebbe nulla la probabilità di trovare le due particelle a distanza relativa infinita.

Abbiamo quindi diviso il nostro problema iniziale a sei gradi di libertà in due problemi separati da tre gradi di libertà (uno per il centro di massa e uno per il moto relativo) per poi giungere a studiare la sola particella con massa ridotta m che si muove in un potenziale centrale $V(r)$.

3.1 Forma asintotica degli stati stazionari

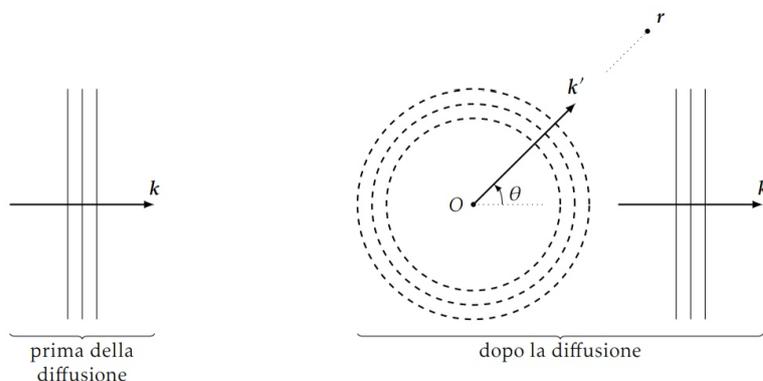
Siamo interessati in questa sezione alla ricerca di una forma asintotica per la funzione d'onda di diffusione, lontano dal potenziale di interazione $V(r)$, poichè nello studio di questi fenomeni i rivelatori vengono posti a grandi distanze dal centro diffusore.

Il processo di diffusione può essere descritto come:

1. il proiettile si muove come una particella libera nella direzione del bersaglio: non essendo soggetto ad alcun potenziale, la funzione d'onda sarà proporzionale al termine di onda piana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con \mathbf{k} vettore d'onda, ed energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$;
2. in prossimità del bersaglio la funzione d'onda subirà una modifica a causa dell'azione del potenziale;
3. dopo la diffusione si forma un'onda di tipo sferico che diffonde dal centro del potenziale.

Quest'ultima considerazione comporta che la funzione d'onda, in seguito alla diffusione, sarà data dalla sovrapposizione di una funzione d'onda trasmessa ($\propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) e una funzione d'onda di diffusione. Quindi:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k},a}(\mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{k},b}(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$



Poichè il processo è elastico, questo consiste nel cambiamento casuale della direzione della particella incidente, la cui energia va peraltro conservata. Di conseguenza il fascio diffuso non ha una direzione particolare, mentre conserva il modulo dell'impulso del fascio incidente. Quindi

possiamo rappresentarlo come un'onda sferica uscente dal centro diffusore ($\propto \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$).

Come si evince dalla figura, prima della diffusione c'è la sola onda piana incidente, dopo la diffusione ci sono l'onda sferica uscente e l'onda piana trasmessa. Il punto O rappresenta la posizione del centro diffusore, \mathbf{r} quella del rivelatore. Il vettore d'onda \mathbf{k}' è associato all'onda sferica e ha lo stesso modulo di \mathbf{k} , per la conservazione dell'energia.

Il comportamento asintotico della funzione d'onda $\psi_k(\mathbf{r})$ sarà del tipo:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = A \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (3.8)$$

dove A è la costante di normalizzazione ed f_k è un fattore dipendente dall'energia mediante il fattore k e dalle due coordinate θ e ϕ .

Tuttavia, in generale, un'onda piana non è una buona approssimazione se si vuole rappresentare un fascio di particelle incidenti dal momento che ha estensione infinita nello spazio e nel tempo. Una rappresentazione più realistica si ottiene considerando un pacchetto d'onda del tipo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \psi_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \quad (3.9)$$

dove $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ e dove la funzione $g(\mathbf{k})$ ha un picco intorno ad un punto $k = k_0$. Il pacchetto così costruito sarà soluzione dell'equazione di Schrodinger e quindi descrive l'evoluzione temporale della particella. Si noti che l'approssimazione del pacchetto d'onda con un'onda piana è valida solo se le dimensioni del pacchetto sono molto più grandi di quelle del diffusore o del raggio di azione del potenziale diffusore.

Avendo trovato un'espressione coerente per la funzione d'onda, ora ci proponiamo di calcolare l'espressione caratteristica della sezione d'urto.

Poichè la funzione $\psi(\mathbf{r})$ descrive l'ampiezza di probabilità di trovare la particella nella posizione \mathbf{r} , il flusso da considerare per il calcolo della sezione d'urto differenziale è il flusso di probabilità, cioè la probabilità per unità di tempo che la particella attraversi l'area unitaria.

Il flusso di probabilità è dato da:

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})] = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \quad (3.10)$$

Applicando questa espressione alla funzione d'onda asintotica otteniamo:

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi_{k,a}^* \nabla \psi_{k,a} + \psi_{k,b}^* \nabla \psi_{k,b} + \psi_{k,b}^* \nabla \psi_{k,a} + \psi_{k,a}^* \nabla \psi_{k,b}) \quad (3.11)$$

Inserendo l'espressione della funzione d'onda piana, ovvero il primo termine della funzione d'onda asintotica, otteniamo:

$$|\mathbf{J}_i(\mathbf{r})| = \frac{A^2 \hbar k}{m} \quad (3.12)$$

Il flusso sarà quindi dato dalla corrente per una costante di normalizzazione A.

Per quanto riguarda invece la parte diffusa, consideriamo le componenti del gradiente in coordinate polari sferiche:

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r} ; \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ; \nabla_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

Le componenti del gradiente in θ e ϕ hanno una dipendenza $\frac{1}{r}$ non presente nella componente radiale. Dato che stiamo considerando una situazione dove r è molto più grande delle dimensioni del bersaglio, le componenti angolari possono essere trascurate.

Quindi, note le componenti del flusso di diffusione:

$$(|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})|)_r = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\psi_{k,b}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{k,b} \right) = |A f_k(\theta, \phi)|^2 \frac{\hbar k}{m r^2} \quad (3.14)$$

$$(|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})|)_\theta = \frac{\hbar}{m r^3} \text{Re} \left(\frac{1}{i} f_k^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} f_k(\theta, \phi) \right) \quad (3.15)$$

$$(|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})|)_\phi = \frac{\hbar}{m r^3 \sin \theta} \text{Re} \left(\frac{1}{i} f_k^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} f_k(\theta, \phi) \right) \quad (3.16)$$

possiamo trascurare le componenti \mathbf{J}_θ e \mathbf{J}_ϕ ed assumere il flusso diffuso come $|\mathbf{J}_d| \approx (\mathbf{J}_d)_r$. Per cui la sezione d'urto differenziale per un processo di questo tipo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_d r^2}{J_i} = |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (3.17)$$

Nelle ipotesi in cui la forma asintotica della funzione d'onda rappresenti una buona approssimazione, allora la sezione d'urto differenziale è calcolabile mediante quest'ultima espressione; inoltre risulta importante nei problemi di diffusione perchè è una quantità misurabile sperimentalmente, essendo il modulo quadro dell'ampiezza di diffusione.

Nelle ipotesi in cui, invece, il fascio incidente è esprimibile in termini di pacchetto d'onda la situazione risulta essere differente. In questo caso il fascio (che nella pratica ha larghezza finita), dopo aver interagito con il bersaglio, porterà alla formazione di due pacchetti d'onda:

- un pacchetto di onde piane, come se non fosse presente il bersaglio;
- un pacchetto di onde diffuse dal bersaglio in tutte le direzioni.

Il pacchetto trasmesso sarà dato dall'interferenza distruttiva tra questi due pacchetti. A causa della sua larghezza limitata, a distanze infinite, avrà densità di probabilità non nulla solo nella direzione in avanti, per $\theta \sim 0$; nelle altre direzioni l'interferenza è assente. Negli esperimenti, perciò, il rivelatore atto a misurare il numero di particelle diffuse viene posto in direzioni diverse rispetto a $\theta \sim 0$ e non riceve quindi particelle trasmesse. La sezione d'urto in questo caso sarà nuovamente identificabile con la (3.17).

Nel caso si volesse aggiungere anche il contributo trasmesso, bisognerebbe porre il rivelatore in posizione $\theta = 0$ e considerare nella formula della sezione d'urto anche i contributi di interferenza. Questa interferenza distruttiva causa una diminuzione del flusso rispetto al pacchetto incidente: infatti, le particelle che sono diffuse in direzione $\theta = 0$ vengono rimosse dal fascio incidente, causando una diminuzione dell'ampiezza del fascio.

Consideriamo ora il caso in cui possiamo trascurare i termini di interferenza. In queste condizioni, la sezione d'urto differenziale dipenderà soltanto dall'ampiezza di diffusione, che ci proponiamo di calcolare utilizzando due metodi: il metodo delle onde parziali e l'approssimazione di Born.

Capitolo 4

Metodo delle onde parziali

Il primo metodo che analizziamo è particolarmente utile nel caso in cui il potenziale sia a simmetria sferica e quindi dipende solo dalla distanza relativa tra i due corpi: $V(\mathbf{r})=V(r)$. In aggiunta facciamo l'ipotesi che sia a corto raggio, ovvero imponiamo che il potenziale tenda asintoticamente a zero più velocemente di $1/r^2$.

L'equazione di Schrodinger stazionaria assume la forma:

$$(\nabla^2 + k^2 - U(r))\psi_k(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.1)$$

dove $k = \frac{2mE}{\hbar^2}$ e $U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$. L'hamiltoniana commuta con gli operatori di momento angolare \mathbf{L}^2 ed L_z ; è possibile allora scegliere una base comune di autofunzioni per questi tre operatori, rappresentabili nella forma $R_{kl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$, dove $R_{kl}(r)$ è una funzione puramente radiale che può essere posta nella forma $R_{kl}(r) = \frac{u_{kl}(r)}{r}$, con la condizione che $u_{kl}(0) = 0$ mentre $Y_l^m(\theta, \phi)$ è un'armonica sferica. Per cui la soluzione dell'equazione di Schrodinger, autostato dell'hamiltoniana con autovalore $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, sarà una combinazione lineare delle funzioni appena definite.

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_{klm}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \frac{u_{kl}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4.2)$$

Le funzioni ψ_{klm} prendono il nome di onde parziali e la loro combinazione è definita sviluppo di onde parziali. Si noti inoltre che la somma avviene solo su l ed m , con fissato valore di k , in quanto stiamo considerando gli stati stazionari dell'hamiltoniana di un determinato pacchetto d'onda. Introducendo l'operatore momento angolare, l'hamiltoniana può essere espressa in coordinate sferiche nel seguente modo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r) \quad (4.3)$$

e per la parte radiale :

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{kl}(r) = 0 \quad (4.4)$$

Sostituendo $R_{kl}(r) = u_{kl}/r$, troviamo che u_{kl} soddisfa un'equazione differenziale più semplice:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{kl}(r) = 0 \quad (4.5)$$

Ipotizziamo che nel nostro problema il vettore d'onda sia diretto come $\mathbf{k} = k\hat{z}$. La funzione d'onda sarà invariante per rotazioni intorno all'asse z , quindi non avremo dipendenza dall'angolo ϕ . Per annullare questa dipendenza della funzione $\psi_k(\mathbf{r})$ da ϕ dobbiamo considerare, nello sviluppo (4.2), solo i termini per cui $m = 0$, in quanto le armoniche sferiche dipendono da ϕ attraverso $e^{im\phi}$.

La soluzione dell'equazione (4.5), in assenza di potenziale ($V(r) = 0$), è la funzione di Bessel sferica $j_l(kr)$. Asintoticamente il potenziale è nullo, per l'ipotesi di corto raggio.

Quindi nella regione asintotica, la soluzione u_{kl} si comporta come la funzione di Bessel sferica, ma avrà uno sfasamento che ricorda la presenza di un potenziale, come vedremo in seguito. Partiamo dall'osservare che per un'onda piana, in assenza di potenziale, abbiamo il seguente sviluppo in onde parziali:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (4.6)$$

dove $P_l(\cos\theta)$ è il polinomio di Legendre di grado l .

Inoltre, poiché il potenziale è a rapida decrescenza, possiamo escludere dalla trattazione il potenziale di Coulomb, anche se è a simmetria sferica, in quanto tende a zero come $1/r$. Con questa ipotesi possiamo supporre che l'andamento asintotico della funzione d'onda di diffusione stazionaria, con fissato valore di k (quindi dell'energia), sia del tipo:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \sum_l (2l+1) i^l A_l R_{kl}(r) P_l(\cos\theta) \quad (4.7)$$

Rispetto al caso di potenziale nullo vediamo che, al posto delle funzioni di Bessel sferiche, abbiamo le funzioni R_{kl} e i coefficienti A_l da determinare.

Sotto l'ipotesi di un potenziale a corto raggio possiamo identificare tre regioni spaziali:

1. $r \approx 0$: nelle immediate vicinanze del bersaglio il potenziale non è trascurabile;
2. all'aumentare della distanza dal bersaglio il potenziale centrifugo $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ domina su $V(r)$;
3. $kr \gg 1$: in lontananza dal bersaglio il potenziale di interazione e quello centrifugo sono entrambi trascurabili rispetto a k^2 . Questa regione è detta zona di radiazione.

- In questa ultima regione l'equazione di Schrodinger radiale diventa:

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{kl} = -k^2 u_{kl} \quad (4.8)$$

con soluzione generale:

$$u_{kl} = D e^{ikr} + E e^{-ikr} \quad (4.9)$$

dove il primo termine è un'onda sferica uscente e il secondo un'onda sferica entrante, per cui possiamo porre $E = 0$ ed ottenere $R_{kl} = e^{ikr}/r$.

- Nella regione intermedia abbiamo l'azione del termine del momento angolare, per cui:

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{kl} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_{kl} = -k^2 u_{kl} \quad (4.10)$$

con soluzione data dalle funzioni di Bessel sferiche j_l e quelle di Neumann sferiche (o funzioni di Bessel sferiche di seconda specie) n_l :

$$u_{kl} = B r j_l + C r n_l \implies R_{kl} = B j_l + C n_l \quad (4.11)$$

Nell'origine le funzioni di Bessel convergono mentre quelle di Neumann divergono ed hanno il seguente andamento:

$$j_l \underset{kr \rightarrow 0}{\sim} \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad (4.12)$$

$$j_l \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{kr} \sin(kr - l\frac{\pi}{2}) \quad (4.13)$$

$$n_l \underset{kr \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2l-1)!!}{(kr)^{l+1}} \quad (4.14)$$

$$n_l \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{kr} \cos(kr - l\frac{\pi}{2}) \quad (4.15)$$

Per trovare un'espressione corretta per R_{kl} dobbiamo normalizzarla; poniamo $B = \cos \delta_l$ e $C = -\sin \delta_l$ in modo che $B^2 + C^2 = 1$:

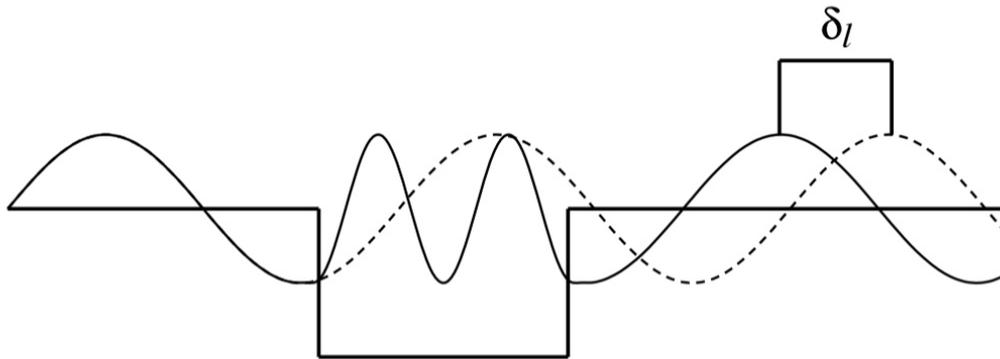
$$R_{kl} = j_l(kr) \cos \delta_l - n_l(kr) \sin \delta_l \quad (4.16)$$

Utilizzando questa proprietà e le espressioni delle funzioni precedenti si ottiene il comportamento asintotico di R_{kl} nella zona di radiazione:

$$R_{kl} \sim \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} \quad (4.17)$$

per $kr \rightarrow \infty$.

Se non ci fosse potenziale di interazione, l'espressione (4.15) sarebbe valida fino a $r = 0$ e non solo nella regione intermedia. Abbiamo visto che le funzioni di Neumann sferiche divergono nell'origine come $1/r^{l+1}$, ma sappiamo che la parte radiale della funzione d'onda non può ammettere questo comportamento, dunque deve valere $\delta_l = 0$ (valido per ogni l ed r) in assenza di potenziale, per cui si avrebbe $R_{kl}(r) = j_{kl}(r)$. A questo punto confrontiamo l'espressione (4.16) con la (4.12). Quello che si vede è che la presenza di un potenziale sferico a corto raggio, a grandi distanze r dal centro diffusore, ha l'effetto di introdurre uno sfasamento δ_l in ciascuna funzione radiale asintotica R_{kl} dello sviluppo delle onde parziali e quindi in ogni onda parziale uscente.



Nella seguente figura è rappresentata una schematizzazione di un processo di diffusione da potenziale. La linea tratteggiata rappresenta la soluzione senza potenziale, mentre la linea continua quella in presenza di potenziale. Asintoticamente le due soluzioni differiscono per uno sfasamento δ_l .

4.1 Calcolo della sezione d'urto nel modello di onde parziali

Avendo trovato il comportamento asintotico delle funzioni d'onda radiali, in questo paragrafo ci proponiamo di calcolare la sezione d'urto nel modello di onde parziali. Poichè i potenziali sono sempre a corto raggio e inducono uno sfasamento nelle funzioni d'onda asintotiche, possiamo dimostrare che la sezione d'urto differenziale dipenderà proprio da questi sfasamenti e sarà esprimibile in funzione di essi.

Ricordando gli sviluppi in onde parziali (4.6) e (4.7), possiamo sostituirli nella forma asintotica (3.8) (con costante di normalizzazione $A = 1$) ottenendo:

$$\begin{aligned} \sum_l (2l+1) i^l A_l P_l(\cos \theta) \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr} &= \\ &= \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ed uguagliando i coefficienti di e^{-ikr} otteniamo:

$$\sum_l (2l+1) i^l A_l P_l(\cos \theta) e^{(il\pi/2 - i\delta_l)} = \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) e^{il\pi/2} \quad (4.19)$$

Poichè i polinomi di Legendre sono funzioni linearmente indipendenti e devono avere lo stesso grado per rendere valida quest'ultima equazione, allora dovrà valere che i coefficienti dei polinomi di Legendre con lo stesso grado dovranno essere uguali:

$$A_l = e^{i\delta_l} \quad (4.20)$$

A partire da questa relazione e uguagliando i coefficienti di e^{ikr} , troviamo l'ampiezza di diffusione:

$$\begin{aligned} f_k(\theta, \phi) = f_k(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) i^l e^{-il\pi/2} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) (\sin \delta_l) e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.21)$$

L'ampiezza di diffusione dipende solo da θ in accordo con il fatto che nelle diffusioni di campi sferici c'è simmetria cilindrica.

A questo punto non manca che calcolare la sezione d'urto differenziale definita come :

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2 \quad (4.22)$$

La sezione d'urto totale si ricava integrando su tutto l'angolo solido. Ricordando la proprietà di ortogonalità dei polinomi di Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos \theta) P_l'(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{l,l'} \quad (4.23)$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \int d\Omega \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |f_k(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \\
&= 2\pi \frac{1}{k^2} \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) \sin\delta_l e^{-i\delta_l} \sin\delta_{l'} e^{i\delta_{l'}} \int_{-1}^1 P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d(\cos\theta) = \quad (4.24) \\
&= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l = \sum_l \sigma_l
\end{aligned}$$

dove σ_l è la componente l -esima della sezione d'urto.

Infine notiamo che ponendo $\theta = 0$ nella (4.21) e sapendo che $P_l(1) = 1$, abbiamo:

$$f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) (\sin\delta_l \cos\delta_l + i \sin^2 \delta_l) \quad (4.25)$$

da cui:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f_k(0)) \quad (4.26)$$

Quest'ultima espressione prende il nome di teorema ottico e ci dice che la sezione d'urto totale si determina a partire dall'ampiezza di diffusione nella direzione $\theta = 0$. In questa direzione sappiamo che vi sono sovrapposizione e interferenza tra il pacchetto d'onda incidente e quello diffuso elasticamente. L'interferenza è la responsabile della rimozione di flusso dal fascio di particelle incidenti; questa rimozione è appunto quantificata dalla sezione d'urto.

- Se il potenziale $V(r)$ fosse identicamente nullo, avremmo $R_{kl}(r) = j_l(kr)$ e dunque la funzione $R_{kl}(r)$ andrebbe a zero come $(kr)^l$ e diventa sempre più piccolo al crescere di l .
- Se il potenziale $V(r)$ è a corto raggio, con raggio uguale a r_0 , avrà un piccolo effetto sulla soluzione; per cui gli sfasamenti δ_l saranno piccoli se $kr_0 \ll l$ e in questo caso la serie (4.24) convergerà già dopo pochi termini. In alcuni casi già il termine $l = 0$ fornisce una buona stima della sezione d'urto e questo tipo di diffusione viene definita come *diffusione in onda s*.

La condizione per cui $kr_0 \ll l$ è vera per piccoli valori dell'energia della particella incidente. Questo risultato è coerente con il comportamento atteso poichè, nelle ipotesi di potenziale centrale e particella a bassa energia incidente, la simmetria sferica non viene perturbata in maniera significativa e nello sviluppo di onde parziali prevale il termine isotropico s.

4.2 Calcolo degli sfasamenti

Nelle ipotesi di potenziale a corto raggio è possibile trovare una formula che è in grado di fornire direttamente gli sfasamenti. Bisogna risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine (4.4) che restituirà due soluzioni linearmente indipendenti di cui solamente una non diverge nell'origine, come avviene per esempio per le funzioni di Bessel e Neumann. Per determinare gli sfasamenti imponiamo in $r = r_0$, con r_0 raggio del potenziale, la continuità della derivata logaritmica:

$$\gamma_{kl} = \frac{d \log R_{kl}}{dr} = \frac{1}{R_{kl}} \frac{dR_{kl}}{dr} \quad (4.27)$$

che è indipendente dalla normalizzazione della funzione radiale. Ricordando la (4.16), che è valida nella regione intermedia, otteniamo che γ_{kl} , valutata in $r = r_0$:

$$\gamma_{kl} = \frac{k(j'_l(kr_0) \cos \delta_l - n'_l(kr_0) \sin \delta_l)}{j_l(kr_0) \cos \delta_l - n_l(kr_0) \sin \delta_l} \quad (4.28)$$

dove $j'_l(kr_0)$ e $n'_l(kr_0)$ indicano le derivate calcolate nel punto $r = r_0$. Da questa espressione è possibile ricavare la tangente di δ_l :

$$\tan \delta_l = \frac{kj'_l(kr_0) - \gamma_{kl}j_l(kr_0)}{kn'_l(kr_0) - \gamma_{kl}n_l(kr_0)} \quad (4.29)$$

Per il calcolo degli sfasamenti è necessario definire le seguenti funzioni, dette funzioni di Hankel:

$$H_l^{(1)}(\alpha) = j_l(\alpha) + in_l(\alpha) \quad (4.30)$$

$$H_l^{(2)}(\alpha) = j_l(\alpha) - in_l(\alpha) \quad (4.31)$$

Nota la seguente relazione:

$$e^{2ix} = \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x} \quad (4.32)$$

si ricava:

$$e^{2i\delta_l} = -\frac{R_{kl}(r_0)kH_l'^{(2)} - R'_{kl}(r_0)kH_l'^{(2)}}{R_{kl}(r_0)kH_l'^{(1)} - R'_{kl}(r_0)kH_l'^{(1)}} = -\frac{W[R_{kl}(r), H_l^{(2)}(kr)]}{W[R_{kl}(r), H_l^{(1)}(kr)]} \quad (4.33)$$

Dove $W[.,.]$ indica il Wronskiano delle due funzioni, con derivate rispetto a r , da calcolare in $r = r_0$. Inoltre se il potenziale non è esattamente nullo per $r > r_0$ ma è comunque a corto raggio, si può comunque calcolare lo sfasamento a partire dalla (4.29) nel limite che $r_0 \rightarrow \infty$ ricordando che γ_{kl} dipende da r_0 .

4.3 Potenziale Coulombiano

L'ipotesi fatta per ottenere i risultati precedenti è quella di potenziale a corto raggio d'azione. In realtà nei processi di diffusione è sempre presente anche il potenziale Coulombiano. Trattiamo prima il caso di diffusione elastica da potenziale Coulombiano puro e poi il caso in cui sia presente anche un potenziale a corto raggio.

Nel caso in cui il potenziale sia solo Coulombiano, l'equazione (4.5) viene normalmente riscritta come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{kl}(r) = 0 \quad (4.34)$$

dove:

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v 4\pi\epsilon_0} \quad v = \frac{\hbar k}{m} \quad (4.35)$$

Le soluzioni di questa equazione differenziale sono particolari funzioni ipergeometriche dette funzioni Coulombiane sferiche e si dividono in:

1. soluzioni regolari nell'origine (che si indicano con $F_l(\gamma, kr)$) che corrispondono alla funzione di Bessel sferica nel limite $\gamma \rightarrow 0$.
2. soluzioni irregolari nell'origine (che si indicano con $G_l(\gamma, kr)$) che corrispondono alla funzione di Neumann sferica nel limite $\gamma \rightarrow 0$.

Le espressioni asintotiche di queste funzioni sono:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_l(\gamma, kr) = \sin \left[kr - \gamma \ln(2kr) - \frac{1}{2}\pi l + \delta'_l \right] \quad (4.36)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_l(\gamma, kr) = \cos \left[kr - \gamma \ln(2kr) - \frac{1}{2}\pi l + \delta'_l \right] \quad (4.37)$$

La forma asintotica di queste funzioni d'onda differisce da quelle precedenti soprattutto per il termine $\gamma \ln(2kr)$ che dipende dalle cariche dei due nuclei interagenti e per il termine δ'_l detto sfasamento Coulombiano e definito come :

$$\delta'_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\gamma) \quad (4.38)$$

dove ricordiamo la funzione Γ :

$$\Gamma = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{con } x > 0 \quad (4.39)$$

4.4 Potenziale Coulombiano modificato da potenziale a corto raggio

Analizziamo ora il caso più realistico in cui sia presente sia il potenziale coulombiano V_c che quello nucleare a corto raggio V' .

L'equazione differenziale si scriverà come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{kl}(r) = 0 \quad (4.40)$$

In questo caso si può ripetere il ragionamento fatto per il caso in cui il potenziale Coulombiano non era presente, sostituendo l'espressione della funzione asintotica piana (4.6) con la funzione Coulombiana (4.36). Si ottiene, in questo caso, l'ampiezza di diffusione totale espressa in questo modo:

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta) \quad (4.41)$$

ovvero come somma di un termine Coulombiano e di uno a corto raggio.

Per cui la sezione d'urto differenziale è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = |f_c(\theta) + f'(\theta)|^2 = |f_c(\theta)|^2 + 2\text{Re}f_c^*(\theta)f'(\theta) + |f'(\theta)|^2 \quad (4.42)$$

Il primo termine rappresenta la sezione d'urto per diffusione puramente Coulombiana :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_c = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4 \theta/2} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16T \pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (4.43)$$

con T energia cinetica della particella (o fascio) incidente. Quest'ultima espressione coincide perfettamente con la formula di Rutherford, coerentemente alle ipotesi fatte.

Capitolo 5

Metodo dell'approssimazione di Born

A differenza del modello a onde parziali, valido per piccoli valori dell'energia, il modello di Born è più utile nel caso di alte energie delle particelle incidenti. Partiamo dall'equazione di Schrodinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

Questa può essere riscritta come:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

in cui:

$$Q(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) \quad (5.3)$$

Dalla teoria delle funzioni si conosce la soluzione generale della precedente equazione differenziale e si ricava a partire dalla funzione di Green, soluzione dell'equazione:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (5.4)$$

La soluzione generale sarà allora:

$$\begin{aligned} \psi_k(\mathbf{r}) &= \psi_{0,k}(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) Q(\mathbf{r}_0) d^3 \mathbf{r}_0 = \\ &= \psi_{0,k}(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) V(\mathbf{r}_0) \psi_k(\mathbf{r}_0) d^3 \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove la funzione $\psi_{0,k}(\mathbf{r})$ è una soluzione particolare dell'equazione di Helmholtz omogenea ($-\nabla^2 f = \lambda^2 f$).

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_{0,k}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.6)$$

Quest'ultima equazione è un'equazione di Schrodinger stazionaria di particella libera, quindi $\psi_{0,k}(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$.

Inoltre a partire dall'equazione (5.4), si possono ricavare due tipi di soluzione: la funzione di Green uscente $G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)$ e quella entrante $G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)$, rispettivamente:

$$G_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = -\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (5.7)$$

Poichè ci aspettiamo un comportamento asintotico del tipo (3.8), si intuisce che la funzione d'onda che deve essere presa in considerazione risulta la funzione di Green uscente. Per cui, a partire dalla definizione di funzione d'onda asintotica e risolvendo l'equazione (5.2), avremo:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} V(\mathbf{r}_0)\psi_k(\mathbf{r}_0)d^3\mathbf{r}_0 \quad (5.8)$$

Questo tipo di equazione è definita come *equazione integrale di diffusione* o *equazione di Lippmann-Schwinger*. Essa corrisponde ad un'equazione di Schrodinger stazionaria in cui la condizione al contorno è data da $\psi_{0,k}(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, il quale descrive il comportamento della funzione d'onda in assenza di potenziale.

Come nei paragrafi precedenti, siamo interessati al comportamento della funzione d'onda in una regione spaziale in cui siamo a grandi distanze dal centro diffusore: in questo modo la funzione d'onda può assumere una forma semplificata attraverso delle approssimazioni determinate dalle serie di Born. Lo studio di questi comportamenti sarà esplicitato nei prossimi paragrafi.

5.1 Serie di Born

Partiamo con l'ipotizzare che il vettore d'onda del flusso diffuso sia $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}$ in quanto per la conservazione dell'energia ha lo stesso modulo del vettore d'onda incidente $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$. Facciamo inoltre l'ipotesi di potenziale a corto raggio e di voler determinare $\psi_k(\mathbf{r})$ a una distanza $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_0|$.

In questa zona possiamo usare le seguenti approssimazioni:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = r \left(1 - 2\frac{r_0}{r} \cos\alpha + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r - \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (5.9)$$

per cui:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{r_0}{r} \cos\alpha + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} \approx \frac{1}{r} \quad (5.10)$$

Troviamo, allora, una nuova espressione per la funzione di Green uscente:

$$G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \approx -\frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_0} \quad (5.11)$$

e quindi per la funzione d'onda:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0)\psi_k(\mathbf{r}_0)d^3\mathbf{r}_0 = A \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (5.12)$$

con:

$$f_k(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0)\psi_k(\mathbf{r}_0)d^3\mathbf{r}_0 = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{0,\mathbf{k}'} | V | \psi_{\mathbf{k}} \rangle \quad (5.13)$$

dove per semplicità A può essere posto uguale a 1 e $\psi_{0,\mathbf{k}'} = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$ è un autostato dell'hamiltoniana $H = -\hbar^2\nabla^2/2m$.

L'equazione di Lippmann-Schwinger può essere riscritta:

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{mG}{2\pi\hbar^2} V\psi = \int gV\psi \quad (5.14)$$

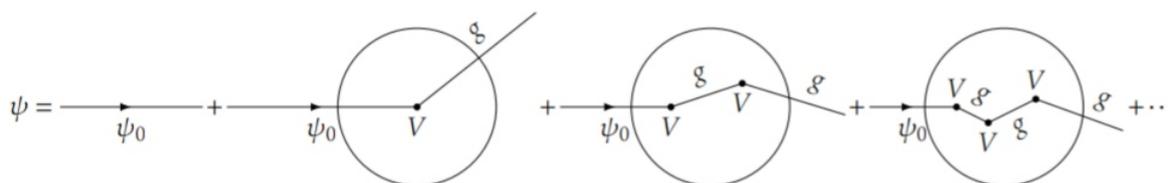
Sostituiamo il secondo membro sotto il segno di integrale:

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \int \int gVgV\psi \quad (5.15)$$

Possiamo continuare la procedura:

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \int \int gVgV\psi + \int \int \int gVgVgV\psi_0 + \dots \quad (5.16)$$

In questo modo otteniamo quella che viene definita come *serie di Born* che può essere schematizzata nel seguente modo:



Il termine di ordine zero della serie (ψ_0) rappresenta, come si vede dal disegno, la funzione d'onda incidente che non è influenzata dal potenziale mentre nei termini successivi compare un termine che dipende dalla funzione di Green e dal potenziale di interazione: in particolare modo possiamo interpretare:

- il termine di ordine 1 come l'onda piana ψ_0 che viene diffusa una volta e poi si propaga in maniera libera;
- il termine di ordine 2 come l'onda piana ψ_0 che subisce due processi di diffusione in sequenza per poi propagarsi liberamente, e così via.

Da questo tipo di comportamento deriva il nome della funzione di Green come "propagatore" perchè è un indicatore di come l'onda, interagendo con il potenziale, si propaga tra un'interazione e la successiva.

Per effettuare il calcolo della funzione d'onda dovremmo calcolare i termini della serie di Born. Nella maggior parte dei casi, quando il potenziale V è sufficientemente piccolo, fermarsi al primo ordine risulta comunque una buona approssimazione per il calcolo della funzione d'onda.

5.2 Calcolo dell'approssimazione di Born al primo ordine

Nelle ipotesi di V sufficientemente piccolo, la serie di Born può essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \psi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) V(\mathbf{r}_0) \psi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}_0 \\ &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

L'approssimazione al primo ordine può essere considerata valida quando il potenziale è tale da non modificare sostanzialmente la funzione d'onda della particella incidente in modo che risulti:

$$\psi_k(\mathbf{r}_0) \approx \psi_{0,k}(\mathbf{r}_0) \quad (5.18)$$

L'ampiezza di diffusione di Born sarà, al solito, il coefficiente del termine $\frac{e^{ikr}}{r}$. Indicando con $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ il momento trasferito, otteniamo:

$$f_k(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}_0 \quad (5.19)$$

Quest'espressione non è altro che la trasformata di Fourier del potenziale fatta rispetto all'impulso trasferito \mathbf{q} .

Quando ci troviamo a basse energie, quindi per bassi valori di k , il termine esponenziale diventa una costante e l'ampiezza di diffusione assume la forma:

$$f_k(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}_0 \quad (5.20)$$

Per semplificare ulteriormente la situazione fisica, possiamo supporre che il potenziale sia a simmetria sferica ($V(\mathbf{r}_0) = V(r_0)$) e scegliamo l'asse \mathbf{z}_0 come diretto lungo la direzione di \mathbf{q} .

In questo modo $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0 = qr_0 \cos \theta_0$ e di conseguenza:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^\infty r_0^2 dr_0 V(r_0) \int_{-1}^1 e^{-iqr_0 \cos \theta_0} d(\cos \theta_0) \\ &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty r_0 V(r_0) \sin(qr_0) dr_0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Per come è definito l'impulso \mathbf{q} , avremo che il suo modulo:

$$|\mathbf{q}| = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.22)$$

Per cui l'ampiezza di diffusione è caratterizzata dal solo parametro q , in quanto in esso compare sia la dipendenza energetica sia quella angolare.

Inoltre, ricordando la relazione dell'ampiezza di diffusione:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) (\sin \delta_l) e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta) \quad (5.23)$$

e sapendo che l'approssimazione al primo ordine di Born è possibile solo se il potenziale di interazione è sufficientemente piccolo da produrre degli sfasamenti e delle deflessioni trascurabili, possiamo approssimare l'ampiezza di diffusione a:

$$f_k(\theta) \approx \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (5.24)$$

dove δ_l sono le deflessioni prodotte dal potenziale.

Poichè l'ampiezza $f_k(\theta)$ ha assunto questa forma puramente reale, potrebbe sembrare che il teorema ottico in questo caso non viene rispettato: ciò implicherebbe una sezione d'urto nulla e

quindi nulla anche la probabilità che si verifichi la diffusione.

Tuttavia bisogna ricordare che l'approssimazione di Born al primo ordine coinvolge solamente il termine del potenziale lineare, mentre il teorema ottico coinvolge la sezione d'urto totale che è un'espressione quadratica dell'ampiezza di diffusione.

Per risolvere questo problema bisogna considerare le potenze di V che sono superiori ad 1 e che danno dei contributi complessi anche se il potenziale è reale.

Nel limite di basse energie (quindi piccoli valori di q e k) possiamo porre:

$$\frac{\sin(qr_0)}{q} \approx r_0 \quad (5.25)$$

e l'ampiezza di diffusione diventa:

$$f_k(\theta) = f_k = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r_0^2 V(r_0) dr_0 \quad (5.26)$$

La diffusione da un potenziale centrale nel limite di basse energie è approssimativamente isotropa e nello sviluppo delle onde parziali sono non trascurabili solo i primi termini, in accordo con le considerazioni già fatte.

Anche nell'approssimazione di Born vale la forma asintotica (3.8) della funzione d'onda; per cui la sezione d'urto differenziale sarà:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (5.27)$$

e la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f_k(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (5.28)$$

5.3 Validità dell'approssimazione di Born

In questo paragrafo determineremo in quali condizioni è possibile utilizzare l'approssimazione di Born. Per semplicità di calcolo assumiamo che il potenziale sia centrale $V(\mathbf{r}) = V(r)$.

Partiamo ora dalla serie di Born che possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \psi_k(\mathbf{r}) &= \psi_{0,k}(\mathbf{r}) + \psi_{1,k}(\mathbf{r}) + \psi_{2,k}(\mathbf{r}) + \psi_{3,k}(\mathbf{r}) + \dots \\ &= \psi_{0,k}(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}_0 G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) V(r_0) \psi_{0,k}(\mathbf{r}_0) \\ &\quad + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \int d^3\mathbf{r}_0 G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) V(r_0) \int d^3\mathbf{r}_1 G_+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1; k) V(r_1) \psi_{0,k}(\mathbf{r}_1) \\ &\quad + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^3 \int d^3\mathbf{r}_0 G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; k) V(r_0) \int d^3\mathbf{r}_1 G_+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1; k) V(r_1) \\ &\quad \cdot \int d^3\mathbf{r}_2 G_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k) V(r_2) \psi_{0,k}(\mathbf{r}_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.29)$$

Possiamo allora applicare la prima approssimazione di Born se $|\psi_{1,k}| \ll |\psi_{0,k}| = 1$.

Ci aspettiamo che l'onda di diffusione assuma valori più grandi nelle vicinanze del centro diffusore, cioè nell'intorno del valore per cui $r \approx 0$, dove è più importante il contributo di V all'integrale,

poichè lontano dall'origine è fuori dall'influenza del potenziale e si comporta come un'onda sferica. Pertanto valutiamo:

$$\begin{aligned}\psi_{1,k}(\mathbf{0}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ikr_0}}{r_0} V(r_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} d^3\mathbf{r}_0 \\ &= -\frac{2m}{k\hbar^2} \int_0^\infty e^{ikr_0} V(r_0) \sin(kr_0) d^3\mathbf{r}_0\end{aligned}\quad (5.30)$$

Se prendiamo la funzione $F(k) = e^{ikr_0} \sin(kr_0)/k$ possiamo fare alcune considerazioni:

1. il suo modulo è $r_0|\sin(kr_0)/kr_0|$ e quindi ha l'andamento di $\sin x/x$, per cui abbiamo un massimo per $k = 0$.
2. risulta inoltre che $F(0) = \lim_{k \rightarrow 0} F(k) = r_0$.

A partire da queste due considerazioni troviamo la prima condizione per l'applicabilità della funzione di Born al primo ordine nel limite di basse energie (quindi valutando la (5.30) per $k=0$) e nelle ipotesi che $|\psi_{1,k}| \ll 1$. Per cui:

$$\bullet \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty |V(r_0)| r_0 dr_0 \ll 1 \quad (5.31)$$

A partire da questa espressione si capisce come, anche nel caso dell'approssimazione di Born, il potenziale deve essere a corto raggio d'azione, tale che $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 V(r) = 0$.

-In particolar modo, per basse energie, l'ampiezza di diffusione di Born è data dall'equazione (5.26) la quale implica, affinché l'integrale converga, che il potenziale deve tendere a zero ancora più rapidamente, ovvero $\lim_{r \rightarrow \infty} r^3 V(r) = 0$.

Un'altra caratteristica importante è che il potenziale $V(r)$ deve avere anche un comportamento tale da rendere l'integrale non divergente nell'origine. In particolare nell'origine potrebbe tendere eventualmente ad infinito ma solo con un ordine minore od uguale ad $\alpha =]0; 1[$.

Per esempio, l'approssimazione di Born non è applicabile ad alcuni potenziali che descrivono le interazioni tra atomi che hanno andamenti del tipo r^{-12} . Un altro esempio è il potenziale Coulombiano che causa una divergenza nell'origine come r^{-1} ma che non può essere preso in considerazione poichè non è un potenziale a corto raggio.

Un'altra condizione per l'approssimazione di Born al primo ordine può essere ricavata supponendo che il potenziale abbia un valore massimo V_0 e raggio d'azione che possiamo indicare con L . Quindi:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^L |V_0| r_0 dr_0 = \frac{|V_0 m L^2|}{\hbar^2} \ll 1 \quad (5.32)$$

per cui:

$$\bullet |V_0| \ll \frac{\hbar^2}{mL^2} \quad (5.33)$$

Il fatto che $|V_0|$ deve essere minore di questa quantità può essere spiegato attraverso il principio di indeterminazione di Heisenberg: secondo questo principio $\frac{\hbar^2}{mL^2}$ rappresenta l'ordine di grandezza dell'energia cinetica di una particella con massa m confinata in un volume di dimensione lineare L .

Quindi questa condizione equivale a dire che l'approssimazione di Born è valida solo se il potenziale attrattivo è sufficientemente debole da non creare uno stato legato per la particella relativa. -Ad alte energie, invece, abbiamo delle condizioni differenti. Infatti, per grandi valori di k , la quantità $F(k)$ diventa molto più piccola a causa del fattore $1/k$ e delle rapide oscillazioni del termine

$e^{ikr_0} \sin(kr_0) = (e^{2ikr_0} - 1)/2i$. Facciamo, allora, nuovamente l'ipotesi che il potenziale abbia un valore massimo V_0 e raggio L . In questo caso poniamo $kL \gg 1$ in modo che le oscillazioni diventino molto frequenti all'interno del raggio d'azione del potenziale e che quindi l'integrale diventi:

$$\int_0^L V(r_0) \frac{e^{2ikr_0}}{2i} dr_0 \approx \frac{V_0}{2i} \int_0^L e^{2ikr_0} dr_0 = V_0 \frac{1 - e^{2ikL}}{4k} \quad (5.34)$$

Per le ipotesi di alta energia questo integrale sarà circa nullo. Possiamo allora trovare la seguente condizione per il potenziale:

$$|\psi_{1,k}(\mathbf{0})| \approx \frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^L V_0 dr_0 \approx \frac{mLV_0}{\hbar^2 k} \ll 1 \quad (5.35)$$

da cui:

$$\bullet |V_0| \ll \frac{\hbar^2 k}{mL} = \frac{\hbar^2 k L}{mL^2} \quad (5.36)$$

Questa condizione nelle ipotesi che $kL \gg 1$ si mostra molto meno stringente della (5.33) e quindi se è possibile trattare il potenziale come una perturbazione nel caso di basse energie, allora il discorso vale anche ad alte energie, ma non è necessariamente vero il contrario.

Anche se non è semplice individuare una condizione precisa sotto la quale applicare l'approssimazione di Born al primo ordine, è facile intuire come questa risulti più conveniente nelle ipotesi di alta energia, a differenza del metodo delle onde parziali.

Bisogna però tener conto che la condizione di energia molto più grande del potenziale di interazione non è sempre l'unico fattore da tenere in considerazione nel caso in cui si scegliesse di operare tramite l'approssimazione di Born. Infatti, se il potenziale è comunque sufficientemente debole da verificare la condizione (5.36) ma ha raggio d'azione molto grande, la funzione d'onda rimarrà simile a un'onda piana nella regione di influenza del potenziale, ma acquisterà nello stesso tempo uno sfasamento molto grande, che non è compatibile con questa approssimazione.

5.4 Potenziale di Yukawa

Il potenziale $V(\mathbf{r})$ che compare all'interno del modello di approssimazione di Born è stato supposto a simmetria sferica, nella forma $V(\mathbf{r}) = V(r)$, ma ovviamente non può essere considerato un potenziale a natura coulombiana. Esso infatti ha un andamento che a zero, per grandi distanze, relativamente lento, dunque non sarebbe valida l'approssimazione di particella libera a grandi distanze dall'atomo bersaglio. Analiticamente, la qual cosa può essere osservata dal fatto che l'espressione di $f_k(\mathbf{q})$ non sia convergente:

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{q}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \int \int e^{iqr' \cos\theta} V(r') \sin\theta d\theta d\phi r'^2 dr' \\ &= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{iqr' \cos\theta} \\ &= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \frac{1}{iqr'} \left(e^{iqr'} - e^{-iqr'} \right) \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr' r' V(r') \frac{\sin(qr')}{q} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Scelto a questo punto $V(r')$ Coulombiano, nella forma K/r , l'integrale:

$$\int_0^{\infty} dr' \frac{\sin(qr')}{q} \quad (5.38)$$

sarebbe non convergente. Risulta quindi necessario introdurre un potenziale più rapido che verifichi la condizione di corto raggio già introdotta in precedenza.

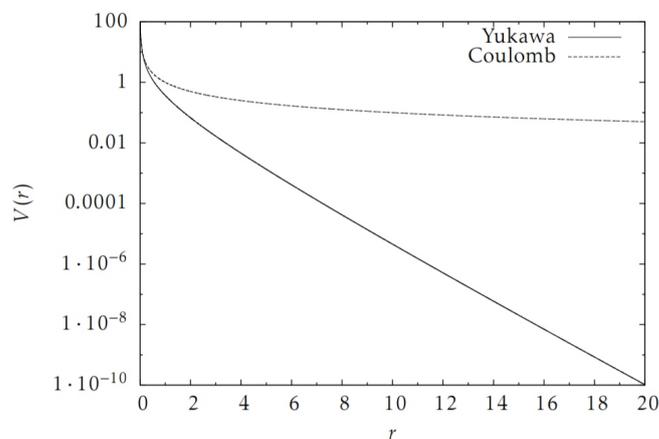
Correggiamo allora il potenziale di Coulomb con la seguente espressione:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r/\hbar}}{r} = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (5.39)$$

con μ massa della particella scambiata nell'interazione mentre $1/\alpha$ rappresenta il raggio d'azione. A partire dal potenziale Coulombiano si definisce quindi questo nuovo potenziale che presenta come correzione il termine $e^{-\alpha r}$; fisicamente questo rappresenta un fattore di "schermo" causato dagli elettroni che circondano il nucleo di carica Ze . Per grandi distanze, la particella bersaglio deve infatti "percepire" l'atomo come una carica neutra, con cui instaura dunque un'interazione particolarmente debole. Quando r invece è molto piccolo, $V(r)$ diventa molto grande, segno che la particella ha superato il "guscio" di elettroni e risente principalmente della carica Ze del nucleo. Da qui comprendiamo che il termine $1/\alpha$ debba essere dell'ordine del raggio atomico.

Questo potenziale è detto *potenziale di Yukawa* in quanto fu introdotto dal fisico giapponese Hideki Yukawa per descrivere le interazioni nucleari tra protoni e neutroni dovute allo scambio di una particella massiva, ovvero il pione.

Infatti, sebbene fossero stati ormai scoperti neutroni e protoni, non si riusciva a comprendere come essi potessero "convivere" nel nucleo. Il fisico Yukawa suppose l'esistenza di una nuova forza fondamentale, la forza nucleare forte, attraverso la quale potessero interagire i nucleoni. Questo tipo di forza non era stata osservata in alcun modo da un punto di vista sperimentale perciò, se esisteva ma non poteva essere rilevata, questo tipo di interazione doveva essere a corto raggio d'azione. In analogia con le interazioni elettromagnetiche, che avvengono attraverso lo scambio di fotoni, Yukawa suppose la forza nucleare forte dovesse essere mediata attraverso lo scambio di particelle tra i diversi nucleoni che furono appunto chiamate pioni.



Come si evince dalla figura, il potenziale di Yukawa va a zero rapidamente, mentre quello di Coulomb ha una coda più lunga.

Il comportamento del potenziale di Yukawa, nell'origine e all'infinito, soddisfa le ipotesi di applicabilità dell'approssimazione di Born viste in precedenza, per questo possiamo trovare l'espressione della sezione d'urto differenziale a partire dal modello di Born. Dall'equazione (5.21) abbiamo che l'ampiezza di diffusione di Born per il potenziale di Yukawa:

$$f_k(\theta) = -\frac{2mV_0}{q\hbar^2} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin(qr) dr = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \alpha^2} \quad (5.40)$$

dove sappiamo che $q = 2k \sin(\theta/2)$. Conosciuta l'ampiezza di diffusione, la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} \right)^2 \left(\frac{1}{4k^2 \sin^2(\theta/2) + \alpha^2} \right)^2 \quad (5.41)$$

Questa sezione d'urto permette di individuare delle caratteristiche di questo potenziale:

- V_0 compare nel quadrato e quindi non dipende dal fatto che esso sia attrattivo o repulsivo.
- Se $k/\alpha \ll 1$ la sezione d'urto è approssimativamente isotropa.
- se $k \rightarrow 0$ la sezione d'urto è indipendente dall'energia.
- All'aumentare di k la particella viene deflessa solo di angoli piccoli; la sezione d'urto diventa sempre più piccata intorno alla direzione $\theta = 0$ e si comporta come $1/q^4$ o $1/\theta^4$ per piccoli angoli.

La sezione d'urto totale sarà:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) d\Omega = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{4\pi}{4k^2 + \alpha^2} \quad (5.42)$$

che va a zero per $k \rightarrow \infty$, caratteristica generale dei potenziali di diffusione in cui l'interazione diventa trascurabile rispetto all'energia cinetica.

È interessante notare come a partire da questa sezione d'urto è possibile ricondurci alla sezione d'urto di Rutherford.

Infatti, nelle ipotesi in cui l'impulso trasferito sia molto grande possiamo trascurare il termine α facendolo tendere a zero ed ottenere:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mZ_1Z_2e^2}{4\hbar^2k^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 = \frac{(Z_1Z_2e^2)^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (5.43)$$

dove $V_0 = Z_1Z_2e^2$. Questa è proprio la sezione d'urto di Rutherford.

Nel calcolo della sezione d'urto totale si avrebbe un valore tendente all'infinito a causa del termine $\sin^{-4}(\theta/2)$. Ciò è dovuto al fatto che il potenziale Coulombiano non è a corto raggio. Nel caso infatti in cui α sia trascurabile, il potenziale V si riconduce al potenziale coulombiano K/r : questo è appunto il caso che si verifica per impulsi trasferiti molto grandi, e cioè per particelle con alta energia cinetica che superano la barriera di elettroni interagendo soltanto con il nucleo carico.

Conclusioni

Una delle procedure più utili per ottenere informazioni sulla struttura e sulla dinamica di un sistema fisico è quella di sollecitarlo con una sonda esterna, ad esempio un fascio di particelle che incidono sul bersaglio costituito dal sistema in esame. La rivelazione delle particelle, diffuse nelle diverse direzioni dopo aver interagito con il sistema sotto studio, ne definisce la risposta.

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato gli aspetti fondamentali delle interazioni elastiche e le leggi fondamentali con le quali un fascio di particelle viene diffuso. È stato quindi delineato un percorso che utilizza le regole fondamentali di un processo d'urto come punto di partenza per dare una panoramica generale alla teoria della diffusione in meccanica quantistica nel caso di processi elastici supponendo il sistema totale chiuso e non soggetto ad alcuna forza esterna ad esso; tuttavia, sappiamo che nella pratica, proprio a causa di interazioni dovute alla non perfetta indipendenza del sistema, nessun urto è mai totalmente elastico.

Il punto di partenza della teoria è stato, quindi, l'interazione di due particelle puntiformi nello spazio. Siamo poi passati dalla teoria a due corpi a quella ad un corpo considerando il solo moto relativo in modo da ottenere dall'equazione di Schrodinger l'espressione per la funzione d'onda della particella fittizia limitandoci agli stati ad energia totale positiva (stati di scattering), con condizioni al contorno di onde piane entranti ed onde sferiche uscenti.

Negli ultimi due capitoli, è stata calcolata la forma assunta dalla funzione d'onda in base a due modelli differenti, rispettando sempre la condizione di asintoticità: il modello delle onde parziali e il modello di Born, verificando come il primo modello si predilige per basse energie, mentre il secondo nel caso di alte energie purchè il raggio d'azione del potenziale non sia sufficientemente grande da creare grossi sfasamenti alla funzione d'onda.

Si sono trovate quindi le espressioni per l'ampiezza di diffusione per i due modelli e le rispettive sezioni d'urto esplicitandole in funzioni degli sfasamenti per il primo modello, mentre in funzione del potenziale di Yukawa per il secondo.

Bibliografia

1. A. Messiah, *Quantum Mechanics* , Amsterdam (1961).
2. C.Cohen-Tannoudji,Bernard Diu, Frank Laloë, *Quantum Mechanics* ,John Wiley and Sons, New York (1977).
3. Griffiths, David J., *Introduction to quantum mechanics*, 2^a ed. Pearson Prentice Hall (2004).
4. M. Napolitano. Elementi di fisica nucleare e subnucleare (2013).