Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

Diagrammi di Penrose

Relatori:
Prof. Fedele Lizzi
Dott. Flavio Mercati

Candidato:
Paolo Di Meo
MatricolaN85001028

A.A. 2019/2020

Indice

1 Introduzione **2**

2 1 Pillole di geometria differenziale e relatività generale **3**
2.1 Geometria differenziale . . . 3
2.1.1 Varietà differenziabili, atlanti e carte . . . 3
2.1.2 Spazio tangente e differenziale esterno . . . 5
2.1.3 Duale dello spazio tangente e 1-forme . . . 5
2.1.4 Immersione . . . 6
2.2 Relatività generale . . . 6
2.2.1 Principi della relatività generale . . . 6
2.2.2 Metrica . . . 6
2.2.3 Singolarità e orizzonte degli eventi . . . 7

3 2 Diagrammi di Penrose **8**
3.1 Metrica di Minkowski . . . 8
3.2 Spazio-tempo di De-Sitter . . . 11
3.3 Metrica di Schwarzschild . . . 13
3.3.1 Singolarità . . . 13
3.3.1.1 Coordiante entranti . . . 14
3.3.1.2 Coordinate uscenti . . . 16
3.3.1.3 Coordinate di Kruskal . . . 17
3.3.1.4 Diagramma di Penrose . . . 20
3.4 Metrica di Reissner-Nordstörm . . . 21
3.4.1 Singolarità . . . 21
3.4.2 Estensione massimale e diagramma di Penrose . . . 22
3.4.2.1 $e^2 < GM^2$ . . . 23
3.4.2.2 $e^2 > GM^2$ . . . 28
3.4.2.3 $e^2 = GM^2$ . . . 28
3.5 Metrica di Kerr . . . 29
3.5.1 Singolarità . . . 29
3.5.2 Estensione massimale . . . 30
3.5.3 Diagramma di Penrose . . . 31

4 Conclusioni **35**
4.1 Studio dei buchi neri nella fisica contemporanea . . . 36
4.2 Problemi aperti . . . 36
4.2.1 Schwarzschild . . . 36
4.2.2 Reissner-Nordstörm . . . 36
4.2.3 Kerr . . . 37

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi è centrata sul problema di individuare le connessioni causali tra punti dello spaziotempo in relatività generale, in particolare nel contesto delle soluzioni di buco nero. In particolare, studieremo i "diagrammi di Penrose" dello spaziotempo di Minkowski, di De Sitter, di Schwarzschild, di Reissner--Nordstrom e di Kerr, i quali descrivono, rispettivamente, lo spaziotempo vuoto, uno spaziotempo in espansione, un buco nero, un buco nero carico e un buco nero rotante. I diagrammi di Penrose[1] (o Penrose--Carter) sono uno strumento utilissimo per comprendere le relazioni causali tra eventi di uno spaziotempo. In un diagramma di Penrose si rappresentano due delle dimensioni dello spaziotempo su un piano, in cui l'asse verticale è di tipo tempo e quello orizzontale è di tipo spazio, e tutte le linee a 45 gradi rappresentano le traiettorie dei raggi di luce. Inoltre, lo spaziotempo viene compattificato in modo che gli eventuali bordi all'infinito vengono portati in una regione finita del piano, rappresentata da un punto nel caso di un bordo di tipo spazio, da linee a 45 gradi nel caso di un bordo di tipo-luce, e da linee nel caso di bordi coincidenti con singolarità. Questa compattificazione è possibile perché la struttura causale, ovvero i coni luce dello spaziotempo, è invariante sotto trasformazioni conformi della metrica (trasformazioni in cui tutte le componenti del tensore metrico vengono moltiplicate per un fattore comune, che può essere diverso di punto in punto). In questa maniera, una metrica su una varietà non compatta (come per esempio lo spaziotempo di Minkowski o di Schwarzschild) può essere trasformata in una metrica su una varietà compatta (come una regione finita del piano). Le due metriche non sono identiche, ma condividono la stessa struttura causale, e sono per questo equivalenti per quanto riguarda la classificazione dei vettori in tipo tempo, spazio e luce. In questa maniera possiamo formare una "mappa" dello spaziotempo in una regione compatta, che ci permette di stabilire quali coppie di punti sono connesse causalmente e si possono scambiare informazioni. Questo permette, per esempio, di identificare gli orizzonti degli eventi, ovvero quelle regioni dello spaziotempo da cui non c'è più ritorno, nel senso che la fisica proibisce agli osservatori di entrare in quelle regioni e poi tornare al di fuori di esse per riportare le proprie osservazioni. Ciò è di grande importanza per la comprensione teorica della relatività generale, perché la presenza di orizzonti è intimamente connessa con la struttura logica della teoria e pone problemi epistemologici importanti, in relazione col principio di causalità e la teoria dell'informazione.

La struttura della tesi è la seguente: nel primo capitolo discuteremo alcuni prerequisiti di geometria differenziale e basi di relatività generale, solo quelli strettamente necessari a capire il resto. Il Capitolo 2 contiene il nucleo principale della tesi: la derivazione dei diagrammi di Penrose degli spazi di Minkowski (spaziotempo piatto), De Sitter (spaziotempo curvo omogeneo), Schwarzschild (buco nero non rotante scarico), Reissner--Nordstrom (buco nero carico) e di Kerr (buco nero rotante). Infine il Capitolo 3 contiene le conclusioni, e delle prospettive sulle linee di ricerca attualmente aperte nella fisica teorica dei buchi neri.

[1] {Penrose, Roger (15 January 1963). "Asymptotic properties of fields and space-times". Physical Review Letters. 10 (2).}

Capitolo 2

1 Pillole di geometria differenziale e relatività generale

2.1 Geometria differenziale

La geometria differenziale è uno strumento matematico fondamentale per lo studio della relatività generale. Le nozioni spiegate brevemente in questo capitolo risulteranno centrali nella formulazione e nell'analisi dei diagrammi di Penrose.

L'idea fondante della geometria differenziale è quella di individuare la posizione di un punto in uno spazio topologico utilizzando delle coordinate analoghe a quelle della geometria analitica, ma definite in generale solo in un intorno del punto.

2.1.1 Varietà differenziabili, atlanti e carte

L'oggetto principale della geometria differenziale è la varietà differenziabile, per dare una definizione rigorosa di varietà differenziabile è necessario prima definire una varietà topologica.

Una varietà topologica è uno spazio topologico, di Hausdorff, a base numerabile e localmente euclideo.

Con il termine spazio topologico si definisce una coppia formata da un insieme χ e una collezione di sottinsiemi τ di χ aperti che soddisfano le seguenti condizioni:

- τ contiene sia χche l'insieme nullo
- L' unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto
- L'intersezione di una qualunque famiglia finita di aperti è un aperto

Uno spazio topologico si dice di Hausdorff se presi (p, q) due punti distinti dello spazio, esistono sempre due aperti U,V disgiunti, tali che

$$p \in U \qquad q \in V$$

A base numerabile significa che esiste una base della topologia finita o al più infinita numerabile.

Una base della topologia è una collezione $\mathbb{A}$ di aperti dello spazio topologico tale che ogni aperto di χ è unione di una collezione di aperti di $\mathbb{A}$.

Infine uno spazio topologico si dice localmente euclideo se per ogni punto p dello spazio esiste un intorno U di p omeomorfo ad un aperto di uno spazio Eclideo.

Un omeomorfismo è un'applicazionetra due spazi topologici continua,biunivoca e con inversa continua. Se esiste un diffeomorfismo tra due due spazi topologici, questi si dicono omeomorfi.

Per capire quando ua varietà topologica è anche differenziabile, è necessario studiare le proprietà degli omeomorfismi che vanno dalla varietà allo spazio euclideo.

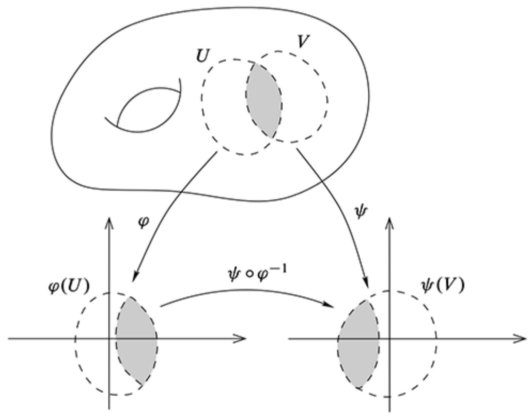

Figura 2.1: Rappresentazione locale di due carte con intersezione dei domini non nulla e funzione di cambio carta

Sia M uno spazio topologico di dimensione n, una n-carta (U, φ) è un omeomorfismo da un aperto Udi M ad un aperto $\hat{U} = \hat{\varphi}(U)$ di $\mathbb{R}^n$.

$$\varphi : U \to \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$p \to \varphi(p) = \left(x^1(p), ..., x^n(p)\right)$$

Le funzioni $x^i(p)$ prendono il nome di coordinate locali del punto.

È ora possibile rivedere la definizione di spazio topologico localmente euclideo e osservare che uno spazio topologico si dice localmente euclideo se può essere ricoperto da domini di n-carte.

A questo punto, $p \in M$ e due carte (U, φ) e (V, ψ) tali che $p \in U \cap V$.

Due carte si dicono compatibili se

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

è di classe C^∞con inversa C^∞. Un'applicazione che soddisfa queste proprietà prende il nome di diffeomorfismo.

Un n-atlante su uno spazio topologico M è una famiglia $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di n-carte a due a due compatibili i cui domini ricoprono M.

Su una varietà è possibile definire più atlanti diversi tra loro, quando questi sono compatibili tra loro, ossia tutte le loro carte sono compatibili a due a due, essi formano una classe di equivalenza, che prende il nome di struttura differenziabile.

Una varietà topologica si dice differenziabile se è dotata di una struttura differenziabile.

Prese due varietà differenziabili M ed N, due sottinsiemi aperti $U \subseteq M$ e $V \subseteq N$ ed una funzione F:

$$F : V \to W$$

Questa si dice differenziabile in $p \in V$ se esiste una carta (U, φ) in p e una carta (V, ψ) su N tale che $F(U) \subseteq V$ e

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

è una funzione C^∞in un intorno di $\varphi(p)$.

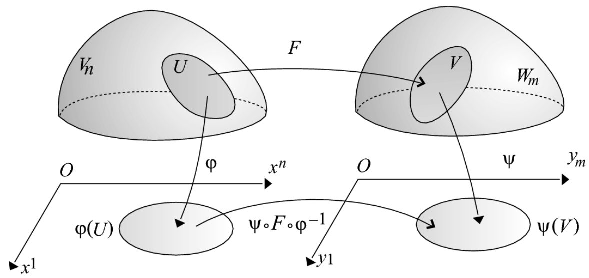

Figura 2.2: Applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili con relativa rappresentazione locale

Siano M ed N due varietà differenziabili. Un diffeomorfismo $F : M \to N$ è un'applicazione differenziabile biunivoca, con inversa differenziabile. Se esiste un diffeomorfismo tra due varietà differenziabili queste si dicono diffeomorfe:

$$M \backsimeq N$$

È inoltre possibile dimostrare che due varietà diffeomorfe non vuote hanno la stessa dimensione.

2.1.2 Spazio tangente e differenziale esterno

Sia M una varietà differenziabile e p un punto di M. Una derivazione in p è un'applicazione lineare X:$C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$X(f \cdot g) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

L'insieme delle derivazioni in p è indicato con T_pM e prende il nome di spazio tangente ad M in p. Gli elementi di T_pM si chiamano vettori tangenti, mentre p è il punto d'applicazione.

È inoltre possibile dimostrare che

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

ha una struttura di varietà differenziabile, ed è detta varietà dei vettori tangenti.

Sia $\pi : TM \to M$ un'applicazione differenziabile che associa al vettore dello spazio tangente il suo punto di applicazione. Si definisce sezione locale lisca di π un'applicazione differenziabile $\sigma : U \to TM$, con $U \subseteq M$.

Sia $F : M \to N$ un'applicazione differenziabile, si definisce differenziale esterno di F in p dF_p l'applicazione:

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$
$$X \to dF_pX = X \circ f \circ F$$

con $f \in C^\infty(N)$.

2.1.3 Duale dello spazio tangente e 1-forme

Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, è possibile definire il duale di V come l'insieme delle applicazioni lineari $V \to \mathbb{K}$

$$V^* = LIN(V, \mathbb{K})$$

Presa una varieta M e il suo spazio tangente TM, è possibile definire il duale dello spazio tangete:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M \tag{2.1}$$

Si definiscono 1-forme differenziali le sezioni lisce di T^*M.

2.1.4 Immersione

Sia $F : M \to N$ un'applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili di dimensioni rispettivamente m ed n e $p \in M$, il rango di F in p è il rango dell'applicazione lineare dF_p, ossia il rango della matrice jacobiana di una qualsiasi rappresentazione locale di F in p.

L'applicazione differenziabile F è detta immersione se dF_pè iniettiva, ossia ha rango m, $\forall p \in M$.

2.2 Relatività generale

2.2.1 Principi della relatività generale

Il primo principio necessario per sviluppare una teoria della relatività generale ci permette di descrivere lo spazio-tempo come un oggetto matematico. Nello specifico lo spazio tempo è una varietà differenziabile pseudo-Riemanniana dotata di una metrica g. Con il termine pseudoriemanniana si intende una varietà la cui metrica presenta una segnatura Lorentziana, ovvero con un autovlaore di segno opposto agli altri 3. I punti di questa varietà prendono il nome di eventi.

Il secondo principio discende direttamente dalla definizione di varietà differenziabile. Come detto in precedenza una varietà differenziabile risulta localmente euclidea, ossia è sempre possibile per un punto definire un intorno localmente piatto.Nel caso di una varietà pseudo-riemaniana, essa sarà localmente *Minkowskiana.* Ciò significa che, in termini di tensore metrico, è sempre possibile nell'intorno di un punto p definire un sistema di coordinate ξ^α con origine in p in cui è possibile approssimare la metrica $g_{\mu\nu}$ come:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left[(\xi^\alpha)^2\right] \tag{2.2}$$

Dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico nello spazio di Minkowski.

Infine è necessario studiare come si comportano degli oggetti fisici immersi nello spazio-tempo. Un osservatore in caduta libera soggetto unicamente alla forza peso, risulterebbe completamente equivalente ad un osservatore in moto libero, ossia non soggetto ad alcuna forza. In altre parole, un osservatore soggetto all'effetto di un campo gravitazionale non potrebbe dimostrare in alcun modo, nel proprio sistema di riferimento, di essere soggetto all'azione della gravità o di essere in un sistema totalmente isolato.

Ciò è spiegato nel principio di equivalenza, che nella sua formulazione forte afferma che in un campo gravitazionale, nell'intorno di ogni punto è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento dove gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli, quindi la fisica locale è indistinguibile da quella predetta dalla relatività speciale in un sistema di riferimento inerziale.

2.2.2 Metrica

Una metrica dello spazio tempo è una soluzione dell'equazione di campo di Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

Dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, che incapsula le informazioni sulla curvatura dello spazio-tempo e R è lo scalare di Ricci $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$.

L'equazione di Einstein è un'equazione differenziale alle derivate parziali, non lineare e del secondo ordine. Essendo non lineare non è possibile applicare i familiari teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali lineari.

Risulta perciò utile semplificare le equazioni sfruttando le simmetria del sistema fisico, che a volte permettono di trovare delle soluzioni esatte solo per spazi con molte simmetrie, come quelli analizzati in seguito.

La natura Lorentziana del tensore metrico fa sì che, esattamente come in relatività speciale, i vettori tangenti allo spazio tempo si possano dividere in vettori di tipo tempo (quando la loro norma $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu}$

è negativa, secondo la convenzione da noi scelta in questa tesi), di tipo spazio (norma positiva) e di tipo luce o nulli (norma nulla).

2.2.3 Singolarità e orizzonte degli eventi

Un orizzonte degli eventi è una ipersuperficie dello spazio tempo che separa gli eventi che non possono influenzare causalmente l'osservatore.

In generale presi due eventi p e q di uno spazio-tempo M, diremo che p precede causalmente q se esiste una curva di tipo tempo o di tipo luce diretta verso il futuro tale che $p \prec q$. Discorso analogo si può fare per una curva non di tipo spazio diretta verso il passato.

Preso un punto p, definisco il passato causale di p, $J^{-}(p)$ come l'insieme dei punti q di M tali che q precede causalmente p:

$$J^{-}(p) = \{q \in M : q \prec p\} \tag{2.4}$$

In uno spaziotempo asintoticamente piatto, l'orizzonte degli eventi può essere visto come la frontiera di $J^{-}(I^{+})$ dove I^{+}rappresenta l'infinito futuro nullo. Così facendo abbiamo dato una definizione matematica della classe di osservatori che ci interessa, ossia quelli che hanno la possibilità di mandare informazioni all'infinito.

Si immagini di prendere una varietà a simmetria sferica e un'ipersuperficie di tipo tempo, con r costante. Essendo la superficie di tipo tempo, la sua normale sarà un vettore di tipo spazio. Si supponga inotre che le coordinate siano state scelte in modo che, riducendo r, l'ipersuperficie rimanga di tipo tempo fino a una certa lunghezza $r = r_H$ per cui la superficie risulti nulla. Questo sarà un buon candidato per essere un orizzonte degli eventi, in quanto una qualunque curva di tipo tempo, arrivata ad $r < r_H$, non riuscirà più a tornare indietro verso l'infinito di tipo tempo.

Detto ciò risulta facile capire come calcolare r_H:

La 1-forma $\partial_\mu r$ normale alla ipersuperficie avrà norma pari a:

$$g^{\mu\nu} = (\partial_\mu r)(\partial_\nu r) = g^{rr} \tag{2.5}$$

Arrivato ad $r = r_H$, l'ipersuperficie diventa nulla e la norma della 1-forma tende a zero. Di conseguenza la condizione $g^{rr} = 0$ è un'indicazione che potrebbe esserci un orizzonte degli eventi, poiché almeno localmente è soddisfatta la condizione per cui la materia che supera il nostro "orizzonte" risulti impossibilitata ad uscire.

Il motivo per cui ci preme capire come indivduare gli orizzonti degli eventi è che essi sono strettamente legati alle singolarità dello spazio tempo.

Infatti le singolarità fisiche in genere sono "nascoste" da un orizzonte degli eventi, Roger Penrose formulò anche una congettura a riguardo, detta congettura di censura cosmica, secondo la quale ogni singolarità fisica è nascosta da un orizzonte degli eventi. Nonostante ciò esistono delle soluzioni delle equzioni di Einstein che presentano delle singolarità prive di un orizzonte degli eventi, ossia delle singolarità nude, nonstate il significato fisico di questi risultati sia spesso messo in forte discussione.

Una singolarità è un punto dello spazio tempo in cui la curvatura dello spazio assume valori infiniti, indipendentemente dal sistema di coordinate scelto. Un primo metodo per indivduare delle singolarità è studiare quando gli autovalori della metrica divergono o si annullano, nonstante ciò non tutte le singolarità individuate in questo modo rappresentano delle singolarità fisiche. Alcune di queste, come vedremo più avanti nello spazio-tempo di Schwarzschild, sono solamente delle singolarità della metrica e possono essere eliminate effettuando determinati cambi di coordinate.Per questo motivo le singolarità "fisiche" non dipendono dal sistema di coordinate scelto e corrispondono a punti dello spazio-tempo in cui un invariante scalare della relatività generale, come lo scalare di Ricci, diverge.

Capitolo 3

2 Diagrammi di Penrose

3.1 Metrica di Minkowski

In coordinate cartesiane, la metrica di Minkowski η può essere espressa nella forma

$$ds^2 = -(dx^4)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3.1}$$

Passando in coordinate polari otteniamo:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.2}$$

In cui abbiamo effettuato le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} x^4 = t \\ x^3 = r\cos(\theta) \\ x^2 = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ x^1 = r\sin(\theta)\sin(\phi) \end{cases} \tag{3.3}$$

E $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$

Con questo set di coordinate i valori ammissibili per r e t sono $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$. I successivi cambi di coordinate avranno come primo obiettivo quello di passare in coordinate di cono luce, i cui domini vanno da $-\infty$ a ∞. Inoltre essendo la trasformazione conforme, le variabili θe ϕ resteranno invariate.

Si definiscono ora delle coordinate di cono luce, o coordiante ritardate e avanzate:

$$\begin{cases} r^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+r) \\ r^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-r) \end{cases} \tag{3.4}$$

Entrambe le coordinate hanno come dominio l'intera retta dei numeri reali, con l'unico vincolo dato da $r^+ > r^-$

Risolvendo il sistema per t ed r si ottiene:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^+ + r^-) \\ r = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^+ - r^-) \end{cases} \tag{3.5}$$

Sostituendo nell'equazione (3.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{1}{2}\big[dr^{+^2} + dr^{-^2} + 2dr^+dr^-\big] + \frac{1}{2}\big[dr^{+^2} + dr^{-^2} - 2dr^+dr^-\big] + \\ &+\frac{1}{2}(r^+ - r^-)^2 d\Omega^2 = -2dr^+dr^- + \frac{1}{2}(r^+ - r^-)^2 d\Omega^2 = \\ &= -2dr^+dr^- + \frac{1}{2}(r^+ - r^-)^2 d\Omega^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

A questo punto si definiscono delle coordinate compattificate:

$$\begin{cases} r^+ = \tan(\alpha) \\ r^- = \tan(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dr^+ = \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \\ dr^- = \frac{d\beta}{\cos^2(\beta)} \end{cases} \tag{3.7}$$

Queste sostituite nella metrica restituiscono:

$$ds^2 = -2\frac{d\alpha d\beta}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)} + \frac{1}{2}\big(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\big)^2 d\Omega^2 \tag{3.8}$$

con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Per semplificare la formula è possibile trasformare $\tan(\alpha) - \tan(\beta)$ utilizzando alcune proprietà trigonometriche:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-b)}{\cos(\alpha-\beta)} &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \\ &= \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}} - \frac{1}{\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \tan(\alpha-\beta)\big[1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)\big]$$

$$\begin{aligned} \big(\tan(\alpha)-\tan(\beta)\big)^2 &= \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\big[1 + \tan^2(\alpha)\tan^2(\beta) + 2\tan(\alpha)\tan(\beta)\big] = \\ &= \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\Big(1 + \frac{\sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)} + 2\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\Big) = \\ &= \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\left[\frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}\right] \end{aligned}$$

$$\big(\tan(\alpha)-\tan(\beta)\big)^2 = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\frac{\big(\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(\beta)\big)^2}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}$$

Sostituendo nuovamente nella metrica si ottiene:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2\frac{d\alpha d\beta}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}d\Omega^2 = \\ &= \frac{1}{2\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}\Big[-4d\alpha d\beta + \sin^2(\alpha-\beta)d\Omega^2\Big] \end{aligned}$$

La metrica appena trovata risulta conforme alla metrica

$$\overline{ds^2} = -4d\alpha d\beta + \sin^2(\alpha - \beta)d\Omega^2 \tag{3.10}$$

Tramite la funzione $F(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}$.

A questo punto si definiscono due nuove coordinate non di cono luce che risulteranno però compattificate:

$$t' = (\alpha + \beta) \tag{3.11}$$

$$r' = (\alpha - \beta) \tag{3.12}$$

Si sostituisce nella metrica ottenendo:

$$\overline{ds^2} = dt'^2 - dr'^2 + \sin^2(r')d\Omega^2 \tag{3.13}$$

Con i seguenti domini:

$$\begin{cases} -\pi < t' + r' < \pi \\ -\pi < t' - r' < \pi \\ r' \geq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Le relazioni che lega le coordinate (t', r') alle coordinate di partenza (t, r) sono le seguenti:

$$\begin{cases} 2t &= \tan\left(\dfrac{1}{2}(t' + r')\right) + \tan\left(\dfrac{1}{2}(t' - r')\right) \\ 2r &= \tan\left(\dfrac{1}{2}(t' + r')\right) - \tan\left(\dfrac{1}{2}(t' - r')\right) \end{cases} \tag{3.15}$$

Lo spazio-tempo di Minkoski risulta quindi conforme alla regione triangolare definita dai domini delle variabili t' ed r'.

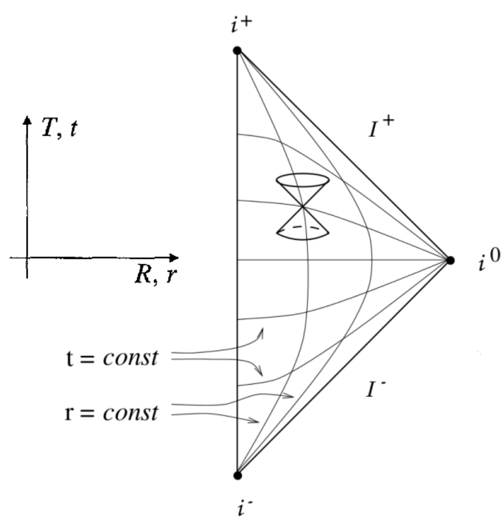

Figura 3.1: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski

Essendo lo spazio-tempo di Minkowski a simmetria sferica, ogni punto del diagramma rappresenta una 2-sfera fissati r e t,ad eccezione dei punti i^0, i^+, i^-, che costituiscono la rappresentazione conforme dell'infinito di tipo tempo e spazio. Questi punti si ottengono rispettivamente quando sono soddisfatte le condizioni $\sin^2(r') = 0,\ r' = 0,\ r' = \pi$, ossia quando il raggio della due sfera tende a zero.

- i^+è ottenuto imponendo $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

  Rappresenta l'infinito futuro di tipo tempo. La coordinata t' vale π mentre utilizzando la prima delle equazioni 3.15 è possibile vedere come questo punto corrisponda a $t = +\infty$

- i^-è ottenuto imponendo $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.

  Rappresenta l'infinito passato di tipo tempo. La coordinata t' vale $-\pi$, mentre t vale $-\infty$

- i^0invece è ottenuto imponendo $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.

  Questo punto rappresenta infinito di tipo spazio. La coordinata r' vale π, utilizzando la seconda delle equazioni (3.15) si ottiene $r = \infty$.

Le superfici di Cauchy, che nello spazio di Minkowski sono definite dall'equazione $t = const$, sono rappresentate dalle sezioni orizzontali del grafico.

I segmenti I^-ed I^+si ottengono imponendo le condizioni $t' - r' = -\pi$ e $t' + r' = \pi$ e rappresento rispettivamente l'infinito passato e futuro di tipo luce.

$$\begin{array}{ll} I^+: & t' = \pi - r' \quad 0 < r' < \pi \\ I^-: & t' = -\pi + t' \quad 0 < r' < \pi \end{array} \tag{3.16}$$

È ora possibile studiare il comportamente di tutte le geodetiche all'interno dello spazio-tempo di Minkowski:

Tutte le geodetiche di tipo tempo partono in i^-e terminano in i^+, al contrario quelle di tipo spazio partono e arrivano tutte in i^0. Infine le geodetiche di tipo luce partono da I^-e terminano in I^+ e sono tutte ad un'angolazione di $\pm 45°$ nel diagramma.

3.2 Spazio-tempo di De-Sitter

Lo spazio-tempo di De Sitter è una varietà Lorentziana in cui lo scalare di curvatura, o scalare di Ricci, assume valore strettamente positivi. Può essere immaginato come l'iperboloide:

$$\alpha^2 = -v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.17}$$

Immerso in uno spazio di Minkowski di dimensione 5, la cui metrica è:

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.18}$$

È possibile definire le seguenti coordinate sferiche:

$$\begin{cases} v = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ w = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)\cos(\chi) \\ x = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)\sin(\chi)\cos(\theta) \\ y = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)\sin(\chi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\ z = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right)\sin(\chi)\sin(\theta)\sin(\phi) \end{cases} \tag{3.19}$$

Con $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Utilizzando queste coordinate, la metrica assume la seguente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)\left[d\chi^2 + \sin^2(\chi)\big(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\big)\right] \tag{3.20}$$

Il termine definito tra parentesi tonde rappresenta la metrica di una 2-sfera, mentre l'espressione tra parentesi quadre rappresenta una 3-sfera.

Le coordinate (χ, ϕ, θ) sono coordinate compattificate e, unite alla coordinata t, il cui dominio si estende su tutto $\mathbb{R}$, ricoprono l'intera varietà. Le uniche singolarità sono le singolarità triviali individuate per $\chi = 0, \pi$ e $\theta = 0, \pi$.

Al variare di t la metrica rappresenta una 3-sfera che diventa più piccola per $t \to 0$, raggiungendo un minimo in 0 per poi riespandersi. Fissato t la 3-sfera è una superficie di Cauchy.

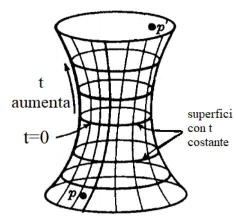

Figura 3.2: Spazio-tempo di De Sitter rappresentato come un iperboloide immerso in uno spazio piatto a 5 dimensioni (nell'immagine due dimensioni sono soppresse

Per costruire un diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di De-Sitter, è necessario compattificare anche la coordinata temporale.

Si definisce la seguente coordinata.

$$t' = 2\arctan\left(e^{t/\alpha}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{3.21}$$

Il cui dominio è $-\frac{\pi}{2} < t' < \frac{\pi}{2}$.

Calcolando il differenziale dt' e sostituendolo nell'equazione (3.20), si ottiene:

$$ds^2 = \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\left[dt'^2 - d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega^2\right] \tag{3.22}$$

Il termine di metrica tra parentesi quadre è identico a (3.13)

Il diagramma di Penrose è il seguente:

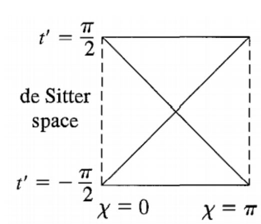

Figura 3.3: Diagramma di Penrose per lo spazio.tempo di De Sitter

Per $t \to \infty$, $t' \to \frac{\pi}{2}$ $\forall\chi$, viceversa per $t \to -\infty$, $t' \to -\frac{\pi}{2}$ $\forall\chi$. Giustificando quindi la forma quadrata e non triangolare del diagramma. Le curve di tipo luce sono linee a 45°, imponendo $ds^2 = 0$ si ottiene la relazione $d\chi = dt$,da cui si ottiene la relazione delle rette a 45°.

3.3 Metrica di Schwarzschild

La metrica di Schwarzshild è l'unica soluzione a simmetria sferica nel vuoto e asintoticamente piatta della relatività generale. Questo può rappresentare uno spazio-tempo vuoto a simmetria sferica all'esterno di un corpo massivo anch'esso a simmetria non rotante e privo di carica.

A differenza dello spazio-tempo di Minkowski,presenta una singolarità della metrica e un orizzonte degli eventi, ossia una superficie, anch'essa a simmetria sferica, centrata nella sorgente di campo e di raggio pari al raggio di Schwarzschild.

In coordiante sferiche (r, t, ϕ, θ) la metrica presenta la seguente forma:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.23}$$

Dove $d\Omega$ rappresta la metrica su una due-sfera di raggio unitario:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{3.24}$$

La metrica si riconduce alla metrica piatta di Minkowski per M$\rightarrow$ 0e per r$\rightarrow \infty$.

La grandezza M è identificabile con la massa della sorgente del campo gravitazionale

3.3.1 Singolarità

La metrica presenta due singolarità:

$r = 0$

$r = 2GM \equiv R_s$

La quantità $R_s$prende il nome di Raggio di Schwarzschild.

Quando la densità della sorgente di campo è piccola, come nel caso del sole, il raggio di Schwarzschild si troverà all'intero della sorgente, non rappresentando quindi alcun problema per la metrica. Infatti detto R il raggio della sorgente, la metrica (3.23) descrive solo lo spazio per $r > R$. Ad esempio, nel caso del sole in cui la massa vale ($M_s = 2 \times 10^{30} Kg$)il raggio di Schwarzschild vale$r_s = 3,0km$ e si trova ampiamente all'interno del sole stesso.

Essendo presenti due singolarità è necessario dividere la varietà identificata dalle coordinate (r, t, θ, ϕ) in due sezioni, in cui i valori di r varranno rispettivamente:

$$0 < r < 2GM$$

$$2GM < r < \infty$$

La singolarità $r = 0$è una singolarità fisica, indipendente dalla scelta delle coordinate, mentre è possibile dimostrare come la singolarità $r = R_s$sia eliminabile utilizzando un nuovo set di coordinate, ossia cambiando varietà.

Per comprendere il significato fisico della singolarità $r = 2GM$, prendiamo una curva radiale di tipo luce:

$$ds^2 = 0 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 \tag{3.25}$$

Da cui possiamo stimare la "pendenza" del cono luce:

$$\frac{dt}{dr} = \pm(1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$$

Notiamo come nel caso di $r \rightarrow \infty$, la pendenza varrà ± 1, come nel caso dello spazio di Minkowski.

Al contrario, avvicinandsi al raggio di Schwatzschild otterremo $\frac{dt}{dr} = \pm\infty$. Il cono luce tenderà a chiudersi come illustrato in figura:

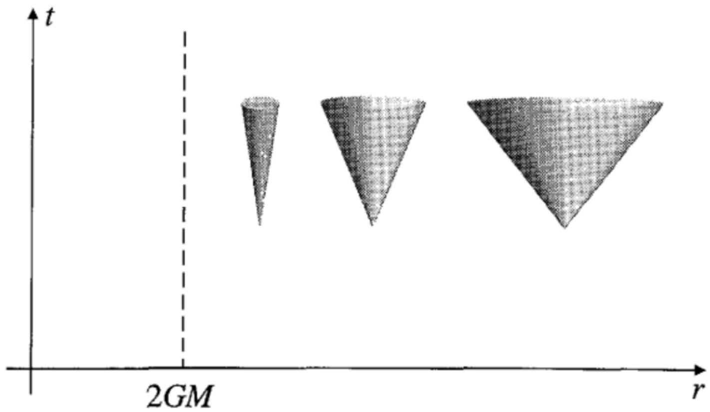

Figura 3.4: Coni luce nello spazio-tempo di Schwarzschild al variare di r

In questa scelta di coordinate, un raggio di luce sembra impossibilitato a raggiungere il raggio di Schwarzschild. Come ci apprestiamo a dimostrare, è possibile, tramite una serie di cambi di coordinate, rimuovere tale singolarità.

Definiamo la coordinata r^* nel seguente modo:

$$r^* = r + 2GM \ln(\frac{r}{2GM} - 1) \tag{3.26}$$

In questo modo la metrica assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{3.27}$$

La coordinata r* prende il nome di coordinata "tartaruga"[1] e soddisfa la condizione:

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

r^*tende a $-\infty$quando r tende a $2GM$.

Definiamo le coordinate nulle:

$$\begin{cases} v = t + r^* \\ w = t - r^* \end{cases} \tag{3.28}$$

3.3.1.1 Coordiante entranti

Si costruisce la metrica usando le coordinate (v, r, θ, ϕ):

$$dv = dt + dr^*$$
$$dr^* = dr + \frac{2GM}{r - 2GM}dr = \left(1 + \frac{2GM}{r - 2GM}\right)dr = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr$$

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dv^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2 - 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dvdr) + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \\ = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - 2dvdr + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

[1]T.Regge, J.A. Wheeler, "Stability of a Schwarzschild singularity", Phys. Rev. 108, 1063 (1957)

La metrica assume una forma detta metrica di Eddington-Finkelstein (g') data da:

$$ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{3.30}$$

Nonostante il termine $g^{\nu\nu}$ sparisca per $r = 2GM$,non c'è alcuna degenerazione, infatti il determinante della metrica è $g = -r^4 \sin^2(\theta)$ ed è perfettamente regolare in $r = 2GM$.La metrica di Eddington-Finkelstein non presenta singolarità in $r = 2GM$.

Chiamando quindi M la varietà su cui è definita la metrica di Schwarzschild g e M' la varietà su cui è definita la metrica g' possiamo affermare che esiste un embedding di M in M', per cui la regione di M' per cui $0 < r < 2GM$è isometrica alla regione di M per cui $0 < r < 2GM$.

Prendiamo in esame una geodetica radiale ($d\theta = d\phi = 0$) e riarrangiamo la metrica nel seguente modo:

$$2dvdr = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + ds^2 \tag{3.31}$$

Per una particella massiva che si muove lungo una geodetica di tipo tempo, per convenzione si ha $ds^2 < 0$.

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + 2dvdr < 0$$

$$dv\left[2dr - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)d\nu\right] < 0$$

$$per \quad r < 2GM; \quad -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = \left|1 - \frac{2GM}{r}\right|$$

$$dv\left[2dr + \left|1 - \frac{2GM}{r}\right|d\nu\right] < 0$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} dr < 0 & 0 < dv < \dfrac{2\,|dr|}{\left|1 - \frac{2GM}{r}\right|} \\ dr > 0 & -\dfrac{2\,|dr|}{\left|1 - \frac{2GM}{r}\right|} < d\nu < 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Le soluzioni corrispondono a due coni luce: uno passato e uno futuro. Nel limite di $r \to 2GM$:

$$\begin{cases} dr < 0 & 0 < dv < \infty \\ dr > 0 & -\infty < d\nu < 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

Fuori dall'orizzonte la coordinata ν è di tipo tempo e la direzione che punta verso il futuro è quella per cui $d\nu > 0$. Di conseguenza il cono luce futuro è il primo delle due equazioni sovrastanti. Da qui si giunge alla conclusione che tutte curve di tipo tempo dirette verso il futuro, all'interno dell'orizzonte degli eventi, avranno $dr < 0$ e si avvicinerà inserorabilmente alla singolarità.

La superficie sferica nulla individuata da $r = 2GM$rappresenta quindi una membrana semipermeabile che permette il passaggio dall'esterno ($r > 2GM$) all'interno ($r < 2GM$) solo a curve nulle o curve dirette verso il futuro di tipo tempo.

In questo modo è stata estesa la varietà di Schwarzschild, andando a comprendere anche la regione per $r < 2GM$. Nello spazio-tempo di Schwarzschild classico infatti il cono luce tende a chiudersi man mano che ci si avvicina all'orizzonte degli eventi, di conseguenza la regione sembra inaccessibile, poiché gli eventi all'esterno dell'orizzonte non sono connessi con gli eventi interni, invece le coordinate entranti di Eddington-Finkelstein danno la possibilità di accedere nella regione interna all'orizzonte

3.3.1.2 Coordinate uscenti

Al contrario prendendo la coordinata w possiamo definire la metrica g" data da:

$$ds^2 = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)dw^2 - 2dwdr + r^2 d\Omega^2 \tag{3.34}$$

La varietà M" definita dalle coordinate (w, r, θ, ϕ) a sua volta non presenta alcuna singolarità per $r = 2GM$. Inoltre anche in questo caso la regione di M" per cui $0 < r < 2GM$ è isometrica alla regione di M per cui $0 < r < 2GM$.

Si può fare un conto analogo a quello fatto per le coordinate entranti per scoprire che all'interno dell'orizzonte $dr > 0$.

La superficie $r = 2GM$rappresenta anche in questo caso una superficie nulla, ma a differenza del caso precedentemente analizzato, permette solo il passaggio di curve dirette verso il passato di tipo tempo o curve nulle dall'esterno $(r > 2GM)$ all'interno $(r < 2GM)$.

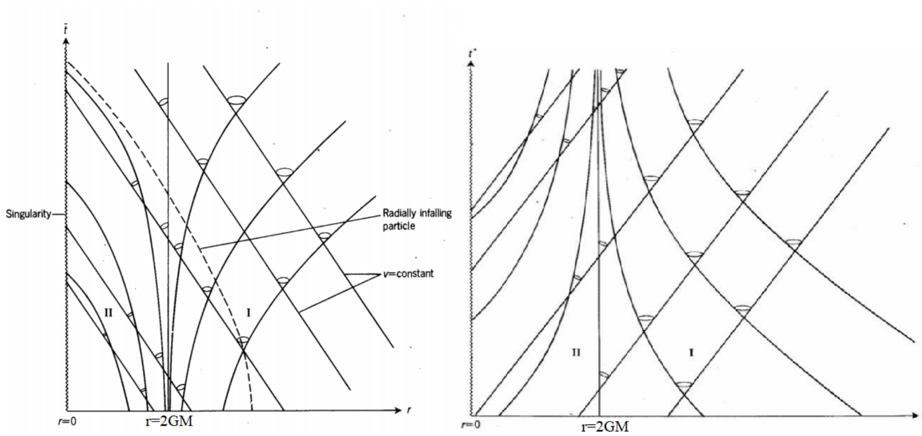

Figura 3.5: Diagrammi di Eddingoton-Finkelstein

Nella figura a sinistra è rappresentata la soluzione di Schwarzschild nelle coordinate entranti di Eddington-Finkelstein.

I fotoni entranti, ovvero le curve di tipo luce rivolte verso il futuro, rappresentate graficamente dalle rette inclinate a $-45\circ$, attraversano l'orizzonte degli eventi terminando nella singolarità effettiva corrispondente a r = 0. Nessuna curva può uscire dalla regione r < 2GM: nessuna particella nemmeno la luce, può evadere dalla singolarità, che per questo motivo viene definita buco nero. Nella figura a destra viene rappresentato nelle coordinate uscenti quello che viene chiamato buco bianco: tutti i fotoni uscenti emergono dalla singolarità, attraversano l'orizzonte degli eventi e si propagano verso l'infinito.

Le coordinate entranti ed uscenti formano un atlante dello spazio tempo composto da due carte.L'intersezione dei domini delle carte rappresenta l'esterno del buco nero. Supponendo di seguire una geodetica diretta verso il futuro, ponendosi nella carta delle coordinate entranti si supererà l'orizzonte degli eventi, discorso analogo nella carta delle coordinate uscenti ma con la la curva diretta verso il passato.Nell'intersezione le due curve coincidono, mentre nelle due carte continuano nel passato o nel futuro, di conseguenza i punti in cui incontrano l'orizzonte degli eventi sono due punti diversi non appartenenti all'intersezione, si deduce quindi che esistono due diversi orizzonti degli eventi per le due estensioni.

3.3.1.3 Coordinate di Kruskal

È possibile costruire una varietà M* ancora più grande in cui è possibile contemporaneamente definire degli embedding isometrici sia per M' che per M".

Può essere costruita partendo dalla metrica di Schwarzschild (3.23) ed effettuando i cambi di coordinate (3.28):

$$\begin{cases} v = t + r^* \\ w = t - r^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dv = dt + dr^* \\ dw = dt - dr* \end{cases}$$

Poichè $dr* = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr$ si ottiene:

$$\begin{cases} dv = dt + \left(1 - \dfrac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \\ dw = dt - \left(1 - \dfrac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{1}{2}(dv + dw) \\ dr = \dfrac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dv - dw) \end{cases}$$

Sostituendo nella metrica otteniamo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left[\frac{1}{4}(dv^2 + dw^2 + 2dvdw\right] +$$
$$+ \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2(dv^2 + dw^2 - 2dvdw)\right] + r^2 d\Omega^2$$

Da cui si ottiene:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dvdw + r^2 d\Omega^2 \tag{3.35}$$

Dove $d\Omega^2$ha l'usuale forma $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$.
La coordinata r è invece determiata dall'equazione:

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2GM \ln(r - 2GM)$$

Esprimento la metrica in questa forma è presente nuovamente una singolarità per $r = 2GM$. Poichè per $r \to 2GM$ la componente $dvdw$ della metrica tende a 0, il determinante tende a 0 e la matrice non è più invertibile.

Al fine di eliminare la singolarità effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} v' = e^{\dfrac{v}{4GM}} \\ w' = -e^{\dfrac{-w}{4GM}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dv' = \dfrac{1}{4GM} e^{\dfrac{v}{4GM}} dv \\ dw' = \dfrac{1}{4GM} e^{\dfrac{-w}{4GM}} dw \end{cases} \tag{3.36}$$

Esprimento le coordinate in funzione di (r,t) otteniamo:

$$\begin{aligned} v' &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\dfrac{r+t}{4GM}} \\ w' &= -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\dfrac{r-t}{4GM}} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Nella varietà definita dalle coordinate (v', w', θ, ϕ) la metrica è la segunete:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)16G^2M^2 e^{\frac{w-v}{4GM}}\, dv'dw' + r^2d\Omega^2 = \\
&= -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)16G^2M^2 e^{\frac{-r^*}{2GM}}\, dv'dw' + r^2d\Omega^2 = \\
&= -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)16GM \exp\left[-\frac{r}{2GM} - \ln\left(\frac{r}{2GM}-1\right)\right] dv'dw' + r^2d\Omega^2 = \qquad (3.38)\\
&= -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)16G^2M^2 \frac{\exp\left[-\dfrac{r}{2GM}\right]}{\dfrac{r}{2GM}-1} dv'dw' + r^2d\Omega^2 \Rrightarrow \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

$$
\Rrightarrow ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} e^{\frac{-r}{2GM}} (dv'dw') + r^2d\Omega^2 \tag{3.40}
$$

L'assenza di una singolarità per $r = 2GM$appare ora evidente, poiché nessun termine della metrica presenta comportamente singolari in prossimità del raggio di Schawarzschild.

Per ottenere la forma definitiva della metrica di Kruskal, definiamo delle coordinate non di cono luce:

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}(v'+w') = \left(\frac{r}{2GM}-1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh\left(\tfrac{t}{4GM}\right) \\
R &= \tfrac{1}{2}(v'-w') = \left(\frac{r}{2GM}-1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh\left(\tfrac{t}{4GM}\right)
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Nello spazio definito dalle coordinate (R, T, θ, ϕ), la metrica di Kruskal assume la forma:

$$
ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} e^{\frac{-r}{2GM}} \left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2d\Omega^2 \tag{3.42}
$$

Dove r è dato da:

$$
T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM)}\right) e^{\frac{-r}{2GM}} \tag{3.43}
$$

Le curve di tipo luce nello spazio di Kruskal preservano la stessa forma che hanno nello spazio piatto definito dalle coordinate (t, r^*):

$$
T = \pm R + const
$$

Le superfici definite da r costante, soddisfano la relazione

$$
T^2 - R^2 = const
$$

Nel piano R-T hanno quindi una forma iperbolica, come mostrato in figura.
Inoltre, nel caso specifico di $r = 2GM$,è soddisfatta la relazione

$$
T = \pm R
$$

Inoltre, siccome

$$
t = 4GMarctanh\left(\frac{T}{R}\right) \tag{3.44}
$$

Le superfici con t costante sono rappresentate dalle rette passanti per l'origine e hanno una pendenza minore di 45°.

Infine,l'equazione (3.43) implica che $T^2 - R^2 < 1$, quindi le coordinate (T, R) mappano la varietà sul sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui $T^2 - R^2 < 1$e la curva $T^2 - R^2 = 1$ è la singolarità, perché è definita per r=0.

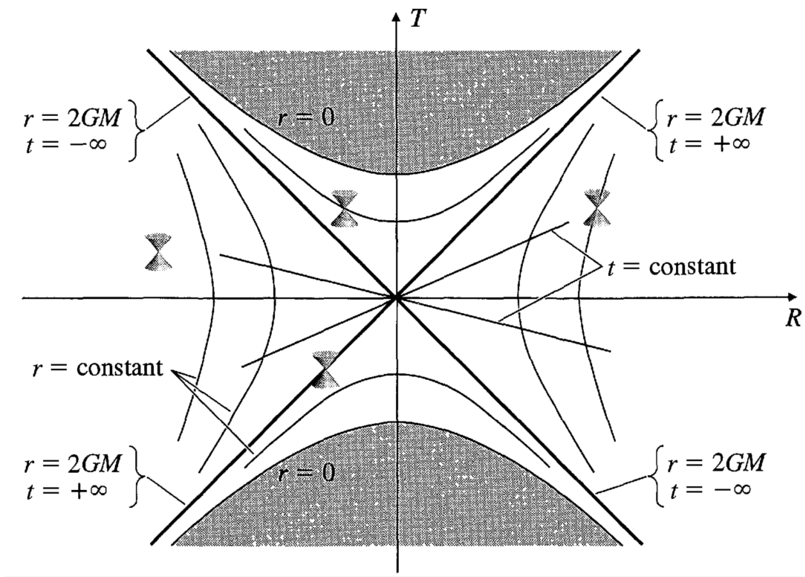

Figura 3.6: Diagramma di Kruskal: le curve nulle sono a ±45°, sono presenti due regioni asinoticamente piatte per $R \to \infty$ e per $R \to -\infty$

Per analizzare nel dettaglio le regioni dello spazio di Kruskal, conviene dividerlo in 4 aree distinte:

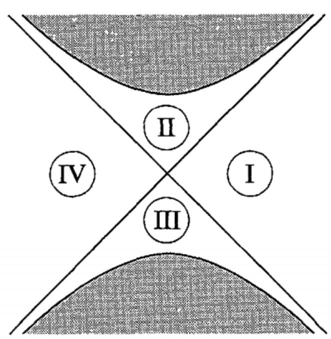

Figura 3.7: Le 4 regioni dello spazio di Kruskal

Le regioni I e II sono isometriche all'estensione di Finkelstein definita dalle coordinate entranti, mentre le regioni I e III sono isometriche all'estensione di Finkelstein definita dalle coordinate uscenti.

L'area I è la regione di spazio definita da $r > 2GM$, ossia la regione in cui le coordinate di Schwartzschild (r,t) erano ben definite.

La regione IV, dove $R < -|T|$, rappresenta un altro universo asintoticamente piatto irraggiungibile dalla regione I.

Seguendo le linee nulle dirette verso il futuro a partire dalla regione I è possibile raggiungere la regione II, ossia il buco nero. Qualsiasi curva diretta futura entrante la regione II è destinata a raggiungere la singolarità $r = 0$

La regione III è raggiungibile seguendo curve nulle dirette passate. Questa regione viene chiamata buco bianco, una regione dello spazio tempo da cui gli oggetti, contrariamente a quanto accade per il buco nero, possono solo allontanarsi. Rappresenta quindi un passato da cui è possibile solo ricevere informazioni, ma che non può essere in alcun modo influenzato, poichè nessuna curva diretta verso il futuro può attraversare questa zona.

Matematicamente, l'esistenza di questa regione è giustificata dal fatto che lo soluzione di Schwarzschild è una soluzione statica, eterna ed invariante per inversione temporale. Di conseguenza, all'orizzonte degli eventi e alla singolarità posta al centro, corrispondono un orizzonte degli eventi nel passato e una seconda singolarità, con la coordinata temporale invertita.

3.3.1.4 Diagramma di Penrose

Trovata l'estensione massima della soluzione di Schwarzschild, è possibile creare un diagramma di Penrose dell'estensione di Kruskal compattificando le coordinate (3.37) :

$$v'' = \arctan\left(v'\right) \quad w'' = \arctan\left(w'\right) \tag{3.45}$$

I cui domini sono:

$$-\frac{1}{2}\pi < v'' < \frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi < w'' < \frac{1}{2}\pi$$

In questo modo, sia la regione I che la regione IV presentano dei punti all'infinito di tipo luce, tempo e spazio.

Si definiscono infine delle coordinate compattificate di non di cono luce:

$$\begin{cases} T' = v'' + w'' \\ R' = v'' - w'' \end{cases} \tag{3.46}$$

I range di definizione sono:$-\frac{1}{2}\pi < T' < \frac{1}{2}\pi$, $-T - \pi < R' < -T' + \pi$, $T' - \pi < R' < T' + \pi$.

Per r=0, l'equazione (3.43) diventa $T^2 - R^2 = 1$. Sostituendo T ed R con le espressioni (3.41), si ottiene:

$$T^2 - R^2 = v'w' = 1 \tag{3.47}$$

v' e w' posson essere riscritti tramite le equazioni (3.45), ottenendo

$$\tan(v'')\tan(w'') = 1$$

$$v'' = \arctan[\cot(w'')] = \frac{\pi}{2} - \frac{\mod(w'')}{\pi} \tag{3.48}$$

Infine si sostuiscono v'' e w'' con T' ed R' e si ottiene:

$$T' = \pm\frac{\pi}{2} \tag{3.49}$$

La soluzione giustifica la presenza di due singolarità.

Per $r = 2GM$ invece si ottiene

$$T^2 - R^2 = 0 \tag{3.50}$$

Risultato che giustifica le diagonali presenti nel diagramma.

Per $r \to \infty$, le coordiate (v, w) valgono $(+\infty, -\infty)$, di conseguenza (v', w') valgono $(+\infty, -\infty)$ e $(v'', w'') = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ infine $(R', T') = (\pi, 0)$

Similmente si possono trovare le coordinate di i^+e i^-:

- Per $t \to \infty$ $(v,w) = (+\infty, +\infty)$; $(v', w') = (+\infty, 0)$; $(v'', w'') = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $(R', T') = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- Per $t \to -\infty$ $(v,w) = (-\infty, -\infty)$; $(v', w') = (o, +\infty)$; $(v'', w'') = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $(R', T') = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

Gli altri punti all'infinto del diagramma sono individuabili analogamente a quanto fatto fino ad ora ma effettuendo un'inversione delle coordinate $v \to -v$ e $w \to -w$.

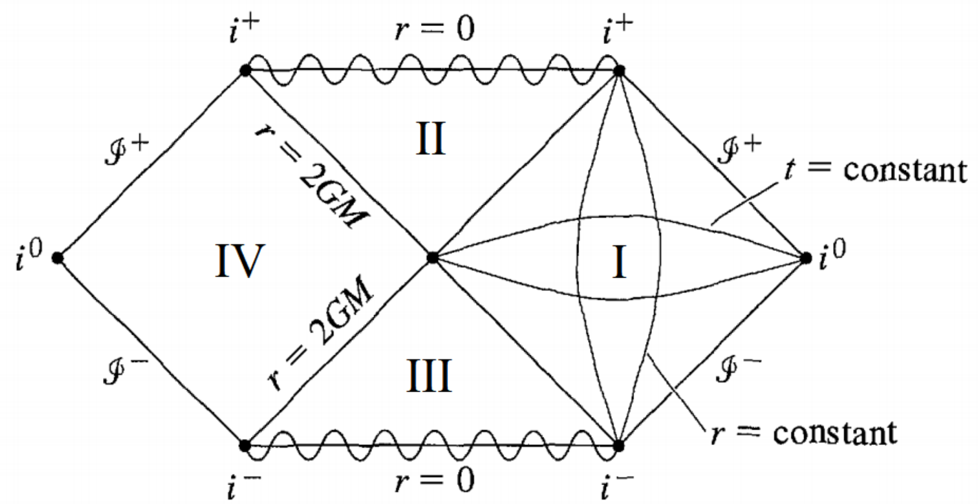

Figura 3.8: Diagramma di Penrose per la massima estensione analitica della metrica di Schwarzaschild

3.4 Metrica di Reissner-Nordstörm

La metrica di Reissner-Nordstörm descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria sferica con carica e.

Il problema presenta nuovamente una simmetria sferica, che permette di scrivere la metrica nel seguente modo:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.51}$$

M rappresenta come al solito la massa della sorgente di campo, mentre e rappresenta la carica elettrica.

$d\Omega^2$ ha l'usuale forma descritta nell'equazione (3.24).

A differenza dei casi precedentemente illustrati, lo spazio all'esterno della sorgente di campoil tensore energia-impulso non è nullo, è infatti presente un campo elettrico diverso da zero datoa dalla carica e.

3.4.1 Singolarità

La metrica presenta una singolarità in $r = 0$, l'orizzonte degli eventi invece presenta una struttura più complessa rispetto a quello trovato nella metrica di Schwarzschild. Per identificarlo si risolve l'equazione

$$g^{rr} = \Delta(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2} = 0 \tag{3.52}$$

Le cui soluzioni hanno la seguente forma.

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - Ge^2} \tag{3.53}$$

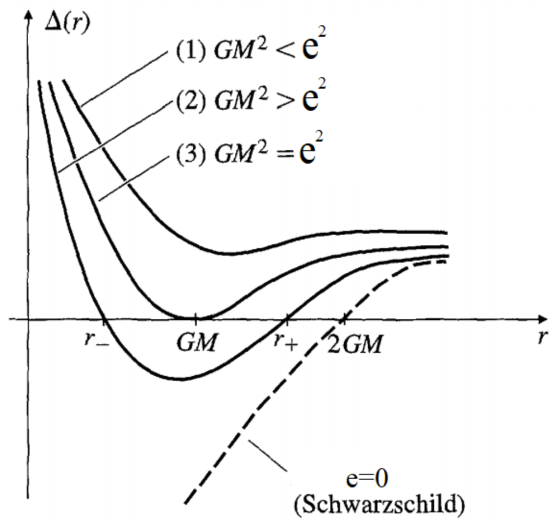

Figura 3.9: La funzione $\Delta(r)$ per la soluzione di Reissner-Nordstörm. Gli zeri individuano la posizione degli orizzonti degli eventi

Come mostrato in figura, il problema può avere 0,1 o 2 soluzioni in base alla relazione tra GM^2ed e^2

- $GM^2 < e^2$

  La metrica non presenta singolarità eccetto che per $r = 0$

- $GM^2 > e^2$

  La metrica presenta due singolarità, $r_+ = 0$ ed $r_- = 0$. È possibile rimuovere entrambe le singolarità tramite dei cambi di coordinate come fatto con la metrica di Schwarzschild.

- $GM^2 = e^2$

  La metrica presenta una sola singolarità. Questo caso è noto come la soluzione estremale di Reissner-Nordstörm. Questa soluzione, grazie alle sue caratteristiche di semplicità, è molto studiata nel contesto della gravità quantistica.

La metrica risulta quindi regolare nelle regioni $\infty > r > r^+, r^+ > r > r^-, r^- > r > 0$.

3.4.2 Estensione massimale e diagramma di Penrose

Per trovare un'estensione massimale della metrica, definiamo la coordinata r^* :

$$r^* = \int dr/(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2}) \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} r^* &= \int dr \frac{r^2}{r^2-2GMr+Ge^2} = \int dr \frac{r^2-2GMr+Ge^2}{r^2-2GMr+Ge^2} + \int dr \frac{2GMr-Ge^2}{r^2-2GMr+Ge^2} = \\ &= r + GM \int dr \frac{2r-2GMr}{r^2-2GMr+Ge^2} + \int \frac{2G^2M^2-Ge^2}{r^2-2GMr+Ge^2} = \\ &= r + GM\ln(r^2-2GMr+Ge^2) + \int \frac{2G^2M^2-Ge^2}{r^2-2GMr+Ge^2} \end{aligned}$$

Per $r > r^+$ valgono:

$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+-r_-}\ln(r-r_+) - \frac{r_-^2}{r_+-r_-}\ln(r-r_-)$ per $e^2 < GM^2$

$r^* = r + GM\ln[(r-GM)^2] - \frac{2}{r-GM}$ per $e^2 = GM^2$

$r^* = r + GM\ln(r^2-2GMr+e^2) + \frac{2}{e^2-m^2}\arctan(\frac{r-m}{e^2-m^2})$ per $e^2 > GM^2$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per le coordinate di Eddington-Finkelstein si definiscono delle coordiante di cono luce:

$$v = t + r^* \quad w = t - r^*$$

da cui segue:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2})dvdw + r^2 d\Omega^2 \tag{3.55}$$

La metrica è quindi nella forma $ds^2 = f(u,v)dudv + r^2 d\Omega^2$, che è la stessa forma dell'equazione (3.6) per la metrica di Minkowski. Questo ci permette di compattificare le coordinate di cono luce u e w, e poi tornare a coordinate non di cono luce. Studiando la regione di variabilità di queste coordinate, identificheremo quindi un sottoinsieme compatto del piano che corrisponde al diagramma di Penrose del nostro spaziotempo. Per avere la metrica in forma (3.55), col segno giusto del termine dvdw, bisogna però distinguere le regioni dove la funzione$\Delta(r)$ è positiva da quella dove è negativa, e definire le coordinate u,v in modo diverso in queste regioni.

3.4.2.1 $e^2 < GM^2$

Il primo passo necessario per creare il diagramma è definire dell coordinate di cono luce. Prima di fare ciò risulta comodo dividere lo spazio tempo in 3 regioni:

$$\begin{array}{cc} A & 0 < r < r_- \\ B & r_- < r < r_+ \\ C & r_+ < r < +\infty \end{array} \tag{3.56}$$

In questi 3 domini, la coordinata $r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+-r_-}\ln(r-r_+) - \frac{r_-^2}{r_+-r_-}\ln(r-r_-)$ assumerà i seguenti valori:

- Nella regione A, per $r \to 0$, $r^* = \frac{r_+^2}{r_+-r_-}\ln(-r_+) - \frac{r_-^2}{r_+-r_-}\ln(-r_-) = \tilde{r} > 0$, mentre per $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$
$$\tilde{r} < r^* < +\infty \tag{3.57}$$
- Nella regione B, per $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$, mentre per $r \to r_+$,$r^* \to -\infty$
$$-\infty < r^* < +\infty \tag{3.58}$$
- Nella regione C, per $r \to r_+$,$r^* \to -\infty$, mentre per $r \to \infty$, $r^* \to \infty$
$$-\infty < r^* < +\infty \tag{3.59}$$

Fatto ciò, si definiscono delle coordinate di cono luce:

$$\begin{cases} u_A = t - r^* & w_A = t + r^* \\ u_B = t + r^* & w_B = -t + r^* \\ u_C = t - r^* & w_C = t + r^* \end{cases} \tag{3.60}$$

In B e C, le coordinate (u, w) coprono l'intero piano, mentre nel caso di (u_A, w_A) coprono solo un semipiano.

A questo punto è necessario studiare cosa accade alle e coppie di coordinate (u, w) quando la coordinata r si avvicina agli orizzonti:

- (u_A, w_A)
  - $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$, quindi $u_A \to -\infty$ e $w_A \to +\infty$
    In questa regione, quindi, il diagramma di Penrose sarà un triangolo. Infatti le coordinate t, r^* variano su un semipiano $r^* > \tilde{r}$, ed il bordo $r = \tilde{r}$ (che coincide con la singolarità) è di tipo tempo, venendo quindi rappresentato come una linea verticale nel diagramma di Penrose. Gli altri due bordi sono $u_A \to -\infty$ e $w_A \to +\infty$, e sono entrambi di tipo luce.

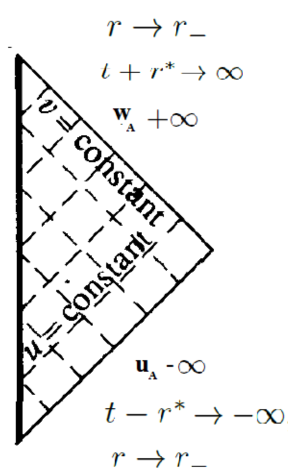

Figura 3.10: Diagramma compattificato per la regione A

- (u_B, w_B)
  - $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$, quindi $u_B \to +\infty$ e $w_B \to +\infty$
  - $r \to r_+$, $r^* \to -\infty$, quindi $u_B \to -\infty$ e $w_B \to -\infty$
    Questa regione ammette un diagramma di Penrose dalla forma di un "diamante causale", con i quattro bordi appena mostrati.

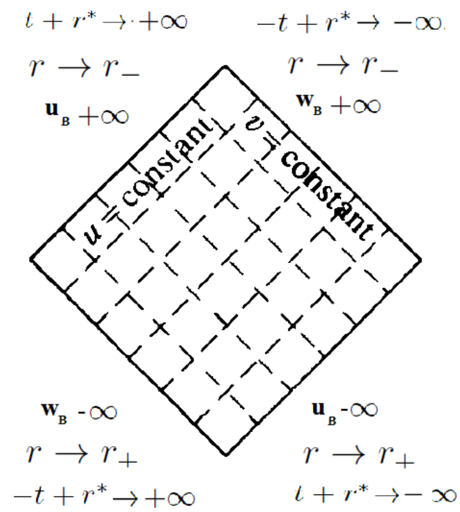

Figura 3.11: Diagramma compattificato per la regione B

- (u_C, w_C)
  - $r \to r_+$,$r^* \to -\infty$, quindi $u_C \to +\infty$ e $w_C \to -\infty$
  - $r \to +\infty$, $r^* \to +\infty$, quindi $u_C \to -\infty$ e $w_B \to +\infty$

  Anche questa zona ammette un diagramma di Penrose a "diamante causale" con quattro bordi di tipo luce.

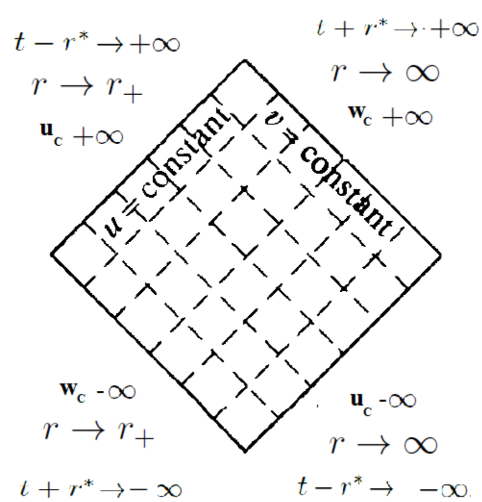

Figura 3.12: Diagramma compattificato per la regione C

Il diagramma di Penrose può essere ottenuto "incollando" i 3 blocchi definiti sopra insieme ad altri 3 blocchi A', B', C' ottenuti mediante l'inversione delle coordinate $u \to -u$ e $w \to -w$.

Formalmente per creare il diagramma è necessario compattificare le coordinate (v, w) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} v'' &= \arctan\left[\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}v\right)\right] \\ w'' &= \arctan\left[-\exp\left(\frac{-r_+ + r_-}{4r_+^2}w\right)\right] \end{aligned} \tag{3.61}$$

Il differenziale dv'' sarà:

$$dv'' = \frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}\frac{\exp\left(\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}v\right)}{1 + \exp\left(\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}v\right)}$$

$$dw'' = \frac{-r_+ + r_-}{4r_+^2}\frac{\exp\left(\frac{-r_+ + r_-}{4r_+^2}w\right)}{1 + \exp\left(\frac{-r_+ + r_-}{4r_+^2}w\right)}$$

E la metrica assume la forma:

$$ds^2 = (1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{r^2})64\frac{r_+^4}{(r_+ - r_-)^2}\frac{dv''dw''}{\sin(2v'')\sin(sw'')} + r^2 d\Omega^2 \tag{3.62}$$

dove r è definita implicitamente da

$$\begin{aligned} \tan(v'')\tan(w'') &= -\exp\left[\left(\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}\right)v\right]\exp\left[\left(\frac{-r_+ + r_-}{4r_+^2}\right)w\right] = -\exp\left[\frac{(r_+ - r_-)(v - w)}{4r_+^2}\right] = \\ &= -\exp\left[\left(\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2}\right)2r*\right] \end{aligned}$$

Sostituendo la definizione di r^*per $e^2 < GM^2$si ottiene:

$$\tan(v'')\tan(w'') = -\exp[\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}\right)r]\sqrt{r - r_+}(r - r_-)^{-\alpha/2} \tag{3.63}$$

Con $\alpha = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2$.

L'estensione massimale è ottenuta prendendo come metrica (3.62) e come spazio massimale la varietà in cui la metrica è C^2:

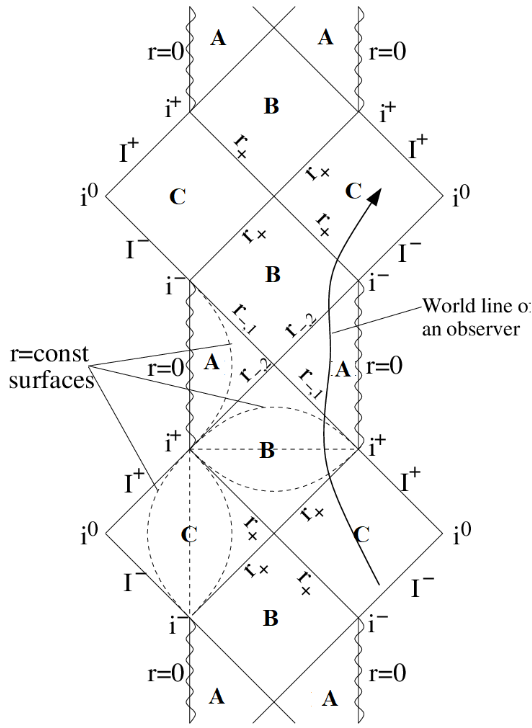

Figura 3.13: Diagramma di Penrose per la massima estensione analitica della metrica di Reissner-Nordstörm nel caso $e^2 < GM^2$

Per studiare la natura della coordinata r si studia il segno del prodotto scalare della derivata

$$g_{\mu\nu}\partial^{\mu}r\partial^{\nu}r \tag{3.64}$$

In questo caso il prodotto scalare coincide con l'equazione (3.52) di g_{rr}. Di conseguenza la coordinata r risulta di tipo spazio per $r > r^{+}$e $r < r^{-}$, è di tipo tempo nella regione intermedia ed è nulla per $r = r^{+}$ed $r = r^{-}$.

Il diagramma di Penrose della metrica presenta infiniti spazi asintoticamente piatti, in cui $r > r^{+}$, queste sono connesse da altre regioni intermedia per cui $r^{+} > r > r^{-} \quad e \quad r^{-} > r > 0$ .Le superfici r_{+}ed r_{-}sono entrambe superfici nulle, mentre la singolarità $r = 0$ è una singolarità di tipo tempo e può quindi essere evitata da una curva di tipo tempo diretta futura proveniente da una regione I che attraversa l'ipersuperficie $r = r^{+}$. Questa curva può, in linea teorica, attraversare delle regioni II, III e di nuovo II per riemergere in un'altra regione asintoticamente piatta. Per capire meglio cosa accade in queste regioni risulta utile fare un piccolo esempio:

Si immagini di studiare il moto di un osservatore in caduta libera in un buco nero di Reissner-Nordöstrm, nella regione I l'osservatore sperimenterebbe gli stessi effetti fisici della metrica di Schwarzschild all'esterno dell'orizzonte degli eventi, superato il confine $r = r^{+}$ la coordinata r diventa di tipo tempo e l'osservatore è obbligato a muoversi nella direzione in cui r diminuisce nella regione II. La caduta termina una volta superata la soglia $r = r^{-}$nella regione 3 infatti la coordinata torna di tipo spazio e l'osservatore è libero di muoversi in qualunque direzione. Può quindi avanzare verso la singolarità o tornare indietro e oltrepassare nuovamente, ma in direzione opposta, il confine $r = r_{-}$, tornato nella regione II la coordinata r ridiventa di tipo tempo, ma in questo caso con l'orientazione opposta, obbligando quindi l'osservatore a muoversi lungo la direzione di r crescente, fino a $r = r^{+}$, per poi emergere attraverso un buco bianco in una nuova regione I asintoticamente piatta. Risulta quindi intuitivo capire perché il diagramma dello spazio-tempo di Reissner-Nordöstrm risulta infinito, per un osservatore è sempre possibile entrare in un buco nero da una regione I e riemergere in una seconda regione asintoticamente piatta attraverso un buco bianco.

3.4.2.2 $e^2 > GM^2$

Fisicamente non ci si aspetta mai di trovare un buco nero che soddisfti questa condizione. L'energia totale del buco nero risulterebbe infatti minore del solo contributo elettromagnetico, di coseguenza la massa della materia che trasporta la carica dovrebbe essere negativa. Per questo motivo questa soluzione è considerata non fisica.

Nel caso $e^2 > GM^2$ la metrica risulta ben definita ovunque eccetto per $r = 0$.Il termine della metrica non si annulla mai, quindi la singolarità è una singolarità nuda.Un segnale emesso nelle vicinanze della singolarità può quindi viaggiare fino ad $r \to \infty$, rendendo quindi la singolarità osservabile.Il diagramma di Penrose di questa metrica è simile a quello costruito per lo spazio di Minkowski, con l'aggiunta di una singolarità per $r = 0$:

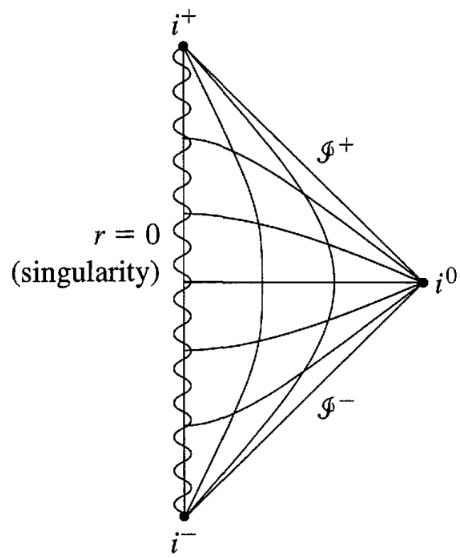

Figura 3.14: Diagramma di Penrose della metrica di Reissner-Nordstörm nel caso $e^2 > GM^2$

Una singolarità nuda, per quanto matematicamente esatta, non può realmente essere prodotta da un processo fisico come il collasso di una stella. Per questo motivo Roger Penrose formulò l'ipotesi di censura Cosmica, secondo la quale le singolarità prodotte dal collasso di una stella sono sempre nascoste da un orizzonte degli eventi.

3.4.2.3 $e^2 = GM^2$

Infine, il caso $e^2 = GM^2$ viene detta soluzione estremale, in questo caso i due orizzonti coincidono, dividendo lo spazio tempo in due categorie di regioni, una regione esterne e una interna, divise da un'ipersuperficie nulla. La coordinata r però risulta essere di tipo spazio in entrambe le regioni, di conseguenza un osservatore può sempre scappare da un buco nero, finendo in una nuova regione asintoticamente piatta. Il diagramma di Penrose in questo caso è il seguente.

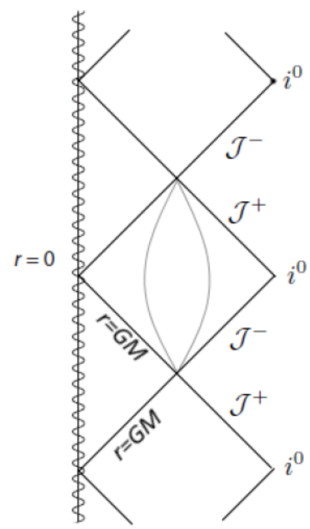

Figura 3.15: Diagramma di Penrose della metrica di Reissner-Nordstörm nel caso $e^2 = GM^2$

3.5 Metrica di Kerr

In generale i corpi celesti hanno un momento angolare diverso da zero, per questo motivo la soluzione dell'equazione di Einsten all'esterno della sorgente di campo non è perfettamente a simmetria sferica, ma presenta una simmetria attorno all'asse di rotazione della sorgente di campo.Questa particolare situazione è descritta dalla metrica di Kerr, che presenta la seguente forma:

$$\begin{gathered} ds^2 = -(1 - \frac{2GMr}{\rho^2})dt^2 - \frac{4GMar\sin^2(\theta)}{\rho^2}dtd\phi + \\ +\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r\sin^2(\theta)}{\rho^2}\right]\sin^2(\theta)d\phi^2 \end{gathered} \tag{3.65}$$

Dove M rappresenta la massa della sorgente, a il suo moment angolare e Δe ρ^2sono definiti come segue:

$$\begin{gathered} \Delta = r^2 + a^2 - 2GMr \\ \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2(\theta) \end{gathered} \tag{3.66}$$

Per $r \to \infty$la metrica divena asinoticamente piatta, assumendo la forma 3.2. Mentre per $a \to 0$ si ottiene la metrica di Schwarzschild 3.23.

3.5.1 Singolarità

La metrica presenta due singolarità:

$$\begin{gathered} \rho = 0 \\ \Delta = 0 \end{gathered} \tag{3.67}$$

Nel caso $a \to 0$, ossia nel limite in cui il momento angolare è 0 e lo spaziotempo viene descritto dalla metrica di Schwarzschild, le equazioni 3.67 si riducono a:

$$\begin{gathered} r = 0 \\ r = 2GM \end{gathered} \tag{3.68}$$

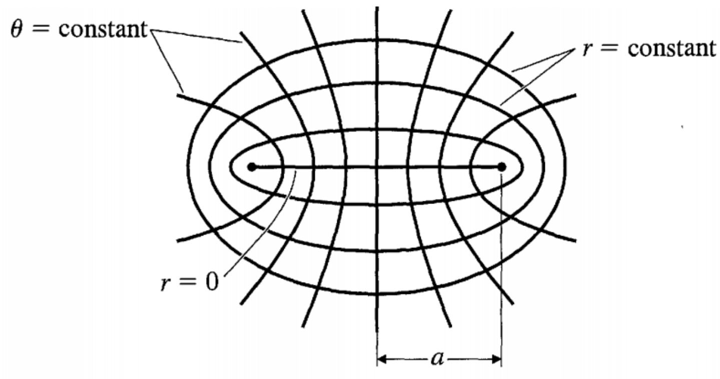

Figura 3.16: Rappresentazione delle coordinate ellittiche in sezione. $r = 0$ è un disco di dimensione 2; l'intersezione di $r = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$è l'anello al bordo del disco

Facendo un'analogia con la metrica di Schwarzschild, è possible dedurre che la singolarità in $r = 0$ è una singolarità fisica, mentre quella presente in $r = 2GM$ è una singolarità rimovibile.

Questa affermazione può essere verificata calcolando lo scalare di Ricci nei due punti.

Per capire meglio la singolarità $\rho = 0$, è utile studiare cosa accade alla metrica con a fissato quando $M \to 0$:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2\cos^2(\theta)}{r^2 + a^2}dr^2 + \Big[r^2 + a^2\cos^2(\theta)\Big]d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{3.69}$$

La metrica ottenuta descrive lo spazio di Minkowski, la forma inusuale è legata alle coordinate con le quali lo stiamo descrivendo. Queste infatti sono coordinate ellissoidali.

È di facile dimostrazione passare dall'equazione (3.69) all'equazione classica dello spaziotempo di Minkowski in coordinate cartesiane mediante i seguenti cambi di coordinate:

$$\begin{cases} x = (r^2 + a^2)^{1/2}\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = (r^2 + a^2)^{1/2}\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \tag{3.70}$$

Le superfici con r costante sono degli ellissoidi confocali, per $r = 0$ questi degenerano nel disco:

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \quad z = 0 \tag{3.71}$$

A questo punto possiamo studiare cosa accade quando $\rho = 0$.

$$r^2 + a^2\cos^2(\theta) = 0 \tag{3.72}$$

L'equazione risulta soddisfatta per $r = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, che in base alle equazioni (3.70) rappresentano un anello di raggio a.

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad z = 0 \tag{3.73}$$

La singolarità lungo l'anello è l'unica singolarità di curvatura della metrica di Kerr.

3.5.2 Estensione massimale

Le coordinate cartesiane (x, y, z) mappano la metrica soltanto per valore positivi di r. Analizzando la metrica però ci si accorge che la funzione r assume anche valori negativi e lo spazio tempo definito

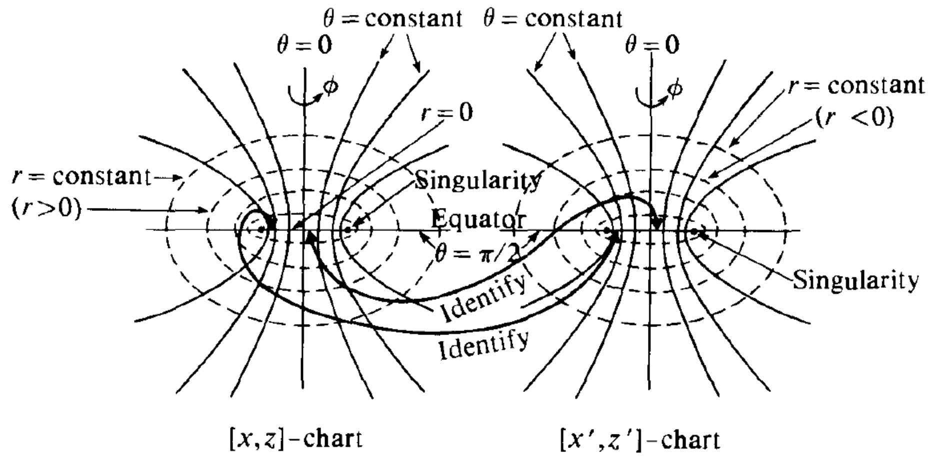

Figura 3.17: La massima estensione per la soluzine di Kerr

con la funzione r negativa è un altro spazio asintoticamente piatto. Si definiscono quindi delle nuove coordinate cartesiane (x', y', z') che mappano la regione dello spazio tempo per $r < 0$.

Studiando invece la singolarità della metrica $\Delta = 0$:

$$r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \tag{3.74}$$

Le radici sono:

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \tag{3.75}$$

Nel caso $GM > a$ le radici sono reali e distine ed è possibile dividere lo spazio-tempo in 3 regioni distinte:

$$\begin{array}{cc} A & r < r_- \\ B & r_- < r < r_+ \\ C & r > r_+ \end{array} \tag{3.76}$$

Dove nel primo caso, r può assumere anche valori negativi.

3.5.3 Diagramma di Penrose

Per costruire il diagramma di Penrose si procede analogamente a quanto fatto per Reissner-Nordstörm:

Lungo l'asse di simmetria $\theta = 0$, la metrica di Kerr assume la forma:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2}\left(dt - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta}dr\right)\left(dt + \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta}dr\right) \tag{3.77}$$

Fatto ciò si definiscono delle coordiante di cono luce:

$$\begin{cases} u_A = t - r^* & w_A = t + r^* \\ u_B = t + r^* & w_B = -t + r^* \\ u_C = t - r^* & w_C = t + r^* \end{cases} \tag{3.78}$$

Dove r^*ha la seguente forma:

$$r^* = \int \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} dr = r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| \tag{3.79}$$

Studiamo ora in dettagli cosa accade nelle 3 regioni:

- A (u_A, w_A)

  in questa regione r varia da $-\infty$ a r_-.

  Per $r \to -\infty$, $r^* - \infty$. Di conseguenza al limite le variabili (u_A, w_A) varranno $(+\infty, -\infty)$.

  Invece per $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$. Le variabili (u_A, w_A) assumeranno i valori $(-\infty, +\infty)$.

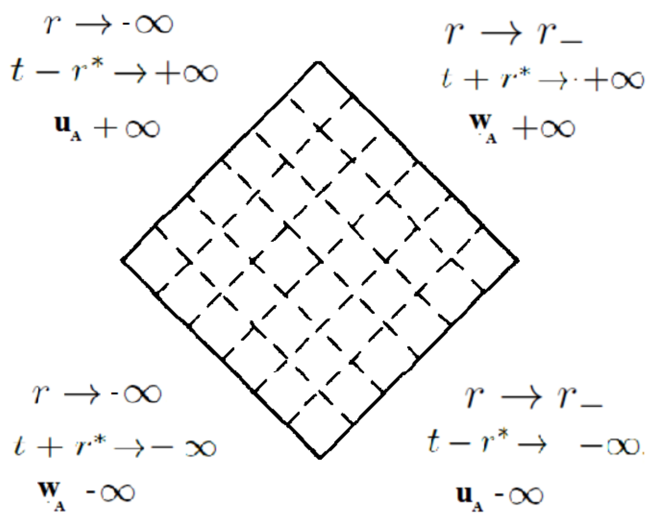

Figura 3.18: Diagramma compattificato per la regione A

In questa regione è presente anche la singolarità. Mandando la coordinata $r \to 0$, la coordinata r^*tenderà a un valore costante positivo $\tilde{r}$. Sostituendo nelle equazioni delle coordinate u_Ae u_B si ottiene un piano a 45 gradi che rappresenta quindi un'ipersuperficie di tipo tempo.

- B (u_B, w_B)

  in questa regione r varia da r_- ad r_+.

  Per $r \to r_-$, $r^* \to +\infty$. (u_B, w_B)=$(+\infty, +\infty)$.

  Invece per $r \to r_+$, $r^* \to -\infty$. $(u_B, w_B) = (-\infty, -\infty)$

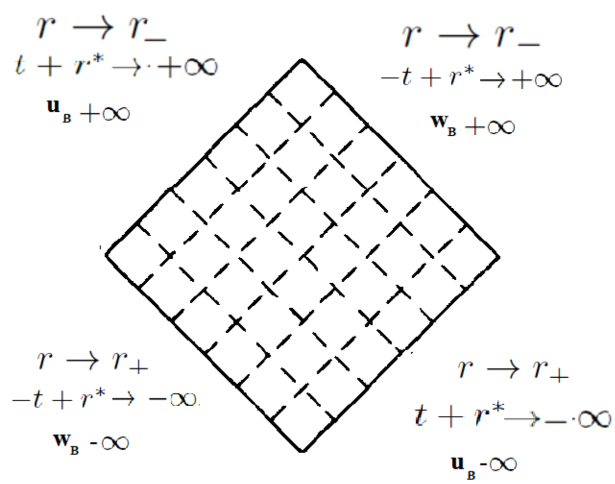

Figura 3.19: Diagramma compattificato per la regione B

- C (u_C, w_C)
  in questa regione r varia da r_+ ad $+\infty$.
  Per $r \to r_+$, $r^* \to -\infty$. $(u_C, w_C) = (+\infty, -\infty)$
  Invece per $r \to +\infty$, $r^* \to +\infty$. $(u_C, w_C) = (-\infty, +\infty)$

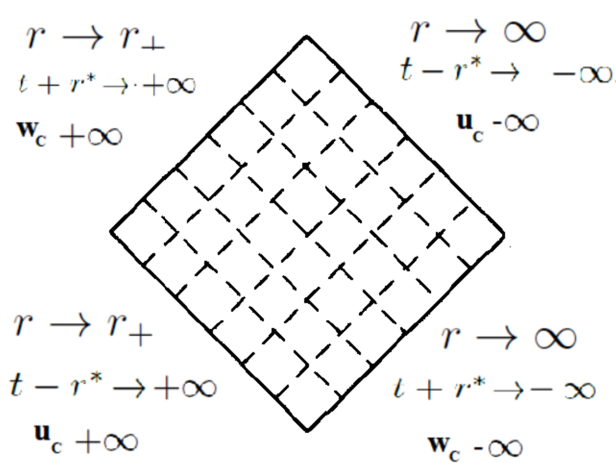

Figura 3.20: Diagramma compattificato per la regione C

A differenza della metrica di Reissner-Nordstörm, in quest caso le variabili (u, w) variano da $-\infty$ a $+\infty$ in tutte e le regioni, per questo motivo tutti i blocchi che compongono il diagramma saranno dei rombi:

Incollando le regioni A e B con $w_A \to u_B$ per $r \to r_-$ e le regioni B e C con $u_B \to w_C$ per $r \to r_+$ e definendo le regioni A',B',C' invertendo le coordinate $v \to -v$ e $w \to -w$ si ottiene il seguente diagramma:

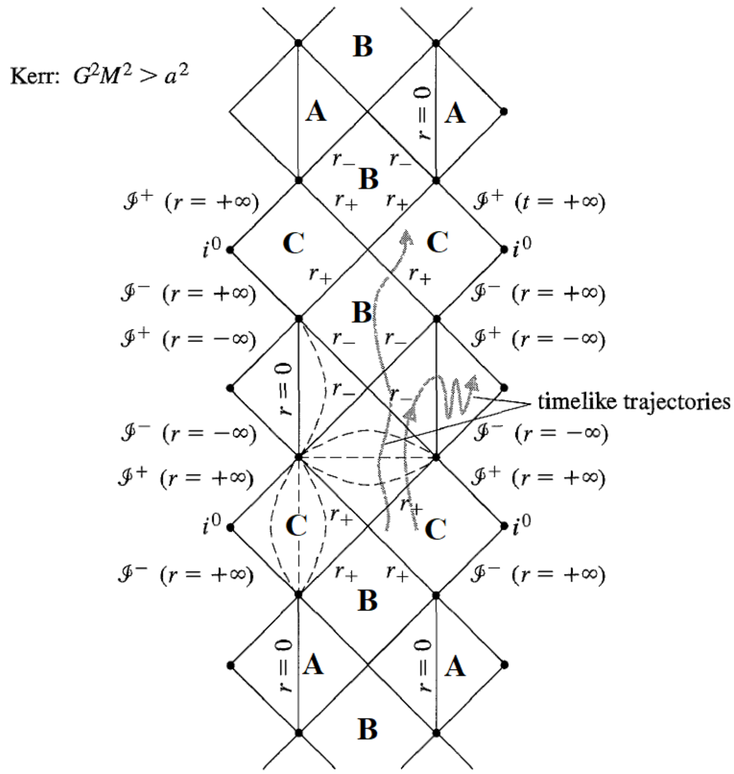

Figura 3.21: Diagramma di Penrose per la metrica di Kerr

Capitolo 4

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di studiare i diagrammi di Penrose-Carter, uno strumento imprescindibile per lo studio della struttra causale delle soluzioni della relatività generale.Nello specifico, sono stati derivati in dettaglio i diagrammi corrispondenti allo spazio-tempo di Minkowski, De-Sitter, Schwarzchild, Reissner-Nordstörm e Kerr. Queste soluzioni hanno un'importanza fondamentale in relatività generale, poiché ci permettono di descrivere lo spazio-tempo, sia a grande distanza da qualsiasi sorgente ad alta densità, grazie alla metrica di Minkowski, sia in presenza di studiare le tipologie più semplici di buchi neri. La soluzione di Schwarzschild infatti ci permette di studiare i buchi neri non rotanti e privi di carica, mentre le soluzioni di Reissner-Nordstörm e Kerr permettono rispettivamente di studiare i buchi neri carichi ma con momento angolare nullo e rotanti ma privi di carica.

Grazie ad aluni importanti teoremi formulati negli anni 60-70[1]sappiamo oggi che un buco nero formato dal collasso gravitazionale di materia, indipendentemente dalla configurazione iniziale in cui si trova la materia, si libererà di tutti i suoi gradi di libertà in eccesso, durante una fase nota come "ringdown". In seguito a questa fase, il buco nero creatosi dal collasso della materia sarà caratterizzato unicamente da 3 parametri: massa, carica elettrica e momento angolare.

Di conseguenza, grazie alle metriche descritte sopra, abbiamo studiato tutte le possibili soluzioni di un buco nero della relatività generale.

[1]Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald (1973). Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman. pp. 875–876. ISBN 978-0716703341. Archived from the original on 23 May 2016. Retrieved 24 January 2013.

Israel, Werner (1967). "Event Horizons in Static Vacuum Space-Times". Phys. Rev. 164 (5): 1776–1779. Bibcode:1967PhRv..164.1776I. doi:10.1103/PhysRev.164.1776.

Israel, Werner (1968). "Event horizons in static electrovac space-times". Commun. Math. Phys. 8 (3): 245–260. Bibcode:1968CMaPh...8..245I. doi:10.1007/BF01645859. S2CID 121476298.

Carter, Brandon (1971). "Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom". Phys. Rev. Lett. 26 (6): 331–333. Bibcode:1971PhRvL..26..331C. doi:10.1103/PhysRevLett.26.331.

Bhattacharya, Sourav; Lahiri, Amitabha (2007). "No hair theorems for positive Λ". Physical Review Letters. 99 (20): 201101. arXiv:gr-qc/0702006. Bibcode:2007PhRvL..99t1101B. doi:10.1103/PhysRevLett.99.201101. PMID 18233129. S2CID 119496541.

Mavromatos, N. E. (1996). "Eluding the No-Hair Conjecture for Black Holes". arXiv:gr-qc/9606008v1.

Zloshchastiev, Konstantin G. (2005). "Coexistence of Black Holes and a Long-Range Scalar Field in Cosmology". Phys. Rev. Lett. 94 (12): 121101. arXiv:hep-th/0408163. Bibcode:2005PhRvL..94l1101Z. doi:10.1103/PhysRevLett.94.121101. PMID 15903901. S2CID 22636577.

Pretorius, Frans (2016-05-31). "Viewpoint: Relativity Gets Thorough Vetting from LIGO". Physics. 9. doi:10.1103/physics.9.52.

Hawking, Stephen W.; Perry, Malcolm J.; Strominger, Andrew (2016-06-06). "Soft Hair on Black Holes". Physical Review Letters. 116 (23): 231301. arXiv:1601.00921. Bibcode:2016PhRvL.116w1301H. doi:10.1103/PhysRevLett.116.231301. PMID 27341223. S2CID 16198886.

Horowitz, Gary T. (2016-06-06). "Viewpoint: Black Holes Have Soft Quantum Hair". Physics. 9. doi:10.1103/physics.9.62.

4.1 Studio dei buchi neri nella fisica contemporanea

Lo studio dei buchi neri occupa un ruolo centrale nel panorama della ricerca scientifica odierna, poiché l'esistenza di questi oggetti, previsti per la prima volta da Schwarzschild nel 1915[2]è stata dimostrata incontrovertibilmente negli ultimi anni, tramite una serie di osservazioni, iniziate con l'osservazione di Sagittarius A*, un buco nero supermassivo dalla dimensione di circa 4 milioni di masse solari al centro della nostra galassia,simile a quelli presenti al centro delle galassie a spirale ed ellittiche, che non poteva essere osservato otticamente. L'osservazione di questo buco nero è valso ad Andrea Ghez e Reinhard Genzel il premio Nobel della fisica nel 2020.Successivamente nel 2015 sono state osservate per la prima volta delle onde gravitazionali provenienti dallo spazio profondo, consistenti con le predizioni della relatività generale dell'emissione di onde gravitazionali in seguito alla alla coalescenza di buchi neri di massa stellare. L'osservazione è stata effettuata dal consorzio LIGO/Virgo ed è valsa, nel 2017, il premio Nobel della fisica a Rainer Weiss, Kip Thorne e Barry Barish.

Infine nel 2019 la collaborazione Event Horizon Telescope ha riportato l'osservazione diretta,nelle bande radio dell'orizzonte degli eventi del buco nero supermassivo M87*, situato nella galassia Messier87. Fino ad ora questa è la dimostrazione più incalzante dell'esistenza dei buchi neri ed evidenzia l'urgenza di approfondire la nostra conoscenza di queste predizioni della relatività generale.

4.2 Problemi aperti

Nonostante le soluzioni di Schwarzchild, Reissner-Nordstörm e Kerr restituiscano una buona descrizone dello spazio tempo nei rispettivi casi, non sono esenti da difetti:

4.2.1 Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild presenta un problema relativo alla singolarà all'origine delle coordinate. Prendendo in prestito le parole di Stephen Hawking, la relatività cessa di essere predittiva in questa regione dello spazio tempo. In altre parole è impossibile studiare il destino e l'evoluzione di una particella che entra in questa regione. Per molti autori questa non è una situazione soddisfacente e si pensa che una maggiore comprensione della gravità quantistica aiuterebbe a far chiarezza sulla fisica riguardante le singolarità. Da un altro punto di vista invece la soluzione potrebbe essere considerata accettabile poiché la singolarita di Schwarzschild è nascosta da un orizzonte degli eventi, per cui qualsiasi effetto essa possa avere sulla materia resterà intrappolato all'interno dell'orizzonte senza poter in alcun modo influenzare l'universo al di fuori di esso.

4.2.2 Reissner-Nordstörm

La soluzione di Reissner-Nordstörm presenta diverse problematiche che minano l'interpretazione fisica della soluzione:

Le infinite regioni asintoticamente piatte, connesse a quella originale tramite degli orizzoni e la natura delle varie singolarità di tipo tempo rappresentano una forte discontinuità dallo spaziotempo di Schwarzschild.Introducendo una carica infinitesima all'interno di un orizzonte degli eventi di Schwarzschild, si trattasse anche solo di un elettrone, dovrebbe avvenire un cambiamento drammatico al suo interno, durante il quale la singolarità dovrebbe trasformarsi in una di tipo tempo e si genererebbero infinite regioni connesse causalmente a quella di origine.

[2]Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 7: 189–196. Bibcode:1916SPAW.......189S. Translation: Antoci, S.; Loinger, A. (1999). "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". arXiv:physics/9905030. Bibcode:1999physics...5030S. and Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 18: 424–434. Bibcode:1916skpa.conf..424S. Translation: Antoci, S. (1999). "On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory". arXiv:physics/9912033. Bibcode:1999physics..12033S.

Questo suggerisce che la soluzione potrebbe essere instabile, ossia soggetta a cambiamenti macroscopici in seguito a perturbazioni infinitesime.

4.2.3 Kerr

Infine la soluzione di Kerr, di cui abbiamo solamente mostrato il diagramma di Penrose, possiede alcune tra le proprietà più sorprendenti tra quelle discusse in questa tesi.

La metrica di Kerr infatti non nega l'esistenza di curve chiuse di tipo tempo. Ciò viola profondamente il principio di causalità: un osservatore potrebbe scegliere una traitteroia che interseca se stessa ad un istante di tempo precedente. Per molti autori ciò rappresenta una violazione inaccettabile dei principi base della fisica, sintomo che la soluzione di Kerr non sia propriamente fisica. Allo stato attuale non è possibile derivare la soluzione di Kerr a partire dal collasso gravitazionale di un fluido.probabilmente,se questo fosse possibile, risulterebbe che la regione interna all'orizzonte esterno non è ben descritta dalla metrica di Kerr. Il problema è tutt'oggi aperto.

Lo studio dei buchi neri rimane uno degli argomenti più affascinanti della fisica moderna e, in questo momento storico, caratterizzato dall'osservazione diretta di buchi neri reali, rappresenta uno dei rami della fisica più attuali. Le ricerche sui problemi concettuali associati alle soluzioni di buco nero della relatività generale sono, dunque, un tema di particolare rilevanza.

Bibliografia

[1] Stephen Hawking e George Ellis, The large scale structure of the space-time, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1973

[2] S.Chandrasekhar, Mathematical Theory of Black Holes, Oxford University Press, 1983

[3] H.C.Ohanian, Gravitation and space time, W.W. Norton and Company, 1976

[4] Sean M. Carrol,Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity,Cambridge University Press,2003

[5] Anthony Zee,Einstein Gravity in a Nutshell,Princeton Univ Pr,2013

[6] John M. Lee, Introduction to smooth manifolds,Springer Verlag,2000