### UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"



#### Scuola Politecnica e delle Scienze di Base Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

### L'Operatore Densità e sue Applicazioni

Relatore Prof. Pietro Santorelli

Richo Subrell'

**Candidato** Giovanna Paola Perdonà Matr. N85/1173

Anno Accademico 2019/2020

## Indice

Introduzione					
1	L'Operatore Densità				
	1.1	Notazione di Dirac	11		
	1.2	Definizione e Proprietà di $\rho$	16		
	1.3	Significato degli Elementi di Matrice di $\rho$	18		
<b>2</b>	Oltre l'Equazione di Schrödinger				
	2.1	Stati Puri e Miscele Statistiche	23		
	2.2	Polarizzazione di un Fascio di Fotoni	27		
	2.3	Operatore Densità ed Entropia	33		
3	L'operatore Densità nei Processi di Decadimento				
	3.1	Una Nuova Parametrizzazione di $\rho$	40		
	3.2	Una Ulteriore Parametrizzazione di $\rho$	51		
	3.3	Due Applicazioni	52		
		3.3.1 Il Caso di Due Particelle con Spin-Parità $1^- e 0^{\pm}$	52		
		3.3.2 Il Decadimento $\Lambda_b \longrightarrow \Lambda J/\psi$	53		
С	onclu	sioni	54		

### Introduzione

L'operatore densità  $\rho$  è uno strumento matematico che fu introdotto da Von Neumann in ref.[1] nella prima metà del Novecento come un nuovo formalismo per lo studio di problemi di meccanica quantistica e meccanica statistica. Vedremo che si tratta di uno strumento estremamente flessibile, questa flessibilità è forse il motivo principale per cui oggi è molto utilizzato anche nello studio dei processi di produzione e decadimento in fisica delle particelle. Risulta particolarmente interessante il caso dello studio degli esiti di una misura per un sistema quantistico, vedremo infatti che se per stati puri l'operatore densità è solo un formalismo alternativo a quello di Schrödinger, per miscele statistiche risulterà fondamentale in quanto è l'unico strumento per studiarle. La sua formulazione matriciale è adatta a descrivere sistemi compositi, sia nel caso in cui questi siano separabili (e cioè associati a spazi di Hilbert separati), sia nel caso in cui questi siano entangled. Conoscere gli elementi di matrice significa conoscere l'occorrenza di un certo autovalore, e cioè l'occorrenza di un possibile esito della misura di un'osservabile; nota la matrice densità valutata rispetto ad una base qualsiasi, è possibile calcolare il valor medio di un qualsiasi operatore (associato ad un'osservabile) se è nota la sua azione sulla base scelta.

In questo lavoro di tesi descriveremo le principali caratteristiche dell'operatore densità e considereremo, senza ovviamente essere esaustivi, varie applicazioni, da quelle classiche della meccanica quantistica e statistica a quella meno nota dello studio delle caratteristiche di spin di stati risonanti in fisica delle particelle. Nel primo capitolo introdurremo brevemente i concetti basilari della meccanica quantistica quali ad esempio il problema della misura di un'osservabile, segue un'introduzione della notazione bra-ket e quindi il formalismo matriciale per gli operatori. Questa parte introduttiva nel primo capitolo servirà a definire l'operatore densità: distinguendo tra stati puri e non, elenchiamo e dimostriamo le sue proprietà fondamentali e ricaviamo l'equazione di Von Neumann. I vantaggi dell'operatore densità diventano più chiari quando alla fine del primo capitolo si effettua lo studio di una particella a spin semintero col formalismo matriciale. Nel secondo capitolo introduciamo le miscele statistiche dandone una definizione a partire dal concetto di massima informazione su un sistema; per comprendere a fondo la differenza con gli stati puri, sono presentati alcuni esempi. Si ricavano l'espressione della matrice densità per miscele statistiche e le sue proprietà, seguono due esempi applicativi di  $\rho$  per miscele, ovvero lo studio di un fascio di fotoni incidenti su un polarizzatore e lo studio di sistemi termodinamici (ensemble microcanonico e canonico). Nel terzo ed ultimo capitolo viene mostrata una recente parametrizzazione della matrice densità di spin degli stati risonanti generati da processi di produzione e decadimento in fisica delle particelle, terminando con un esempio per processi governati da interazione forte ed un esempio per processi governati da interazione debole.

# Capitolo 1 L'Operatore Densità

<sup>1</sup>In meccanica classica misurare una grandezza fisica implica un processo in cui lo sperimentatore interagisce col sistema da studiare senza alterarne lo stato. In meccanica quantistica effettuare una misura significa interfacciare lo strumento di misura con il sistema fisico in esame, tuttavia l'operazione di misura perturberà il sistema, si prenda ad esempio il caso della diffrazione di elettroni: supponiamo di stare osservando un fascio di elettroni incidenti su uno schermo a doppia fenditura, se effettuassimo una misura di velocità o posizione degli elettroni a livello delle fenditure non osserveremmo più la diffrazione, l'immagine al rivelatore non sarebbe più a frange.

Inoltre in meccanica quantistica l'esito di una misura non è deterministico, bensì probabilistico: supponiamo di avere un sistema fisico e di voler misurare l'osservabile A, facciamo N prove; la misura della grandezza fisica in generale non avrà lo stesso esito per tutte le prove, bensì si osserverà una certa distribuzione di risultati in accordo con la distribuzione di probabilità proveniente dalla funzione d'onda. In meccanica quantistica lo stato di un sistema fisico è rappresentato da una funzione d'onda definita su uno spazio di Hilbert, ogniqualvolta si effettua la misura di un'osservabile fisica per il sistema, la funzione d'onda collassa in uno degli stati associati all'osservabile, questo fenomeno è dovuto alla correlazione tra lo strumento di misura e il sistema quantistico che si sta studiando, ne deriva la perturbazione di quest'ultimo. E' importante sottolineare che non è ancora completamente chiaro come avvenga l'interazione tra strumento e sistema e il conseguente collasso della funzione d'onda, nè tantomeno è possibile prevedere con probabilità uguale ad uno (eccetto in alcuni casi) l'esito della misurazione (infatti, come già detto, esso è un processo probabilistico), si può tuttavia prevedere con quale probabilità si misurerà un certo valore della grandezza fisica che si sta studiando. In breve effettuare la misura di un'osservabile significa interagire col sistema sotto esame, provocando il collasso irreversibile della funzione d'onda ad esso associata in uno stato o una combinazione di stati relativi all'osservabile. tale collasso è dovuto alla correlazione ineliminabile tra apparato sperimentale e sistema. Per questo motivo è stato introdotto il formalismo operatoriale per le osservabili: effettuare una misura dell'osservabile A vuol dire far interagire due sistemi fisici (lo strumento e il sistema in esame) in modo tale che tale interazione corrisponda alla misura della grandezza fisica A, questa sarà associata ad un operatore  $\hat{A}$  (hermitiano); secondo l'interpretazione di Copenaghen lo spettro di autovalori associato all'operatore sarà l'insieme dei possibili esiti della misura, le autofunzioni associate invece (o combinazioni lineare di esse) saranno gli stati in cui collassa la funzione d'onda in virtù del processo di misura. In generale ad ogni operatore hermitiano è associato uno spazio vettoriale che sia uno spazio di Hilbert e sul quale sono definiti gli autovettori di tale operatore:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Per questa prima sezione introduttiva sono stati utilizzati come testi di riferimento [2],[3].

$$\hat{A}\psi_n = a_n\,\psi_n.\tag{1.1}$$

Nell'interpretazione di Born  $(1926)^2$  il significato fisico attribuito alle funzioni d'onda risiede nel loro modulo quadro e cioè, mentre i vettori  $\psi_n$  sono delle funzioni d'onda definite in uno spazio di Hilbert associato al sistema e si ricavano risolvendo il problema agli autovettori e autovalori relativo ad un operatore<sup>3</sup>, il modulo quadro  $|\psi|^2$  è legato alla probabilità che il sistema si trovi in una determinata regione di spazio. Infatti studiando la dinamica di una particella immersa in un potenziale generico in termini di funzione d'onda  $\psi(\vec{x},t)$ ad essa associata,  $\psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)d^3x$  si interpreta come la probabilità di trovare la particella all'istante t nel volumetto  $d^3x$  intorno al punto definito dal vettore posizione  $\vec{x}$ ; di conseguenza la probabilità di trovare la particella in una regione di spazio  $\tau$  sarà

$$P_{\tau} = \int_{\tau} \psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d^3 \vec{x}.$$
(1.2)

In quanto ampiezze di probabilità, le funzioni d'onda dovranno essere normalizzate nel senso del prodotto scalare definito sullo spazio di Hilbert; supponendo che suddetto spazio sia  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ , si pone

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\vec{x})\psi(\vec{x})d^3\vec{x} = 1.$$
(1.3)

Per un corollario del teorema spettrale, autostati  $\psi_n$  associati ad autovalori  $a_n$  diversi sono ortogonali, inoltre essi sono normalizzabili per cui, ponendo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_n^*(\vec{x}) \psi_k(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \delta_{n,k} \quad \forall n, k$$

(e cioè facendo il prodotto scalare nello spazio di Hilbert tra autovettori), si ottiene un set  $\{\psi_n\}$  di autovettori ortonormali. Osserviamo che gli indici  $n \in k$  sono interi se lo spettro è discreto, reali se lo spettro è continuo, in ogni caso vale la condizione di normalizzazione riportata sopra. L'esigenza di normalizzare gli stati è stata già parzialmente esplicitata, tuttavia faremo un'altra osservazione e cioè che i vettori  $\psi_n \in c \cdot \psi_n$  rappresentano lo stesso raggio nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , di conseguenza anche lo stesso stato.

Dunque  $\{\psi_n\}$  è un set di generatori di vettori nello spazio  $\mathcal{H}$  (poichè linearmente indipendenti), si può dimostrare che è anche un set massimale e cioè una base dello spazio di Hilbert, di conseguenza uno stato generico può essere decomposto lungo i vettori di questa base. Se si vogliono misurare due osservabili A e B è necessario valutare il commutatore tra gli operatori  $\hat{A} \in \hat{B}$ , se infatti questo è nullo allora l'ordine cronologico con cui si misurano le due grandezze fisiche è irrilevante, gli operatori hanno una base ortonormale di autovettori in comune e si dicono compatibili.

Un set di operatori autoaggiunti associati ad osservabili fisiche definisce un **set completo di osservabili** se è un set massimale di operatori che commutano tra loro, e cioè qualunque altro operatore che commuta con essi è una funzione degli operatori del set. Va da sè che gli operatori di questo insieme, in quanto compatibili, hanno tutti una base di autovettori in comune; se si misurano tutte le osservabili del set si otterrà una serie di autovalori e la funzione d'onda collasserà in un autostato comune a tutti gli operatori associati. Una misura successiva di un'osservabile del set, o associata ad un operatore compatibile con quelli che definiscono il set, lascia lo stato del sistema invariato.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Si fa riferimento all'articolo pubblicato sulla rivista Zeitschrift für Physik [4].

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Se operatore è l'hamiltoniano  $\hat{H}$  l'equazione associata è l'equazione di Schrodinger, essa contiene tutta la dinamica del sistema.

Dunque, alla luce di quanto detto, supponiamo di voler effettuare la misura dell'osservabile A su un sistema quantistico, individuiamo perciò un set completo di osservabili che includa A ed effettuiamo la misura di tutte le osservabili del set. Possiamo scrivere la funzione d'onda relativa al sistema come combinazione lineare degli autostati della base associata all'operatore  $\hat{A}$ ; per semplicità valuteremo solo il caso di spettro discreto consapevoli che tutte le conclusioni che troveremo si estendono al caso di spettro continuo sostituendo le somme discrete con integrali. Si ha<sup>4</sup>

$$\psi = \sum_{k} c_k \,\psi_k. \tag{1.4}$$

I possibili esiti della misura saranno gli autovalori di  $\hat{A}$  mentre la funzione d'onda collasserà in un autostato di  $\hat{A}$  (cfr. equazione (1.1))

$$\hat{A}\psi = \sum_{k} c_k \,\hat{A}\psi_k = \sum_{k} c_k \,a_k \,\psi_k.$$
(1.5)

La probabilità di misurare  $a_n$  è la probabilità che la funzione d'onda collassi nell'autostato associato  $\psi_n$  e cioè:

$$P_{n} = \left| \int \psi_{n}^{*}(\vec{x})\psi(\vec{x})d^{3}\vec{x} \right|^{2} = \left| \int \sum_{k} c_{k}\psi_{n}^{*}(\vec{x})\psi_{k}(\vec{x})d^{3}\vec{x} \right|^{2} = \left| \sum_{k} c_{k}\delta_{n,k} \right|^{2} = |c_{n}|^{2}.$$
(1.6)



The Copenhagen Interpretation:

Figura 1.1: Rappresentazione grafica del collasso di una funzione d'onda in un autostato della posizione dopo la misura dell'osservabile.

Nel caso in cui non si effettui la misura di un set completo di osservabili, in generale la funzione d'onda collassa in una combinazione lineare di autostati della base del set e cioè l'autovalore misurato sarà degenere: supponiamo di aver scelto come set completo  $\{A, X_1, X_2, X_3, ..., X_N\}$ , etichettiamo gli stati della base con k (associato a  $\hat{A}$ ) e  $n_1, n_2, n_3, ..., n_N$  (associati alle altre grandezze  $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$  che compongono il set completo), si ha

$$\psi = \int c(k)\psi(k)dk$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Nel caso di spettro continuo si ha

con k parametro reale continuo.

$$\hat{A}\psi = \sum_{k,\vec{n}} a_k c_{k,\vec{n}} \psi_{k,\vec{n}},$$

con  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, ..., n_N)$  e  $\{\psi_{k,\vec{n}}\}$  base ortonormale di autovettori relativa al set completo scelto. La probabilità  $P_{k^*}$  di misurare l'autovalore  $a_{k^*}$  sarà

$$P_{k^*} = \sum_{\vec{\boldsymbol{n}}} \left| \int \psi_{k^*,\vec{\boldsymbol{n}}}^*(\vec{\boldsymbol{x}}) \psi(\vec{\boldsymbol{x}}) d^3 x \right|^2 = \sum_{\vec{\boldsymbol{n}}} |c_{k^*,\vec{\boldsymbol{n}}}|^2 \quad \forall k^* \in \mathbb{Z},$$

ove all'autovalore  $a_{k^*}$  sono associati più autovettori  $\{\psi_{k^*,\vec{n}}\}^5$ . Come già accennato, nel caso in cui l'operatore  $\hat{A}$  sia l'operatore hamiltoniano  $\hat{H}$ , l'equazione agli autovalori sarà l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}\psi_n = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_n = E_n\psi_n.$$
(1.7)

Finora abbiamo valutato funzioni d'onda per un ben definito istante di tempo (chiamiamolo  $t_0$ ), ora ricaveremo l'evoluto temporale di  $\psi$ : la linearità dell'equazione di Schrödinger suggerisce che  $\psi(\vec{x}, t)$  dipenda linearmente da  $\psi(\vec{x}, t_0)$  perciò possiamo introdurre l'operatore di evoluzione temporale  $\hat{U}(t, t_0)$ :

$$\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t) = \hat{U}(t,t_0)\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t_0).$$
(1.8)

Se  $\psi(\vec{x}, t_0)$  risolve l'equazione di Schrödinger all'istante  $t_0$ , l'evoluto temporale dovrà conservare la norma e dovrà essere ancora soluzione dell'equazione di Schrödinger, dunque supponendo che l'hamiltoniana non dipenda esplicitamente dal tempo, si ha

$$\hat{H}\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}\hat{U}(t,t_0)\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t_0) = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0)\right]\psi(\vec{\boldsymbol{x}},t_0)$$
$$\hat{H}\hat{U}(t,t_0) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0) \quad \Rightarrow \quad \hat{U}(t,t_0) = e^{-i\frac{\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}}\hat{U}(t_0,t_0). \tag{1.9}$$

Tuttavia  $\hat{U}(t_0, t_0)\psi(t_0) = \mathbb{1}\psi(t_0)$ , quindi si ha

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}}.$$
(1.10)

Ponendo  $t_0 = 0$  si ha

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}.$$
(1.11)

E' importante osservare che se l'hamiltoniana fosse dipesa esplicitamente dal tempo avremmo avuto un'espressione del genere

$$\hat{H}(t)\hat{U}(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t).$$
(1.12)

Integrare entrambi i membri nella variabile temporale non è banale come nel caso precedente, ma bisogna tener conto di come l'hamiltoniana dipende dal tempo.

 $^5\mathrm{Se}$ gli stati sono normalizzati, automaticamente si ha :

$$1 = \int |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = \sum_{n,m} \int c_n^* c_m \psi_n^*(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) d^3\vec{x} = \sum_{n,m} c_n^* c_m \delta_{n,m} = \sum_n |c_n|^2 d^3x$$

Tornando al caso indipendente dal tempo, scelto  $t_0 = 0$ , possiamo alleggerire la scrittura sostituendo a  $\hat{U}(t,0)$ ,  $\hat{U}(t)$  e a  $\psi(0)$ ,  $\psi_0$ ; scrivendo  $\psi_0$  come combinazione lineare di autostati della base di  $\hat{H}$ , { $\psi_n$ }, si ha

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi_0 = \sum_n c_n \hat{U}(t)\psi_n = \sum_n c_n e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\psi_n = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\psi_n.$$
 (1.13)

Ogni autostato della combinazione lineare è associato ad un fattore di fase, e cioè nel tempo i singoli autostati restano invariati a meno di un fattore di fase, mentre funzioni d'onda generiche cambiano forma.

Il valor medio dell'osservabile A associata all'operatore autoaggiunto  $\hat{A}$  per un sistema rappresentato da una funzione d'onda  $\psi(\vec{x}, t)$  appartenente allo spazio di Hilbert  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$  è definito così

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\vec{\boldsymbol{x}}, t) \hat{A} \psi(\vec{\boldsymbol{x}}, t) d^3 \vec{\boldsymbol{x}}.$$
 (1.14)

#### 1.1 Notazione di Dirac

<sup>6</sup> Al fine di definire l'operatore densità, le sue caratteristiche e applicazioni, è utile introdurre ciò che è noto come *Notazione Bra-ket*; questa notazione fu introdotta da Dirac nel 1939 come tentativo di rendere la scrittura delle equazioni e formule in meccanica quantistica più semplice e snella.

Supponiamo di avere un sistema fisico che si trova nell' *n-esimo* autostato di un operatore autoaggiunto  $\hat{A}$ , Dirac associa all'autostato etichettato con *n* il ket  $|n\rangle$ , i "ket" sono dunque dei simboli che rappresentano in maniera compatta gli stati di un sistema fisico. Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei ket:

• La somma di ket è a sua volta un ket :

$$|a\rangle + |b\rangle = |c\rangle,$$

• Il prodotto di un ket per uno scalare c restituisce un ket con uguale direzione, in altre parole è lo stesso raggio nello spazio di Hilbert

$$c |a\rangle = |a\rangle c.$$

Se c è nullo, il ket risultante è nullo.

• Se  $|a'\rangle$  è un autovettore della base  $\{|a\rangle\}$  associata all' operatore  $\hat{A}$ , relativo all'autovalore a', si ha

$$\hat{A} \left| a' \right\rangle = a' \left| a' \right\rangle. \tag{1.15}$$

Se lo stato è autostato di un set di osservabili che commutano  $\{A, B, C, ..\}$  allora il ket di stato per coerenza si scrive come  $|a, b, c, ...\rangle = |\vec{k}\rangle$ , ove (a, b, c...) costituisce il vettore  $\vec{k}$ , e cioè la collezione degli autovalori del set di osservabili scelto. E' il caso degli autostati associati all'atomo idrogenoide quando, ad esempio, si considera come set completo di osservabili  $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ , in questo caso i ket della base sono  $\{|n, l, m\rangle\}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>I testi di riferimento utilizzati per questa sezione sono [6], [5] e [7].

• Lo stato del sistema  $\psi$ , che è una combinazione lineare di autovettori di una base associata all'operatore  $\hat{A}$ , si può scrivere in termini di ket come

$$|\psi\rangle = \sum_{a} c_a \,|a\rangle,\tag{1.16}$$

ove  $\{|a\rangle\}$  sono gli autovettori della base dell'operatore  $\hat{A}$ . In questo caso si ha

$$\hat{A} |\psi\rangle = \sum_{a} c_{a} \hat{A} |a\rangle = \sum_{a} c_{a} a |a\rangle.$$
(1.17)

Abbiamo detto che lo spazio in cui sono definiti i ket è uno spazio vettoriale, i bra invece sono definiti su uno spazio vettoriale che è il duale dello spazio dei ket, e cioè ad ogni vettore  $|a\rangle$  nello spazio vettoriale dei ket è associato un vettore nello spazio duale,  $\langle a|$ . Si ha

$$c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle \longrightarrow c_1^* \langle a| + c_2^* \langle b|$$

Va da sè che se  $\{|n\rangle\}$  è una base di autovettori nello spazio dei ket,  $\{\langle n|\}$  è la corrispondente base nello spazio duale, tutte le proprietà enunciate per i ket varranno ugualmente nello spazio duale dunque

$$\langle a| + \langle b| = \langle c|, \qquad (1.18)$$

$$c\langle a| = \langle a|c. \tag{1.19}$$

Definiamo il prodotto scalare tra il bra  $\langle \psi |$  e il ket  $|\phi \rangle$ 

$$(\langle \psi |) \cdot (|\phi\rangle) = \langle \psi | \phi \rangle. \tag{1.20}$$

Per esso dovranno essere soddisfatte le seguenti richieste <sup>7</sup>

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*, \tag{1.22}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle \ge 0, \tag{1.23}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff | \psi \rangle = 0. \tag{1.24}$$

Due ket  $|a\rangle$   $|b\rangle$  si dicono ortogonali se<sup>8</sup>

$$\langle a | b \rangle = 0. \tag{1.25}$$

Il prodotto scalare definisce la norma dei ket: se prendiamo in considerazione il ket  $|a\rangle$ , la norma ad esso associata sarà  $\sqrt{\langle a | a \rangle}$ . La normalizzazione del ket si ottiene ponendo

$$\left|a'\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\left\langle a\right|a\right\rangle}} \left|a\right\rangle,$$

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \psi | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \phi \rangle d^3 \vec{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3 \vec{x}$$
(1.21)

 $^{8}$ Dalla (1.22) deriva che

$$\langle b | a \rangle = 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Supponendo che  $\psi \in \phi$  siano definiti sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ , e utilizzando la relazione di completezza per la base dello spazio  $\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| d^3 \vec{x} = \mathbb{1}$ , si ha

#### 1.1. NOTAZIONE DI DIRAC

infatti

$$\langle a' | a' \rangle = \frac{\langle a | a \rangle}{\langle a | a \rangle} = 1.$$

Abbiamo già mostrato che un operatore che agisce su un ket restituisce un ket (cfr. eq. (1.16), (1.18)), ci chiediamo come un operatore agisca su un bra: se  $\hat{X} |a\rangle$ , l'azione dell'operatore sul bra si scriverà formalmente come  $\langle a | \hat{X}$ . L'azione di  $\hat{X}$  sul bra  $\langle a |$  restituisce ancora un bra, tuttavia in generale  $\langle a | \hat{X}$  non è il duale di  $\hat{X} |a\rangle$ , infatti il duale di  $\hat{X} |a\rangle$  sarà

$$\hat{X}|a\rangle \longrightarrow \langle a|\,\hat{X}^{\dagger}.$$
 (1.26)

Nel caso in cui  $\hat{X}$  sia autoaggiunto (come accade nel caso in cui l'operatore è associato ad un'osservabile fisica) si ha che  $\langle a | \hat{X}^{\dagger} = \langle a | \hat{X}$  e cioè  $\langle a | \hat{X}$  sarà il duale di  $\hat{X} | a \rangle$ . Il prodotto scalare è chiamato anche "prodotto interno", si può definire anche un prodotto esterno tra un ket  $|a\rangle$  e un bra  $\langle b |$ 

$$(|a\rangle) \cdot (\langle b|) = |a\rangle \langle b|. \qquad (1.27)$$

Il prodotto esterno gode di proprietà associativa, e cioè dato un terzo ket  $|c\rangle$ 

$$(|a\rangle \langle b|) |c\rangle = |a\rangle (\langle b| c\rangle);$$

è evidente che il prodotto esterno non restituisce uno scalare, ma è un operatore che agisce sul ket  $|c\rangle$  restituendo un ket parallelo a  $|a\rangle$ .

A partire dal prodotto esterno possiamo introdurre l'operatore di proiezione: supponiamo di avere una base ortonormale di autoket  $\{|n\rangle\}$ , l'operatore

$$\hat{P}_{k,m} = |k\rangle \langle m|, \qquad (1.28)$$

ottenuto come il prodotto esterno tra  $|k\rangle \in \langle m|$ , proietta il ket di stato  $|\psi\rangle$  su cui agisce, sull'autoket  $|k\rangle$  della base associandogli lo scalare  $\langle m|\psi\rangle$ . E' particolarmente interessante il caso in cui m = k, si avrà

$$\hat{P}_n = |n\rangle \langle n|, \qquad (1.29)$$

$$P_n |\psi\rangle = |n\rangle \langle n|\psi\rangle, \qquad (1.30)$$

e cioè  $\hat{P}_n$  agisce sul ket di stato  $|\psi\rangle$  restituendo la sua proiezione (vettore) sul ket di base  $|n\rangle$ . In generale si può sempre decomporre lo stato  $\psi$  su una base ortonormale di autovettori dello spazio di Hilbert sul quale è definito, di conseguenza si ha

$$|\psi\rangle = \sum_{n} |n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_{n} c_{n} |n\rangle, \qquad c_{n} = \langle n|\psi\rangle.$$
(1.31)

Facendo il prodotto scalare di entrambi i membri con  $\langle k |$  si ricava la proiezione<sup>9</sup> dello stato rappresentato dal ket  $|\psi\rangle$  sul k-esimo autovettore della base

$$\langle k | \psi \rangle = \sum_{n} c_n \delta_{n,k} = c_k, \qquad (1.32)$$

perciò si ha

$$|\psi\rangle = \sum_{n} c_{n} |n\rangle = \sum_{n} \langle n|\psi\rangle |n\rangle = \sum_{n} |n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_{n} (|n\rangle \langle n|)|\psi\rangle = \sum_{n} \hat{P}_{n}|\psi\rangle, \quad (1.33)$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>A rigore la proiezione di un vettore  $|\psi\rangle$  su un autovettore  $|k\rangle$  è anch'esso un vettore parallelo a  $|k\rangle$ , in questo caso stiamo considerando solo la componente della proiezione, lungo il vettore su cui si sta proiettando.

ove si è usata la proprietà associativa e gli operatori  $\hat{P}_n$  sono gli operatori di proiezione sugli autovettori della base ortonormale. Dalla relazione ottenuta si ottiene banalmente la relazione di completezza.<sup>10</sup>

$$\sum_{n} \hat{P}_{n} = \sum_{n} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}.$$
(1.34)

In quanto proiettori sui ket della base ortonormale  $\{|k\rangle\}$ , per gli operatori  $\{\hat{P}_k\}$  vale la seguente relazione

$$\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{n,m} \hat{P}_n.$$

Dimostrazione.  $\hat{P}_n \hat{P}_m = |n\rangle \langle n|m\rangle \langle m| = \delta_{n,m} |n\rangle \langle m|$ . Se  $n \neq m$ , allora  $\hat{P}_n \hat{P}_m = 0$ , se invece n = m si ha che  $\hat{P}_n \hat{P}_m = |n\rangle \langle n| = \hat{P}_n$ .

Dunque

$$\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$
(1.35)

A partire dalla definizione dei proiettori mostreremo come scrivere qualsiasi operatore in termini del prodotto esterno tra bra e ket, e dunque introducendo la rappresentazione matriciale degli operatori. Supponiamo di avere un operatore  $\hat{X}$  e due basi di autovettori  $\{|a\rangle\}\{|b\rangle\}$ , alla luce di quanto ricavato per gli operatori di proiezione possiamo scrivere

$$\hat{X} = \mathbb{1}\hat{X}\mathbb{1} = \sum_{a,b} |a\rangle \langle a| \hat{X} |b\rangle \langle b|.$$
(1.36)

Se le due basi sono di dimensione N, la sommatoria sarà composta di  $N^2$  addendi che possiamo riordinare un una matrice:

$\langle a_1   \hat{X}   b_1 \rangle$	$\langle a_1   \hat{X}   b_2 \rangle$	$\langle a_1   \hat{X}   b_3 \rangle$		
$\langle a_2   X   b_1 \rangle$	$\langle a_2   X   b_2 \rangle$	$\langle a_2   X   b_3 \rangle$		
•	•	•		·
		•		
\ ·	•	•	•••	/

In questa rappresentazione si possono riscrivere gli operatori, i vettori e le operazioni tra essi, infatti supponendo di avere due operatori  $\hat{X} \hat{Y}$  e tre basi di dimensione  $N \{|a\rangle\} \{|b\rangle\} \{|c\rangle\}$ , l'operatore  $\hat{X}\hat{Y}$  si scriverà

$$\hat{X}\hat{Y} = \mathbb{1}\hat{X}\mathbb{1}\hat{Y}\mathbb{1} = \sum_{a}\sum_{b}\sum_{c}|a\rangle\langle a|\hat{X}|c\rangle\langle c|\hat{Y}|b\rangle\langle b|.$$
(1.37)

Riordinando gli addendi come elementi di matrice ritroviamo che l'operatore  $\hat{X}\hat{Y}$  è il prodotto tra le matrici relative a  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$ . Un vettore  $|\psi\rangle$  rappresentato rispetto alla base

$$\int_{\mathbb{R}^{3}}\left|\vec{\boldsymbol{x}}\right\rangle\left\langle\vec{\boldsymbol{x}}\right|d^{3}\vec{\boldsymbol{x}}=\mathbb{1}.$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Questa può essere scritta per qualsiasi base dello spazio di Hilbert, perciò nel caso in cui tale base sia quella associata all'operatore posizione  $\{|x\rangle\}$ , si ha

#### 1.1. NOTAZIONE DI DIRAC

 $\{|a\rangle\}$  di dimensione N, secondo la (1.31), è associato ad una matrice  $N \times 1$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{a=a_1,a_2,..}^{a_N} |a\rangle \langle a|\psi\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1|\psi\rangle \\ \langle a_2|\psi\rangle \\ \langle a_3|\psi\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$
 (1.38)

Viceversa per i bra si ha

$$\langle \psi | = \sum_{a=a_1,a_2,\dots}^{a_N} \langle \psi | a \rangle \langle a | \to (\langle \psi | a_1 \rangle \quad \langle \psi | a_2 \rangle \quad \dots \quad ) = (\langle a_1 | \psi \rangle^* \quad \langle a_2 | \psi \rangle^* \quad \dots \quad ) . \quad (1.39)$$

Il prodotto scalare tra bra e ket diventa quindi un prodotto tra due matrici, la prima  $1 \times N$  (bra) e la seconda  $N \times 1$ , il risultato è quindi uno scalare

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_{a=a_1,a_2,\dots}^{a_N} \langle \psi | a \rangle \langle a | \phi \rangle = \left( \langle a_1 | \psi \rangle^* \quad \langle a_2 | \psi \rangle^* \quad \langle a_3 | \psi \rangle^* \quad \dots \right) \begin{pmatrix} \langle a_1 | \phi \rangle \\ \langle a_2 | \phi \rangle \\ \langle a_3 | \phi \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Mentre il prodotto esterno in rappresentazione matriciale sarà

$$\begin{split} |\psi\rangle\,\langle\phi| &= \sum_{a=a_1,a_2,\dots}^{a_N} |a\rangle\,\langle a|\,\psi\rangle \sum_{a=a_1,a_2,\dots}^{a_N} \langle\phi\,|a\rangle\,\langle a| = \\ &= \begin{pmatrix} \langle a_1|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_1\rangle & \langle a_1|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_2\rangle & \langle a_1|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_3\rangle & \dots \\ \langle a_2|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_1\rangle & \langle a_2|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_2\rangle & \langle a_2|\,\psi\rangle\langle\phi\,|a_3\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \end{split}$$

Supponiamo ora di avere un operatore autoaggiunto  $\hat{A}$  e la base di autovettori associata  $\{|a\rangle\}$ , la rappresentazione matriciale in questo caso è particolarmente semplice poichè

$$\hat{A} = \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'| \,\hat{A} \, |a''\rangle \langle a''| = \sum_{a',a''} |a'\rangle \langle a''| \,\delta_{a',a''} = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \,. \tag{1.40}$$

Scelta una base di autovettori dell'operatore, quindi, la matrice associata è diagonale, si dice perciò che  $\hat{A}$  è diagonale sulla base i autovettori  $\{|a\rangle\}$ .

#### **1.2** Definizione e Proprietà di $\rho$

<sup>11</sup>Supponiamo di avere un sistema rappresentato dal ket di stato  $|\psi\rangle$ , definiamo la *matrice densità* come

$$\rho = \left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|.\tag{1.41}$$

Indicheremo l'operatore  $\rho$  come matrice densità o equivalentemente come operatore densità, osserviamo infatti che se il sistema si trova in un autostato  $|n\rangle$ ,  $\rho$  diventa banalmente l'operatore di proiezione sull'autostato; la definizione matriciale invece risulta più chiara quando andiamo a selezionare gli elementi di matrice nella base  $\{|k\rangle\}$ 

$$\rho_{n,m} = \langle n | \rho | m \rangle = \langle n | \psi \rangle \langle \psi | m \rangle.$$
(1.42)

Definiamo *traccia* la somma degli elementi sulla diagonale della matrice, per selezionare gli elementi di matrice necessitiamo di una base di vettori per il sistema, la scelta della base è irrilevante in quanto dimostreremo che la definizione di traccia non dipendente da tale scelta. Dunque, selezionata una base arbitraria, la traccia dell'operatore densità è

$$Tr(\rho) = \sum \langle n|\rho|n\rangle.$$
 (1.43)

Finora abbiamo trattato sistemi che si trovano in un autostato della base relativa ad un set completo di osservabili, oppure in una combinazione lineare di autostati della base associata al set (sovrapposizione coerente di autostati), questi vengono detti **stati puri**. Tutti risultati che ricaveremo in questo capitolo sono relativi a stati puri. Detto ciò, cominciamo ad enunciare alcune proprietà dell'operatore densità:

•  $\rho$  è hermitiano

*Dimostrazione.* per la definizione di  $\hat{X}^{\dagger}$  l'aggiunto  $\rho^{\dagger}$  si ottiene banalmente scambiando bra e ket, dunque è evidente che  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi| = \rho^{\dagger}$ 

•  $\rho = \rho^2$ .

Dimostrazione. 
$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle \psi|\psi\rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \cdot 1 \cdot \langle \psi| = \rho.$$

•  $Tr(\rho) = 1$ 

Dimostrazione.

$$Tr(\rho) = Tr(\rho\mathbb{1}) = \sum_{n} \langle n | \psi \rangle \langle \psi | \mathbb{1} | n \rangle = \sum_{n} \langle \psi | \mathbb{1} | n \rangle \langle n | \psi \rangle,$$
$$\sum_{n} | n \rangle \langle n | \psi \rangle = | \psi \rangle \Rightarrow Tr(\rho) = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

• La traccia dell'operatore X non dipende dalla base scelta

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>I testi utilizzati per questa sezione sono [5],[9].

#### 1.2. DEFINIZIONE E PROPRIETÀ DI $\rho$

Dimostrazione. Supponiamo di avere due basi  $|n\rangle \in |m\rangle$ 

$$TrX = \sum_{n} \langle n | X | n \rangle = \sum_{n} \langle n | \mathbb{1}X | n \rangle = \sum_{m} \sum_{n} \langle n | m \rangle \langle m | X | n \rangle =$$
$$= \sum_{m} \sum_{n} \langle m | X | n \rangle \langle n | m \rangle = \sum_{m} \langle m | X \mathbb{1} | m \rangle = \sum_{m} \langle m | X | m \rangle.$$

•  $Tr(\rho) = Tr(\rho^2)$ .

Dimostrazione. Deriva banalmente dai risultati precedenti.

E' importante sottolineare che abbiamo introdotto la matrice densità in senso operatoriale

 $\rho = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|,$ 

ma, scelta una base dello spazio di Hilbert  $\{|n\rangle\}$ , è possibile ottenere un' intepretazione matriciale di  $\rho$ : gli elementi di matrice saranno definiti dalla particolare base scelta, così come si evince dalla (1.51), mentre si è dimostrato che la traccia della matrice non dipenderà dalla scelta della base. Se il sistema è rappresentato all'istante di tempo t dal ket di stato  $|\psi(t)\rangle$ , quest'ultimo risolverà l'equazione di Schrödinger

$$\mathcal{H} \left| \psi(t) \right\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \psi(t) \right\rangle. \tag{1.44}$$

Valutiamo l'equazione di Schrödinger e il suo aggiunto

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \left| \psi \right\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \psi \right\rangle, \\ \left\langle \psi \right| \mathcal{H} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \psi \right|, \end{aligned}$$

di conseguenza si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{\partial}{\partial t}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \left[\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right]\langle\psi| + |\psi\rangle\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right] = \frac{\left[-i\mathcal{H}\,|\psi\rangle\right]\langle\psi| + |\psi\rangle\left[i\,\langle\psi|\,\mathcal{H}\right]}{\hbar} = \frac{i[\rho,\mathcal{H}]}{\hbar}$$

Abbiamo ottenuto così l'equazione di Von Neumann

$$[\mathcal{H},\rho] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\rho,\tag{1.45}$$

e cioè l'equivalente dell'equazione di Liouville in meccanica quantistica; essa descrive l'evoluzione temporale della matrice densità nella *Rappresentazione di Schrödinger*.

Risolvere l'equazione di Von Neumann permette di conoscere l'operatore densità; nel caso semplice di sistemi in equilibrio lo stato resta invariato nel tempo perciò dall'equazione di Von Neumann deriva che il commutatore  $[\rho,\mathcal{H}]$  è nullo. In altre parole l'operatore hamiltoniano e l'operatore densità hanno una base di autovettori in comune, ciò, nell'approccio matriciale, implica che la base ortonormale di autostati dell'hamiltoniana diagonalizza la matrice densità.

Nella Rappresentazione di Heisenberg l'evoluzione temporale del ket di stato  $|\psi(t_0)\rangle$  è

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

dunque l'evoluzione temporale dell'operatore densità sarà

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0)| \hat{U}^{\dagger}(t, t_0), \qquad (1.46)$$

dove

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-i\frac{\mathcal{H}(t-t_0)}{\hbar}}$$

#### 1.3 Significato degli Elementi di Matrice di $\rho$

<sup>12</sup>Supponiamo di avere un sistema in uno stato puro, sovrapposizione coerente degli autovettori della base  $\{|k\rangle\}$  di un operatore  $\hat{A}$ ; gli elementi della matrice densità associata, scelta questa base di autovettori, saranno:

$$\rho_{n,m} = \langle n | \psi \rangle \langle \psi | m \rangle$$

Se  $|\psi\rangle = \sum_{k} c_k \, |k\rangle$ , si ha

Gli elementi sulla diagonale vanno sotto il nome di *popolazioni* mentre quelli fuori diagonale saranno le *occorrenze*; è evidente dall'espressione di  $\rho_{n,m}$  che le popolazioni rappresentano le probabilità di trovare il sistema in un autostato dell'operatore  $\hat{A}$  e sono perciò definiti positivi

 $\rho_{n,m} = c_m c_n^*.$ 

$$\rho_{n,n} = |c_n|^2 \ge 0,$$

di conseguenza la traccia della matrice sarà in generale definita positiva

$$Tr(\rho) = \sum_{n} |c_n|^2 \ge 0.$$

Nel nostro caso, lo stato del sistema è combinazione lineare di autovettori della base di  $\hat{A}$ , perciò

$$Tr(\rho) = \sum_{n} |c_n|^2 = 1.$$

Dunque la matrice densità contiene tutta la fisica del sistema, l'elemento  $\rho_{n,n}$  sulla diagonale sarà la probabilità di trovare il sistema nello stato puro  $|n\rangle$ . A partire da  $\rho$  è possibile ricavare tutte le informazioni sul sistema fisico in esame: supponiamo di voler valutare il valor medio della misura di un'osservabile A sul sistema descritto da una funzione d'onda  $\psi$ , si ha

$$\langle A \rangle_t = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle 1 = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = = \langle \psi(t) | A \rho | \psi(t) \rangle = Tr(A\rho) = Tr(\rho A).$$
(1.47)

Inoltre nel caso di sistemi preparati in uno stato puro si ha $\rho=\rho^2,$  ne deriva

$$\langle A \rangle_t = Tr(A\rho) = Tr(A\rho^2) = Tr(\rho^2 A) = Tr(\rho A).$$
(1.48)

Nel prossimo capitolo valuteremo queste stesse relazioni nel caso miscele statistiche, le cui funzioni d'onda sono sovrapposizione incoerenti di stati puri; ricaveremo perciò espressioni analoghe più generali che si possono, nel caso particolare che abbiamo trattato finora, ricondurre a quelle già ottenute nei paragrafi precedenti. Riportiamo di seguito un esempio di sistema in sovrapposizione coerente di stati, ricaveremo tutte le informazioni sul sistema fisico non risolvendo l'equazione di Schrödinger ma utilizzando la matrice densità.

Supponiamo di avere un fermione con spin orientato in una direzione qualsiasi dello spazio, lo stato di questo sistema si può rappresentare in via del tutto generale come un vettore della sfera di Bloch (figura 1.2).

 $<sup>^{12}</sup>$ In questa sezione si sono utilizzati i testi [5] e [9].



Figura 1.2: Sfera di Bloch: i semiassi z positivo e negativo sono associati rispettivamente agli autostati  $|\uparrow\rangle$  (up) e  $|\downarrow\rangle$  (down) dell'operatore di spin  $\hat{S}_z$ , mentre i semiassi x e y sono associati agli autostati degli operatori di spin  $\hat{S}_x \in \hat{S}_y$ .

Ricordiamo che, definiti gli operatori di spin lungo tre direzioni ortogonali e indicati con  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  gli autovettori della basi associate ad essi, si ha:

$$\hat{S}_{z} |\uparrow\rangle_{z} = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_{z}, \quad \hat{S}_{z} |\downarrow\rangle_{z} = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle_{z};$$

$$\hat{S}_{x} |\uparrow\rangle_{x} = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_{x}, \quad \hat{S}_{x} |\downarrow\rangle_{x} = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle_{x};$$

$$\hat{S}_{y} |\uparrow\rangle_{y} = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_{y}, \quad \hat{S}_{y} |\downarrow\rangle_{y} = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle_{y}.$$
(1.49)

Note queste relazioni tra autostati di operatori di spin diversi e l'orientazione lungo assi ortogonali, si può introdurre la sfera di Bloch, e cioè una sfera di raggio unitario con assi ortogonali definiti dagli stati di spin elencati sopra. Su questa sfera, l'espressione più generale di uno stato di un sistema con spin  $\frac{1}{2}$  è

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\beta}{2}}\left|\uparrow\right\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\beta}{2}}\left|\downarrow\right.\right\rangle \tag{1.50}$$

Scelto come set di operatori che commutano  $\{\hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ , la base associata è  $\{|s, s_z\rangle\}$ , dunque la matrice densità relativa al sistema è

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} e^{-i\beta} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} e^{i\beta} & \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$
 (1.51)

La traccia della matrice è evidentemente unitaria, i singoli elementi sulla diagonale sono le probabilità di trovare il fermione con spin lungo l'asse z,  $|\uparrow\rangle$  (up) o  $|\downarrow\rangle$  (down). Osserviamo che

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \langle \psi | \, \hat{S}_z \, | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[ \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{\hbar}{2} \cos\alpha, \tag{1.52}$$

dunque la differenza degli elementi sulla diagonale restituisce il valor medio della componente di spin lungo l'asse z a meno di un fattore moltiplicativo costante  $(\frac{\hbar}{2})$ , d'altra parte per le occorrenze si ha

$$|\rho_{1,2}| + |\rho_{2,1}| = sen \frac{\alpha}{2} cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} sen \alpha = \frac{|\langle \hat{S}_{\perp} \rangle|}{\hbar}, \qquad (1.53)$$

dove  $\langle \hat{S}_{\perp} \rangle$  è il valor medio della componente di spin ortogonale all'asse z. Abbiamo così mostrato, trattando il caso semplice di una particella a spin semintero, che la matrice densità contiene tutta la fisica del sistema al quale è associata e perciò può essere considerata lo strumento fondamentale di un nuovo approccio allo studio di sistemi fisici in meccanica quantistica, sostituendo a tutti gli effetti quello operatoriale finora utilizzato.

### Capitolo 2

### Oltre l'Equazione di Schrödinger

 $^{13}$ Finora abbiamo trattato stati di sistemi fisici associati ad autostati di un'osservabile del set completo scelto, oppure in una combinazione lineare di questi (sovrapposizione coerente di autostati). Questi stati vengono detti stati puri, più precisamente uno stato è puro se esiste un esperimento che ha esito esattamente determinato, prevedibile con certezza. Ciò significa che, in linea di principio, ripetendo lo stesso esperimento N volte sul sistema, l'esito dell'esperimento (e quindi della misura di un'osservabile) sarà sempre lo stesso. Tale esperimento in questo caso viene detto *completo* poichè caratterizza completamente lo stato del sistema rispetto all'osservabile che viene misurata, fornendo così la massima informazione sullo stato del sistema rispetto a quell'osservabile. In generale non tutte le variabili che caratterizzano lo stato del sistema fisico vengono determinate nell'ambito di un esperimento *completo*, ma si ricava la massima informazione sul sistema solo rispetto ad una o alcune osservabili (ad esempio un fascio di fermioni in uscita da un apparato di tipo Stern-Gerlach sarà in uno stato puro dello spin, in particolare di una componente dello spin, quindi avremo la massima informazione rispetto a quell'osservabile ma ciò non sarà vero per un'altra osservabile, come per esempio il momento cinetico, o il momento angolare).

E' necessario a questo punto specificare cosa significa "massima informazione" sul sistema in meccanica quantistica: come è noto, in meccanica classica, ottenere la massima informazione su un sistema (supponiamo si tratti di un corpo schematizzabile come punto materiale) vuol dire misurarne posizione e velocità e ciò è in linea di principio sempre possibile, tuttavia nel caso in cui il sistema sia costituito da molti corpi (~ 10<sup>23</sup>) non si possono conoscere posizione e momento cinetico di ogni particella, dunque non si avrà la massima informazione sul sistema, ma con metodi statistici si potranno ricavare i valori medi  $\langle \vec{x} \rangle \in \langle \vec{p} \rangle$ .

In meccanica quantistica, quando si vuole effettuare una misura sul sistema, sorge il problema di scegliere un set completo di osservabili (che ricordiamo essere associato ad un set massimale di operatori hermitiani che commutano tra loro), poichè in generale non è possibile misurare simultaneamente qualsiasi coppia di osservabili con precisione arbitraria. Le osservabili di questo set potranno essere misurate simultaneamente (poichè gli operatori commutano), in particolare esiste una base di autovettori che diagonalizza simultaneamente tutti gli operatori del set completo, e gli autovalori associati agli autovettori saranno gli esiti possibili di una misura. Quindi in meccanica quantistica, la massima informazione di un sistema rispetto ad un'osservabile A si ha quando il sistema è in un autostato  $|a\rangle$ dell'operatore  $\hat{A}$  associato all'osservabile, ciò infatti implica che eseguendo misure successive di A, l'esito è determinato e corrisponde all'autovalore a associato allo stato puro  $|a\rangle$ .

 $<sup>^{13}\</sup>mathrm{I}$ testi di riferimento utilizzati per questa sezione sono [8] e [9].

Osserviamo che utilizzando l'approccio operatoriale e quindi sostanzialmente l'equazione di Schrödinger è possibile studiare sistemi che si trovino in uno stato puro, dunque in un autostato di qualche osservabile oppure in una sovrapposizione coerente di essi. E' evidente che non tutti i sistemi si presentano in uno stato puro, in generale se non lo si *prepara* in tal modo il sistema si troverà in uno stato a cui diamo il nome di **miscela statistica**.

#### 2.1 Stati Puri e Miscele Statistiche

<sup>14</sup>Uno stato puro si può definire tramite l'esperimento completo oppure rispetto all'operatore associato, se tale esperimento ammette più stati puri<sup>15</sup> conviene esprimere lo stato puro come una combinazione lineare di autostati associati agli altri operatori del set completo scelto. In questo caso si parla di **sovrapposizione coerente** di stati.

Come preparare un sistema in uno stato puro?

E' necessario allestire un esperimento il cui esito sia uno o più stati puri cosicché ripetendo lo stesso esperimento, lo stato del sistema e l'esito della misura restino invariati. Riportiamo di seguito due esempi:

si pensi ad un fascio di luce non polarizzata che viene fatto passare attraverso un prisma di Nicol (figura 2.1)



Figura 2.1: Descrizione grafica di un fascio di luce non polarizzata che incide su un prisma di Nicol; esso è costituito da due cristalli di calcite (birifrangente) legati da uno strato di balsamo di Canada, il fascio si divide nel cristallo birifrangente in due raggi (uno *ordinario* e l'altro *straordinario*) associati a polarizzazioni diverse; l'interfaccia tra cristalli fa sì che il fascio straordinario venga rifratto, quello ordinario riflesso per riflessione totale; dunque in uscita, si ha solo luce polarizzata.

Il fascio in uscita, sottoposto allo stesso apparato sperimentale, conserverà la polarizzazione, tale esito è prevedibile con certezza (P = 1) poichè il sistema è ormai in uno stato puro della polarizzazione, infatti filtrando nuovamente il fascio polarizzato attraverso il prisma esso rimarrà identico, inoltre fasci indipendenti ottenuti attraverso questa procedura hanno la stessa risposta quando filtrati attraverso qualsiasi altro polarizzatore (analizzatore).

Analogamente, un fascio di elettroni viene studiato in un apparato Stern-Gerlach (figura 2.2); in uscita si avranno due fasci di elettroni caratterizzati da una determinato valore della componente dello spin (tipicamente  $S_z$ ) che rimarrà invariato se, selezionato uno dei fasci in uscita, esso verrà sottoposto ad un altro Stern-Gerlach orientato come il primo.

$$|\boldsymbol{e}_n\rangle = \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l c_{l,m} |n,l,m\rangle.$$

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Per questa sezione sono stati utilizzati come testi di riferimento [5], [8], [9] e [10].

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Avviene, ad esempio, nel caso della misura dell'energia di un elettrone in un atomo idrogenoide; scelto il set completo di osservabili  $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$  il sistema che si trova in uno stato puro dell'energia  $|n\rangle$  sarà associato a più stati puri del momento angolare orbitale e della sua componente lungo l'asse z, perciò lo stato puro  $|n\rangle$  del sistema per l'energia sarà una combinazione lineare di autostati degli altri operatori che compongono il set completo



Figura 2.2: Fascio di atomi di argento che attraversa un apparato Stern-Gerlach

Nel caso in cui il sistema sia composto da sottosistemi (come nei sistemi a molti corpi), a meno che non si prepari questi sottosistemi in uno stato puro, non si ha la massima informazione sul sistema e perciò si parla di miscela statistica. Sistemi di questo tipo sono caratterizzati da due contributi probabilistici:

- la probabilità che la funzione d'onda collassi in un determinato stato puro. Questo contributo non è legato ad una mancanza di informazione sul sistema, ma all'aspetto intrinsecamente probabilistico della meccanica quantistica;
- la probabilità di trovare un sottosistema in un determinato stato puro. Questo tipo di contributo è di tipo "statistico" e cioè è legato al fatto che lo sperimentatore ha un'informazione incompleta sul sistema per cui deve introdurre un peso legato ad ogni stato puro della miscela (che dipenderà ad esempio da quanti sottosistemi si trovano in un determinato stato puro della miscela).

Si pensi ad un fascio di elettroni, se questo è ottenuto da un esperimento di tipo Stern-Gerlach allora tutte le particelle del fascio saranno in uno dei due stati puri  $|\uparrow\rangle_z$  o  $|\downarrow\rangle_z$ ; se però il fascio non è stato preparato in nessun stato puro (diremo che *non è polarizzato*), in generale lo sperimentatore non conoscerà lo spin  $S_z$  di ogni singolo elettrone (informazione incompleta). Tuttavia in assenza di campi magnetici esterni si può supporre che gli stati puri  $|\uparrow\rangle_z$  e  $|\downarrow\rangle_z$  si presentino in ugual misura per cui ognuno avrà un *peso* nella miscela statistica pari a  $\frac{1}{2}$ . Dunque indicheremo con  $w_1$  e  $w_2$  i pesi associati agli autostati dello spin  $S_z$ , e cioè la frazione di elettroni per stato, essi rappresentano la probabilità che un elettrone del fascio non polarizzato si trovi in un autostato di  $\hat{S}_z$ ; si tratta dunque di un contributo di tipo *statistico* dovuto ad una informazione incompleta sul sistema, lo sperimentatore infatti non conosce lo stato dei singoli elettroni (poichè il fascio non è stato filtrato attraverso un SG), di conseguenza può solo valutare la probabilità che gli elettroni del fascio abbiano  $s_z = \frac{1}{2}$  oppure  $s_z = -\frac{1}{2}$ . E' evidente che, essendo  $w_1 e w_2$  le popolazioni relative (frazione di elettroni rappresentati rispettivamente da  $|\uparrow\rangle_z$  e  $|\downarrow\rangle_z$ ) si ha che

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{2.1}$$

E' importante sottilineare che i coefficienti  $c_i$  relativi alla proiezione dello stato su una base di autovettori e i pesi  $w_i$  hanno significati completamente diversi e che perciò non vanno confusi, il primo è legato all'aspetto intrinsecamente probabilistico della meccanica quantistica (collasso della funzione d'onda), il secondo è dovuto all'incompletezza dell' informazione sul sistema, per questo motivo **non è corretto** scrivere il ket di stato del fascio di elettroni non polarizzato come

$$\left|\psi\right\rangle = w_1 \left|\uparrow\right\rangle_z + w_2 \left|\downarrow\right\rangle_z.$$

Questa espressione infatti ha la stessa forma del ket di stato di un fascio di elettroni in uscita da un apparato di tipo Stern-Gerlach

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle, \qquad (2.2)$$

tuttavia i coefficienti della combinazione lineare  $c_1 e c_2$  sono dei numeri complessi: mentre il loro modulo quadro restituisce la probabilità che lo stato collassi in uno dei due autostati di  $\hat{S}_z$ , essi contengono fattori di fase associati a  $|\uparrow\rangle_z e |\downarrow\rangle_z$  (cfr. eqq. (1.50) – (1.53)) e quindi informazioni sulla componente dello spin sul piano xy. In altre parole non è possibile scrivere il ket di stato relativo ad una miscela statistica, di conseguenza non è possibile utilizzare l'approccio operatoriale per studiare questi sistemi.

Vediamo ora come è fatta la matrice densità relativa ad una miscela statistica. Per stati puri abbiamo trovato che il valor medio di un'osservabile A è

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \, \hat{A} \, | \psi \rangle = \sum_{a} |c_a|^2 \, a, \tag{2.3}$$

dove  $\{|a\rangle\}$  è la base ortonormale di autoket di  $\hat{A}$ . Nel caso di miscele statistiche si ha che il sistema può trovarsi con probabilità  $w_i$  in uno stato rappresentato dal ket  $|\alpha_i\rangle$ , tuttavia questi ket non sono ortonormali tra loro, in generale saranno combinazioni lineari di autostati di un certo operatore  $\hat{A}$ :

$$|\alpha_i\rangle = \sum_a c_{a,i} |a\rangle.$$
(2.4)

Quindi il valor medio dell'osservabile A per una miscela statistica così fatta sarà

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i} w_{i} \langle \alpha_{i} | \hat{A} | \alpha_{i} \rangle = \sum_{a,i} w_{i} a c_{a,i} \langle \alpha_{i} | a \rangle = \sum_{a,a',i} w_{i} a c_{a',i}^{*} c_{a,i} \delta_{a,a'} = \sum_{a,i} w_{i} a |c_{a,i}|^{2}.$$
(2.5)

Osserviamo che, date due basi ortonormali  $\{|b'\rangle\}$  e  $\{|b''\rangle\}$ , si ha

=

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i} w_{i} \langle \alpha_{i} | \hat{A} | \alpha_{i} \rangle = \sum_{i} w_{i} \langle \alpha_{i} | \mathbb{1} \hat{A} \mathbb{1} | \alpha_{i} \rangle =$$

$$= \sum_{b',b''} \sum_{i} w_{i} \langle \alpha_{i} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \langle b'' | \alpha_{i} \rangle = \sum_{b',b''} \sum_{i} w_{i} \langle b'' | \alpha_{i} \rangle \langle \alpha_{i} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle =$$

$$= \sum_{b',b''} \sum_{i} \langle b'' | [w_{i} | \alpha_{i} \rangle \langle \alpha_{i} |] | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle = \sum_{b''} \langle b'' | \left[ \sum_{i} w_{i} | \alpha_{i} \rangle \langle \alpha_{i} | \right] \hat{A} | b'' \rangle.$$

$$(2.6)$$

La relazione ottenuta suggerisce di definire la matrice densità per le miscele statistiche come segue

$$\rho = \sum_{i} w_{i} \left| \alpha_{i} \right\rangle \left\langle \alpha_{i} \right|.$$
(2.7)

A partire da questa definizione per miscele statistiche (o sovrapposizioni incoerenti di stati), è possibile affermare che in generale le matrici densità associate a sovrapposizioni coerenti di autostati di un certo operatore  $\hat{A}$  non sono diagonali (poichè in generale i termini  $\rho_{n,m} = c_n^* c_m$  associati ad autostati ortonormali sono non nulli) mentre quelle associate a miscele statistiche sono evidentemente diagonali (se ricavate rispetto alla base  $\{|\alpha_i\rangle\}$ ). Sostituendo la (2.7) nella (2.6) e ricordando la definizione di traccia (cfr. eq. (1.43)) si ha

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\rho \, \hat{A}) = Tr(\hat{A} \, \rho).$$

Selezionata una base ortonormale di autoket  $\{|k\rangle\}$  associati ad un'operatore<sup>16</sup>  $\hat{X}$ , valutiamo gli elementi della matrice densità  $\rho_{n,m}$ :

$$\rho_{n,m} = \sum_{i} w_{i} \langle n | \alpha_{i} \rangle \langle \alpha_{i} | m \rangle = \sum_{i,k,h} w_{i} c_{h,i}^{*} c_{k,i} \langle n | h \rangle \langle k | m \rangle =$$
$$= \sum_{i,k,h} w_{i} c_{h,i}^{*} c_{k,i} \delta_{n,h} \delta_{k,m} = \sum_{i} w_{i} c_{n,i}^{*} c_{m,i}.$$
(2.8)

Particolarmente interessante è il caso n = m

$$\rho_{n,n} = \sum_{i} w_i \, |c_{n,i}|^2. \tag{2.9}$$

Questo elemento rappresenta la probabilità di misurare l'autovalore di  $\hat{X}$  associato a  $|n\rangle$ , ovvero la probabilità che il sistema si trovi nell' *n-esimo* autoket della base scelta, infatti  $w_i$  è la probabilità che il sistema sia nello stato associato al ket  $|\alpha_i\rangle \in |c_n|^2$  è la probabilità che questo collassi in  $|n\rangle$ .

Di seguito enunciamo le proprietà principali della matrice densità

• Osserviamo che, anche per le miscele statistiche,  $\rho$  è un operatore hermitiano, inoltre la forma del valor medio delle osservabili rimane invariata,

• 
$$Tr(\rho) = 1$$
.

Dimostrazione.

$$Tr(\rho) = \sum_{b'} \langle b' | \rho | b' \rangle = \sum_{b',i} w_i \langle b' | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | b' \rangle = \sum_{b',i} w_i \langle \alpha_i | b' \rangle \langle b' | \alpha_i \rangle =$$
$$= \sum_i w_i \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = \sum_i w_i = 1. \qquad (2.10)$$

•  $\rho^2 \neq \rho$ 

Dimostrazione.

$$\rho^{2} = \sum_{i,j} w_{i} w_{j} |\alpha_{i}\rangle \langle \alpha_{i} | \alpha_{j}\rangle \langle \alpha_{j} | = \sum_{i} w_{i}^{2} |\alpha_{i}\rangle \langle \alpha_{i} | + \sum_{i \neq j} w_{i} w_{j} |\alpha_{i}\rangle \langle \alpha_{i} | \alpha_{j}\rangle \langle \alpha_{j} | \neq \rho.$$

A differenza del caso di stati puri, si ha  $\rho^2 \neq \rho$  a causa del fattore  $w_i^2$  e poichè, in generale, gli stati che compongono la miscela non sono necessariamente ortogonali.

•  $Tr(\rho^2) < 1$ 

Dimostrazione.

$$Tr(\rho^2) = \sum_{b'} \langle b' | \, \rho^2 \, | b' \rangle = \sum_{b'} (\rho_{b',b'})^2.$$

Tuttavia  $\sum_{b'} \rho_{b',b'} = 1$  (cfr. eq. (2.9)), dunque

$$Tr(\rho^2) = \sum_{b'} (\rho_{b',b'})^2 \le 1$$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>A sua volta associato ad un'osservabile X.

Anche in questo caso la matrice densità contiene tutta la fisica del sistema, tuttavia per stati puri è solo un approccio alternativo a quello operatoriale, per miscele statistiche invece, non potendo definire un ket di stato, l'operatore  $\rho$  è l'unico strumento per studiarle.

#### 2.2 Polarizzazione di un Fascio di Fotoni

<sup>17</sup>In questa sezione vogliamo studiare un problema di ottica con il formalismo della matrice densità; si rivelerà particolarmente interessante la presenza di numerose analogie tra un fascio di fotoni che attraversa un filtro polarizzatore e un fascio di elettroni che attraversa un apparato Stern-Gerlach, descritto nel paragrafo precedente. Consideriamo un campo elettromagnetico che si propaga lungo l'asse z del nostro sistema di riferimento; supponiamo che il campo elettrico sia per semplicità un'onda piana monocromatica, dunque può essere descritto dalla

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{e}} A e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega\,t)}, \qquad (2.11)$$

dove  $\hat{\boldsymbol{e}}$  è il vettore di polarizzazione, orientato lungo la direzione di oscillazione del campo e di modulo unitario, A è l'ampiezza dell'oscillazione e  $\vec{\boldsymbol{k}}$  è il vettore d'onda, diretto lungo z, e cioè lungo la direzione di propagazione dell'onda. Ora, in generale il versore  $\hat{\boldsymbol{e}}$  è diretto lungo una direzione qualsiasi del piano xy ortogonale a  $\vec{\boldsymbol{k}}$  (diretto lungo z), possiamo sempre scriverlo come combinazione lineare dei versori  $\hat{\boldsymbol{e}}_x$  e  $\hat{\boldsymbol{e}}_y$  diretti rispettivamente lungo gli assi ortogonali  $x \in y$ :

$$\hat{\boldsymbol{e}} = a\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + b\,e^{i\frac{\varphi}{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_y,\tag{2.12}$$

dove  $\phi$  è la differenza di fase tra le due onde polarizzate lungo  $x \in y$ ; essendo  $\hat{e}$  un versore e data l'ortogonalità dei versori  $\hat{e}_x \in \hat{e}_y$  si ha che

$$|\hat{e}|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$
 (2.13)

Dunque possiamo scrivere l'espressione del campo elettrico come

$$\vec{E} = \hat{e} A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} (\hat{e}_x \cos\alpha + \hat{e}_y e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\alpha), \qquad (2.14)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra il versore  $\hat{\boldsymbol{e}}$  e il versore della base del piano xy,  $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ . Supponiamo ora di avere un filtro polarizzatore (ad esempio un foglio polaroid  $H-sheet^{18}$ ) ideale, e di far incidere il fascio di luce polarizzata definito dalla (2.11) sul polarizzatore: il filtro è un polarizzatore lineare ideale, dunque esisterà un'orientazione per cui la luce (polarizzata) passerà tutta attraverso il filtro, per le altre orientazioni solo parte della luce verrà trasmessa; in uscita si avrà luce polarizzata linearmente lungo l'asse di trasmissione del polarizzatore, tuttavia questa sarà di intensità minore rispetto al fascio di luce incidente. In particolare, se il polarizzatore è orientato in modo tale che l'asse di assorbimento coincida con l'asse y (figura 2.3), solo la componente associata a  $\hat{\boldsymbol{e}}_x$  attraversa il filtro senza essere assorbita, dunque l'intensità del fascio di uscita sarà  $I_{out} = cos^2 \alpha I$  (dove I è l'intensità del fascio incidente), viceversa se l'asse di assorbimento coincide con l'asse x, in uscita si avrà solo la luce polarizzata lungo y e l'intesità del fascio sarà  $I_{out} = sen^2 \alpha I$ . Supponiamo di avere un foglio polaroid orientato lungo un asse che indicheremo con x (e

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>I testi di riferimento utilizzati per questa sezione sono [9],[7].

 $<sup>^{18}</sup>$ Sono costituiti da un polimero detto PVA impregnato di iodio  $I_2$ , il composto viene stirato e si formano così delle catene di idrocarburi che possono condurre corrente grazie agli elettroni di conduzione dello iodio, la componente del campo elettrico lungo la direzione in cui sono stirate agisce sugli elettroni e perciò viene assorbita dal filtro, solo la componente ortogonale trasmette dall'altra parte, otteniamo così luce polarizzata nella direzione ortogonale a quella di assorbimento.

cioè i polimeri che lo compongono sono stirati lungo l'asse x); ricordando la definizione di stato puro e di esperimento completo, possiamo affermare che il fascio di luce uscente dal polarizzatore sarà in uno stato puro della polarizzazione poichè sarà polarizzato linearmente lungo la direzione di trasmissione del filtro, e se sottoposto ad un altro polarizzatore identico e ugualmente orientato, il fascio trasmetterà tutto conservando polarizzazione ed intensità.



Figura 2.3: Fascio di luce polarizzata linearmente incidente su filtro polaroid con un angolo  $\theta$  tra asse di polarizzazione e asse di trasmissione.

Vogliamo ora formalizzare quanto detto in termini di ket di stato: un fascio di luce polarizzata linearmente è un fascio di fotoni che sono tutti in uno stato puro della polarizzazione, infatti esiste un filtro polarizzatore attraverso cui tutti i fotoni passano restituendo in uscita un fascio con polarizzazione e intensità uguali a quelle del fascio iniziale. Associamo ai versori della polarizzazione definiti, dei ket di stato:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\boldsymbol{e}}_{x} & \longrightarrow & |\boldsymbol{e}_{x}\rangle \,, \\ \\ \hat{\boldsymbol{e}}_{y} & \longrightarrow & |\boldsymbol{e}_{y}\rangle \,, \\ \\ \hat{\boldsymbol{e}} = \cos\alpha \, \hat{\boldsymbol{e}}_{x} + \sin\alpha \, e^{i\frac{\phi}{2}} \hat{\boldsymbol{e}}_{y} & \longrightarrow & |\boldsymbol{e}\rangle = \cos\alpha \, |\boldsymbol{e}_{x}\rangle + \sin\alpha \, e^{i\frac{\phi}{2}} \, |\boldsymbol{e}_{y}\rangle \end{array}$$

A questo punto, analogamente a quanto detto per un sistema con spin  $\frac{1}{2}$  si ha che la matrice densità valutata rispetto alla base  $\{|e_x\rangle, |e_y\rangle\}$  è

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & e^{-i\phi} \cos \alpha \, sen\alpha \\ e^{i\phi} \cos \alpha \, sen\alpha & sen^2 \alpha \end{pmatrix}.$$
(2.15)

I termini sulla diagonale  $sen^2 \alpha$  e  $cos^2 \alpha$  rappresentano le probabilità che i singoli fotoni, in seguito all'interazione col polarizzatore, si trovino negli stati puri della polarizzazione associati rispettivamente a  $|e_y\rangle \in |e_x\rangle$ . In sostanza ogni fotone avrà una probabilità pari a  $sen^2 \alpha$  di attraversare il polarizzatore (con asse di assorbimento lungo x), dunque possiamo affermare che, dato un fascio in ingresso di N fotoni, in uscita si avranno mediamente  $Nsen^2 \alpha$  fotoni (associati al ket di stato  $|e_y\rangle$ ), analogamente la probabilità che il singolo fotone sia associato al ket di stato  $|e_x\rangle$  (e dunque la probabilità che non attraversi il filtro) è pari a  $cos^2 \alpha$ . Supponiamo ora di avere un fascio di luce in ingresso non polarizzato, in particolare supponiamo di avere preparato indipendentemente<sup>19</sup> due fasci di luce polariz-

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>E cioè le due sorgenti non sono coerenti, non c'è una relazione di fase definita tra i due fasci emessi.

zata linearmente di rispettivamente di intensità  $I_1 \in I_2$ . Essi sono in stati puri diversi della polarizzazione

$$|e_1\rangle = a_1 |e_x\rangle + b_1 |e_y\rangle, |e_2\rangle = a_2 |e_x\rangle + b_2 |e_y\rangle.$$
(2.16)

Il sistema è dunque una miscela statistica di due stati puri, **non è possibile scrivere un ket di stato** per il fascio "combinato" poichè una frazione di fotoni  $I_1/I$  (dove Iè l'intensità del fascio d'ingresso ) è rappresentata dal ket di stato puro  $|e_1\rangle$ , mentre la restante  $I_2/I$  da  $|e_2\rangle$ . Ne deriva che in questo caso non esiste alcuna orientazione del polarizzatore per cui tutta la luce in ingresso viene trasmessa, l'intensità del fascio in uscita è sempre minore di quella del fascio incidente. Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.3 e in accordo con la (2.7) si ha che se per il sistema non è possibile scrivere il ket di stato, è invece possibile scrivere l'operatore densità

$$\rho = \sum_{i=1}^{2} w_i |e_i\rangle \langle e_i| = w_1 |e_1\rangle \langle e_1| + w_2 |e_2\rangle \langle e_2|.$$
(2.17)

A questo punto per sapere quanta luce attraverserà il filtro polarizzatore con asse di assorbimento lungo x e quanta sarà assorbita è sufficiente scrivere gli elementi di matrice rispetto alla base  $\{|e_x\rangle, |e_y\rangle\}$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} w_1 |a_1|^2 + w_2 |a_2|^2 & w_1 a_1^* b_1 + w_2 a_2^* b_2 \\ w_1 b_1^* a_1 + w_2 b_2^* a_2 & w_1 |b_1|^2 + w_2 |b_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Si deduce che ogni fotone del fascio incidente (miscela) ha una probabilità  $P = w_1 |b_1|^2 +$  $w_2|b_2|^2$  di non essere assorbito dal polarizzatore, perciò l'intensità del fascio in uscita sarà in media  $I_{out} = I \cdot [w_1|b_1|^2 + w_2|b_2|^2]$ . Va da sè che l'intensità assorbita sarà  $I_{abs} = I \cdot [w_1|a_1|^2 + w_2|a_2|^2]$ . L'utilizzo dell'operatore densità può essere applicato a qualsiasi miscela statistica e a qualsiasi filtro a patto che si scelga opportunamente la base rispetto al quale scrivere gli elementi di matrice; di seguito tratteremo il caso in cui lo stesso fascio viene sottoposto ad un apparato che misura la polarizzazione circolare, inoltre specificheremo cosa si intende per *stato della polarizzazione*, dal momento che finora abbiamo sostanzialmente utilizzato il principio di corrispondenza senza aver definito nessun operatore polarizzazione. Se in ottica classica un fascio di luce è un campo elettromagnetico e la sua polarizzazione è definita in termini di direzione di oscillazione del campo elettrico, nell'approccio quantistico il fascio di luce è un insieme di fotoni e la polarizzazione del fascio sarà riconducibile agli stati di polarizzazione dei singoli fotoni che lo compongono. Per definire gli stati di polarizzazione dei fotoni è necessario considerarne lo spin: i fotoni sono bosoni con spin pari a uno, perciò la componente dello spin lungo l'asse z (che coincide con la direzione di moto dei fotoni) potrà, in linea di principio, assumere i valori 1, -1, 0. Gli stati di spin dei singoli fotoni sono associati agli stati di polarizzazione, tuttavia se il fascio di fotoni è diretto lungo l'asse z, possiamo individuare due versori di polarizzazione lineare sul piano xy, questi sono una base del piano xy e generano perciò qulasiasi stato di polarizzazione del fascio (che deve essere necessariamente sul piano xy), dunque gli stati di spin  $S_z$  dovranno necessariamente essere due. Per capire quali dei tre stati di spin devono considerarsi e quali no è necessario fare un ragionamento, che illustriamo di seguito. Quando si studia il campo elettromagnetico che si propaga nel vuoto si ottiene l'equazione di D'Alembert per il potenziale vettore

Possiamo effettuare l'espansione in serie di Fourier di  $A_{\mu}(x)$ 

$$A^{\mu}(\vec{x}) = \int d^{3}\vec{p} A^{\mu}(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{p^{0}}}.$$
 (2.19)

Se il fascio è diretto lungo l'asse z, allora i fotoni sono diretti lungo quell'asse e  $\vec{p} = (p^0, 0, 0, p^3)$ , inoltre si ha che  $p^0 = E/c^2 = p$  (poichè m = 0), dunque  $p^0 = p^3$ . Sostituendo lo sviluppo di Fourier di  $A^{\mu}(\vec{x})$  nella (2.19) si ottiene

$$p_{\mu} A^{\mu}(\vec{\mathbf{p}}) = p^0 A^0(\vec{\mathbf{p}}) - p^3 A^3(\vec{\mathbf{p}}) = 0.$$
 (2.20)

Dunque si ha  $A^0(\vec{p}) = A^3(\vec{p})$ . Possiamo esprimere il potenziale vettore rispetto i vettori della polarizzazione

$$A^{\mu}(\vec{\boldsymbol{p}}) = \sum_{k} a_{k}(\vec{\boldsymbol{p}})\epsilon_{k}^{\mu}.$$
(2.21)

Dato che la terza componente  $A^3(\vec{p})$  e quella temporale  $A^0(\vec{p})$  sono uguali definiamo i vettori di polarizzazione di conseguenza

$$\boldsymbol{\epsilon_1} = (0, 1, 0, 0), \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_2} = (0, 0, 1, 0), \tag{2.23}$$

$$\epsilon_3 = (1, 0, 0, 1). \tag{2.24}$$

Se consideriamo un'onda elettromagnetica che ha

$$A^{\mu}(\vec{x}) = \int d^{3}\vec{p} \frac{1}{\sqrt{p^{0}}} a_{3}(\vec{p}) \epsilon_{3}^{\mu} e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$
(2.25)

e calcoliamo  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , ricordando come è definito il prodotto scalare in relatività ristretta<sup>20</sup>, troviamo  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ , dunque i fotoni possono essere polarizzati unicamente sul piano ortogonale alla direzione di moto (trasversalità del campo elettromagnetico). Il potenziale vettore sarà

$$A^{\mu}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \sum_{\sigma} \int d^{3} \vec{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{p^{0}}} \left[ a_{\sigma}(\vec{\boldsymbol{p}}) \,\epsilon^{\mu}_{\sigma} e^{+i\vec{\boldsymbol{p}}\vec{\boldsymbol{x}}} + \,a^{*}_{\sigma}(\vec{\boldsymbol{p}}) \,\epsilon^{\mu}_{\sigma} e^{-i\vec{\boldsymbol{p}}\vec{\boldsymbol{x}}} \right]. \tag{2.26}$$

dove  $\epsilon_{\sigma}$  sono i vettori di polarizzazione nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (che coincide con la direzione di  $\vec{p}$ ). La (2.26) è la soluzione completa dell'equazione di D'Alembert (2.18). Il potenziale vettore associato al campo elettromagnetico polarizzato può essere interpretato come la funzione d'onda dei fotoni che compongono il fascio, con momento cinetico  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  e polarizzazione  $\epsilon_{\sigma}$ ; è chiaro che questi non possono avere momento angolare  $j_z = 0$  poichè ciò corrisponde ad una funzione d'onda a simmetria sferica, il che è incompatibile con il fatto che l'onda elettromegnetica è trasversale, e dunque esiste una direzione "privilegiata" (quella di propagazione). Alla luce di quanto detto abbiamo solo due valori di spin  $s_z$ , e cioè  $s_z = 1$  e  $s_z = -1$  che associamo rispettivamente ai ket di stato up ( $|+\rangle$ ) e down ( $|-\rangle$ ). Questi stati sono autoket dell'elicità, operatore definito come la proiezione dello spin sulla direzione del momento cinetico, che in questo caso, coincide con  $\hat{S}_z$ . Valutare l'elicità dei fotoni è rilevante nel nostro studio poichè si dimostra

$${}^{20}\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\eta_{\alpha,\beta}a^{\alpha}b^{\beta}\,\operatorname{con}\,\eta_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

che fotoni che sono in uno stato di elicità sono associati a stati di polarizzazione circolare destrorsa (se il ket è  $|+\rangle$ ) e sinistrorsa (se il ket è  $|-\rangle$ ); la connessione tra polarizzazione e momento angolare totale si può comprendere intuitivamente se si osserva che puntando un fascio di luce polarizzata su un bersaglio, gli elettroni del bersaglio si muoveranno come il campo elettrico a cui sono soggetti, dunque se tale radiazione incidente è polarizzata circolare, la rotazione del campo elettrico attorno all'asse di propagazione indurrà un moto circolare degli elettroni nel bersaglio e cioè un momento angolare. Dunque ad un fascio di fotoni con elicità  $s_z = +1$  è associato un ket di stato  $|+\rangle$  (spin up) e uno stato della polarizzazione circolare associato al ket  $|e_+\rangle$  (destrorsa), viceversa per un fascio di fotoni con elicità  $s_z = -1$  i ket associati sono  $|-\rangle e |e_-\rangle$  (polarizzazione circolare sinistrorsa). A questo punto, considerando che i **versori** di polarizzazione circolare destrorsa e sinistrorsa si possono scrivere in funzione dei versori di polarizzazione lineare:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{+} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + i \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \right),$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} - i \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \right).$$
(2.27)

Possiamo scrivere i ket degli stati di polarizzazione circolare come combinazione lineare dei ket della polarizzazione lineare

$$|e_{+}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{x}\rangle + i |e_{y}\rangle),$$
  

$$|e_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{x}\rangle - i |e_{y}\rangle).$$
(2.28)

Dunque, tornando al problema della miscela statistica di stati puri della polarizzazione lineare, si ha

$$|e_{1}\rangle = a_{1} |e_{x}\rangle + b_{1} |e_{y}\rangle = a_{1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{-}\rangle - |e_{+}\rangle) - i b_{1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{-}\rangle + |e_{+}\rangle),$$
  

$$|e_{2}\rangle = a_{2} |e_{x}\rangle + b_{2} |e_{y}\rangle = a_{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{-}\rangle - |e_{+}\rangle) - i b_{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_{-}\rangle + |e_{+}\rangle). \quad (2.29)$$

Ridefinendo i coefficienti si ha

$$|e_1\rangle = = c_1 |e_+\rangle + d_1 |e_-\rangle,$$
  

$$|e_2\rangle = = c_2 |e_+\rangle + d_2 |e_-\rangle.$$
(2.30)

dove

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + i b_1) \qquad d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - i b_1),$$
  
$$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + i b_2) \qquad d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - i b_2).$$

Scelta come base ortonormale dei ket quella degli stati della polarizzazione circolare, la matrice densità associata alla miscela è

$$\rho = \begin{pmatrix} w_1 |c_1|^2 + w_2 |c_2|^2 & w_1 c_1^* d_1 + w_2 c_2^* d_2 \\ \\ w_1 d_1^* c_1 + w_2 d_2^* c_2 & w_1 |d_1|^2 + w_2 |d_2|^2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la traccia della matrice è unitaria. Gli elementi sulla diagonale  $\rho_{1,1}$  e  $\rho_{2,2}$  restituiscono la probabilità che il singolo fotone della miscela si trovi rispettivamente in uno

stato di polarizzazione circolare destrorsa o sinistrorsa, e quindi la probabilità che abbia elicità  $s_z = 1$  o  $s_z = -1$ . E' chiaro che avendo scelto due fasci polarizzati linearmente, i fotoni di entrambi i fasci sono in uno stato di sovrapposizione coerente di stati puri della polarizzazione circolare (cfr. eq. (2.30)), tuttavia sottoponendoli ad una misura del momento angolare totale lo stato dei singoli fotoni dovrà necessariamente collassare in uno dei due stati dell'elicità e quindi anche della polarizzazione circolare:



Figura 2.4: Rappresentazione grafica di un nuovo dispositivo che misura il momento angolare della luce, e quindi l'elicità, attraverso la misura della corrente indotta nel bersaglio da un campo EM polarizzato circolare; come si può notare a  $s_z = +1$  è associata una polarizzazione circolare destrorsa, a  $s_z = -1$  una polarizzazione circolare sinistrorsa

L'intensità del fascio in uscita polarizzato circolare destrorso sarà

$$I_{+} = \left[ w_{1}|c_{1}|^{2} + w_{2}|c_{2}|^{2} \right] I, \qquad (2.31)$$

dove I è l'intensità del fascio in ingresso (miscela dei due fasci polarizzati linearmente e preparati indipendentemente); va da sè che l'intensità del fascio in uscita polarizzato circolare sinistrorso è  $I_{-} = I \left( w_1 |d_1|^2 + w_2 |d_2|^2 \right) = I \left( 1 - w_1 |c_1|^2 + w_2 |c_2|^2 \right) = I - I_{+}$ .

Osserviamo che siamo partiti dallo studio di un sistema classico (un campo elettromagnetico che attraversa un filtro polarizzatore) e ne abbiamo fatto una quantizzazione, definendo gli stati della polarizzazione, legati all'elicità, e cioè agli autostati dello spin lungo l'asse di propagazione del campo. In ottica classica, diciamo che dato un campo elettromagnetico polarizzato linearmente che incide su un polarizzatore lineare, la componente di campo elettromagnetico lungo la direzione di assorbimento del filtro non trasmette, mentre la componente ad essa ortogonale lo attraversa indisturbata, in particolare se l'angolo tra la direzione di polarizzazione del fascio incidente e quella di assorbimento del filtro è  $\theta$ , la componente del campo elettrico che attraversa il filtro sarà  $\vec{E} = \vec{E_0} sen\theta$ , dunque l'intensità del fascio in uscita sarà  $I_{out} = I sen^2 \theta$ . Nell'approccio quantistico invece, e cioè considerando la radiazione come un fascio di fotoni in uno stato di polarizzazione lineare, si decompone il ket di stato sulla base ortonormale dei ket associati al polarizzatore  $\langle |e_x\rangle, |e_y\rangle$ , rispettivamente associati alle direzioni di assorbimento e trasmissione del filtro), quando i fotoni incidono sul filtro, il loro ket di stato può collassare in uno dei ket di base, con una certa probabilità data proprio dalla proiezione di questo ket sui ket della base scelta, di conseguenza si ha nuovamente che i fotoni che attraversano indisturbati il polarizzatore sono quelli il cui ket di stato collassa in  $|e_{\mu}\rangle$ . La probabilità che il singolo fotone si trovi nello stato  $|e_u\rangle$  è  $sen^2\theta$ , dunque per un fascio di N fotoni tutti nello stesso stato di polarizzazione, il numero di fotoni che attraverseranno il filtro è  $N sen^2 \theta$ , l'intensità in uscita sarà  $I_{out} = I sen^2 \theta$ . Osserviamo che la differenza tra i due approcci (classico e quantistico) sta nel fatto che in meccanica quantistica non è dato sapere cosa accade ai fotoni quando incidono sul polarizzatore, in generale infatti chiedersi cosa determina il cambio di polarizzazione del fotone quando incide sul polarizzatore, e quindi cosa determina il suo passaggio o assorbimento, non ha senso. In effetti quando facciamo incidere i fotoni sul polarizzatore stiamo effettuando una misura della polarizzazione, quindi perturbiamo il sistema; tale perturbazione a sua volta produrrà il collasso dello stato dei fotoni in  $|e_x\rangle$  o  $|e_y\rangle$  con probabilità legate all'angolo tra la direzione di polarizzazione del fascio e l'asse di assorbimento o trasmissione del polarizzatore.

#### 2.3 Operatore Densità ed Entropia

 $^{21}\mbox{In}$  questo paragrafo mostreremo un' applicazione dell'operatore densità in meccanica statistica, in particolare ricaveremo il funzionale entropia per un sistema a molti corpi. Supponiamo di voler studiare un gas di fotoni o di fermioni; in linea di principio si potrebbero ricavare le equazioni del moto di ogni particella e dunque un sistema di equazioni che descriva l'evoluzione temporale del sistema, tuttavia per un sistema a molti corpi  $(N \sim 10^{23})$  questo significherebbe risolvere un sistema di  $3 \cdot 10^{23}$  equazioni differenziali, date  $6 \cdot 10^{23}$  condizioni iniziali  $(q_{i,0}, p_{i,0})^{22}$ . Per un sistema classico anche solo scrivere le condizioni iniziali è impossibile, per un sistema quantistico invece queste in generale non sono determinate, poichè gli operatori di posizione e momento cinetico non commutano. Dunque è necessario un approccio statistico, in altre parole rinunciamo a conoscere il comportamento delle singole particelle e valutiamo invece quello di tutto il sistema. Il caso più semplice è forse quello in cui numero di particelle, volume e energia del sistema sono fissati, tuttavia non è possibile isolare perfettamente un sistema dall'ambiente esterno, per cui sebbene volume V e numero di particelle N siano fissati (ciò si ottiene mettendo il nostro sistema in un contenitore rigido), il processo di misura perturberà il sistema e indurrà delle transizioni tra microstati<sup>23</sup>. In altre parole un sistema di N particelle non sarà mai associato ad un'unico microstato, ma ad un ensemble di microstati; come già accennato non ci soffermeremo sui singoli microstati e la loro evoluzione temporale ma li tratteremo con i metodi della meccanica statistica studiando invece i macrostati del sistema e cioè grandezze relative ad aspetti globali del sistema, ad esempio temperatura, volume e pressione. In questo paragrafo ci soffermeremo sullo studio di sistemi in equilibrio e cioè a densità di stati fissata, in altre parole è possibile che ci siano delle transizioni di stato per le singole particelle, tuttavia la densità di particelle in un determinato stato rimarrà mediamente costante nel tempo, questo implica che la matrice densità è costante (poichè lo sono i pesi statistici  $p_n$ ). Dall'equazione di Von Neumann (cfr. (1.45)) si ha che, per sistemi in equilibrio

$$\dot{\rho} = 0 \longrightarrow \left[\hat{\mathcal{H}}, \rho\right] = 0.$$
 (2.32)

Supponiamo di avere un sistema isolato, fissiamo il numero di particelle N e il volume V, l'energia invece varia all'interno di un intervallo  $[E, E + \Delta E]$  anch'esso fissato; un sistema con questi vincoli si dice **ensemble microcanonico** 

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup>Per questo paragrafo sono stati utilizzati come testi di riferimento [10], [11].

<sup>&</sup>lt;sup>22</sup>Dove le  $q_i \in p_i$  sono le coordinate nello spazio delle fasi, e cioè rispettivamente le coordinate lagrangiane e i momenti cinetici.

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup>Dato un sistema di N particelle, con microstato si intende una 6N-ennupla  $(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N}).$ 



Figura 2.5: Rappresentazione della regione "permessa" nello spazio delle fasi

E' chiaro che i microstati del sistema a possono trovarsi solamente in una certa regione dello spazio delle fasi (quella associata a energie nell'intervallo scelto) e che, dato che il sistema è in equilibrio, la loro distribuzione in questa regione siano omogenea, in altre parole tutti gli stati hanno uguale peso statistico. Il sistema è dunque una miscela statistica, associando a questi stati i ket  $\{|n\rangle\}$ , è possibile scrivere l'operatore densità come

$$\rho = \sum_{n} p_n \left| n \right\rangle \left\langle n \right|, \qquad (2.33)$$

dove  $p_n$  è il peso statistico associato agli stati a energia  $E_n$  che, alla luce di quanto discusso, deve essere costante:

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)\Delta E} & se \ E \le E_n \le E + \Delta E \\ 0 & , \end{cases}$$
(2.34)

dove  $\Omega(E)\Delta E$  è il volume dello spazio delle fasi associato all'intervallo di energia del sistema, normalizzato. Osserviamo che la matrice densità dipende unicamente dall'energia e gli stati del sistema sono equiprobabili, ciò è conseguenza della condizione di equilibrio del sistema; se infatti tale condizione venisse a mancare, la matrice densità non sarebbe costante e perciò non commuterebbe con l'hamiltoniana (dipenderebbe da altre grandezze) e in generale gli stati non avrebbero ugual peso statistico.

 $\Omega(E)$  è la costante di normalizzazione, si ottiene perciò dalla condizione

$$Tr(\rho) = 1, \tag{2.35}$$

che implica

$$\sum_{n} p_n = \sum_{n} \frac{1}{\Omega(E)\Delta E} = 1 \longrightarrow \Omega(E) = \sum_{n} \frac{1}{\Delta E} = \frac{N'}{\Delta E},$$
(2.36)

dove N' è il numero di stati nella regione dello spazio delle fasi considerata, da ora in poi indicheremo  $\Omega(E)\Delta E$  con  $\overline{\Omega}(E)$ . Definiamo ora l'**entropia**: dato un sistema con operatore densità associato  $\rho$ , si definisce entropia del sistema il funzionale

$$S = -k Tr(\rho \log \rho) = -k \langle \log \rho \rangle, \qquad (2.37)$$

dove k è la costante di Boltzmann. Nel caso di un ensemble microcanonico si ha

$$S_{mc} = -k \sum_{n} \left( \frac{1}{\overline{\Omega}(E)} \log \frac{1}{\overline{\Omega}(E)} \right) = +k N' \frac{1}{\overline{\Omega}(E)} \log \overline{\Omega}(E) = \\ = k \left[ \sum_{n} \frac{1}{\overline{\Omega}(E)} \right] \log \overline{\Omega}(E) = +k \log \overline{\Omega}(E).$$
(2.38)

#### 2.3. OPERATORE DENSITÀ ED ENTROPIA

Dunque l'entropia è proporzionale al logaritmo del volume dello spazio delle fasi permesso, che, nel caso di una miscela statistica di stati discreti (che abbiamo implicitamente considerato quando abbiamo definito l'operatore densità), diventa il logaritmo nel numero di stati nella regione di spazio delle fasi permessa. Osserviamo che nel caso in cui il sistema sia in uno stato puro, il peso statistico ad esso associato è pari a uno, dunque  $\overline{\Omega}(E) = 1$  e S = 0. In generale i termini  $\frac{1}{\overline{\Omega}(E)}$  rappresentano le probabilità che il sistema si trovi in uno stato associato al ket  $|n\rangle$ , dunque essi sono definiti positivi ma minori di uno, ciò implica che  $S \geq 0$ . Possiamo affermare quindi che l'entropia indica l'incompletezza dell'informazione sul sistema, se infatti questo è in uno stato puro, l'informazione è massima e l'entropia è nulla, se invece il sistema è una miscela statistica l'informazione è incompleta e l'entropia è positiva.

Di seguito dimostreremo un'importante proprietà dell'entropia relativa ad un sistema microcanonico: supponiamo di avere due operatori densità  $\rho_{mc} \in \rho$  rispettivamente associati ad un ensemble microcanonico ed un altro ensemble generico del sistema nell'intervallo di energia selezionato, in particolare

$$\rho_{mc} = \sum_{n} p_{n} |n\rangle \langle n|,$$
$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha}' |\alpha\rangle \langle \alpha|.$$

Si ha:

$$Tr(\rho(\log\rho_{mc} - \log\rho)) = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \rho(\log\rho_{mc} - \log\rho) | \alpha \rangle =$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \alpha | \left[ \sum_{\alpha'} p'_{\alpha'} | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \right] (\log\rho_{mc} - \log\rho) | \alpha \rangle = \sum_{\alpha} p'_{\alpha} \langle \alpha | (\log\rho_{mc} - \log\rho) | \alpha \rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,\alpha',n} p'_{\alpha} \langle \alpha | (\log p_n | n) \rangle \langle n | - \log p'_{\alpha'} | \alpha' \rangle \langle \alpha' |) | \alpha \rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,n'} p'_{\alpha} \langle \alpha | \log p_n | n \rangle \langle n | \alpha \rangle - \sum_{\alpha} p'_{\alpha} \langle \alpha | \log p'_{\alpha} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle . (2.39)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione di completezza. Essendo  $\langle n|m\rangle = \delta_{m,n}$  si ha

$$\sum_{\alpha,n,m} p'_{\alpha} \langle \alpha | m \rangle \langle m | \log p_{n} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle - \sum_{\alpha,m,n} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \log p'_{\alpha} | m \rangle \langle m | \alpha \rangle = \sum_{\alpha,n} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \log p_{n} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle - \sum_{\alpha,n} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \log p'_{\alpha} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \sum_{\alpha,n} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \log p'_{\alpha} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle.$$
(2.40)

Ora,  $\log x$  può essere sviluppato intorno al punto x = 1

$$\log x \simeq 0 + \frac{1}{x} \Big|_{x=1} (x-1).$$
 (2.41)

Valutiamo ora la funzione logx - x + 1, questa funzione ha derivata nulla in x = 1, inoltre la derivata seconda è definita negativa, dunque la funzione ha massimo in x = 1. Se  $log x - x + 1 \le 0 \longrightarrow log x \le x - 1$ , utilizzando questa relazione nella (2.40) si ha

$$\sum_{n} \sum_{\alpha} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \left( log \frac{p_{n}}{p'_{\alpha}} \right) | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \leq \sum_{n} \sum_{\alpha} p'_{\alpha} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \left( \frac{p_{n}}{p'_{\alpha}} - 1 \right) | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \rho_{mc} | \alpha \rangle - \sum_{n} \langle n | \rho | n \rangle = Tr(\rho_{mc}) - Tr(\rho) = 0.$$

$$(2.42)$$

Dunque abbiamo dimostato che

$$Tr(\rho(log\rho_{mc} - log\rho)) \le 0.$$
(2.43)

Osserviamo che

$$Tr(\rho \log \rho_{mc}) = \sum_{m} p'_{m} \log p_{m} = \log \frac{1}{\overline{\Omega}(E)} \sum_{m} p'_{m} = -\log \overline{\Omega}(E) = -\frac{1}{k} S_{mc}, \qquad (2.44)$$

mentre  $Tr(\rho \log \rho)$  è per definizione l'entropia  $-\frac{1}{k}S$  associata ad un generico ensemble nello stesso intervallo energetico. Sostituendo nella (2.43) si ha

$$S_{mc} \ge S,\tag{2.45}$$

e cioè l'ensemble microcanonico è quello con entropia maggiore.

Abbiamo visto che il funzionale entropia è legato all'operatore densità, ciò permette, utilizzando l'approccio standard della meccanica stastistica, di ricavare le grandezze termodinamiche usuali, ad esempio la termperatura

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = k \frac{d}{dE} log\overline{\Omega}(E).$$
(2.46)

E' particolarmente interessante il caso di un ensemble **canonico**: supponiamo di avere un sistema di volume V e numero di particelle (sottosistemi) N fissati, inoltre supponiamo di fissare il valore medio dell'energia  $\langle E \rangle^{24}$ ; di seguito definiremo l'operatore densità ed eventualmente l'entropia del sistema.



Figura 2.6: Rappresentazione del sistema complessivo, composto dal sistema 1 a contatto col bagno termico

 $<sup>^{24}</sup>$ Questa condizione è facilmente realizzabile ponendo il sistema in un contenitore rigido a contatto con un bagno termico, ovvero un secondo sistema molto più esteso del primo che perciò non cambia apprezzabilmente temperatura se a contatto con quest'ultimo.

#### 2.3. OPERATORE DENSITÀ ED ENTROPIA

Per ricavare l'espressione della matrice densità relativa ad un ensemble canonico (sistema 1 in figura 2.6) è necessario osservare che il sistema *totale* (composto dal sistema 1 e dal bagno termico) così come il sistema 2 è un ensemble microcanonico poichè per esso sono fissati volume, numero di particelle e intervallo di energia, dunque i microstati hanno uguale peso statistico, pari a  $\frac{1}{\overline{\Omega(E)}}$ . La probabilità che il sistema canonico 1 abbia energia  $E_{1n}$  è

$$p(E_{1n}) = \sum_{n'} \frac{1}{\Omega(E)\Delta E} = \frac{\Omega_2(E - E_{1n})}{\Omega(E)},$$
(2.47)

dove la somma è effettuata sugli stati in cui il sistema 2 può trovarsi quando il sistema 1 è in quello associato a energia  $E_{1n}$ , si parla dunque di stati con energia  $E_{2n'}$  compresa tra  $E - E_{1n}$  e  $E - E_{1n} + \Delta E$ , essendo il bagno termico un ensemble microcanonico, si è utilizzata la relazione (cfr. eq. (2.38))

$$\sum_{n'} \frac{1}{\Delta E} = \Omega_2(E - E_{n1}).$$
 (2.48)

Indichiamo con  $\tilde{E}_1$  il valore di energia più probabile per il sistema 1 (e coincide con l'energia media per un sistema macroscopico), dato che il sistema canonico è molto meno esteso rispetto al bagno termico possiamo effettuare lo sviluppo di Taylor di  $\Omega_2(E - \tilde{E}_1 + \tilde{E}_1 - E_{1n})\Delta E$  intorno a  $E - \tilde{E}_1$ , si ha

$$\frac{1}{\Omega(E)\Delta E} = e^{-\frac{S_{mc}}{k}} \sim e^{-(E)\frac{\partial}{\partial E}\log\overline{\Omega}(E)} = e^{-(E)\backslash kT} = e^{-E\beta}, \qquad (2.49)$$

dove abbiamo utilizzato le equazioni (2.44) e (2.46).

$$p(E_{1n}) = \frac{\Omega_2(E - \tilde{E}_1 + \tilde{E}_1 - E_{1n})}{\Omega(E)} \simeq \frac{\Omega_2(E - \tilde{E}_1)}{\Omega(E)} e^{(\tilde{E}_1 - E_{1n})\beta}, \quad (2.50)$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione (2.47). Definiamo la funzione di partizione Z come

$$Z^{-1} = \frac{\Omega_2(E - \tilde{E}_1)}{\Omega(E)} e^{\tilde{E}_1 \beta}.$$
 (2.51)

Di conseguenza si ha

$$p(E_{1n}) = Z^{-1} e^{-E_{1n}\beta}.$$
(2.52)

La matrice densità per l'ensemble canonico è definita come al solito

$$\rho_c = \sum_n p(E_{1n}) |n\rangle \langle n|, \qquad (2.53)$$

dove  $\{|n\rangle\}$  sono i ket di stato del sistema 1 e  $E_{1n}$  i valori di energia associati. Sostuendo la (2.52) nella (2.53) si ha

$$\rho_{c} = \sum_{n} p(E_{1n}) |n\rangle \langle n| = \sum_{n} Z^{-1} e^{-E_{1n}\beta} |n\rangle \langle n| = \sum_{n} \sum_{m=0}^{\infty} Z^{-1} \frac{(-E_{1n}\beta)^{m}}{m!} |n\rangle \langle n| = \sum_{n} \sum_{m=0}^{\infty} Z^{-1} \frac{(-\beta)^{m}}{m!} |n\rangle \langle n| \mathcal{H}_{1}^{m} |n\rangle \langle n|.$$
(2.54)

Se  $\{|n\rangle\}$  è la base ortonormale di autoket di  $\mathcal{H}_1$ , è chiaro che i termini  $\langle k|\mathcal{H}_1^m|n\rangle$  con  $k \neq n$  sono nulli, ciò implica

$$\sum_{k,n} |k\rangle \langle k| \mathcal{H}_{1}^{m} |n\rangle \langle n| = \sum_{k,n} E_{1n}^{m} |k\rangle \,\delta_{n,k} \langle n| = \sum_{n} |n\rangle \langle n| \mathcal{H}_{1}^{m} |n\rangle \langle n| \,.$$
(2.55)

Utilizzando la (2.55) e la relazione di completezza si ha

$$\rho_c = \sum_{m=0}^{\infty} Z^{-1} \frac{(-\beta)^m}{m!} \mathcal{H}_1^m = Z^{-1} e^{-\mathcal{H}_1 \beta}.$$
(2.56)

Dato che la matrice densità è a traccia unitaria si ha

$$1 = Tr(\frac{1}{Z}e^{-\mathcal{H}\beta}) \longrightarrow Z = Tr(e^{-\mathcal{H}\beta}) = \sum_{n} e^{-E_{n}\beta}.$$
 (2.57)

Dalla funzione di partizione, che deriva dalla matrice densità, si ricavano tutte le grandezze termodinamiche per un ensemble canonico

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} log Z \qquad energia, F = -kTlog Z \qquad energia libera di Helmholtz, S = \frac{\langle E \rangle}{T} + klog Z \qquad entropia, P = -\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \right\rangle = kT \frac{\partial log Z}{\partial V} \qquad pressione.$$
 (2.58)

Da queste grandezze possiamo ricavare, ad esempio, la prima legge della termodinamica

$$dF(T,V) = -kdTlogZ - kT\frac{1}{Z}Tr\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\left[\frac{\mathcal{H}}{kT^{2}}dT - \frac{1}{kT}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial V}dV\right]\right) =$$
  
$$= -k\,dT\,logZ - \frac{1}{ZT}Tr\left(\mathcal{H}\,e^{-\beta\mathcal{H}}\right)dT + \frac{1}{Z}Tr\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial V}\right)dV =$$
  
$$= -k\,logZ\,dT - \frac{\langle\mathcal{H}\rangle}{T}dT + \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial V}\right\rangle dV = -S\,dT - P\,dV.$$
(2.59)

Tuttavia dal set di relazioni (2.58) si ha

$$dF(T,V) = d\langle E \rangle - S \, dT - dS \, T = -S \, dT - P \, dV \longrightarrow$$
  
$$\longrightarrow d\langle E \rangle = T \, dS - P \, dV = \delta Q + \delta \mathcal{L}. \tag{2.60}$$

Dove  $Q \in \mathcal{L}$  sono rispettivamente calore trasferito al sistema e lavoro esercitato sul sistema.

### Capitolo 3

## L'operatore Densità nei Processi di Decadimento

<sup>25</sup>Un'applicazione meno nota della matrice densità, ma che recentemente è stata molto riconsiderata in rapporto alla possibilità di nuove rappresentazioni in ref.[12], permette lo studio dello spin delle risonanze prodotte da particelle interagenti in casi in cui si conservi la parità e casi in cui non si conservi (ricordiamo che tali condizioni sono determinate dal tipo di interazione responsabile della formazione dei prodotti); supponiamo infatti di avere dei processi del tipo

$$a \quad b \longrightarrow R \quad c \quad oppure \quad R_0 \longrightarrow R \quad c \tag{3.1}$$

dove R è una risonanza<sup>26</sup>, è possibile utilizzare la matrice densità per descrivere la miscela statistica di stati puri di spin associata alla risonanza, in linea di principio gli elementi di matrice *reali* possono essere misurati a partire dallo studio della distribuzione angolare dei prodotti di decadimento della risonanza (che è per definizione uno stato intermedio e instabile della reazione). Ciò che faremo è scrivere l'operatore densità della risonanza utilizzando una base ortonormale di ket di spin  $\{|n\rangle\}$ ; scelto il set di osservabili  $\{\hat{J}^2, \hat{J}_z\}$ , noto lo spin J della risonanza, questa può avere 2J + 1 valori di spin  $J_z$  diversi, dunque la matrice densità avrà dimensione N = 2J + 1. Può accadere che lo stato intermedio (risonanza) instabile sia costituito da più particelle con spin (N'), in questi casi si deve tener conto di J e  $J_z$  di tutte le N' particelle coivolte, dunque in generale si ha che la dimensione della matrice densità è  $N = \sum_{k}^{N'} (2J_k + 1)$ . Il numero di autovalori non nulli<sup>27</sup> è detto rango della matrice (lo indicheremo con "r"), è chiaro che, in assenza di simmetrie del sistema, il rango è massimo e quindi pari a  $N = \sum_{k}^{N'} (2J_k + 1)$ . Nel caso in cui ci siano simmetrie per il sistema il rango sarà minore poichè, come è noto, una simmetria del sistema corrisponde all'esistenza di un integrale primo (e cioè una quantità conservata per il sistema), dunque ad una diminuzione dei gradi di libertà del sistema. Finora abbiamo parlato di spin  $J_z$ , tuttavia questa quantità acquista significato solo se è definito un sistema di riferimento; nel nostro caso l'asse z è sul piano di produzione della risonanza e cioè il piano definito dai momenti cinetici dei reagenti e della risonanza prodotta, discuteremo più a fondo di questa scelta nei prossimi paragrafi. In generale la matrice densità ha  $N^2$  elementi, posta la condizione di unitarietà della traccia si hanno  $N^2 - 1$  parametri reali indipendenti, questi poi diminuiscono se, ad esempio, la parità è conservata nella produzione della risonanza (vedremo infatti che in quel caso sono definite relazioni che

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup>Le fonti utilizzate in questo capitolo sono [12], [13].

<sup>&</sup>lt;sup>26</sup>E cioè una particella con massa associata ad un picco della sezione d'urto.

<sup>&</sup>lt;sup>27</sup>Associati agli autoket  $\{|k\rangle\}$  di  $\rho$ .

legano gli elementi di matrice). In seguito, seguendo gli autori della ref.[12], formuleremo una parametrizzazione sistematica della matrice densità che ci permetterà di studiare le risonanze in via del tutto generale e flessibile, non solo per interazioni che conservano la parità (interazioni forti) ma anche per quelle che non la conservano (interazioni deboli). Vedremo che **qualsiasi** parametrizzazione della matrice densità di spin della risonanza (SDM) deve soddisfare delle proprietà generali di quest'ultima, che non dipendono cioè dalla base di ket rispetto al quale la si definisce. Presentiamo in questo capitolo una parametrizzazione che quindi soddisfa le proprietà di non-negatività della SDM e di traccia unitaria, vedremo che richiedere che  $\rho$  rispetti queste due proprietà equivale ad avere due condizioni differenti per gli elementi sulla diagonale e fuori diagonale.

#### 3.1 Una Nuova Parametrizzazione di $\rho$

Come è stato precedentemente accennato, qualsiasi parametrizzazione per la matrice densità deve soddisfare le seguenti proprietà:

- $Tr\rho = 1$ ,
- la matrice è definita non negativa

$$\rho_{n,m} \ge 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Di seguito dimostriamo che richiedere che la matrice densità sia definita non negativa equivale a porre due condizioni

- elementi sulla diagonale non negativi,
- un limite superiore per gli elementi fuori diagonale.

#### Teorema

Supponiamo di avere un operatore densità  $\rho$  e una matrice densità associata  $N \times N$  hermitiana, valutata rispetto ad una base ortonormale di ket; si ha che

$$\rho = \sum_{n,m} |n\rangle p_{n,m} \langle m| \ definita \ non \ negativa \iff \begin{cases} \rho_{k,k} \ge 0 \quad k = 1, 2, \dots, N\\ |\rho_{n,m}|^2 \le \rho_{n,n} \rho_{m,m} \end{cases}$$
(3.3)

Dimostrazione.

• Valutiamo gli elementi della matrice densità associati alla risonanza rispetto alla base ortonormale di ket  $\{|n\rangle\}$ 

$$\rho_{n,m} = \langle n | \rho | m \rangle = \langle n | \hat{U} \rho^{(i)} \hat{U}^{\dagger} | m \rangle =$$
  
= 
$$\sum_{k} \langle n | U | k \rangle p_{k} \langle k | U^{\dagger} | m \rangle = \sum_{k} U_{m,k}^{*} U_{n,k} p_{k}, \qquad (3.4)$$

<sup>28</sup> dove  $U_{i,j}$  sono gli elementi di matrice relativa all'operatore di evoluzione  $\hat{U}$ ,  $\rho^{(i)}$  è la matrice *iniziale*<sup>29</sup> della risonanza,  $\rho$  è la matrice associata alla risonanza dopo il

<sup>&</sup>lt;sup>28</sup>Osserviamo che  $\langle k | U^{\dagger} | m \rangle = U_{m,k}^{*}$  poichè la rappresentazione matriciale dell'operatore aggiunto è associata alla matrice trasposta coniugata.

<sup>&</sup>lt;sup>29</sup>Relativa alla produzione della risonanza.

suo decadimento e le  $p_k$  i pesi statistici associati ai ket di stato  $|k\rangle$  (dunque  $p_k \ge 0$ ). Se la matrice è hermitiana e definita non negativa, si ha:

$$\rho_{n,n} = \sum_{k} U_{n,k}^* U_{n,k} \, p_k = \sum_{k} |U_{n,k}|^2 \, p_k \ge 0. \tag{3.5}$$

A questo punto valutiamo gli elementi fuori diagonale

$$\rho_{n,m} = \sum_{k} U_{m,k}^* U_{n,k} \, p_k = \sum_{u} \left( U_{m,u}^* \sqrt{p_u} \, \langle u | \right) \sum_{v} \left( U_{n,v} \, \sqrt{p_v} \, | v \rangle \right) = \langle V_m | \, V_n \rangle, \quad (3.6)$$

dove si è utilizzata l'ortonormalità dei vettori della base  $\{|k\rangle\}$  per definire i ket

$$|V_n\rangle = \sum_{v} \left( U_{n,v} \sqrt{p_v} \,|v\rangle \right) \tag{3.7}$$

A questo punto, per la disuguaglianza di Schwartz si ha

$$|\rho_{n,m}|^2 = |\langle V_m | V_n \rangle|^2 \le \langle V_m | V_m \rangle \langle V_n | V_n \rangle = \rho_{n,n} \rho_{m,m}.$$
(3.8)

• Se invece  $\rho_{k,k} \ge 0$  e  $|\rho_{n,m}|^2 \le \rho_{n,n}\rho_{m,m}$  gli elementi della matrice densità possono essere scritti come prodotti scalari (dato che ne rispettano le proprietà), dunque si ha

$$\rho_{n,m} = \langle V_n | \, V_m \rangle, \tag{3.9}$$

scelta una base ortonormale di ket  $\{|k\rangle\}$  si ha

$$\rho_{n,m} = \langle V_n | V_m \rangle = \sum_{r,s} c^*_{r,n} c_{s,m} \langle r | s \rangle = \sum_{r,s} c^*_{r,n} c_{s,m} \delta_{r,s} = \sum_r c^*_{r,n} c_{r,m}, \qquad (3.10)$$

dove  $c_{s,m} = \langle s | V_m \rangle$  e  $c_{r,n} = \langle r | V_n \rangle$ .

Da questa espressione non è possibile definire un segno per gli elementi di matrice in generale, ma si può affermare che gli elementi della diagonale sono definiti non negativi. Scelto un ket generico  $|W\rangle$  si ha

$$\langle W | \rho | W \rangle = \sum_{n,m} \langle W | n \rangle \langle V_n | V_m \rangle \langle m | W \rangle.$$
(3.11)

Definito

$$\sum_{m} |V_{m}\rangle \langle m|W\rangle = |Z\rangle.$$
(3.12)

Si ha

$$\langle W | \rho | W \rangle = \langle Z | Z \rangle \ge 0. \tag{3.13}$$

Dato che l'espressione ottenuta vale  $\forall |W\rangle$ , si ha che la matrice densità è definita non negativa.

Come già accennato la risonanza è uno stato intermedio instabile della reazione, essa potrebbe decadere in più particelle, dunque la matrice densità associata ad una risonanza deve tener conto dei prodotti di decadimento, in particolare delle distribuzioni angolari di questi. Dato che gli elementi sulla diagonale sono definiti non negativi possiamo riscriverli come segue

$$\rho_{n,n} = \langle V_n | V_n \rangle = a_n^2 \quad \forall n = 1, 2, 3, ..., N.$$
(3.14)

Applichiamo la condizione sulla traccia

$$\sum_{n} a_n^2 = 1. (3.15)$$

Analogamente a quanto fatto per un sistema a spin  $\frac{1}{2}$ , possiamo associare agli stati puri di spin, punti di un'ipersuperficie sferica nello spazio  $\mathbb{R}^N$ , dunque parametrizzeremo la matrice densità di spin tramite gli angoli  $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$  che permettono di individuare i punti sull'ipersuperfie sferica di raggio unitario. Valutiamo innanzitutto i processi che conservano la parità, indichiamo con  $\pi$  il piano definito dai momenti cinetici di  $a \ b \in R$ oppure da  $R_0 \in R$  (cfr. eq. (3.1)), in generale il piano definito dalla risonanza e dai suoi prodotti di decadimento può non coincidere con  $\pi$  (figura 3.1).



Figura 3.1: Un fascio di fotoni viene fatto incidere su una targhetta fissa onde realizzare a livello microscopico la collisione tra fotone e protone nella reazione  $\gamma \quad p \longrightarrow n \quad \pi^0 \quad \pi^+$ . Il processo genera un neutrone e un mesone  $\rho$  (risonanza) che decade in  $\pi^+ e \pi^0$ . Il piano di reazione xz è definito dai momenti cinetici del fotone e del neutrone, il piano di produzione x'z' è invece definito dai momenti cinetici dei pioni prodotti.

Scegliamo di scrivere la matrice densità rispetto agli autoke<br/>t $|j,m\rangle$  del set  $\{\hat{J}^2,\hat{J}_z\}$ dovez è un'asse sul piano<br/>  $\pi$ , mentre y è l'asse ortogonale al piano<br/>  $\pi$ . Indichiamo con $\rho_{m,m'}^{j,j'}$ gli elementi di matrice

$$\rho_{m,m'}^{j,j'} = \langle j, m | \rho | j', m' \rangle.$$
(3.16)

Definiamo, a partire dall'operatore di parità  $\hat{P}$ , l'operatore di riflessione spaziale rispetto al piano di produzione xz (definito dagli impulsi delle particelle interagenti e dall'impulso della risonanza R prodotta)

$$\Pi_y = \hat{P}e^{-i\pi \hat{J}_y}.\tag{3.17}$$

Osserviamo che l'operatore di riflessione rispetto al piano xz è composto da un'inversione spaziale e una rotazione di  $\pi$  attorno all'asse y. Valutiamo l'azione di quest'operatore sul ket di stato  $|j,m\rangle$ 

$$\Pi_{y} \left| j, m \right\rangle = e^{-i\pi(j-m)} \eta \left| j, -m \right\rangle.$$
(3.18)

Dove  $\eta$  è la parità intrinseca dello stato associato al ket  $|j, m\rangle$ , di conseguenza

$$(\Pi_{y}\rho\Pi_{y}^{-1})_{m,m'}^{j,j'} = \sum_{j'',j''',m'',m'''} \langle j,m|\Pi_{y}|j'',m''\rangle \rho_{m'',m'''}^{j'',j'''} \langle j''',m'''|\Pi_{y}^{-1}|j',m'\rangle =$$

$$= \sum_{j'',j''',m'',m'''} \left[ \langle j'',m''|\Pi_{y}^{\dagger}|j,m\rangle \right]^{*} \rho_{m'',m'''}^{j'',j'''} \langle j''',m'''|\Pi_{y}^{-1}|j',m'\rangle =$$

$$= \sum_{j'',j''',m'',m'''} \eta e^{-i\pi(j-m)} \delta_{j,j''} \delta_{-m,m''} \rho_{m'',m'''}^{j'',m'''} \eta' e^{i\pi(j'-m')} \delta_{j',j'''} \delta_{m''',-m'} =$$

$$= \eta \eta' e^{i\pi(j-m-j'+m')} \rho_{-m,-m'}^{j,j'} = \eta \eta' e^{i\pi\Delta} \rho_{-m,-m'}^{j,j'}.$$

$$(3.19)$$

dove  $\Delta = j - m - j' + m'$ . Se il sistema fisico conserva la parità,  $\rho$  commuta con l'operatore  $\hat{P}$ , in particolare nel nostro caso  $\rho$  commuta con  $\Pi_y$  (poichè il piano  $\pi$  su cui si muovono le particelle coincide col piano xz), di conseguenza si ha

$$\left(\Pi_y \rho \Pi_y^{-1}\right)_{m,m'}^{j,j'} = \rho_{m,m'}^{j,j'} = \eta \,\eta' \,e^{i\pi\Delta} \rho_{-m,-m'}^{j,j'}.$$
(3.20)

A questo punto possiamo parametrizzare gli elementi di matrice; analogamente a quanto si fa per un sistema a spin semintero, possiamo associare ai ket di stato  $|j,m\rangle$  dei punti su un'ipersfera in  $\mathbb{R}^N$ , dunque i parametri utilizzati saranno coordinate angolari relative a questa sfera,  $\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}$ . Per introdurre le coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^N$  proseguiamo per analogia a partire dai casi noti

• Per una sfera in  $\mathbb{R}^2$ , le coordinate cartesiane sono legate alle coordinate sferiche tramite le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = r \cos\theta, \\ y = r \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

• Per una sfera in  $\mathbb{R}^3$  si ha

Generalizzando, per una sfera N-dimensionale si ha

$$\begin{array}{l} x_1 = r \cos\varphi_1, \\ x_2 = r \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ x_3 = r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N = r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 ... \sin\varphi_{N-1} \end{array}$$

Nel nostro caso r = 1.

In analogia con quanto fatto per un sistema a spin semintero, si ha

$$a_1 = \cos\alpha_1, \quad a_2 = \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2,$$
  
$$a_3 = \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_3, \quad \dots \quad a_N = \prod_i^{N-1} \operatorname{sen}\alpha_i.$$
 (3.21)

 $\operatorname{Con}$ 

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{j,j'}^{j,j'} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & \rho_{j-1,j'-1}^{j,j'} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \rho_{-j,-j'}^{j,j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_N^2 \end{pmatrix} . (3.22)$$

E' evidente che questa parametrizzazione soddisfa

$$\sum_{i}^{N} a_i^2 = 1, \tag{3.23}$$

dunque la traccia della SDM è unitaria. Nel caso di sistemi che conservano la parità con N pari, per gli elementi sulla diagonale (cfr. eq. (3.20)) si ha

$$a_1 = a_N \quad a_2 = a_{N-1} \quad a_3 = a_{N-2} \quad \dots \quad a_{N/2} = a_{N/2+1}.$$
 (3.24)

E' evidente che la conservazione della parità dimezza il numero di parametri indipendenti, se si pone la condizione sulla traccia, si ha

$$\sum_{i=1}^{N/2} 2 a_i^2 = 1.$$
(3.25)

E' dunque necessario inserire un fattore  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  per le  $a_i$ 

$$a_{1} = a_{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha_{1}, \quad a_{2} = a_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha_{2} \sin\alpha_{1},$$
  
$$a_{3} = a_{N-2} = \cos\alpha_{3} \sin\alpha_{1} \sin\alpha_{2}, \quad \dots \quad a_{N/2} = a_{N/2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{i}^{N/2} \sin\alpha_{i}.$$
(3.26)

Se la dimensione della matrice  ${\cal N}={\cal N}'+1$  è dispari si ha

$$a_{1} = a_{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha_{1}, \quad a_{2} = a_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha_{2} \sin\alpha_{1},$$

$$a_{3} = a_{N-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha_{3} \sin\alpha_{1} \sin\alpha_{2}, \quad \dots \quad a_{N'/2+1} = \prod_{i}^{N'/2} \sin\alpha_{i}.$$
(3.27)

Per gli elementi fuori diagonale (in generale complessi) bisogna tener conto della condizione (3.8), per cui possiamo parametrizzarli come segue

$$\rho_{n,m} = |a_n| |a_m| e^{i\phi_{n,m}} \cos\gamma_{n,m}, \qquad (3.28)$$

dove, ovviamente, i parametri  $\gamma_{n,m}$ e le fasi $\phi_{n,m}$ sono ulteriori parametri liberi da determinare. Osserviamo infatti che

$$|\rho_{n,m}|^2 = |a_n|^2 |a_m|^2 \cos^2 \gamma_{n,m} \le |a_n|^2 |a_m|^2 = |\rho_{n,n} \rho_{m,m}|.$$
(3.29)

In linea di principio i valori di questi parametri possono essere determinati studiando i prodotti di decadimento della risonanza, in particolare la loro distribuzione angolare, tuttavia ciò è utile solo per elementi di matrice reali sulla diagonale, gli elementi fuori diagonale, in generale complessi, tipicamente non possono essere estrapolati da misure effettuate sui prodotti di decadimento della risonanza. In questi casi si può porre  $\phi_{n,m}$  uguale a zero per gli elementi di matrice non misurabili. La disuguaglianza di Schwartz diventa

$$[Re(\rho_{n,m})]^2 \le |\rho_{n,n}\rho_{m,m}|.$$
(3.30)

Come abbiamo già accennato, in generale si hanno N-1 parametri angolari da considerare, tuttavia in presenza di simmetrie il numero di parametri indipendenti diminuisce, infatti per un processo che conserva la parità (invariante per inversione spaziale) il numero di parametri indipendenti è dimezzato rispetto al caso generale. In altre parole la presenza di simmetrie nel processo di produzione e/o decadimento della risonanza corrisponde ad avere un rango della matrice densità associata minore dell'ordine (N), è quindi importante determinare il kernel della matrice, e cioè l'insieme dei ket  $|k\rangle$  che risolvono  $\rho |k\rangle = 0$ . E' chiaro che se tutti i pesi statistici  $p_k$  sono non nulli, il kernel avrà dimensione nulla, se però il rango è minore dell'ordine della matrice (N) allora alcuni autovalori  $p_k$  sono nulli e il kernel ha dimensione  $N_k$ , mentre il rango sarà  $r = N - N_k$ . Come determiniamo il kernel?

Dai risultati sperimentali dedotti dalla distribuzione dei prodotti di decadimento della risonanza si possono valutare gli elementi della SDM ad essa associata, in particolare attraverso una diagonalizzazione si possono determinare i pesi statistici  $p_n$  associati ai possibili autoket  $\{|n\rangle\}$  della risonanza, ottenendo così la matrice densità diagonalizzata rispetto alla base  $\{|n\rangle\}$ . Noto a priori che alcuni pesi statistici associati a degli autoket di  $\rho$  sono nulli, è chiaro che il rango r della SDM è minore della dimensione N ed è perciò comodo ridurre la matrice densità ad una matrice che sarà più semplice da studiare. Un metodo consiste nello scrivere i ket del kernel rispetto alla stessa base che definisce l'operatore densità; se  $\rho = \sum_{i,j} |i\rangle \rho_{i,j} \langle j|$ , i ket del kernel saranno nella forma

$$|k\rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{k,i} |i\rangle \quad k = 1, 2, ..., N_k.$$
 (3.31)

Applichiamo ora una trasformazione alla matrice densità tramite un operatore  $\hat{U}$ 

$$\rho' = \hat{U}\rho\hat{U}^{\dagger}.\tag{3.32}$$

Gli elementi della matrice  $\rho'$  valutati rispetto alla base  $\{|i\rangle\}$  sono

$$\rho_{k,l}' = \sum_{i,j}^{N} \langle k | \, \hat{U} \, | i \rangle \, \rho_{i,j} \, \langle j | \, \hat{U}^{\dagger} \, | l \rangle = \sum_{i,j}^{N} U_{k,i} \, U_{j,l}^{\dagger} \rho_{i,j}.$$
(3.33)

Noti i vettori del kernel e la loro decomposizione sulla base  $\{|i\rangle\}$ , possiamo definire l'operatore  $\hat{U}$  come segue

. .

$$U_{k,i} = \begin{cases} \delta_{k,i} & k = 1, 2.., r \\ \alpha_{k,i}^* & k = r+1, ..., N \end{cases}$$
(3.34)

Calcoliamo gli elementi di matrice  $\rho'_{k,l}$ : per  $1 \le k, l \le r$  si ha

$$\rho_{k,l}' = \sum_{i,j}^{N} U_{k,i} U_{j,l}^{\dagger} \rho_{i,j} = \sum_{i,j} \delta_{k,i} \delta_{j,l} \rho_{i,j} = \rho_{k,l}.$$
(3.35)

Per $r+1 \leq k, l \leq N$ si ha

$$\rho_{k,l}' = \sum_{i,j}^{N} U_{k,i} U_{j,l}^{\dagger} \rho_{i,j} = \sum_{i,j}^{N} \alpha_{k,i}^{*} \langle i | \rho | j \rangle \alpha_{l,j} = \langle k | \rho | l \rangle = 0, \qquad (3.36)$$

dove si è utilizzata l'equazione (3.31).

In questo modo abbiamo ridotto  $\rho$  ad una matrice più *essenziale* dove gli unici elementi non nulli sono quelli di una sottomatrice  $r \times r$ . Indichiamo con  $\eta_{k,l}$  gli elementi della sottomatrice, essi sono in generale non nulli e possono essere parametrizzati con le coordinate angolari generiche introdotte precedentemente.

Un altro metodo per ridurre la matrice densità quando è noto che il rango è minore della dimensione N è il seguente: supponiamo di conoscere lo spin J della risonanza R, la matrice densità è valutata rispetto alla base di autoket  $\{|j,m\rangle\}$  del set  $\{\hat{J}^2, \hat{J}_{z'}\}$ , dove m è l'autovalore dell'operatore  $\hat{J}_{z'}$ ; quest'ultimo è la proiezione dell'operatore di spin  $\hat{J}$  sull'asse z' relativo al riferimento S' scelto per i prodotti di decadimento della risonanza. Dato che in generale questi si trovano su un piano  $\pi'$  diverso da quello di produzione della risonanza  $\pi$ , gli autoket di  $\rho'$  (SDM ricavata a partire dai dati sperimentali sui prodotti di decadimento di R) non coincidono in generale con gli autoket di  $\rho$  (valutata invece rispetto alla base ortonormale  $\{|j,m\rangle_S\}$  definita nel riferimento  $S^{30}$ ). E' possibile tuttavia effettuare una rotazione del riferimento S' in modo da allineare l'asse z' con l'asse di quantizzazione z e ridurre un autostato di  $\rho'$  ad un autostato di  $\hat{J}_z$ .

Si pensi al caso di due apparati Stern-Gerlach in serie e si consideri un fascio di atomi di argento in uscita dal primo apparato, questi sono in autostato di  $\hat{S}_z$  associato al ket  $|s, s_z\rangle$ ; se il secondo SG è ugualmente orientato allora tale fascio lo attraverserà imperturbato. Se però l'orientazione dell'apparato cambia, in generale  $z \neq z'$  e il fascio si dividerà poichè è in un autostato di  $\hat{S}_z$  e non di  $\hat{S}_{z'}$ . Se si decompone il ket di stato iniziale sulla base di autoket associati al secondo Stern-Gerlach, si ha  $|s, s_z\rangle = \sum_{s'_z} |s, s'_z\rangle \langle s, s'_z | s, s_z\rangle$  e questo è una conseguenza della rotazione del riferimento: un ket di stato nel riferimento S è descritto da un osservatore in un riferimento ruotato S' come una sovrapposizione di stati. Dunque il ket di base  $|j, m\rangle_S$  nel riferimento S è descritto nel riferimento S' come sovrapposizione dei ket della base  $\{|j, m\rangle\}$ 

$$|j,m'\rangle_S = \sum_{m=-j}^{j} c_{m,m'} |j,m\rangle.$$
 (3.37)

Se  $|k\rangle$  è autoket della SDM nel riferimento S', si ha

$$\rho' |k\rangle = \lambda |k\rangle \longrightarrow \sum_{m,m'} |j,m\rangle \, \rho'_{m,m'} \langle j,m'| \, k\rangle = \lambda \, |k\rangle \,. \tag{3.38}$$

Decomponiamo l'autoket  $|k\rangle$  sulla base  $\{|j,m\rangle\}$  del set  $\{\hat{J}^2, \hat{J}_{z'}\}$  nel riferimento S', si ha

$$\sum_{m,m'} |j,m\rangle \,\rho'_{m,m'} \langle j,m'|k\rangle = \sum_{m} \lambda \,|j,m\rangle \langle j,m|k\rangle \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \sum_{m} \left[ \sum_{m'} \rho'_{m,m'} \langle j,m'|k\rangle \right] |j,m\rangle = \sum_{m} [\lambda \langle j,m|k\rangle] \,|j,m\rangle \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \sum_{m'} \rho'_{m,m'} \langle j,m'|k\rangle = \lambda \langle j,m|k\rangle, \quad \forall m = -j,...,+j.$$
(3.39)

 $<sup>^{30}</sup>$ Dove il riferimento S è stato scelto con il piano xz solidale al piano di produzione  $\pi$ e l'asse y ortogonale ad esso.

Se  $|k\rangle$  è associato ad un autovalore nullo allora si ha

$$\sum_{m'} \rho'_{m,m'} \langle j, m' | k \rangle = 0.$$
 (3.40)

Si ha che  $|k\rangle$  è ortogonale al ket  $\sum_{m'} \rho'_{m,m'} |j,m'\rangle$  (dove ricordiamo che  $\rho'$  è un operatore autoaggiunto).

Se S è ruotato rispetto a S' tramite una rotazione  $R[\phi, \theta, 0]$  (dove  $\phi \in \theta$  sono gli angoli di Eulero, in particolare  $\phi$  è l'angolo tra  $z \in z'$ ,  $\theta$  è l'angolo ottenuto da una seconda rotazione dell'asse y) e un osservatore in S' misura uno spin m' relativo al ket di stato  $|j, m'\rangle$ , l'osservatore nel riferimento S "vede" questo stato come

$$\left|j,m'\right\rangle_{S} = \hat{U}[R]\left|j,m'\right\rangle,\tag{3.41}$$

dove  $\hat{U}[R]$  è l'operatore unitario di rotazione così definito

$$\hat{U}[R(\phi,\theta,0)] = e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y}$$
(3.42)

e deve rappresentare l'effetto della rotazione del riferimento, dunque deve restituire la (3.37)

$$|j,m'\rangle_{S} = \hat{U}[R] |j,m'\rangle = \sum_{m,m''} |j,m\rangle U^{R}_{m,m''}\langle j,m'' |j,m'\rangle = \sum_{m} U^{R}_{m,m'} |j,m\rangle, \qquad (3.43)$$

dove  $\{|j,m\rangle\}$  sono i ket della base ortonormale relativa al set completo di osservabili  $\{\hat{J}, \hat{J}_{z'}\}$ nel riferimento S', e  $U_{m,m'}^R$  sono gli elementi di matrice  $\langle j, m | \hat{U}[R] | j, m' \rangle$  valutati rispetto a tale base. Analogamente per l'aggiunto dell'operatore di rotazione si ha

$$\langle j, m' |_{S} = \langle j, m' | \hat{U}^{\dagger}[R] = \sum_{m,m''} \langle j, m' | j, m \rangle U_{m,m''}^{\dagger R} \langle j, m''| =$$

$$= \sum_{m''} \langle U_{m',m''}^{\dagger R} \langle j, m''| = \sum_{m''} U_{m'',m'}^{-1R} \langle j, m''|.$$

$$(3.44)$$

Ricavata la SDM  $\rho'$  relativa ai prodotti di decadimento della risonanza nel sistema di riferimento S' solidale al piano  $\pi'$ , per passare alla matrice densità  $\rho$  nel sistema di riferimento ruotato S è necessario valutare gli elementi di matrice rispetto alla base di autoket di S,  $\{|j,m\rangle_S\}$ , dunque si ha

$$\rho_{m,m'} = {}_{S} \langle j, m | \rho' | j, m' \rangle_{S} = \sum_{m'',m'''} U_{m'',m}^{\dagger R} \langle j, m'' | \rho' | j, m''' \rangle U_{m''',m'}^{R} = \sum_{m'',m'''} U_{m,m''}^{-1R} \langle j, m'' | \rho' | j, m''' \rangle U_{m''',m'}^{R} = \sum_{m'',m'''} U_{m,m''}^{-1R} \rho'_{m'',m'''} U_{m''',m'}^{R}.$$
(3.45)

dove si sono utilizzate le relazioni (3.43), (3.44). Di conseguenza in notazione operatoriale si ha

$$\rho = \hat{U}^{\dagger}(R)\rho'\hat{U}(R). \tag{3.46}$$

Misurando il momento angolare totale dei prodotti di decadimento della risonanza si possono conoscere gli autoket<sup>31</sup> { $|k\rangle$ } di  $\rho'$  (che non coincidono con i ket di base { $|j,m\rangle$ } poichè

<sup>&</sup>lt;sup>31</sup>Osserviamo che, dato che  $\rho'$  è un operatore autoaggiunto, autoket associati ad autovalori diversi sono ortogonali, dunque se opportunamente normalizzati, gli autoket  $\{|k\rangle\}$  sono un set di ket ortonormali.

in generale  $\rho'$  non è diagonale); è possibile effettuare una rotazione del riferimento in modo tale che i vettori della base del set  $\{\hat{J}^2, \hat{J}_z\}$  nel nuovo S.d.R. S siano

$$|j,m'\rangle_{S} = \sum_{m=-j}^{+j} c_{m,m'} |j,m\rangle = \sum_{m=-j}^{+j} \langle j,m|k\rangle |j,m\rangle = |k\rangle$$
(3.47)

(il tutto a meno di un fattore di normalizzazione). Gli elementi della SDM nel riferimento S così definito sono

$$\rho_{m,m'} = {}_{S} \langle j,m | \rho' | j,m' \rangle_{S} = \lambda_{m'S} \langle j,m | j,m' \rangle_{S} = \lambda_{m'} \,\delta_{m,m'}. \tag{3.48}$$

Quindi nel riferimento S ottenuto da quello relativo ai prodotti di decadimento della risonanza tramite un'opportuna rotazione, la SDM della risonanza è **diagonale**, inoltre se si trova sperimentalmente che un autoket  $|k\rangle = |j, m^*\rangle_S$  di  $\rho'$  è associato ad autovalore nullo, la matrice densità  $\rho$  nel sistema di riferimento ruotato S avrà un elemento sulla diagonale nullo

$$\rho_{m,m^*} = {}_{S} \langle j, m | \, \rho' \, | j, m^* \rangle_S = \lambda_{m^*} \, \delta_{m,m^*} = 0. \tag{3.49}$$

Ricordiamo che all'inizio di questa trattazione abbiamo supposto che la risonanza R fosse una particella con spin J noto, tuttavia si è già accennato al fatto che in generale la risonanza può presentarsi in forma di più particelle, in quel caso  $\rho'$  è sempre diagonalizzabile, tuttavia la trasformazione  $\hat{U}$  non è una banale rotazione.

Un terzo metodo per la riduzione della SDM si basa su un teorema che ora dimostriamo. **Teorema** 

Data una matrice densità  $\rho$   $(N \times N)$ , se per qualche valore di *i* e *j*, con  $i \neq j$ , la disuguaglianza di Schwartz si riduce a

$$|\rho_{i,j}|^2 = \rho_{i,i} \,\rho_{j,j},\tag{3.50}$$

allora il rango della matrice è minore della dimensione della matrice di almeno un'unità.

Dimostrazione. Consideriamo una matrice  $2 \times 2$ , che chiamiamo  $\overline{\rho}$ , così definita

$$\overline{\rho}_{1,1} = \rho_{i,i}, \quad \overline{\rho}_{2,2} = \rho_{j,j}, \quad \overline{\rho}_{1,2} = \overline{\rho}_{2,1}^* = \rho_{i,j}.$$
 (3.51)

Troviamo gli autovalori di  $\overline{\rho}$ 

$$det\left(\overline{\rho} - \lambda\,\mathbb{1}\right) = 0,\tag{3.52}$$

$$det \begin{pmatrix} \rho_{i,i} - \lambda & \rho_{i,j} \\ \rho_{i,j}^* & \rho_{j,j} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$
(3.53)

Utilizzando l'ipotesi si ha

$$0 = \lambda^{2} + \rho_{i,i}\rho_{j,j} - \lambda(\rho_{i,i} + \rho_{j,j}) - |\rho_{i,j}|^{2} = \lambda^{2} - \lambda(\rho_{i,i} + \rho_{j,j}).$$
(3.54)

Gli autovalori di  $\overline{\rho}$  sono quindi  $\lambda = 0$  e  $\lambda = \rho_{i,i} + \rho_{j,j}$ , troviamo gli autovettori

• Per  $\lambda = 0$ 

$$\rho |n_0\rangle = 0 \longrightarrow [|i\rangle \rho_{i,i} \langle i| + |j\rangle \rho_{j,j} \langle j| + |i\rangle \rho_{i,j} \langle j| + |j\rangle \rho_{i,j}^* \langle i|] \sum_k c_k |k\rangle = 0 \longrightarrow$$
  
$$\longrightarrow |i\rangle \rho_{i,i}c_i + |j\rangle \rho_{j,j}c_j + |i\rangle \rho_{i,j}c_j + |j\rangle \rho_{i,j}^*c_i = 0.$$
(3.55)

Data l'ortonormalità dei ket  $|i\rangle \in |j\rangle$ , tale condizione è soddisfatta se e solo se

$$c_i \rho_{i,i} + c_j \rho_{i,j} = 0, c_j \rho_{j,j} + c_i \rho_{i,j}^* = 0.$$
(3.56)

Moltiplichiamo la seconda equazione per  $\rho_{i,j}$ 

$$c_i \rho_{i,i} + c_j \rho_{i,j} = 0,$$
  

$$\rho_{j,j} [c_j \rho_{i,j} + c_i \rho_{i,i}] = 0.$$
(3.57)

Il sistema si riduce ad un'equazione, perciò

$$|n_0\rangle = c_i \left(|i\rangle - \frac{\rho_{i,i}}{\rho_{i,j}}|j\rangle\right). \tag{3.58}$$

Ponendo  $\langle n_0 | n_0 \rangle = 1$  si ha

$$1 = |c_i|^2 \left( 1 + \frac{\rho_{i,i}^2}{|\rho_{i,j}|^2} \right) \longrightarrow |c_i|^2 = \frac{\rho_{j,j}}{\rho_{i,i} + \rho_{j,j}}.$$
 (3.59)

Si ha

$$|n_0\rangle = \frac{\sqrt{\rho_{j,j}}}{\sqrt{\rho_{i,i} + \rho_{j,j}}} \left( |i\rangle - \frac{\rho_{i,i}}{\rho_{i,j}} |j\rangle \right).$$
(3.60)

Dato che in generale  $\rho_{i,j}$  è complesso e in virtù dell'ipotesi (3.50) possiamo riscrivere l'elemento di matrice come segue

$$\rho_{i,j} = \sqrt{\rho_{i,i}\rho_{j,j}}e^{i\phi_{i,j}}.$$
(3.61)

Di conseguenza la (3.60) diventa

$$|n_0\rangle = \mathcal{N}\left(\sqrt{\rho_{j,j}} \left|i\right\rangle - \sqrt{\rho_{i,i}} e^{-i\phi_{i,j}} \left|j\right\rangle\right)$$
(3.62)

 $\operatorname{con}$ 

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{i,i} + \rho_{j,j}}}.\tag{3.63}$$

• Per  $\lambda = \rho_{i,i} + \rho_{j,j}$ 

$$\rho |n_{1}\rangle = (\rho_{i,i} + \rho_{j,j}) |n_{1}\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[ |i\rangle \rho_{i,i} \langle i| + |j\rangle \rho_{j,j} \langle j| + |i\rangle \rho_{i,j} \langle j| + |j\rangle \rho_{i,j}^{*} \langle i| - (\rho_{i,i} + \rho_{j,j})\mathbb{1} \right] \sum_{k} c_{k} |k\rangle = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |i\rangle \rho_{i,i}c_{i} + |j\rangle \rho_{j,j}c_{j} + |i\rangle \rho_{i,j}c_{j} + |j\rangle \rho_{i,j}^{*}c_{i} - |i\rangle (\rho_{i,i} + \rho_{j,j})c_{i} - |j\rangle (\rho_{i,i} + \rho_{j,j})c_{j} = 0.$$

$$(3.64)$$

Tale condizione è soddisfatta se e solo se

$$c_{i} \rho_{i,i} + c_{j} \rho_{i,j} - c_{i} (\rho_{i,i} + \rho_{j,j}) = c_{j} \rho_{i,j} - c_{i} \rho_{j,j} = 0,$$
  

$$c_{j} \rho_{j,j} + c_{i} \rho_{i,j}^{*} - c_{j} (\rho_{i,i} + \rho_{j,j}) = c_{i} \rho_{i,j}^{*} - c_{j} \rho_{i,i} = 0.$$
(3.65)

Anche qui, moltiplicando la seconda equazione per $\rho_{i,j}$ si ha

$$c_i \rho_{j,j} - c_j \rho_{i,j} = 0,$$
  
 $\rho_{i,i} (c_i \rho_{j,j} - c_j \rho_{i,j}) = 0,$ 
(3.66)

#### 50 CAPITOLO 3. L'OPERATORE DENSITÀ NEI PROCESSI DI DECADIMENTO

dunque l'autovettore associato è

$$|n_1\rangle = c_i \left(|i\rangle + \frac{\rho_{j,j}}{\rho_{i,j}}|j\rangle\right). \tag{3.67}$$

Ponendo  $\langle n_1 | n_1 \rangle = 1$  si ha

$$1 = |c_i|^2 \left( 1 + \frac{\rho_{j,j}}{|\rho_{i,j}|^2} \right) \longrightarrow c_i = \frac{\sqrt{\rho_{i,i}}}{\sqrt{\rho_{i,i} + \rho_{j,j}}}.$$
(3.68)

Procedendo analogamente al caso  $\lambda = 0$  si ha

$$|n_1\rangle = \mathcal{N}\left(\sqrt{\rho_{i,i}} |i\rangle + \sqrt{\rho_{j,j}} e^{-i\phi_{i,j}} |j\rangle\right).$$
(3.69)

 $\overline{\rho}$  è diagonalizzabile, la matrice diagonalizzante è ottenuta a partire dagli autovettori trovati, questi infatti costituiscono la base ortonormale<sup>32</sup> di autovettori di  $\overline{\rho}$ . Di seguito costruiamo la matrice diagonalizzante P

$$P = \mathcal{N}\left[\left|i\right\rangle\sqrt{\rho_{j,j}}\left\langle i\right| + \left|i\right\rangle\sqrt{\rho_{i,i}}\left\langle j\right| - \left|j\right\rangle\sqrt{\rho_{i,i}}e^{-i\phi_{i,i}}\left\langle i\right| + \left|j\right\rangle\sqrt{\rho_{j,j}}e^{-i\phi_{i,j}}\left\langle j\right|\right].$$
(3.70)

Nella rappresentazione matriciale si ha

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_{j,j}} & \sqrt{\rho_{i,i}} \\ \sqrt{\rho_{i,i}}e^{-i\phi_{i,i}} & \sqrt{\rho_{j,j}}e^{-i\phi_{i,j}} \end{pmatrix}.$$
(3.71)

A partire dalla matrice diagonalizzante  $2 \times 2$  ottieniamo la matrice  $N \times N$  così definita

$$U_{i,i} = P_{1,1}, \quad U_{i,j} = P_{1,2}, \quad U_{j,i} = P_{2,1}, \quad U_{j,j} = P_{2,2}, \quad U_{n,m} = \delta_{n,m} \ (\forall n, m \neq i, j).$$

$$(3.72)$$

Applicando la trasformazione

$$\rho' = \hat{U}\rho\hat{U}^{\dagger},\tag{3.73}$$

si ottiene che uno dei due elementi sulla diagonale ( $\rho'_{i,i} \circ \rho'_{j,j}$ ) si annulla poichè la sottomatrice  $\overline{\rho}$  ha rango pari a 1, il che implica (cfr. eq. (3.50)) che anche gli elementi  $\rho'_{i,j}, \rho'_{j,i}$  sono nulli. Il rango di  $\rho$  è certamente minore della dimensione N poichè se la diagonalizzassimo interamente, tenendo conto che la sottomatrice  $\overline{\rho}$  è già diagonale e ha un elemento nullo, si avrebbe almeno una riga tutta nulla, dunque il rango r sarebbe

$$r \le N - 1. \tag{3.74}$$

In questa dimostrazione abbiamo visto come, individuata la sottomatrice  $\overline{\rho}$ , si costruisce la matrice diagonalizzante 2 × 2, da estendere poi alla matrice,  $N \times N$ , U. Come abbiamo detto, avere un minore principale nullo (che soddisfi l'ipotesi del teorema) corrisponde ad una sottomatrice  $\overline{\rho}$  con rango minore della dimensione. Di conseguenza la SDM  $\rho$  diagonalizzata avrà un elemento sulla diagonale nullo, il che corrisponde ad avere almeno un autovalore nullo e rango minore della dimensione N. Gli elementi di matrice non nulli possono essere determinati a partire dalla distribuzione angolare dei prodotti di decadimento della risonanza. Il metodo<sup>33</sup> per determinare gli elementi di matrice a partire dalla distribuzione angolare dei prodotti è stato ideato per la prima volta in ref.[15] ed applicato alla determinazione dello spin del mesone  $K^0$ .

<sup>&</sup>lt;sup>32</sup>Osserviamo che  $\langle n_0 | n_1 \rangle = 0$  ed il rango di  $\overline{\rho}$  è pari a 1 (poichè i vettori riga differiscono per un fattore).

 $<sup>^{33}</sup>$ La descrizione del metodo in ref.[15] va ben al di là degli obiettivi di questa tesi ma in sostanze se ne discute brevemente nelle conclusioni.

#### 3.2 Una Ulteriore Parametrizzazione di $\rho$

Come abbiamo già detto nel paragrafo precedente, la SDM della risonanza valutata rispetto la base dei ket  $\{|j,m\rangle\}$  nel riferimento solidale al piano  $\pi'$  è legata alla SDM vista nel riferimento solidale al piano  $\pi$  tramite un operatore unitario  $\hat{U}$ , per esse vale

$$\rho' = \hat{U}\rho\hat{U}^{\dagger}.\tag{3.75}$$

Ricordiamo di stare analizzando reazioni del tipo (3.1), per cui indicando con m il numero quantico di momento angolare totale  $\hat{J}_{z'}$  della particella prodotta c e con l e l' il numero quantico di momento angolare totale  $\hat{J}_{z'}$  delle particelle interagenti (a - b oppure  $R_0$ ), gli elementi di matrice sono

$$\rho_{k,k'}' = \sum_{m} \langle k | \hat{U}^{m} \rho \hat{U}^{m\dagger} | k' \rangle = \sum_{m,l,l'} \langle k | \hat{U}^{m} | l \rangle \rho_{l,l'} \langle l' | \hat{U^{m\dagger}} | k' \rangle =$$
$$= \sum_{m,l,l'} U_{k,l}^{m} \rho_{l,l'} U_{l',k'}^{m\dagger} = \sum_{m,l,l'} U_{k,l}^{m} \rho_{l,l'} U_{k',l'}^{m*}.$$
(3.76)

dove abbiamo sommato sugli stati della particella c. Se  $\hat{U}$  è un evolutore, gli elementi di matrice sono le ampiezze di probabilità del processo  $A_{k,l}^m$ 

$$\langle k | \hat{U}^m | l \rangle = U_{k,l}^m = \frac{A_{k,l}^m}{N_u}$$
 (3.77)

 $\cos$ 

$$N_u^2 = \sum_m \sum_{k,l} |A_{k,l}^m|^2, \qquad (3.78)$$

dove  $N_u$  è scelto tale che la somma delle ampiezze di probabilità relative a tutti i possibili processi di reazione sia pari a 1 (che corrisponde a porre l'unitarietà di  $\hat{U}$ ). Se il numero di ampiezze indipendenti è  $\overline{N}$ , possiamo parametrizzare gli elementi di matrice  $\rho'_{k,k'}$  come  $b_s e^{i\phi_s}$  con  $s = 1, ..., \overline{N}$ . I parametri  $b_s$  sono definiti sempre a partire da coordinate angolari di un'ipersfera

$$b_1 = \cos\beta_1, \quad b_2 = \sin\beta_2 \cos\beta_1, \quad \dots \tag{3.79}$$

$$b_i = \cos\beta_i \prod_{j=1}^{i-1} \sin\beta_j, \quad \dots \quad b_{\overline{N}} = \prod_{j=1}^{\overline{N}-1} \sin\beta_j.$$
(3.80)

mentre le fasi  $\phi_s$  sono reali con  $\phi_1 = 0$ , di conseguenza in generale si hanno  $2(\overline{N} - 1)$  parametri indipendenti. In presenza di simmetrie del il sistema studiato il numero di tali parametri diminuisce.

Utilizzare questa seconda parametrizzazione conviene quando il numero di parametri indipendenti della SDM  $\rho'$  trasformata è minore del numero di parametri indipendenti della SDM della risonanza,  $\rho$ . Ricordiamo che il numero di parametri indipendenti può essere dedotto a partire dalle misure di momento angolare totale e dalla distribuzione angolare dei prodotti di decadimento della risonanza; se la risonanza è composta da una sola particella, il numero di parametri indipendenti coincide col numero di momenti angolari totali possibili per la risonanza<sup>34</sup>. Nel caso in cui la risonanza è composta da più particelle, invece,

 $<sup>^{34}</sup>$ Se infatti si diagonalizza la matrice, il numero di autovalori coincide con il numero di elementi non nulli sulla diagonale, che sono i pesi statistici  $p_n$  associati agli autostati. Se non si misura il momento angolare totale  $j_z^*$ , di conseguenza il peso statistico associato ad esso sarà nullo e i parametri indipendenti saranno N-1.

si possono al più ricavare alcuni elementi di matrice e combinazioni lineari dei restanti. Le parametrizzazioni introdotte sono del tutto generali e flessibili, sono applicabili sia per processi governati da interazione forte, che da interazione debole; di seguito riportiamo per entrambi i casi un esempio di applicazione della parametrizzazione.

#### 3.3 Due Applicazioni

#### 3.3.1 Il Caso di Due Particelle con Spin-Parità $1^-$ e $0^{\pm}$

Trattiamo innanzitutto il decadimento di una risonanza in mesoni vettoriali (spin = 1) e mesoni pseudoscalari (spin = 0), questo processo avviene per interazione forte, dunque conserva la parità, il che ci autorizza ad utilizzare la relazione (3.20). La risonanza è da considerarsi una miscela degli stati di spin associati ai prodotti di decadimento, dunque una miscela di { $|1,1\rangle$ ,  $|1,0\rangle$ ,  $|1,-1\rangle$ ,  $|0,0,\rangle$ }<sub>S'</sub>, che sono gli autoket del set { $\hat{J}$ ,  $\hat{J}_{z'}$ } relativo al riferimento S' solidale al piano di produzione dei mesoni. In questo riferimento, la matrice densità è diagonale, tuttavia dato che lo scopo è conoscere l'autostato di spin della risonanza, effettuiamo una rotazione del riferimento da S' a S (solidale al piano di produzione della risonanza); in questo riferimento la base dei ket relativa al set { $\hat{J}$ ,  $\hat{J}_z$ } diventa

$$|j,m\rangle = \sum_{j',m'} c_{m,m'}^{j,j'} |j',m'\rangle_{S'} = c_{m,0}^{j,0} |0,0\rangle_{S'} + c_{j,1}^{j,1} |1,1\rangle_{S'} +$$
(3.81)

$$+c_{m,0}^{j,1}|1,0\rangle_{S'}+c_{m,-1}^{j,1}|1,-1\rangle_{S'}=\hat{U}[R(\phi,\theta,0)]|j',m'\rangle_{S'}.$$
(3.82)

La matrice densità ha dimensione N = 4, dunque in generale occorrerebbero tre parametri angolari, tuttavia gli elementi  $\rho_{-1,-1}^{1,1}$  e  $\rho_{1,1}^{1,1}$  sono uguali (cfr. eq. (3.20)), utilizzeremo perciò due parametri angolari. Se

$$\langle j,m | \rho | j',m' \rangle = \rho_{m,m'}^{j,j'},\tag{3.83}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} \rho_{1,1}^{1,1} & \rho_{1,0}^{1,0} & \rho_{1,0}^{1,1} & \rho_{1,-1}^{1,1} \\ \rho_{0,1}^{0,1} & \rho_{0,0}^{0,0} & \rho_{0,0}^{0,1} & \rho_{0,-1}^{0,1} \\ \rho_{0,1}^{1,1} & \rho_{0,0}^{1,0} & \rho_{0,0}^{1,1} & \rho_{0,-1}^{1,1} \\ \rho_{-1,1}^{1,1} & \rho_{-1,0}^{1,0} & \rho_{-1,0}^{1,1} & \rho_{-1,-1}^{1,1} \end{pmatrix}$$
(3.84)

$$\rho_{m,m'}^{j,j'} = (e)^{-i\pi\Delta} \rho_{-m,-m'}^{j,j'} = (-1)^{(j-m-j'+m')} \rho_{-m,-m'}^{j,j'}, \qquad (3.85)$$

$$\rho_{1,1}^{1,1} = \rho_{-1,-1}^{1,1} = \frac{1}{2} sen^2 \alpha_1, \qquad (3.86)$$

$$\rho_{0,0}^{0,0} = \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2, \tag{3.87}$$

$$\rho_{0,0}^{1,1} = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2, \tag{3.88}$$

$$\rho_{1,-1}^{1,1} = \rho_{-1,1}^{1,1} = \frac{1}{2} sen^2 \alpha_1 cos \gamma_{1,-1}^{1,1}, \qquad (3.89)$$

$$\rho_{1,0}^{1,1} = -\rho_{-1,0}^{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} sen\alpha_1 cos\alpha_1 cos\alpha_2 cos\gamma_{1,0}^{1,1} e^{i\phi_{1,0}^{1,1}}, \qquad (3.90)$$

$$\rho_{1,0}^{1,0} = \rho_{-1,0}^{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} sen\alpha_1 cos\alpha_1 sen\alpha_2 cos\gamma_{1,0}^{1,0} e^{i\phi_{1,0}^{1,0}}, \qquad (3.91)$$

$$\rho_{0,0}^{1,0} = 0. \tag{3.92}$$

Gli altri termini si possono ricavare da questi sfruttando il fatto che l'operatore densità è autoaggiunto ( $\rho = \rho^{\dagger}$ ). Dunque le considerazioni fatte sulla parità ci hanno permesso di ridurre il numero di parametri indipendenti da 14 a 7 ( $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,-1}^{1,1}, \gamma_{1,0}^{1,1}, \phi_{1,0}^{1,1}, \gamma_{1,0}^{1,0}, \phi_{1,0}^{1,0}$ ). Se si considera invece il caso  $R \longrightarrow 0^+$  1<sup>-</sup>, si ha

$$\rho_{1,0}^{1,0} = -\rho_{-1,0}^{1,0}, \tag{3.93}$$

$$\rho_{0,0}^{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} sen\alpha_1 cos\alpha_1 sen\alpha_2 cos\gamma_{0,0}^{1,0} e^{i\phi_{0,0}^{1,0}}, \qquad (3.94)$$

due sono necessari due parametri aggiuntivi.

#### **3.3.2** Il Decadimento $\Lambda_b \longrightarrow \Lambda J/\psi$

Il decadimento di  $J/\psi$  in  $\mu^+$  e  $\mu^-$  non conserva la parità, tuttavia il momento angolare totale si conserva e ciò pone dei vincoli per la matrice densità della risonanza. Valutiamo gli elementi della SDM della risonanza rispetto agli autoket  $\{|\lambda\rangle\}$  dell'elicità  $\hat{p} \cdot \hat{J}$  (dove  $\hat{p}$  è il versore momento cinetico di  $J/\psi$ ): dato che  $J(\Lambda_b) = J(\Lambda) = 1/2$  si ha che la componente del momento angolare di  $\Lambda \in \Lambda_b$  lungo l'asse di moto di  $J/\psi$  (che chiamiamo asse z) sarà  $+\frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{2}$ , in particolare tale componente sarà fissata per  $\Lambda_b$ , mentre per i momenti angolari dei prodotti si possono avere più combinazioni di  $J_z(\Lambda) \in J_z(J/\psi)$  che restituiscono  $J_z(\Lambda_b)$ . Se  $J_z(\Lambda_b)$  può assumere i valori  $+\frac{1}{2} \in -\frac{1}{2}$ ,  $J_z(J/\psi)$  potrà valere 1, 0 o -1. Di seguito descriviamo la matrice densità della risonanza  $J/\psi$  rispetto alla base dei ket dell'elicità

$$\begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,0} & \rho_{1,-1} \\ \rho_{0,1} & \rho_{0,0} & \rho_{0,-1} \\ \rho_{-1,1} & \rho_{-1,0} & \rho_{-1,-1} \end{pmatrix}$$
(3.95)

dove, se gli autoket dell'elicità di  $J/\psi$  sono  $\{|\lambda\rangle\} = \{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ , gli elementi di matrice sono così definiti

$$\rho_{\lambda,\lambda'} = \langle \lambda | \rho | \lambda' \rangle. \tag{3.96}$$

Se  $\Lambda_b$  ha un momento angolare fissato supponiamo che questo valga  $J_z(\Lambda_b) = \frac{1}{2}$ , in questo caso si possono presentare due situazioni, una in cui  $J_z(\Lambda) = \frac{1}{2}$  e  $J_z(J/\psi) = 0$  ed una in cui  $J_z(\Lambda) = -\frac{1}{2}$  e  $J_z(J/\psi) = 1$ , viceversa se  $J_z(\Lambda_b) = -\frac{1}{2}$  possiamo osservare  $J_z(\Lambda) = \frac{1}{2}$  e  $J_z(J/\psi) = -1$  oppure  $J_z(\Lambda) = -\frac{1}{2}$  e  $J_z(J/\psi) = 0$ . Dunque per un dato valore di  $J_z(\Lambda_b)$ iniziale, si presenteranno per  $J/\psi$  solo due autoket dell'elicità, in particolare  $|1\rangle e |-1\rangle$ sono mutuamente esclusivi, di conseguenza i termini fuori diagonale  $\rho_{1,-1} = \langle 1, 1 | \rho | 1, -1 \rangle$  e $\rho_{-1,1}=\langle 1,-1|\,\rho\,|1,1\rangle$ sono nulli. Per gli altri utilizziamo la prima parametrizzazione introdotta, si ha

$$\rho_{1,1} = \cos^2 \alpha_1,$$
(3.97)
$$\rho_{2,2} = \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_2$$
(3.98)

$$\rho_{0,0} = \cos^2 \alpha_2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1, \tag{3.98}$$

$$\rho_{-1,-1} = sen^2 \alpha_1 sen^2 \alpha_2, \qquad (3.99)$$

$$\rho_{1,0} = \rho_{0,1}^* = \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \sin\gamma_{1,0} e^{i\phi_{1,0}}, \qquad (3.100)$$

$$\rho_{-1,0} = \rho_{0,-1}^* = sen\alpha_2 cos\alpha_2 sen^2 \alpha_1 sen\gamma_{-1,0} e^{i\phi_{-1,0}}.$$
(3.101)

Anche in questo caso, simmetrie note a priori per il sistema ( conservazione del momento angolare totale) ci consentono di ridurre il numero di parametri indipendenti da 8 a 6  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,0}, \gamma_{-1,0}, \phi_{1,0}, \phi_{-1,0})$ .

### Conclusioni

<sup>35</sup>Il lavoro presentato descrive una gamma di applicazioni della matrice densità, a partire da quelle più comuni come lo studio di un sistema a spin semintero con orientazione qualsiasi, a quelle più inaspettate come lo studio di due fasci polarizzati preparati indipendentemente e incidenti su un filtro polarizzatore. Abbiamo visto che, per sistemi fisici che si trovano in uno stato puro (ad esempio dello spin), la matrice densità rappresenta un formalismo alternativo a quello di Schrödinger. Per sistemi il cui stato non è una sovrapposizione coerente di stati puri, ma una miscela statistica, non è possibile esprimere il ket di stato come combinazione lineare di ket di base; in questi casi l'operatore densità è l'unico strumento per studiare il sistema. E' il caso di un fascio di fotoni composto da due fasci polarizzati e preparati separatamente, che incide su un filtro polarizzatore; definendo i ket di stato di polarizzazione dei singoli fotoni e dunque costruendo la matrice densità rispetto a tale base, è possibile conoscere l'intensità del fascio in uscita dal filtro. Un'altra applicazione interessante è lo studio dei sistemi termodinamici; in particolare abbiamo mostrato come, per due tipologie di ensemble, la matrice densità contiene tutta la fisica del sistema e le espressioni delle grandezze macroscopiche derivino da  $\rho$ . Infine, nel terzo capitolo abbiamo analizzato e discusso i contenuti dell'articolo in ref. [12], mostrando come si può rappresentare la matrice densità di spin (SDM) associata ad uno stato risonante prodotto da due particelle interagenti. E' notevole il fatto che la parametrizzazione introdotta per un problema specifico di fisica delle particelle restituisca una SDM che ha la stessa forma della matrice densità associata ad un fascio di fotoni non polarizzato incidente su un filtro polarizzatore, sebbene si tratti di sistemi fisici nettamente differenti. Possiamo affermare che quanto descritto nell'ultimo capitolo è un metodo universale per rappresentare la SDM di risonanze; per concludere discutiamo brevemente l'approccio sperimentale alla misura degli elementi di matrice. A titolo di esempio consideriamo un processo del tipo (3.1) e supponiamo di voler misurare spin e distribuzione angolare dei prodotti di decadimento della risonanza R; data la base di autoket  $\{|j, j_z\rangle\}$  del set di osservabili misurate  $\{J, J_z\}$ , vale la relazione

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d^2\Gamma}{d\cos\theta d\phi} = \sum_{j,j'} \sum_{m,m'} \sum_{\lambda_a,\lambda_b} C(j,j') \rho_{m,m'}^{j,j'} \mathcal{D}_{m,\lambda}^{j\,*}(\phi,\theta,0) \mathcal{D}_{m',\lambda}^{j'}(\phi,\theta,0) f_{\lambda_a,\lambda_b}^{j} f_{\lambda_a,\lambda_b}^{j'\,*}, \quad (3.102)$$

dove

$$C(j,j') = \frac{1}{4\pi} [(2j+1)(2j'+1)]^{1/2},$$

 $\mathcal{D}_{m,\lambda}^{j}(\phi,\theta,0)$  è un elemento della matrice rappresentativa della rotazione degli angoli  $\phi$  e  $\theta$  (rotazione di Eulero) per lo spin j e  $f_{\lambda_{a},\lambda_{b}}^{j}$  un'ampiezza di probabilità di decadimento ridotta, con  $\lambda_{a}, \lambda_{b}$  numeri quantici dell'elicità delle particelle interagenti e  $\lambda = \lambda_{a} - \lambda_{b}$ . Dalla misura delle ampiezze di decadimento e della distribuzione angolare dei prodotti (e

<sup>&</sup>lt;sup>35</sup>Per questa sezione sono stati utilizzati gli articoli [12], [14]

quindi dalla misura di  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d^2 \Gamma}{dcos\theta d\phi}$ ) è possibile ricavare gli elementi di matrice  $\rho_{m,m'}^{j,j'}$  invertendo la relazione (3.102). In generale le ampiezze di probabilità di decadimento ridotte sono già note (poichè dipendono dalle particelle interagenti e dall'interazione) oppure vengono ricavate sperimentalmente se il numero di dati è sufficiente. A rigore ciò che si misura è il momento della distribuzione dell'ampiezza di decadimento in funzione degli angoli di Eulero  $(\theta, \phi)$ ; e cioè la quantità

$$H(J,M) = \int d\Omega \,\mathcal{D}_{m,0}^{l}(\phi,\theta,0)I(\theta,\phi)$$
(3.103)

dove abbiamo indicato con  $I(\theta, \phi)$  la distribuzione angolare delle ampiezze di decadimento (cfr. eq. (3.102)), con  $\Omega$  l'angolo solido, con  $|j-j'| \leq J \leq |j+j'|$  e M = m+m'. Osserviamo che la dipendenza di H da J e M è dovuta all'espansione del prodotto delle due matrici di rotazione (3.102) in termini di una sola matrice  $\mathcal{D}$ . Il più delle volte questa integrazione permette di ricavare la parte reale degli elementi di matrice; quella immaginaria, invece, è in generale non misurabile. In particolare per i processi che conservano la parità per i quali si ha

$$H(J,M) = (-1)^{M} H^{*}(J,-M),$$
  

$$H(J,M) = (-1)^{M} H(J,-M),$$
(3.104)

H(J, M) è reale e quindi non è possibile misurare la parte immaginaria degli elementi di matrice di  $\rho$ . Inoltre in alcuni casi la (3.102) non è invertibile e questo limita la conoscenza della parte reale degli elementi di  $\rho$ : tavolta è possibile conoscerne solo alcuni e combinazioni lineari dei restanti.

E' da queste misure che si ricavano i valori dei parametri angolari della parametrizzazione introdotta nel terzo capitolo. Nel caso in cui sia nota a priori la polarizzazione della risonanza, è possibile effettuare una rotazione del riferimento (cfr. eqq.  $(3.41) \div (3.46)$ ) in modo tale che la matrice densità trasformata sia diagonale; nota la matrice di rotazione è possibile, a partire dai dati sperimentali, ricavare i valori dei parametri angolari della nuova SDM. In presenza di simmetrie del sistema il numero di parametri liberi diminuisce, inoltre se è noto che alcuni autovalori sono nulli, è possibile ridurre la SDM ad una sottomatrice di dimensione minore, pari al rango.

L'efficacia della parametrizzazione introdotta per la SDM di una risonanza risiede nella sua generalità, essa infatti soddisfa automaticamente le condizioni di non negatività e di traccia unitaria caratteristiche di qualsiasi matrice densità e la sua rappresentazione è adatta a descrivere qualsiasi stato risonante, a prescindere dal processo che l'ha generato.

### Bibliografia

- J. von Neumann, N. A. Wheeler, Mathematical foundations of quantum mechanics, Princeton University Press (2018)
- [2] A. Messiah, Quantum Mechanics Vol I, Dover Publications (1961)
- [3] P. Caldirola, Introduzione alla Fisica Teorica, UTET (1982)
- [4] M. Born Zur Quantenmechanik der Stossvorgange, Zeitschrift für Physik 37 (1926)
- [5] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, Addison-Wesley (1993)
- [6] P. A. M. Dirac, A New Notation for Quantum Mechanics, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society - Volume 35, (1939)
- [7] P. A. M. Dirac Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press (1978)
- U. Fano, Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques, Reviews of Modern Physics-Volume 29, N.1 (1957)
- [9] K. Blum, Density Matrix Theory and Applications, Springer (2012)
- [10] F. Schwabl, *Statistical Mechanics*, Springer Science & Business Media (2000)
- [11] J. Peatross, M. Ware, *Physics of Light and Optics*, Brigham Young University (2015)
- [12] E. Di Salvo, J. Ajaltouni, Parametrizations of the Spin Density Matrix, https:// arxiv.org/abs/2012.08368 (2020)
- [13] E. Leader, Spin in Particle Physics (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology), Cambridge University Press (2001)
- [14] S. U. Chung, T. L. Trueman, Positivity conditions on the spin density matrix: A simple parametrization, Phys. Rev. D 11, 633 (1975)
- [15] P. Eberhard, M.L. Good, Method for Determining the K<sup>0</sup> Spin, Phys. Rev. 120 (1960) 1442

# Fonti grafiche

1.1	http://afriedman.org/AndysWebPage/BSJ/CopenhagenManyWorlds.html .	9		
1.2	Delocalization Enhancing the Creation of Entanglement in Quantum Walks,			
	J. Orthey & E. Amorim (2017)	19		
2.1	https://www.treccani.it/enciclopedia/polarizzazione/	23		
2.2	Entanglement in high dimensional quantum systems, I. Saideh (2019)	24		
2.3	https://www4.uwsp.edu/physastr/kmenning/Phys204/Lect18.html	28		
2.4	Photocurrent detection of the orbital angular momentum of light, Z. Ji, W.			
	Liu, S. Krylyuk, X. Fan, Z. Zhang, A. Pan, L. Feng, A. Davydov, R. Agarwal;			
	Science, vol.368, issue 6492	32		
2.5	Statistical Mechanics, F. Schwabl, Springer Science & Business Media (2000)	34		
2.6	Statistical Mechanics, F. Schwabl, Springer Science & Business Media (2000)	36		
3.1	Beam-Helicity Asymmetries in Double-Pion Photoproduction off the Proton,			
	D. Krambrich et al., Phys. Rev. Lett. 103, 052002 (2009)	42		