UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Elettrodinamica in Relatività Generale

Relatore:
Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:
Raffaele Scala
Matr. $N85001267$

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

L'Elettrodinamica, nel corso della storia, ha rivestito un ruolo fondamentale sia per lo sviluppo del pensiero scientifico e della fisica come oggi la conosciamo, sia per le ricadute sul progresso tecnologico e su quello dell'intera umanità.

Benchè alcune proprietà elettriche di oggetti come l'ambra e dei magneti fossero già note ai Greci, l'Elettrodinamica si è sviluppata come materia quantitativa solo negli ultimi secoli. Gli studi che storicamente hanno dato inizio a una ricerca quantitativa nel campo dell'Elettromagnetismo infatti sono da attiribuire, tra gli altri, a Cavendish, con i suoi esperimenti sull'Elettrostatica portati avanti tra il 1771 ed il 1773; e a Coulomb con le sue monumentali ricerche pubblicate nel 1785. Da allora, sempre più studiosi si sono dedicati ai fini di comprendere una vastissima pletora di fenomeni fisici che riguardano l'interazione elettromagnetica. Nell'ottocento Faraday studiava l'effetto delle correnti variabili nel tempo e del campo magnetico, Maxwell nel 1864 pubblicò la sua famosa ricerca sulla teoria dinamica del campo elettromagnetico, mentre Hertz, nel 1888, pubblicò le sue scoperte sulle onde elettromagnetiche dando così una forte base sperimentale alla teoria di Maxwell [1]. A partire da questi studi si è giunti, nel secolo scorso, alla formulazione di una teoria quantistica dell'Elettrodinamica, la QED, grazie alle ricerche di numerosi scienziati tra cui Dyson, Tomonaga, Schwinger e Feynman.

L'importanza dell'Elettrodinamica risiede inoltre, nel fatto che, essa è la teoria che descrive l'interazione elettromagnetica, una delle quattro interazioni fondamentali, che ci consentono di analizzare i fenomeni fisici a tutte le scale di distanze ed energie, ed è, tra queste, quella dominante nella vita di tutti i giorni e, al giorno d'oggi, l'unica di cui si abbia una comprensione completa. Va da sé che lo studio di questa branca della fisica sia di fondamentale importanza per la comprensione dell'universo. Per di più le teorie che coinvolgono le altre interazioni fondamentali traggono la loro ispirazione proprio dall'Elettrodinamica. Pertanto questa teoria è diventata una sorta di paradigma per i fisici: un modello ideale che le altre teorie emulano. [2]

Come detto, l'interazione elettromagnetica è l'unica di cui si abbia una comprensione a trecentosessanta gradi; ma ovviamente anche per quella gravitazionale è stata formulata, nel tempo, una teoria classica (la legge di gravitazione universale di Newton) e una relativistica (la Relatività Generale di Einstein). A differenza dell'Elettrodinamica però, in questo caso, una teoria quantistica della gravità non è ancora stata formulata in maniera pienamente soddisfacente. Indipendentemente da ciò sia la teoria di Newton che quella di Einstein, all'epoca delle loro pubblicazioni, hanno portato una vera e proprio rivoluzione nel campo della fisica e non solo, sconvolgendo la visione che l'uomo aveva dell'universo e della sua collocazione al suo interno, aprendogli la strada per la comprensione delle dinamiche con cui i corpi macroscopici, per il solo fatto di possedere una massa, interagiscono tra loro. Secondo Newton i corpi massivi esercitano una forza "a distanza" tra di loro, la forza di gravità appunto, direttamente proporzionale alle masse dei corpi stessi. Con Einstein invece, secondo la Teoria della Relatività Generale, le masse non esercitano più tra loro una forza a distanza, concetto che viene dunque superato, ma a causa delle loro proprietà di massa-energia curvano lo spazio-tempo. Sarà la particolare struttura spaziotemporale determinata dalle masse a determinare, a sua volta, la dinamica dei corpi in esso presenti. Per parafrasare J. A. Wheeler, lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi; la materia dice allo spazio-tempo come curvarsi. [3]

Vista la gran rilevanza che, sia la teoria dell'Elettrodinamica sia quella della Relatività Generale hanno nel campo delle scienze fisiche, quello che inizialmente ci si propone di fare è di analizzare la prima, nella sua formulazione classica, ricavandone le equazioni fondamentali e deducendo le proprietà dell'oggetto fisico cardine della teoria: il campo elettromagnetico. Si giungerà poi al vero obiettivo di questa trattazione, ovvero studiare le proprietà dell'Elettrodinamica in presenza di gravità. Infatti in assenza di quest'ultima e quindi di corpi massivi, l'Elettrodinamica è fondata sulla teoria della Relatività Speciale, nella quale si ha a che fare con uno spazio-tempo geometricamente piatto. Secondo le equazioni formulate da Einstein, nell'ambito della Relatività Generale, invece, introducendo un campo gravitazionale in una certa regione dello spazio-tempo la geometria di quest'ultimo cambia. Ciò inevitabilmente ricade sul modo in cui sono scritte le equazioni di un campo elettromagnetico ivi presente. In altre parole, poichè il campo gravitazionale modifica lo spazio-tempo, le equazione dell'Elettrodinamica dovranno essere rese in un formalismo adatto al cambio della geometria. Si ricaveranno, allora, queste nuove equazioni, raffrontandole con quelle note dalla formulazione classica e per di più si ricaveranno delle soluzioni che soddisfino, in maniera congiunta, le equazioni sia del campo elettromagnetico che di quello gravitazionale.

Capitolo 1

Elettrodinamica nello spazio-tempo piatto

In questa prima sezione si vogliono delineare i principali argomenti che riguardano l'Elettrodinamica classica considerando la sua formulazione nel formalismo covariante (indipendente dai riferimenti adottati), utilizzando in particolare i principi della meccanica lagrangiana. Il tutto va formulato all'interno non più di uno spazio tredimensianle "classico" ma nello spazio-tempo quadridimensinale in cui il tempo, in accordo con la teoria della Relatività Speciale, assurge a vera e propria componente fisica necessaria per descrivere i fenomeni. L'entità geometrica che permette di descrivere uno spazio-tempo piatto, in cui si considerano solo sistemi di riferimento inerziali e che è dunque strettamente legata alla Relatività Speciale è il cronotopo di Minkowski. [4]

Quest'ultimo si può descrivere come una varietà differenziabile piatta quadridimensianale sulla quale è definita una metrica, detta appunto di Minkowski, il cui tensore metrico si può rappresentare in forma matriciale come:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

da cui si ottiene l' elementi metrico:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \tag{1.2}$$

dove, come varrà anche per il prosieguo, gli indici greci $\alpha, \beta = (0, 1, 2, 3)$ stanno ad indicare tutte le quattro componenti spaziotemporali, mentre gli indici latini $i = (1, 2, 3)$ indicheranno esclusivamente le componenti spaziali. Dalla metrica si vede che la geometria dello spazio-tempo piatto, in assenza di campi gravitazionali, è non euclidea avendo una segnatura opposta tra le componenti spaziali e quella temporale. [5]

In questo spazio-tempo si dovranno definire le quantità fisiche che descrivono il campo elettromagnetico in forma tensoriale, al fine di avere una teoria che sia covariante. Prima di ciò è però utile vedere il comportamento che le particelle cariche hanno quando interagiscono col campo e, per fare ciò, bisogna identificare il funzionale d'azione e dunque la lagrangiana che descrive tale sistema.

1.1 L'azione di una particella in un campo elettromagnetico

L'azione di una particella in moto in un campo elettromagnetico è composta da due termini: l'azione della particella libera e di un termine che descrive l'interazione di questa col campo. Per quanto riguarda il primo termine è noto dalla teoria della Relatività Speciale che esso sia del tipo [6]:

$$S = -mc \int_a^b ds$$

mentre, per quanto riguarda il secondo, esso deve contenere sia le grandezze che caratterizzano la particella sia quelle che caratterizzano il campo. In particolare le proprietà della particalla sono definite dalla sua carica elettrica e, invece quelle del campo da un quadrivettore A_α detto quadripotenziale. Queste rientrano nell'azione come:

$$-\frac{e}{c} \int_a^b A_\alpha \, dx^\alpha .$$

Il fattore $1/c$ è stato qui introdotto per comodità [7]. Come si evince già dall'integrale, le componenti del quadripotenziale sono funzioni delle coordinate e del tempo e, nello specifico, la componente temporale è il potenziale scalare del campo $A^0 = \varphi$ mentre, le tre componenti spaziali rappresentano il potenziale vettore tridimensionale $\mathbf{A}$. In questo modo si ottiene:

$$A^\alpha = (\varphi, \mathbf{A}) . \tag{1.3}$$

Da ciò si può scrivere l'azione per una carica in un campo elettromagnetico che risulta essere:

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_\alpha\, dx^\alpha \right) \tag{1.4}$$

che si può riscrivere separando le componente spaziali e temporali

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - e\varphi\, dt \right) \tag{1.5}$$

e quindi introducendo la velocità della particella $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi \right) dt. \tag{1.6}$$

L'espressione integranda del funzionale d'azione è la lagrangiana per una carica in un campo elettromagnetico:

$$L = -mc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi, \tag{1.7}$$

che differisce da quella della particella libera per il termine $-\frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi$ che descrive l'interazione della carica col campo. Dalla lagrangiana si può ricavare l'impulso tridimensionale generalizzato della particella avente componenti $\frac{\partial L}{\partial v^i}$. Derivando si trova infatti:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{1.8}$$

Tramite trasformata di Legendre [8] si può ricavare l'hamiltoniana della particella:

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \end{aligned}$$

L'hamiltoniana va espressa mediante l'impulso, e non la velocità. A tal fine si nota che la relazione tra $\mathscr{H} - e\varphi$ e $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ è la stessa che intercorre tra $\mathscr{H}$ e $\mathbf{p}$ in assenza di campo e da ciò si ottiene:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left| \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right|^2} + e\varphi. \tag{1.9}$$

A partire dal funzionale d'azione si possono ricavare le equazioni del moto di una particella tramite il principio di minima azione [8] per il quale:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_\alpha \, dx^\alpha \right) = 0 \tag{1.10}$$

e tenendo presente che $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha$ allora

$$\delta S = -\int_a^b \left[mc \frac{d\,(\delta x^\alpha)\, dx_\alpha}{ds} + \frac{e}{c} A_\alpha \, d\,(\delta x^\alpha) + \frac{e}{c} \delta A_\alpha \, dx^\alpha \right] = 0.$$

Integrando per parti i primi due termini dell'espressione e introducendo la quadri-velocità $u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}$ si ha

$$\int_a^b \left(mcdu_\alpha \, \delta x^\alpha + \frac{e}{c} dA_\alpha \, \delta x^\alpha - \frac{e}{c} \delta A_\alpha \, dx^\alpha \right) - \left(mcu_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha \right) \delta x^\alpha \Big|_a^b = 0.$$

Il secondo termine dell'uguaglianza è nullo essendo gli estermi fissati. D'altra parte:

$$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \delta x^\beta, \;\; dA_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta,$$

di conseguenza si ottiene, dopo alcuni passaggi matematici

$$\int_a^b \left(mcdu_\alpha \, \delta x^\alpha + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \, dx^\beta \, \delta x^\alpha - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \, dx^\alpha \, \delta x^\beta \right) = 0.$$

Riscrivendo il primo sapendo che $du_\alpha = \frac{du_\alpha}{ds} ds$, il secondo e il terzo con $dx^\alpha = u^\alpha ds$ e scambiando di posto gli indici α e β nel terzo si ottiene:

$$\int_a^b \left[mc \frac{du_\alpha}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right) u^\beta \right] \, ds \, \delta x^\beta = 0.$$

Essendo la variazione delle componenti arbitraria, ne segue che l'integrando è nullo:

$$mc \frac{du_\alpha}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right) u^\beta = 0. \tag{1.11}$$

Si definisce, dunque, il tensore antisimmetrtico $F_{\alpha\beta}$, detto tensore elettromagnetico come:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha; \tag{1.12}$$

così facendo l'equazione diventa

$$mc\frac{du_\alpha}{ds} = \frac{e}{c}F_{\alpha\beta}u^\beta, \tag{1.13}$$

che è l'equazione del moto di una carica, immersa in un campo elettromagnetico, in forma quadridimensionale.

Una volta note le forme del campo elettrico $\mathbf{E}$ e del campo magnetico $\mathbf{B}$, che si possono ricavare dallo studio dell'equazione del moto in forma tridimensionale, in funzione del potenziale vettore e del potenziale scalare: [9]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \;\; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1.14}$$

è facile, esplicitando le componenti del tensore elettromagnetico, vedere che:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Se si passa in notazione tridimensionale, si può infatti vedere come le tre componenti spaziali della (1.13) restituiscano l'equazione vettoriale del moto data dalla forza di Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{1.15}$$

mentre la componente temporale restituisce l'equazione del lavoro, data dalla derivata temporale dell'energia della particella libera:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{1.16}$$

1.2 Le equazioni di Maxwell

Abbiamo trovato la quantità tensoriale tramite cui è possibile descrivere il campo elettromagnetico, ovvero il tensore elettromagnetico. Questo ci permette di ricavare la coppia di equazioni di Maxwell omogenee, che non hanno cioè un termine di sorgente del campo. Vediamo inizialmente come ricavarle dalle definizini dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Dalle espressioni (1.14), tenendo conto che il rotore di un gradiente e la divergenza di un rotore sono nulli, si ricava:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{1.17}$$

mentre facendo la divergenza del campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.18}$$

Queste due si possono facilmente racchiudere in un'unica espressione utilizzando la notazione quadridimensionale, quindi sfruttando la definizione del tensore elettromagnetico (1.12) si può vedere che le equazioni (1.17) e (1.18) sono equivalenti a:

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0. \tag{1.19}$$

In particolare per $\alpha, \beta, \gamma = (1, 2, 3)$ si ottiene l'equazione scalare (1.18), mentre per $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 2)\,; (0, 2, 3)\,; (0, 1, 3)$ si ottiene l'equazione vettoriale (1.17). Per tutte le altre combinazioni dei tre indici il risultato è identicamente nullo.

Le equazioni di Maxwell omogenee non sono però sufficienti per determinare completamente il campo. Esse infatti sono state ricavate, considerando un sistema composto da un campo elettromagnetico e da particelle in esso immerse, tenendo conto solo della parte di azione che riguardava le particelle libere:

$$S_m = -\sum mc \int ds \tag{1.20}$$

e quella dovuta all'interazione delle particelle con il campo:

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_\alpha \, dx^\alpha, \tag{1.21}$$

dove gli estremi di integrazione qui, come nel seguito, saranno omessi per semplicità. Non è stato invece preso in considerazione il termine dell'azione che dipende esclusivamente dal campo, in assenza di cariche, che si indicherà con S_f.

Per determinare la forma di questo termine si considera una proprietà fondamentale del campo, ovvero il principio di sovrapposizione. Esso afferma che il campo generato da un sistema di cariche è dato dalla somma vettoriale dei campi generati da ciascuna carica.

Ogni soluzione dell'equazione del campo è, a sua volta, un campo che può essere generato in natura e, in virtù del principio di sovrapposizione, la somma di due campi di questo tipo deve essere ancora un campo realizzabile in natura e quindi deve soddisfare le equazioni del campo.

Come è noto le equazioni differenziali lineari sono proprio contraddistinte dalla propietà che la somma di due soluzione è ancora soluzione; quindi le equazioni di un campo devono essere equazioni differenziali lineari. Da ciò risulta che sotto il segno di integrazione di S_f si deve avere un'espressione quadratica nei campi. Così facendo le equazioni del campo, che si ottengono variando l'azione, abbassando così di un grado l'espressione integranda, saranno lineari.

Dell'espressione per l'azione S_f non può far parte il quadripotenziale del campo, come vedremo esso difatti non è definito univocamente; dunque l'integrando sarà una funzione del tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$. L'azione deve essere, inoltre, uno scalare e altrettanto l'integrando. Questo scalare non potrà contenere le derivate del tensore in quanto ciò vorrebbe dire avere le derivate seconde del quadripotenziale che, in questo frangente, svolge il ruolo di coordinata e, come è noto, la lagrangiana può dipendere solo dalle coordinate (A^α) e dalle sue derivate rispetto al tempo ma non dalle sue derivate seconde.

Pertanto vediamo quali sono gli scalari candidati a svolgere il ruolo della funzione di Lagrange. A partire da $F^{\alpha\beta}$si possono costruire due scalari, ovvero $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, che è un vero scalare, e $e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, che è uno pseudoscalare, essendo $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ lo pseudotensore unità completamente antisimmetrica (analogo al simbolo di Levi-Civita ma con quattro indici). Quest'ultimo si può scrivere in termini di una divergenza quadridimensionale:

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 4\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(e^{\alpha\beta\mu\nu}A_\beta\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu\right).$$

Questa divergenza, sotto il segno di integrale, darebbe un risultato nullo e quindi non influenzerebbe l'equazione. [7]

Lo scalare che stavamo cercando è allora:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2\left(B^2 - E^2\right). \tag{1.22}$$

L'azione avrà quindi la forma

$$S_f = a\iint F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,dV\,dt, \quad dV = dx\,dy\,dz,$$

dove a è una costante arbitraria. Il campo $\mathbf{E}$ contiene la derivata $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ ed è facile vedere che $\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ (e quindi E^2) debba comparire nell'azione con il segno positivo.

Infatti, se così non fosse, si potrebbe, facendo variare abbastanza velocemente $\mathbf{A}$ con il tempo (nell'intervallo considerato), rendere S_f negativo con valore assoluto arbitrariamente grande. In tal modo S_f non potrebbe avere un minimo, così come lo esige il principio di minima azione.

Il parametro a sarà dunque negativo e il suo valore numerico dipenderà dal sistema di unità di misura considerato. Nel sistema di unità di misura Gaussiano, che si sta adottando, a è una grandezza adimensionale che vale $-\frac{1}{16\pi}$. [7]

L'azione per il campo assume dunque la forma

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\, d\Omega, \quad d\Omega = cdt\, dV \tag{1.23}$$

oppure in forma tridimensionale:

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint \left(E^2 - B^2\right)\, dV\, dt. \tag{1.24}$$

La lagrangiana per il campo elettromagnetico risulterà quindi come:

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int \left(E^2 - B^2\right)\, dV, \tag{1.25}$$

mentre l'azione totale per un campo elettromagnetico contenete cariche è

$$S = S_f + S_m + S_{mf}$$
$$S = -\sum\int mc\, ds - \sum\int \frac{e}{c}A_\alpha\, dx^\alpha - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\, d\Omega, \tag{1.26}$$

dove le sommatorie sono estese a tutte le cariche presenti.

Tramite questo funzionale d'azione si possono ricavare le equazioni di Maxwell non omogenee, non prima però di aver definito gli imporatanti concetti di densità di carica e quadricorrente.

Si può infatti introdurre il concetto di densita di carica ρ, considerando le cariche distribuite in maniera continua, in modo tale che $\rho\, dV$ sia la carica all'interno del volumetto dV e $\int \rho\, dV$ sia la carica all'interno di tutto il volume considerato. C'è da dire però che le cariche sono in realtà puntiformi e per considerarle come tali, tramite la densità di carica appena definita, si esprime, per un sistema di cariche, ρ mediante la δ di Dirac nel seguente modo [10]:

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = \sum_i e_i\delta\left(\boldsymbol{r} - \mathbf{r}_i\right) \tag{1.27}$$

dove e_i sono le cariche puntiformi e $\mathbf{r}_i$ i loro raggi vettori. La carica elettrica per come è definita rappresenta un invariante a differenza della densità di carica, pertanto solo il prodotto $de = \rho\, dV$ è uno scalare invariante. Da questa uguaglianza si ottiene:

$$de\, dx^\alpha = \rho\, dV\, dx^\alpha = \rho\, dV\, dt\, \frac{dx^\alpha}{dt}$$

dove a primo membro si ha un quadrivettore. Di conseguenza anche all'ultimo membro c'è un quadrivettore oltre allo scalare $\rho\, dV$, ossia la quadricorrente

$$j^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} \tag{1.28}$$

le cui componenti spaziali costituiscono la densità tridimensionale di corrente $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ mentre quella temporale è data dalla quantità ρc. Quindi:

$$j^\alpha = (c\rho, \mathbf{j})\,. \tag{1.29}$$

In notazione quadridimensionale la carica contenuta in tutto il volume è allora

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{c}\int j^0\, dV = \frac{1}{c}\int j^\alpha\, dS_\alpha \tag{1.30}$$

dove, nell'ultimo integrale, dS_α rappresenta l'elemento di ipersuperficie e l'integrazione va estesa a tutto l'iperpiano quadridimensionale ortogonale a x^0.

Per gli scopi futuri, introduciamo la quadricorrente nell'espressione dell'azione data dall'interazione delle cariche col campo (1.21), sostituendo alle cariche la distribuzione continua di carica:

$$S_{mf} = -\frac{1}{c}\int \rho A_\alpha\, dx^\alpha\, dV = -\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^\alpha}{dt} A_\alpha\, dV\, dt = -\frac{1}{c^2}\int A_\alpha j^\alpha\, d\Omega.$$

L'azione S assume allora la forma

$$S = -\sum \int_a^b mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_\alpha j^\alpha\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\, d\Omega. \tag{1.31}$$

A partire dalla densità di carica e di corrente si può trovare l'equazione di continuità della carica

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oiint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f} \tag{1.32}$$

dove a primo membro si ha la variazione col tempo della carica contenuta nel volume V e a secondo membro il flusso di carica uscente dalla superficie contenente il volume stesso; il segno meno indica che a un flusso uscente positivo corrisponde una diminuzione di carica nel volume.

L'equazione si può scrivere anche in forma differenziale, sfruttando il teorema della divergenza

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{1.33}$$

e, sfruttando la notazione quadridimensionale, essa diventa l'equazione

$$\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{1.34}$$

È interessante notare che a partire da quest'ultima equazione si possa dimostrare la legge di conservazione della carica. La carica contenuta in tutto lo spazio, come già visto si può scrivere come

$$\frac{1}{c}\int j^\alpha \, dS_\alpha,$$

dove l'integrazione è estesa a un iperpiano ortogonale a x^0. In un altro istante la carica totale sarà rappresentata dallo stesso integrale, ma considerando un altro iperpiano ortogonale a x^0. La differenza tra questi due integrali, che rappresenta la differenza di carica tra due istanti diversi in tutto lo spazio, si può scrivere come $\frac{1}{c}\oint j^\alpha \, dS_\alpha$, dove l'integrazione è esteso a tutta l'ipersuperficie chiusa delimitata dai due piani sopracitati (in realtà, l'integrale, differisce da questa differenza per la presenza di un termine di integrazione lungo l'ipersuperficie «laterale», posta indefinitamente lontano, che risulta però essere nullo data l'assenza di cariche all'infinito). Sfruttando il teorema della divergenza e l'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{1}{c}\oint j^\alpha \, dS_\alpha = \int \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} \, d\Omega = 0. \tag{1.35}$$

La carica dunque si conserva. Si vuole inoltre sottolineare che la dimostrazione resta ancora valida per due integrali estesi a due ipersuperfici infinite arbitararie, a patto che racchiudano in sé tutto lo spazio tridimensionale. [7]

Abbiamo ora tutti gli strumenti per ricavare le ultime due equazioni di Maxwell e per farlo verrà, ancora una volta, sfruttato il principio di minima azione. A tal proposito bisogna variare i potenziali e considerare il moto come dato, a differenza di come fatto per ricavare le equazioni del moto delle particelle in cui il campo era dato e le traiettorie erano variabili. Ora le nostre variabili sono i potenziali stessi. Di conseguenza, nella (1.31) la variazione del termine di particella libera S_m , che non dipende dal campo, risulta nulla ottenendo:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c}j^{\alpha}\delta A_{\alpha} + \frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta}\right) d\Omega = 0$$

dove sostituendo in $\delta F_{\alpha\beta}$ l'espressione $F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}$ e integrando il secondo termine per parti risulta:

$$\delta S = \left[-\frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c}j^{\alpha} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}\right) \delta A_{\alpha}\, d\Omega\right] - \frac{1}{4\pi c}\int F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha}\, dS_{\beta}\Big|_{x'}^{x''} = 0.$$

Gli estremi di integrazione del secondo termine rispetto alle coordinate sono all'infinito dove il campo è nullo mentre agli estremi temporali, istante iniziale e finale, la variazione dei campi è nulla in quanto questi sono fissati. Il secondo termine è quindi nullo; si trova pertanto:

$$\int \left(\frac{1}{c}j^{\alpha} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}\right) \delta A_{\alpha}\, d\Omega = 0.$$

Per il principio di minima azione la variazione del potenziale è arbitaria e dunque di ottiene

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = -\frac{4\pi}{c}j^{\alpha} \tag{1.36}$$

che è la forma quadridimensionale delle due equazioni di Maxwell non omogenee. Si verifica facilmente inoltre che, per $\alpha = i = 1, 2, 3$ si ottiene che

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1.37}$$

e per $\alpha = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{1.38}$$

Con la (1.36) abbiamo ricavato le ultime due equazioni di Maxwell che, insieme alla (1.19), ci permettono di descrivere, nello spazio tempo piatto, il campo elettromagnetico tramite solo due quantità: la quadricorrente, che descrive le sorgenti del campo, e il tensore elettromagnetico che rappresenta i campi generati da queste sorgenti.

1.3 Energia e impulso del campo elettromagnetico

Vogliamo ora analizzare gli aspetti che riguardano il bilancio energetico in un sistema in cui siano presenti il campo e le sorgenti. Come è facile intuire, questo lo si può fare a partire dalle due quantità fisiche definite nel precedente paragrafo, tramite le equazioni di Maxwell che descrivono come queste dipendano tra loro.

Per iniziare a fare delle valutazioni nel caso tridimensionale, si considerano le equazioni (1.17) e (1.37) e si moltiplica scalarmente la prima per $\mathbf{B}$ e la seconda per $\mathbf{E}$; si effettua una somma membro a membro e, tramite semplici manipolazioni matematiche, si ottiene:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{1.39}$$

dove $W = \frac{E^2+B^2}{8\pi}$ rappresenta la densità di energia del campo elettromagnetico all'interno di un certo volume dV e $\mathbf{S}$ è il vettore di Poynting, che rappresenta il flusso di energia (per unità di superficie e tempo) uscente dal volume. Ciò è evidente ricavando l'equazione integrale corrispondente alla (1.39) nella quale, sfruttando il teorema della divergenza per $\nabla \cdot \mathbf{S}$, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int W\,dV + \int j \cdot \mathbf{E}\,dV = -\oiint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}.$$

A primo membro c'è la variazione di energia del campo elettromagnetico $\frac{\partial}{\partial t}\int W\,dV$ sommata alla variazione di energia (sia cinetiche che a riposo) delle particelle all'interno del volume in quanto, come si evince dalla (1.16), considerando le cariche puntiformi, si ha:

$$\int j \cdot \mathbf{E}\,dV = \sum e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum \mathscr{E}.$$

Al secondo membro invece c'è l'energia, per unità di tempo, uscente dal volume ma col segno negativo dal momento che, a un flusso uscente corrisponde una perdita di energia all'interno volume considerato.

Dopo queste valutazioni fatte nel caso tridimensionale si vuole fare una trattazione più genereale che riguardi, non solo gli aspetti energetici del campo, ma anche l'impulso da esso generato, introducendo il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico.

In questo caso, per semplificare i calcoli, nel ricavare il tensore si opererà nel caso generale senza concretizzare il sistema fisico specifico, per poi, una volta ottenuto il risultato finale, andarne a specificare gli aspetti per quanto concerne il campo elettromagnetico. Inoltre si vuole sottolineare che, come si vedrà in seguito, il tensore energia-impulso è utilizzato, nell'ambito della teoria della Relatività Generale, per descrivere la 'materia' in senso generale, quindi includendo anche la radiazione elettromagnetica, che porta alla curvatura della struttura spaziotemporale.

Consideriamo un sistema il cui integrale d'azione ha la forma

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^\alpha} \right) dV\, dt = \frac{1}{c} \int \Lambda\, d\Omega \tag{1.40}$$

dove la densità di lagrangiana Λ è una certa funzione delle grandezze q, che determinano lo stato del sistema, e delle loro derivate rispetto alle coordinate e al tempo. Le «equazioni del moto» (cioè le equazioni del campo, se si tratta di un campo), si ottengono dal principio di minima azione, variando S.

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q_{,\alpha} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \right] d\Omega = 0.\end{aligned}$$

Il secondo termine si annulla applicando il teorema della divergenza e si trovano allora le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0. \tag{1.41}$$

Sostituendo questa relazione in quella che si ottiene calcolando $\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha}$ e notando che $q_{,\alpha,\beta} = q_{,\beta,\alpha}$ si ricava:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \right) q_{,\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \frac{\partial q_{,\alpha}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(q_{,\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \right),$$

da cui ponendo

$$T^\beta_\alpha = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} q_{,\alpha} - \delta^\beta_\alpha \Lambda \tag{1.42}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial T^\beta_\alpha}{\partial x^\beta} = 0. \tag{1.43}$$

Come gia si è visto per la (1.35) nel caso della conservazione della carica, l'annullamento della divergenza quadridimensionale di un tensore (in quel caso era un quadrivettore) implica la conservazione dell'integrale $\int T^{\alpha\beta}\, dS_\beta$ su una ipersuperficie che racchiude in sé tutto lo spazio tridimensionale. Ciò è equivalente a dire che il vettore

$$P^\alpha = b \int T^{\alpha\beta}\, dS_\beta,$$

dove b è una certa costante, si conserva.

Questo è il vettore che deve essere identificato con il quadrimpulso del sistema. Si sceglie dunque il fattore costante davanti all'integrale in maniera tale che la componente temporale P^0 sia uguale all'energia del sistema divisa per c. Integrando sull'iperpiano $x^0 = costante$ si ottiene:

$$P^0 = b \int T^{0\beta}\, dS_\beta = b \int T^{00}\, dV.$$

D'altronde in virtù della (1.42)

$$T^{00} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda,$$

da cui, in base alla legge che lega la lagrangiana all'energia, si deduce che, essendo Λ la densità di lagrangiana, T^{00} è la densità di energia e $\int T^{00}\, dV$ è l'energia totale del sistema. Di conseguenza $b = \frac{1}{c}$ e

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha\beta}\, dS_\beta. \tag{1.44}$$

Il tensote $T^{\alpha\beta}$è detto tensore energia-impulso del sistema.

Si noti che la sua definizione non è univoca infatti anche qualunque altro tensore del tipo

$$T^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\psi^{\alpha\beta\gamma}, \;\; \psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta} \tag{1.45}$$

soddisfa l'equazione di conservazione (1.43), essendo $\psi^{\alpha\beta\gamma}$ antisimmetrico rispetto lo scambio di β e γ. Questa sostituzione non cambia però il quadrimpulso infatti:

$$\int \frac{\partial \psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}\, dS_\beta = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}\, dS_\beta - \frac{\partial \psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\beta}\, dS_\gamma \right) = \frac{1}{2} \int \psi^{\alpha\beta\gamma}\, df_{\beta\gamma},$$

dove l'ultimo integrale è esteso alla superficie che avvolge l'ipersuperficie S_β, che racchiude tutto lo spazio, alla quale è esteso l'integrale a primo membro. Questa superficie, dunque, si trova all'infinito, dove non esistono né campi né particelle, facendo sì che l'integrale si annulli. Ciò rende la definizione del quadrimpulso univoca. [7]

Per definire univocamente il tensore energia-impulso si può imporre la condizione che il tensore momento angolare, $M^{\alpha\beta} = \sum \left(x^\alpha P^\beta - x^\beta P^\alpha\right)$, si esprima come:

$$M^{\alpha\beta} = \int \left(x^\alpha \, dP^\beta - x^\beta \, dP^\alpha\right) = \frac{1}{c}\int \left(x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}\right) \, dS_\gamma,$$

cioè imponendo che la sua densità si esprima mediante la densità di impulso tramite la formula usuale. Come noto, la legge di conservazione del momento angolare può essere espressa annullando la divergenza dell'integrando:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}\right) = 0,$$

ottenendo così la condizione di simmetria del tensore energia impulso:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \tag{1.46}$$

Vediamo ora cosa rappresentano le componenti del tensore energia-impulso e, per far ciò, integriamo P^α sull'iperpiano $x^0 = costante$:

$$P^\alpha = \frac{1}{c}\int T^{\alpha 0} \, dV.$$

Le componenti spaziali di P^α formano il vettore tridimensionale impulso e quella temporale rappresenta l'energia del sistema; in altre parole

$$\frac{1}{c}T^{10}, \;\; \frac{1}{c}T^{20}, \;\; \frac{1}{c}T^{30}$$

sone le componenti del vettore densità d'impulso e

$$W = T^{00}$$

è la densità di energia.

Per precisare il senso delle altre componenti del tensore scriviamo le equazioni di conservazione del tensore energia-impulso in componenti:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0, \;\; \frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0. \tag{1.47}$$

Dalla prima integrando in un certo volume e utilizzando il teorema della divergenza si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\, dV = -c\int T^{0i}\, df_i,$$

dove l'integrale a secondo membro è esteso alla superficie che delimita il volume V. Il primo membro rappresenta la variazione nel tempo dell'energia contenuta nel volume, di conseguenza il secondo sarà l'energia che fuoriesce da questo volume nell'unità di tempo. Chiameremo il vettore $\mathbf{S}$ (con chiaro riferimento al vettore di Poynting del campo elettromagnetico) quello di componenti:

$$cT^{01},\ \ cT^{02},\ \ cT^{03}.$$

Si noti che, grazie al carattere tensoriale di $T^{\alpha\beta}$, si ottiene automaticamente un'uguaglianza tra il flusso di energia $(\mathbf{S})$ e l'impulso moltiplicato per c^2.

Analogamente dalla seconda equazione (1.47) troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c}T^{i0}\, dV = -\int T^{ij}\, df_j$$

dove a primo membro abbiamo la variazione nell'unità di tempo dell'impulso e al secondo si ottiene l'impulso uscente dal volume nell'unità di tempo. Le componenti del tensore T^{ij}, detto tensore degli sforzi, resituiranno il flusso d'impulso uscente e lo indicheremo con σ_{ij} [7]. La componente σ_{ij} di questo tensore è l'i-esima componente dell'impulso passante attraverso l'unità di superficie ortogonale a x^j nell'unità di tempo.

Rappresentando $T^{\alpha\beta}$ in forma matriciale si ottiene infine:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & {}^{S_x}\!/_c & {}^{S_y}\!/_c & {}^{S_z}\!/_c \\ {}^{S_x}\!/_c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ {}^{S_y}\!/_c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ {}^{S_z}\!/_c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

Una volta analizzate le proprietà generali del tensore energia-impulso siamo interessati a vedere cosa queste indichino nel caso specifico del campo elettromagnetico in assenza di cariche.

In virtù dell'equazione (1.23) la densità di lagrangiana Λ per il campo elettromagnetico è:

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{1.49}$$

Le grandezze q da cui dipende Λ sono, in questo caso, le componenti del quadripotenziale, cosicchè il tensore energia-impulso (1.42) risulti:

$$T_{\alpha}^{\beta} = A_{\mu,\alpha}\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{\mu,\beta}} - \delta_{\alpha}^{\beta}\Lambda$$

da cui, essendo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{\mu,\beta}} = -\frac{1}{4\pi}F^{\beta\mu}$$

troviamo:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}A^{\mu,\alpha}F_{\mu}^{\beta} + \frac{1}{16\pi}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Questo tensore non è simmetrico rispetto allo scambio di α e β, allora per simmetrizzarlo lo si riscrive, esplicitando $A^{\mu,\alpha}$ in funzione del tensore elettromagnetico, come:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi}\left(\eta^{\beta\nu}F_{\nu\mu}F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4\pi}\eta^{\beta\nu}F_{\nu\mu}A^{\alpha,\mu} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(-\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) - \Theta^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Il primo termine è simmetrico rispetto allo scambio di α e β mentre il secondo lo esplicitiamo come:

$$\begin{aligned} \Theta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi}\eta^{\beta\nu}F_{\nu\mu}A^{\alpha,\mu} \\ &= \frac{1}{4\pi}F^{\beta\nu}A^{\alpha}{}_{,\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(A^{\alpha}F^{\beta\nu}\right)_{,\nu} = \psi^{\alpha\beta\nu}{}_{,\nu} \end{aligned}$$

che è antisimmetrico rispetto allo scambio di ν e β, cosa che rende la seguente sostituzione analoga a quella dell'equazione (1.45):

$$T_{old}^{\alpha\beta} \to T_{new}^{\alpha\beta} = T_{old}^{\alpha\beta} + \psi^{\alpha\beta\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(-\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right).$$

Ciò in virtù del fatto che la legge di conservazione $\frac{\partial T_{new}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}$ è ancora valida. [1]

Pertanto si ottiene un tensore energia-impluso simmetrico e a traccia nulla:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right). \tag{1.50}$$

Se si espimono le componenti del tensore in funzione del campo elettrico e magnetico tramite $F^{\alpha\beta}$ si nota, come ci aspettavamo, che la componente T^{00} coincide con la densità di energia $W = \frac{E^2+B^2}{8\pi}$, infatti

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi}\left(-\eta_{\mu\nu}F^{0\mu}F^{0\nu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(E^2 + \frac{B^2-E^2}{2}\right) = \frac{E^2+B^2}{8\pi}. \end{aligned}$$

Dalle componenti cT^{0i} invece si ottiene

$$\begin{aligned} cT^{0i} &= \frac{c}{4\pi}\left(-\eta_{\mu\nu}F^{0\mu}F^{i\nu} + \frac{1}{4}\eta^{0i}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{c}{4\pi}\left(\varepsilon_{jki}E^jB^k\right) = S_i, \end{aligned}$$

dove ε_{jki} è il simbolo di Levi-Civita e dunque le cT^{0i} sono le componenti del vettore di Poynting. [7]

Infine le componenti spaziali T_{ij} formano il tensore degli sforzi di Maxwell σ_{ij} con componenti

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{8\pi}\left(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + B_y^2 - B_z^2 - B_x^2\right),\ etc. \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{4\pi}\left(E_xE_y + B_xB_y\right),\ etc. \end{aligned}$$

1.4 Equazione delle onde elettromagnetiche

Per concludere questo capitolo si vuole ricavare l'equazione che permette di descrivere la propagazione del campo elettromagnetico nello spazio-tempo, ovvero l'equazione delle onde elettromagnetiche.

Come abbiamo visto, sia le equazione del moto di una particella nel campo elettromagnetico sia le equazioni che descrivono quest'ultimo, le equazioni di Maxwell, dipendono da $\mathbf{E}$ e da $\mathbf{B}$, i quali, una volta definito il quadripotenziale, sono univocamente determinate dalla (1.14). Differenti potenziali tuttavia possono corrispondere a un medesimo campo. Ciò si desume dal fatto che nelle espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ entrano solo le derivate di $\mathbf{A}$ e φ . Infatti è facile provare che i campi non variano se ai potenziali $\mathbf{A}$ e φ si aggiungono, in modo da ottenere i nuovi $\mathbf{A}'$ e φ', i seguenti termini:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.51}$$

con f una funzione arbitraria. Ciò in notazione quadridimensionale si esprime come

$$A'_\alpha = A_\alpha - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \tag{1.52}$$

Poichè solo le grandezze invarianti per queste trasformazioni di potenziali hanno significato fisico, in quanto solo una siffatta trasformazione lascia invariata la lagrangiana, tutte le equazioni devono essere invarianti in questa trasformazione. Questa invarianza è detta invarianza di gauge. [7]

Applichiamo ora queste trasformazioni alle equazioni di Maxwell nel vuoto per ottenere l'equazione delle onde.

Consideriamo in particolare la coppia di equazioni

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Sostituendovi le espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in funzione dei potenziali, tramite manipolazioni matematiche, si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi\right) + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right), \\ \nabla^2\varphi &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right). \end{aligned} \tag{1.53}$$

Si può ora considerare una particolare trasformazione di gauge, detta gauge di Lorenz, del tipo (1.51) per la quale valga la condizione, di Lorenz appunto, che è la seguente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \tag{1.54}$$

Imporre questa condizione vuol dire trovare l'espressione della funzione f affinché essa sia valida. Sostituendo le equazioni (1.51) nella (1.54) si trova che f deve soddisfare l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

che ha sempre una soluzione. [11]

Imponendo la condizione di Lorenz nelle equazioni (1.53), valide ovviamente anche per i nuovi potenziali $\mathbf{A}'$ e φ', queste diventano:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{1.55}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.56}$$

dove gli apici sono stati omessi per semplicità.

Queste sono le equazioni che determinano i potenziali delle onde elettromagnetiche.

Introducendo anche le cariche nelle equazioni di Maxwell, e quindi considerando le equazioni (1.37) e (1.38), si possono ricavare le equazioni delle onde in presenza di materia [9]:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1.57}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{1.58}$$

Ripetiamo ora la deduzione delle equazioni delle onde in forma quadridimensionale. A tal fine consideriamo la seconda coppia di equazioni di Maxwell per un campo in assenza di carica:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0.$$

Sostituendo la forma del tensore elettromagnetico in forma controvariante

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta}$$

otteniamo:

$$\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x_\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = 0. \tag{1.59}$$

Imponiamo quindi ai potenziali la condizione di Lorenz quadridimensionale, equivalente a quella tridimensionale:

$$A^{\beta}{}_{,\beta} = \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{1.60}$$

L'equazione d'onda in forma quadridimensionale si scrive allora come

$$-\frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x^{\beta}} = -A^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{1.61}$$

o anche talvolta nella forma

$$\Box A^{\alpha} = 0, \tag{1.62}$$

dove

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x^{\beta}} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

è il cosiddetto operatore di d'Alambert.

Come fatto in precedenza si considera l'equazione (1.36) in presenza di materia. Pertanto è possibile ricavare la seguente equazione delle onde:

$$-\frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha} \Rightarrow \Box A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\alpha}. \tag{1.63}$$

Infine è importante sottolineare che la condizione (1.60) è invariante dal punto di vista relativistico, è cioè Lorentz invariante. Ciò vuol dire che i potenziali che soddisfano tale gauge in un sistema di riferimento inerziale la soddisfano anche in qualsiasi altro sistema di questo tipo. [7]

Capitolo 2

Elettrodinamica nello spazio-tempo curvo

Nel precedente capitolo abbiamo visto le principali caratteristiche del campo elettromagnetico quando questo è considerato in uno spazio-tempo piatto, in assenza di gravità. In questa seconda parte si vuole raggiungere il vero obiettivo della trattazione, ovvero ricavare le proprietà dell'Elettrodinamica in presenza di campo gravitazionale, o più in genereale quando si è in presenza di uno spazio-tempo curvo. Infatti, come previsto dalla Relatività Generale, lo spazio-tempo, almeno in presenza di corpi massivi, non è affatto piatto e non presenta la semplice metrica di Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. Bensì lo spazio-tempo viene curvato da quelle stesse masse che si presentano su di esso e per di più, a causa di questa curvatura, stabilisce il moto geodetico degli oggetti.

Prima di trattare i principali argomenti dell'Elettrodinamica su varietà curve è quindi necessario introdurre alcuni concetti fontamentali in Relatività Generale.

2.1 Introduzione allo spazio-tempo curvo

Dalla teoria della Relatività Generale si desume l'equivalenza che si ha nel descrivere la forza gravitazionale e le forze inerziali; infatti è sempre possibile, in assenza di gravità, simulare quest'ultima tramite un riferimento non inerziale, e quindi tramite le forze apparenti; viceversa, in presenza di un campo gravitazionale, si potrà sempre annullare l'effetto di quest'ultimo [12]. Come infatti è affermato dal principio di equivalenza, solo localmente, si può ristabilire uno spazio-tempo piatto, cioè individuare un sistema di riferimento inerziale locale, per il quale valgono tutte le leggi della fisica che sussistono in assenza di gravità (questo nell'accezione forte del principio). Mettersi in questo sistema di riferimento locale vuol dire considerare lo spazio tangente alla varietà differenziabile che rappresenta lo spazio-tempo, e sulla quale, essendo lo spazio-tempo curvo, è definita una generica metrica $g_{\alpha\beta}$. Su questo spazio tangente varrà la Relatività Speciale e dunque avremo la solità metrica minkowskiana $\eta_{\alpha\beta}$. [13]

In Relatività Generale il ruolo che era svolto, nella meccanica newtoniana, dal potenziale gravitazionale ora è preso dal tensore metrico $g_{\alpha\beta}$. La metrica stessa, dunque, assume un vero significato fisico e contribuisce alla dinamica dei corpi. Altra quantità fondamentale è data dai simboli di Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, che ci permettono di stabilire delle connessioni affini che consentono di spostarci sulla varietà, da uno spazio tangente all'altro. Questi d'altronde, oltre a fornirci il tensore di Riemann, che rappresenta la cuvatura dello spazio-tempo:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}, \tag{2.1}$$

svolgono il ruolo che in meccanica era del campo gravitazionale. Si possono infatti esprime come combinazioni delle derivate dei potenziali [14]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right). \tag{2.2}$$

Inoltre è necessario sottolineare che le equazioni della Relatività Generale, nel limite di campo debole, per cui si ottiene $g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2}$ (U campo gravitazionale newtoniano), forniranno le relative equazioni nella teoria newtoniana della gravitazione.

I simboli di Christoffel, come detto, permettono di spostare un vettore (o in generale un tensore) sulla varietà, e quindi di farne il differenziale e la derivata. La derivata ordinaria, come era intesa nello spazio-tempo piatto, non è covariante se siamo su una varietà curva, infatti non si trasforma come un tensore. Preso il vettore A^{α} con la sua derivata $A^{\alpha}_{,\beta} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$, effettuando un cambio del sistema di riferimento del tipo $x \to \overline{x}$, si ha che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\beta}}\left(\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}A^{\rho}\right) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \overline{x}^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}A^{\rho}\right) = \\ &= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \overline{x}^{\beta}}\frac{\partial^2 \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}}A^{\rho} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \overline{x}^{\beta}}\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\sigma}},\end{aligned} \tag{2.3}$$

che, a causa del primo termine all'ultimo membro, non è evidentemente un tensore.

Per definire una derivata, che sia covariante, vediamo prima come fare il differenziale di un vettore in uno spazio-tempo curvo per poi, tramite la nozione di rapporto incrementale, giungere al nostro scopo.

Consideriamo un vettore in un punto dello spazio-tempo di coordinate x^ν del tipo $A^\mu(x^\nu)$. Il vettore applicato a un punto vicino al predendente $(x^\nu + dx^\nu)$ sarà

$$A^\mu(x^\nu + dx^\nu) = A^\mu + dA^\mu = A^\mu + A^\mu_{,\nu}\, dx^\nu.$$

Per confrontare questo nuovo vettore con quello iniziale, applicato in x^ν, bisogna prima trasportare parallelamente $A^\mu(x^\nu)$ in $x^\nu + dx^\nu$, in quanto la differenza tra vettori deve avvenire quando essi sono applicati nello stesso punto. Trasportare parallelamente il vettore vuol dire muoverlo su di una curva, ad esempio una geodetica, in modo che l'angolo con un campo vettoriale tangente alla curva, e quindi con tutto lo spazio tangente, sia locamente mantenuto inalterato. Nello spazio-tempo piatto il trasporto parallelo risulta immediato: basta traslare il vettore mantenendo la stessa classe di equipollenza e questo non cambia. In uno spazio-tempo curvo, invece, il vettore varia nel corso del trasporto parallelo proprio a causa della curvatura che è una proprietà intrinseca della varietà. Come già accennato la curvatura si esprime tramite i simboli di Christoffel e infatti sono proprio questi ultimi che ci dicono di quanto una geodetica si discosta dalla retta, e di conseguenza di quanto varia un vettore trasportato parllelamente lungo una curva. Trasportando parallelamente A^μ tra i due punti vediamo che questa variazione, che chiameremo variazone spuria è data, per un vettore controvariante, da

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma\, dx^\nu$$

e il vettore trasportato parallelamente in $x^\nu + dx^\nu$ sarà allora $A^\mu + \delta A^\mu$ [16]. In questo senso le connessioni affini ci consentono di spostare un vettore sulla varietà da uno spazio tangente all'altro.

Si calcola dunque la differenza tra i due vettori applicati nello stesso punto:

$$A^\mu + dA^\mu - (A^\mu + \delta A^\mu) = dA^\mu - \delta A^\mu = A^\mu{}_{,\nu}\, dx^\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma\, dx^\nu = DA^\mu.$$

Andando a togliere la variazione dovuta alla curvatura dello spazio-tempo si ottiene un differenziale che non tiene conto di come il vettore vari a causa della varietà su cui si trova ma solo della sua variazione intrinseca. Come dunque ci si aspetta, dipendendo solo dal vettore in sé e non dal particolare sistema di riferimento, questo differenziale, se sfruttato per fare il rapporto incrementale, ci fornisce un nuovo tipo di derivata che è covariante. Chiamiamo infatti derivata covariante il tensore:

$$\frac{DA^\alpha}{dx^\beta} = A^\alpha{}_{;\beta} = A^\alpha{}_{,\beta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} A^\sigma. \tag{2.4}$$

Che sia un tensore si può facilmente dimostrare aggiungendo alla (2.3) il termine dato dalla trasformazione del simbolo di Christoffel (il quale non è un tensore a causa di un termine aggiuntivo alla relazione di tensorialità). Così facendo i due termini, che fanno sì che la derivata ordinaria e $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ non siano tensori, si elidono rendendo di fatto la derivata covariante un tensore. [12]

Lo stesso discorso si può applicare a un vettore covariante, per il quale ancora una volta, si ha

$$DB_{\alpha} = dB_{\alpha} - \delta B_{\alpha}.$$

Poichè la variazione spuria di uno scalare è nulla abbiamo

$$\delta\left(A^{\alpha}B_{\alpha}\right) = A^{\alpha}\delta B_{\alpha} + B_{\alpha}\delta A^{\alpha} = 0,$$

da cui sostituendo δA^{α} otteniamo:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}\delta B_{\alpha} &= -B_{\alpha}\delta A^{\alpha} = B_{\alpha}A^{\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\,dx^{\beta} \Rightarrow \delta B_{\alpha} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}B_{\sigma}\,dx^{\beta}, \\ DB_{\alpha} &= B_{\alpha,\beta}\,dx^{\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}B_{\sigma}\,dx^{\beta}. \end{aligned}$$

Calcolando la derivata covariante otteniamo allora:

$$B_{\alpha;\beta} = B_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}B_{\sigma}. \tag{2.5}$$

Sfruttando le relazioni di derivazione covariante per vettori controvarianti e covarianti si può facilmente trovare l'espressione per la derivata covariante per un tensore generico. Ad esempio:

$$T^{\alpha}_{\beta;\mu} = T^{\alpha}_{\beta,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}T^{\sigma}_{\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}T^{\alpha}_{\sigma}. \tag{2.6}$$

Il concetto di derivata covariante è fondamentale quando le quantità fisiche sono definite in uno spazio-tempo curvo. Essa riveste lo stesso ruolo che la derivata ordinaria svolge nello spazio-tempo piatto, in quanto si è interessati solo alla variazione intrinseca delle quantità, e non a quella dovuta alle proprietà peculiari dello spazio-tempo su cui siamo e al particolare sistema di riferimento adottato; d'altronde ciò comporterebbe l'avere a che fare con oggetti che non sono covarianti. Ne segue che nella maggior parte dei casi, dove nello spazio-tempo di Minkowski si avevano derivate rispetto alle coordinate, nello spazio-tempo curvo queste verranno sostituite dalle derivate covarianti secondo quella che è chiamata

"Comma-Goes-to-Semicolon Rule", a causa dell'uso che si fa della virgola e del punto e virgola per indicare i due tipi di derivazione. Tramite questa regola, tra l'altro in maniera molto semplice, è possibile generalizzare le leggi della fisica in un contesto in cui vi sia uno spazio-tempo curvo tramite il principio di minimo accoppiamento. Quest'ultimo si può esplicitamente riassumere come segue:

1. Considerare una legge fisica, valida in coordinate inerziali nello spazio-tempo piatto.
2. Scrivere questa in modo che sia espressa in forma covariante (tensoriale).
3. Asserire che la legge risultante rimane vera anche nello spazio-tempo curvo.

Operativamente ciò consiste nel sostituire la metrica di Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ con la più generale $g_{\alpha\beta}$ e le derivate ordinarie con quelle covarianti [13]. Ciò è anche in accordo con il principio di equivalenza: passando dallo spazio-tempo curvo allo spazio tangente (minkowskiano in cui vale la Relatività Speciale) le leggi della fisica sono le stesse che in assenza di gravità, i simboli di Christoffel si annullano e le derivate covarianti tornano a essere derivate ordinarie.

Dimostriamo ora, grazie alle proprietà dei simboli di Christoffel, della metrica e della derivata covariante, alcune relazioni utili per il seguito. [12]

Il determinante della metrica g vale

$$g = det\left(g_{\mu\nu}\right) = g_{\mu\nu} det\left(M_{\mu\nu}\right), \quad dg = dg_{\mu\nu} det\left(M_{\mu\nu}\right)$$

dove $M_{\mu\nu}$ è la sottomatrice che si ottiene eliminando la riga e la colonna corrispondenti a $g_{\mu\nu}$. D'altra parte l'inversa di una matrice si ottiene sostituendo a ogni elemento il seguente:

$$g^{\mu\nu} = \frac{det\left(M_{\mu\nu}\right)}{g}, \quad det\left(M_{\mu\nu}\right) = g g^{\mu\nu},$$

e da ciò si ottiene

$$\frac{dg}{g} = g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}.$$

Utilizzando quindi il fatto che

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln|g| = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\left(-g\right),$$

si ricava la seguente espressione per i simboli di Christoffel con due indici uguali

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\rho\alpha,\sigma} + g_{\sigma\rho,\alpha} - g_{\alpha\sigma,\rho}\right) = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}g_{\sigma\rho,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\left(\sqrt{-g}\right),$$

che si può anche riscrivere come

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\right)_{,\alpha} . \tag{2.7}$$

Possiamo ora ricavare alcuni operatori differenziali nello spazio-tempo curvo. Per la divergenza di un vettore risulta:

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha} = A^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha} A^{\sigma} = A^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{A^{\alpha}}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\right)_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} A^{\alpha}\right)_{,\alpha} . \tag{2.8}$$

Per l'operatore di d'Alambert, si ha

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}, \quad \phi^{;\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}},$$

e di conseguenza

$$\Box \phi = \left(\phi^{;\mu}\right)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\phi^{;\mu}\right)_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}\right)_{,\mu} . \tag{2.9}$$

Infine, per la divergenza di un tensore antisimmetrico, si ha

$$\begin{gathered} F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} F^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\beta\sigma} F^{\alpha\sigma}, \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} F^{\sigma\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} F^{\beta\sigma} = 0, \end{gathered}$$

e quindi tenendo conto della (2.7) otteniamo che

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} . \tag{2.10}$$

2.2 Le equazioni dell'Elettrodinamica in presenza di campo gravitazionale

Vediamo ora le prime differenze che riguardano le formulazioni dell'Elettrodinamica in uno spazio-tempo piatto e in uno spazio-tempo curvo. Le equazioni del campo elettromagnetico in Relatività Speciale si possono generalizzare in modo da poterle applicare in un qualsiasi sistema di coordinate curvilinee, cioè al caso in cui esiste un campo gravitazionale. Il tensore elettromagnetico nella formulazione classica dell'Elettrodinamica (1.12) può essere definito per un generico spazio-tempo curvo come $F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$ e vedere che dalla definizione di derivata covariante si ha:

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}, \tag{2.11}$$

di conseguenza, la relazione tra $F_{\alpha\beta}$ e il potenziale A_α non cambia. Pertanto le equazioni di Maxwell omogenee hanno ancora la stessa forma che avevano in uno spazio tempo piatto, in quanto i termini con i simboli di Christoffel in

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0$$

si elidono tra loro.

Scrivere le equazioni di Maxwell non omogenee, in Relatività Generale e confrontarle con quelle ordinarie, non è invece così immedito in quanto bisogna prima definire la quadricorrente in coordinate curvilinee. A tal fine vediamo come è definito l'elemento di volume spaziale per un generico sistema di coordinate.

Nello spazio-tempo piatto l'elemento di volume era $dV = dx^1\, dx^2\, dx^3$. Cambiando il sistema in uno con coordinate curvilinee l'elemento di volume si trasforma in $det\,(J)\; dV = det\,(J)\; dx^1 dx^2 dx^3$, dove J è lo jacobiano della trasformazione. Possiamo trovare la forma di questo jacobiano tramite il tensore metrico tridimensionale γ_{ik} che definisce la metrica spaziale, cioè le proprietà geometriche dello spazio. Questo tensore ci fornisce gli intervalli spaziali come $dl^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k$. Determiniamo allora l'elemento di distanza spaziale dl. Per far ciò si consideri un segnale luminoso che venga emesso da un punto B dello spazio (di coordinate $x^i + dx^i$) verso un punto infinitamente vicino A (di coordinate x^i), e riflesso lungo lo stesso cammino. Il tempo necessario a compiere tutto il cammino, misurato da B, è il doppio della distanza tra i due punti moltiplicato per c. La distanza spaziotemporale in questo caso sarà pari a zero perché il segnale è di tipo luce:

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0k}\, dx^0\, dx^k + g_{ik}\, dx^i\, dx^k = 0.$$

Risolvendo l'equazione rispetto a dx^0 troviamo due radici:

$$\left(dx^0\right)_{1,2} = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0k}\, dx^k \pm \sqrt{\left(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik}\right)\, dx^i\, dx^k}\right),$$

che corrispondono alla propagazione del segnale tra i punti A e B. Se x^0 è l'istante di arrivo del segnale in A, allora gli instanti della sua partenza e del suo ritorno in B sono rispettivamente $x^0 + dx^0_{(1)}$ e $x^0 + dx^0_{(2)}$. L'intervallo di tempo, coordinato, tra l'emissione e il ritorno del segnale sarà allora

$$dx^0 = dx^0_{(2)} - dx^0_{(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})\ dx^i\, dx^k}.$$

Poichè la relazione tra il tempo coordinato e il tempo proprio è

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^0 \tag{2.12}$$

e la distanza dl si ottiene moltiplicandolo per $\frac{c}{2}$, troviamo

$$dl^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}\right) dx^i\, dx^k = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{2.13}$$

dove γ_{ik} è il tensore metrico tridimensionale che stavamo cercando. [7, 12]

Per determinare la relazione tra il determinante dello jacobiano e il tensore metrico spaziale si ricordi che se si effettua una trasformazione verso un sistema di coordinate curvilinee, a partire dalla metrica piatta $\eta_{ik} = diag\,(1, 1, 1)$, otteniamo $\gamma_{ik} = J^T \eta_{ik} J$. Per i determinanti si ottiene pertanto $det\,(J) = \sqrt{det\,(\gamma_{ik})} = \sqrt{\gamma}$.

Per quanto detto prima il nuovo elemento di volume in coordinate curvilinee è allora $\sqrt{\gamma}\, dV$.

Agendo allora come già fatto per la quadricorrente in Relatività Speciale, introduciamo la densità di carica secondo la definizione di $de = \rho\sqrt{\gamma}\, dV$, dove de è la carica contenuta nell'elemento di volume $\sqrt{\gamma}\, dV$. Otteniamo allora

$$de\, dx^\alpha = \rho\, dx^\alpha \sqrt{\gamma}\, dV = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{-g}\, d\Omega \frac{dx^\alpha}{dx^0},$$

dove è stata utilizzata la formula che mette in relazione i determinanti della metrica quadridimensionale e tridimensionale, $\;-g = g_{00}\gamma$. [7]

Il prodotto $\sqrt{-g}\, d\Omega$ è l'elemento di quadrivolume invariante, infatti, per un cambiamento di riferimento abbiamo:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \;\; g' = \frac{1}{J^2} g \Rightarrow \sqrt{-g'} = \frac{1}{J}\sqrt{-g},$$
$$d\Omega' = J\, d\Omega.$$

Di conseguenza la quantità $\sqrt{-g'}\, d\Omega' = \sqrt{-g}\, d\Omega$ è invariante. [15]

La quadricorrente sarà allora definita dall'espressione

$$j^{\alpha} = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^{\alpha}}{dx^{0}}. \tag{2.14}$$

Per le cariche puntiformi la densità ρ si esprime mediante la somma di funzioni δ. Pertanto si dovrà determinare la forma di queste funzioni nel caso di coordinate curvilinee. Intenderemo $\delta(\mathbf{r})$ come il prodotto $\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$ a prescindere dal significato geometrico delle coordinate. L'integrale di normalizzazione della δ si prenderà allora in dV, e non $\sqrt{\gamma}\,dV$, infatti $\int \delta(\mathbf{r})\, dV = 1$. Da questa definizione della δ si ottiene la densità di carica:

$$\rho = \sum_i \frac{e_i}{\sqrt{\gamma}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{2.15}$$

e la quadricorrente:

$$j^{\alpha} = \sum_i \frac{e_i}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{dx^{\alpha}}{dx^{0}}. \tag{2.16}$$

L'equazione di continuità si esprime analogamente alla (1.34), da cui differisce soltanto per la sostituzione delle derivate con le derivate covarianti. Sfruttando la (2.8) otteniamo [14]:

$$j^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} j^{\alpha}\right)_{,\alpha} = 0. \tag{2.17}$$

Analogamente si generalizzano le equazioni di Maxwell non omogenee (1.36); sostituendo in esse le derivate ordinarie con quelle covarianti e sfruttando la (2.10) si ottiene:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha}. \tag{2.18}$$

Infine, le equazioni del moto di una particella in presenza di campi gravitazionali ed elettromagnetici si ottengono sostituendo nella (1.13) la quantità $\frac{du^{\alpha}}{ds}$ con $\frac{Du^{\alpha}}{ds}$:

$$mc \frac{Du^{\alpha}}{ds} = mc \left(\frac{du^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} u^{\sigma} u^{\rho} \right) = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} u_{\beta}. \tag{2.19}$$

2.3 Onde elettromagnetiche nello spazio-tempo curvo

Trovate le leggi che regolano l'Elettrodinamica in presenza di spazio-tempo curvo ci chiediamo, come già fatto in presenza di spazio-tempo piatto, in che modo la radiazione elettromagnetica si propaghi. Nel paragrafo (1.4) è stata ricavata l'equazione delle onde imponendo la condizione di Lorenz (1.60). Nel far ciò, nella (1.59), è stato implicitamente sfruttato il teorema di Schwarz, che permette di scambiare l'ordine di derivazione, in modo che il primo termine della suddetta equazione si annullasse. Questo teorema, essendo valide le ipotesi di continuità delle funzioni (in questo caso dei potenziali) [17], si può applicare nello spazio-tempo piatto; altrettanto non si può dire nello spazio-tempo curvo in cui le derivate sono covarianti. Pertanto vogliamo dimostrare che, in generale, le derivate covarianti non commutano tra loro e studiare in che modo ciò ricada sull'equazione delle onde elettromagnetiche in Relatività Generale.

Consideriamo allora un generico vettore A^α, che nel nostro caso sarà proprio il quadripotenziale e, ricordando le equazioni (2.4) e (2.6), calcoliamo:

$$\begin{aligned}\left(A^\alpha{}_{;\mu}\right)_{;\nu} &= A^\alpha{}_{;\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}A^\sigma{}_{;\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}A^\alpha{}_{;\sigma} = \\ &= \left[A^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}A^\sigma\right]_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\left[A^\sigma{}_{,\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\mu}A^\rho\right] - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\left[A^\alpha{}_{,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}A^\rho\right] = \\ &= A^\alpha{}_{,\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}A^\sigma{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu,\nu}A^\sigma + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}A^\sigma{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu}A^\rho - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}A^\alpha{}_{,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}A^\rho.\end{aligned}$$

Invertendo l'ordine di derivazione si ha:

$$\left(A^\alpha{}_{;\nu}\right)_{;\mu} = A^\alpha{}_{,\nu\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}A^\sigma{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu,\mu}A^\sigma + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}A^\sigma{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}A^\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}A^\alpha{}_{,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}A^\rho.$$

Dunque il commutatore delle derivare è:

$$\begin{aligned}A^\alpha{}_{;\mu;\nu} - A^\alpha{}_{;\nu;\mu} &= A^\sigma\left[\Gamma^\alpha_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu,\mu}\right] + A^\rho\left[\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}\right] = \\ &= \left[\Gamma^\alpha_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu,\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}\right]A^\rho \equiv R^\alpha{}_{\rho\nu\mu}A^\rho.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Come si vede il commutatore non è zero ma è dato dal tensore di Riemann $R^\alpha{}_{\rho\nu\mu}$. Esso, come accennato in precedenza, ci dice se lo spazio-tempo è curvo o meno: in particolare lo spazio-tempo è curvo se e solo se il tensore di Riemann è diverso da zero, viceversa è piatto se e solo se il tensore è identicamente nullo. Infatti per $R^\alpha{}_{\rho\nu\mu} = 0$ si ha lo spazio-tempo piatto, le derivate covarianti diventano ordinarie e la loro commutazione è subito verificata. Al contrario per lo spazio-tempo curvo il tensore sarà sempre diverso da 0 e dunque le derivate covarianti non commutaranno tra loro. [12]

Per ricavare l'equazione delle onde, in analogia col paragrafo (1.4), consideriamo l'equazione di Maxwell, non omogenea, nello spazio-tempo curvo (2.18). Sostituendovi l'espressione del tensore elettromagnetico con le derivate covarianti otteniamo:

$$A^{\beta;\alpha}{}_{;\beta} - A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} = -\frac{4\pi}{c}j^\alpha. \tag{2.21}$$

Riscriviamo ora l'equazione (2.20), per il quadripotenziale, con due indici uguali e otteniamo:

$$A^{\beta}{}_{;\alpha;\beta} - A^{\beta}{}_{;\beta;\alpha} = R^{\beta}{}_{\rho\beta\alpha}A^{\rho} = R_{\rho\alpha}A^{\rho} \Rightarrow A^{\beta;\alpha}{}_{;\beta} = A^{\beta}{}_{;\beta}{}^{;\alpha} + R^{\alpha}_{\rho}A^{\rho},$$

dove $R_{\rho\alpha}$ è un tensore simmetrico, dato dalla contrazione di primo e terzo indice del tensore di Riemann, detto tensore di Ricci. Sostituendo quest'ultima relazione nel primo termine della (2.21) otteniamo:

$$-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + A^{\beta}{}_{;\beta}{}^{;\alpha} + R^{\alpha}_{\rho}A^{\rho} = -\frac{4\pi}{c}j^{\alpha}.$$

Infine, anche qui adottando l'approccio utilizzato in Relatività Speciale, si impone la condizione di Lorenz:

$$A^{\beta}{}_{;\beta} = 0$$

che porta all'equazione delle onde nella forma:

$$(\triangle_{dR}A)^{\alpha} = -A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + R^{\alpha}_{\rho}A^{\rho} = -\frac{4\pi}{c}j^{\alpha}. \qquad (2.22)$$

L'operatore $\triangle_{dR}$, detto di de Rham, che qui appare, è una generalizzazione dell'operatore di d'Alambert per vettori nello spazio tempo curvo. [18]

Nonostante tutte l'equazioni dell'Elettrodinamica viste finora, in Relatività Generale, fossero ottenibili dalla Relatività Speciale tramite la "Comma-Goes-to-Semicolon Rule", per l'equazione delle onde questa regola è disattesa. Ciononostante quando lo spazio-tempo è piatto, e quindi i tensori di Riemann e Ricci si annullano, la (2.21) si riduce all'equazione delle onde vista nel paragrafo (1.4).

2.4 La metrica di Reissner-Nordström

In quest'ultima parte si accennerà il modo con cui ricavare la struttura dello spazio-tempo in presenza di un campo gravitazionale, tramite l'equazione di campo di Einstein e, essendo di particolare interesse nel nostro caso, troveremo una soluzione di questa equazione congiuntamente con le equazioni di Maxwell; si ricaverà cioè la metrica indotta da un corpo carico a simmetria sferica, detta di Reissner-Nordström.

Prima di tutto bisogna trovare le equazioni del campo gravitazionale sia nel vuoto che in presenza di 'materia'. Queste equazioni, per essere accettabili, devono essere

1. scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza;
2. del secondo ordine;
3. tali da fornire la soluzione newtoniana per campi deboli. [12]

Le equazioni trovate da Einstein che descrivono lo spazio-tempo e la sua curvatura nel vuoto sono:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.23}$$

oppure, come si può facilmente dimostrare, equivalentemente:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0, \tag{2.24}$$

dove $R = R^{\mu}_{\mu}$ è detto scalare di curvatura e $G_{\alpha\beta}$ è il tensore di Einstein. Si noti che, come è giusto che sia, nelle equazioni non sono presenti termini di sorgente ma solo quantità che riguardano intrinsecamente lo spazio-tempo. Per descrivere l'effetto del campo in presenza della 'materia', e in generale quando si ha un tensore energia-impulso non nullo, le equazioni trovate da Einstein sono le seguenti [19]:

$$G_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}, \tag{2.25}$$

dove per entrambi i membri dell'equazione si può facilmente dimostrare che valgano le leggi di conservazione ${T_{\alpha\beta}}^{;\beta} = 0$ e ${G_{\alpha\beta}}^{;\beta} = 0$.

Il valore di χ si può ricavare mettendosi nel limite di campo debole e ricavando $\chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ con G_N costante di gravitazione universale. Il termine a secondo membro della (2.25) è un termine di sorgente del campo ed è dato dal tensore energia-impulso della 'materia' presente nella regione di spazio-tempo che si sta considerando.

Dalla risoluzione di queste equazioni si possono studiare situazioni di particolare interesse e ricavarne la metrica che caratterizza lo spazio-tempo preso in esame. Una di queste soluzioni, che storicamente è stata la prima a essere ricavata, è la soluzione di Schwarzschild. Questa è una soluzione delle equazioni di campo nel vuoto (2.24) che descrive lo spazio-tempo attorno a una massa sferica, non rotante e priva di carica elettrica. [20]

La metrica di Reissner-Nordström, di cui si è parlato sopra, ha alcuni aspetti in comune con quella di Schwarzschild ma a differenza di quest'ultima, essa è soluzione delle equazioni di Einstein e Maxwell accoppiate e descrive la geometria all'esterno di un corpo a simmetria sferica elettricamente carico (anche se da un punto di vista pratico non è del tutto chiaro se è realistico considerare corpi astronomici dotati di carica elettrica netta), o equivalentemente per quelli che sono i nostri scopi, di una particella carica nell'origine delle coordinate. [21]

Per ottenere la soluzione si considera una forma standard, che può essere sfruttata anche per la soluzione di Schwarzschild, di una generica metrica a simmetria sferica del tipo:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.26}$$
$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2,$$

dove si è scelta una forma esponenziale per il coefficienti di c^2dt^2 e dr^2. Gli esponenti ν e λ saranno funzioni di t e r ma sfruttando il teorema di Birkhoff, in particolare nella formulazione generalizzata, che in questo caso richiede che la soluzione sia statica, si può affermare che ν e λ dipendano solo di r:

$$\nu = \nu\,(r)\,, \quad \lambda = \lambda\,(r)\,.$$

Il sopracitato teorema infatti afferma che una soluzione esterna delle equazioni di Einstein nel vuoto a simmetria sferica sia necessariamente statica e asintoticamente piatta, mentre nella formulazione generale, richiede queste stesse proprietà ma per una soluzione esterna, a simmetria sferica, delle equazioni di campo accoppiate di Einstein-Maxwell. [22]

A differenza della soluzione di Schwarzschild, ora non si sta considerando un campo gravitazionale nel vuoto, ma uno in cui vi sia la presenza del campo elettromagnetico generato dal corpo carico. In questo caso allora non si può porre il tensore di Ricci pari a zero ma si dovrà risolvere l'equazione (2.25), dove il tensore energia-impulso è quello di un campo elettromagnetico ricavato già nel paragrafo (1.3) [23]:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

Il tensore elettromagnetico dovrà soddisfare le equazioni di Maxwell nella regione in assenza di sorgenti:

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \tag{2.27}$$
$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{2.28}$$

Dal momento che il campo è dovuto a una particella carica nell'origine, il tensore elettromagnetico e l'elemento metrico risulteranno qui singolari. Per di più la particella darà luogo a un campo elettrostatico che è puramente radiale; da ciò si deduce che gli unici elementi di $F_{\alpha\beta}$ diversi da zero sono [21, 22]:

$$F_{01} = -F_{10} = E\left(r\right).$$

Noto il tensore elettromagnetico si possono risolvere le equazioni di Maxwell (2.27) e (2.28). In particolare la prima è immediatamente soddisfatta mentre per la seconda, sfruttando la (2.10) e tenendo conto che $F^{01} = -F^{10} = -e^{-(\nu+\mu)}E\left(r\right)$, si ha:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta r^2 e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}E\left(r\right)\right) = 0 \\ r^2 e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}E\left(r\right) = q, \end{aligned}$$

dove q è la costante di integrazione. Si ha pertanto:

$$E\left(r\right) = \frac{q}{r^2}e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}.$$

Il teorema di Birkhoff richiede che la metrica (2.26) debba essere asintoticamente piatta, pertanto per $r \to \infty$ si ha $\nu, \lambda \to 0$ e dunque $E \sim \frac{q}{r^2}$. Questo è esattamente il risultato classico per un campo elettrostatico prodotto da un carica puntiforme q. Si può dunque interpretare q come la carica della particella. [22]

Sostituendo questi risultati nell'espessione del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico si può facilmente mostrare che:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{q}{r^2}\right)^2 diag\left(e^{\nu}, -e^{\lambda}, r^2, r^2\sin^2\theta\right). \tag{2.29}$$

Una volta risolte le equazioni di Maxwell si devono scrivere e risolvere le equazioni di Einstein; ciò implica il calcolo delle componenti diverse da zero del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura essendo il tensore di Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R.$$

Dal calcolo dei simboli di Christoffel e delle loro derivate, tramite semplici passaggi algebrici, si ricavano $R_{\alpha\beta}$, R e di conseguenza $G_{\alpha\beta}$, le cui due uniche componenti utili a risolvere l'equazione di Einstein, che ha come sole incognite e^{ν} ed e^{λ}, sono: [12]

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{e^{\nu}}{r^2}\left[1 - \left(re^{-\lambda}\right)'\right],$$
$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{\lambda}}{r^2}.$$

Con queste componenti e con il tensore energia-impulso (2.29) si possono scrivere le equazioni di Einstein da risolvere:

$$\frac{1}{r^2}\left[1 - \left(re^{-\lambda}\right)'\right] = \frac{G_N}{c^4}\left(\frac{q}{r^2}\right)^2, \tag{2.30}$$
$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{G_N}{c^4}\left(\frac{q}{r^2}\right)^2, \tag{2.31}$$

da cui svolgendo la derivata nella prima equazione e sommando membro a membro si ottiene:

$$\frac{\nu' + \lambda'}{r}e^{-\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \nu + \lambda = costante.$$

La costante si verifica essere zero in quanto, a partire dalla proprietà di piattezza asintotica della metrica, si ha che se $r \to \infty$ allora

$$e^{\nu+\lambda} = 1 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda} = e^{\nu}.$$

Integrando poi la (2.30) si ottiene:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{A}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \;\; Q^2 = \frac{G_N q^2}{c^4},$$

dove A è una costante di integrazione e Q è la carica in unità geometriche. Si noti che quando $Q = 0$ si ottengono i coefficienti della soluzione di Schwarzschild i quali sono:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{R_S}{r}.$$

Si può da ciò ricavare la costante di integrazione $A = R_S$ che è detto raggio gravitazionale o di Schwarzschild, al cui valore di r, nel caso della metrica omonima, si ha l'orizzonte degli eventi di un buco nero statico a simmetria sferica a cui corrisponde una singolarità [12, 22].

Abbiamo finalmente ottenuto la soluzione di Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \qquad (2.32)$$

In ultima analisi si possono fare alcune considerazioni sul coefficiente

$$g_{00} = (g_{11})^{-1} = f(r) = 1 - \frac{R_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

che ha due possibili radici in

$$r_\pm = \frac{R_S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_S}{2}\right)^2 - Q^2}.$$

Si possono distinguere due casi a seconda del segno del discriminante. Nel caso in cui $\left(\frac{R_S}{2}\right)^2 < Q^2$ il coefficiente non ha radici reali ed è positivo per qualunque valore di r, di conseguenza la coordinata t sarà sempre di tipo tempo (positiva) mentre la coordinate r di tipo spazio (negativa). La metrica sarà non singolare per ogni valore di r eccetto che per $r = 0$, cosa che non dovrebbe sorprendere in quanto qui è posta la carica che produce il campo. Questa singolarità, a differenza di quella che si ha per $r = R_S$ nella metrica di Schwarzschild, non è "protetta" da un orizzonte degli eventi, ed è per questo chiamata singolarità nuda. [21, 22]

L'altro caso di interesse si ha quando $\left(\frac{R_S}{2}\right)^2 \geq Q^2$, per cui la metrica è singolare quando il coefficiente si annulla in $r = r_+$ e $r = r_-$. Lo spazio si suddivide così in tre regioni:

1. $0 < r < r_-$,
2. $r_- < r < r_+$,
3. $r_+ < r < \infty$.

Se $\left(\frac{R_S}{2}\right)^2 = Q^2$ esistono solo le regioni 1 e 3. In ogni caso le regioni sono separate dalle ipersuperfici $r = r_-$ e $r = r_+$. La situazione a $r = r_+$ è simile a quella che si ha nel caso di Schwarzschild per $r = R_S$. Le coordinate t e r sono rispettivamente di tipo tempo e tipo spazio nelle regioni 1 e 3 ma si scambiano nella regione 2, dove il coefficiente è negativo. Da questa metrica si deduce che le regioni 1, 2 e 3 sono sconnesse tra loro in quanto i coni luce, ovvero i luoghi dei punti che sono causalmente connessi con un punto preso come origine, hanno un'orientazione totalmente diversa su ogni lato delle ipersuperfici $r_\pm$. [22]

Conclusioni

L'applicazione della Teoria dell'Elettrodinamica alla Relatività Generale ci permette di fare un passo in più rispetto alla descrizione della dinamica dei corpi carichi in assenza di gravità. Tramite le considerazioni fatte si è visto come formalizzare la dinamica delle cariche elettriche e la descrizione dei campi elettromagnetici quando lo spazio-tempo è curvo. Grazie al carattere covariante (tensoriale) delle quantità fisiche introdotte per sviluppare i principali argomenti dell'Elettrodinamica le si è potute riportare in un contesto differente da quello iniziale in cui, per le masse che possiedono carica elettrica, non è il solo campo elettromagnetico a regolare la dinamica ma vi è anche il campo gravitazionale.

Si è così trovato il modo per descrivere in maniera congiunta, in un unica teoria autoconsistente, l'azione che i campi elettromagnetici e gravitazionali hanno sui corpi. In alcuni casi, come per le equazioni di Maxwell, a meno di ridefinizioni di alcune quantità fisiche (la quadricorrente ad esempio) in spazi-tempi più complessi, riportare le espressioni in Relatività Generale è consistito semplicemente nell'applicazione della "Comma-Goes-to-Semicolon Rule". In altri casi invece, come per l'equazione delle onde, non è bastato sostiture le derivate ordinarie con quelle covarianti, ma si è dovuto introdurre il nuovo operatore di de Rham che racchiude in sé le caratteristiche intrinseche dovute alla curvatura dello spazio-tempo, descritte dal tensore di Ricci; ciò evidentemente è dovuto al fatto che, i teoremi dell'analisi matematica non valgono a prescindere in uno spazio-tempo generico in cui la struttura geometrica non è banalmente piatta.

Una descrizione siffatta per entrambi i campi ci ha infine permesso di risolvere congiuntamente le equazioni di Maxwell e di Einstein, trovando come soluzione la metrica di Reissner-Nordström, la quale, nonostante non ci si aspetti che un corpo macroscopico abbia una carica netta, dà un contributo alla nostra comprensione della natura dello spazio e del tempo.

Bibliografia

[1] Jackson J.D., *Classical Electrodynamics,* John Wiley & Sons, Inc., 1999, Hoboken.

[2] Griffiths D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Pearson Education, Inc., 2013, Londra.

[3] Wheeler J. H., *A Journey into Gravity and Spacetime*, W. H. Freeman and Company, 1990, New York.

[4] Minkowski H., *Raum und Zeit*, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 18, (1909), 75–88.

[5] Minkowski H., *Das Relativitätsprinzip*, Annalen der Physik, 352, (1915), 927–938.

[6] Rindler W., *Introduction to Special Relativity*, Clarendon Press, 1991, Oxford.

[7] Landau L. D., Lifšits E. M., *Fisica Teorica 2. Teoria dei campi*, Editori Riuniti university press, 2010, Roma.

[8] Goldstein H., Poole C., Safko J., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2001, Boston.

[9] Mencuccini C., Silvestrini V., *Fisica – Elettromagnetismo e Ottica*, Casa Editrice Ambrosiana, 2017, Rozzano.

[10] Zangwill A., *Modern electrodynamics*, Cambridge University Press, 2012, Cambridge.

[11] Jackson J.D., Okun L.B., *Historical roots of gauge invariance*, Reviews of Modern Physics, 73, (2001), 663–680.

[12] Capozziello S., Funaro M., *Introduzione alla Relatività Generale. Con applicazioni all'Astrofisica Relativistica e alla Cosmologia* , Liguori Editore, 2005, Napoli.

[13] Carroll S., *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*, Pearson Education Limited, 2014, Harlow.

[14] Weinberg S., *Gravitation and cosmology principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1972, New York.

[15] Einstein A., *The Foundation of the General Theory of Relativity*, Annalen der Physik. 354, (1916), 769-822.

[16] Feynman R.P., Morinigo F.B., Wagner W.G., *Feynman Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley, 1995, Boston.

[17] Fusco M., Marcellini P., Sbordone C., *Analisi matematica due*, Liguori Editore, 1996, Napoli.

[18] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973, San Francisco.

[19] Einstein A., *The Field Equations of Gravitation*, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (1915), 844–847.

[20] Schwarzschild K., *On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), (1916), 424-434.

[21] Blau M., *Lecture Notes on General Relativity*, URL: `http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html`.

[22] D'Inverno R., *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1992, New York.

[23] Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, 1983, New York.