

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base**

**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Triennale in Fisica*

**Localizzabilità nello Spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski**

**Relatore:**

Ch.mo Prof. Fedele Lizzi

**Candidato:**

Alessandro Pinto

Matr. N850001285

**Anno Accademico 2019/2020**

# Indice

<b>1</b>	<b>Lo Spaziotempo <math>\kappa</math>-Minkowski</b>	<b>3</b>
1.1	La scala di Planck . . . . .	3
1.2	Principio di Indeterminazione . . . . .	5
1.3	L'algebra degli $\hat{x}^\mu$ . . . . .	6
1.4	$\kappa$ -Poincaré . . . . .	9
<b>2</b>	<b>La Trasformata di Mellin</b>	<b>11</b>
2.1	Traslazioni e Trasformata di Fourier . . . . .	11
2.2	Dilatazioni e Trasformata di Mellin . . . . .	12
2.3	Alcune Proprietà della Trasformata di Mellin . . . . .	15
2.4	Applicazione allo Spaziotempo $\kappa$ -Minkowski . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Localizzabilità</b>	<b>18</b>
3.1	Distribuzioni con simmetria sferica . . . . .	18
3.2	Ellissoide . . . . .	20
3.3	Stato localizzato in una regione sferica . . . . .	21
3.4	Stati perfettamente localizzati . . . . .	24
3.5	Intervalli Temporalì . . . . .	26

# Introduzione

Questa tesi è incentrata sulla teoria dello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski, che si pone l'obiettivo di unificare in un unico formalismo la Teoria Quantistica dei Campi e la Relatività Generale. Questi sono i due pilastri su cui si basa la fisica contemporanea e permettono di descrivere quasi tutti i risultati sperimentali oggi disponibili. La Teoria Quantistica dei Campi nasce dall'unificazione della Meccanica Quantistica con la Relatività Ristretta e la sua validità è dimostrata dagli esperimenti condotti nell'ambito delle alte energie, nel range dei  $TeV$ . La Relatività Generale invece descrive il comportamento di sistemi macroscopici, essa è alla base della cosmologia e permette di trattare oggetti quali galassie o buchi neri.

Senza un formalismo capace di considerare entrambi gli aspetti, fenomeni in cui le interazioni gravitazionali hanno intensità pari a quelle quantistiche restano impossibili da descrivere, uno su tutti il Big Bang. Le difficoltà nascono dall'impossibilità di quantizzare la forza di gravità come è già stato fatto con le altre interazioni fondamentali, ad esempio con la Elettrodinamica Quantistica per l'interazione elettromagnetica. Trattare la gravità nello stesso modo porterebbe a una teoria non rinormalizzabile, con conseguenze fisicamente inaccettabili.

Ad oggi non è ancora disponibile la tecnologia per sondare sperimentalmente gli effetti gravitazionali su scala microscopica, questo è dovuto alle energie elevatissime necessarie a tale scopo. L'assenza di riscontri sperimentali ha portato alla proliferazione di vari modelli teorici per la Gravità Quantistica, che attendono di essere confermati da futuri esperimenti. La teoria dello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski è uno di questi modelli.

In questo formalismo le deformazioni su scala microscopica dello spaziotempo sono interpretate come relazioni di commutazione fra le coordinate. Questo porta a un principio di indeterminazione o meglio di localizzabilità: non è sempre possibile stabilire con precisione arbitrariamente piccola la posizione spaziotemporale di un certo evento.

Nel primo capitolo sarà presentata l'algebra degli operatori posizione che caratterizza la teoria  $\kappa$ -Minkowski [1, 2] e se ne studieranno le caratteristiche, con particolare attenzione rivolta alla coordinata temporale.

Nel secondo capitolo introdurremo un importante strumento per lo studio della localizzabilità di una data distribuzione: la trasformata di Mellin [3]. Verranno discusse le sue proprietà e la sua correlazione con il gruppo delle dilatazioni [4].

Nel terzo capitolo si passerà al calcolo esplicito della localizzabilità di alcune distribuzioni. Verrà individuata la funzione densità di probabilità in funzione del tempo per distribuzioni spaziali a simmetria sferica [1, 2], per l'ellissoide e per una porzione sferica non contenente l'origine. Il procedimento inverso sarà applicato al caso di una distribuzione temporale, definita costante su un intervallo.

# Capitolo 1

## Lo Spaziotempo $\kappa$ -Minkowski

### 1.1 La scala di Planck

La teoria dello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski mira a conciliare la Teoria Quantistica dei Campi con la Relatività Generale. Queste due teorie ad oggi soddisfano pienamente le esigenze sperimentali perché non è ancora possibile esplorare energie tali da rendere rilevanti, contemporaneamente, sia gli aspetti gravitazionali che quelli quantistici. Ad oggi è abbastanza diffusa l'ipotesi che ciò avvenga a scale confrontabili alla cosiddetta scala di Planck.

Nel 1899 Max Planck osservò come fosse possibile ottenere una scala di grandezze naturali sfruttando le tre costanti fondamentali [5] [6]:

- la velocità della luce nel vuoto  $c$ , con dimensionalità  $[L][T]^{-1}$ .
- la costante di Planck  $\hbar$ , con dimensionalità  $[L]^2[T]^{-1}[M]$ .
- la costante gravitazionale  $G$ , con dimensionalità  $[L]^3[T]^{-2}[M]^{-1}$ .

Combinante opportunamente esse permettono di definire una lunghezza, un tempo ed una massa:

$$\begin{aligned}l_P &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.61 \times 10^{-35} m \\t_P &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.39 \times 10^{-44} s \\m_P &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-5} g\end{aligned}\tag{1.1}$$

che portano il nome del fisico tedesco. Per dimostrare che questa scala sia definita in modo univoco basta osservare che la dimensionalità di nessuna costante può essere ottenuta come potenza delle altre due. Infatti una grandezza  $C$  può essere ottenuta a partire da altre due grandezze  $A$  e  $B$ , con dimensionalità

$[A] = [L]^a [T]^b [M]^c$  e  $[B] = [L]^d [T]^e [M]^f$ , solo se la sua dimensionalità è

$$[C] = [L]^g [T]^h [M]^i = [L]^{ax+dy} [T]^{bx+ey} [M]^{cx+fy} = [A]^x [B]^y$$

con  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Questo equivale ad affermare che il vettore degli esponenti di  $C$  è combinazione lineare di quelli di  $A$  e  $B$ :

$$(g, h, i) = x(a, b, c) + y(d, e, f)$$

Considerando la matrice degli esponenti delle dimensionalità di  $c$ ,  $\hbar$  e  $G$  si ottiene che il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

è diverso da zero. Le tre grandezze pertanto definiscono una scala fondamentale, che Planck riteneva interessante proprio per la sua universalità.

Ci sono vari modi per cercare di mostrare la correlazione tra la scala di Planck e lo studio della Gravità Quantistica, di seguito è riportato un esempio. Consideriamo due particelle puntiformi di carica elettrica  $e$ , poste a una certa distanza una dall'altra. Supponendo che valgano le equazioni classiche per la forza elettrostatica e la forza gravitazionale

$$F_E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad F_G = \frac{Gm^2}{r^2}$$

cerchiamo di stabilire le condizioni per cui le due forze si bilancino, o siano per lo meno confrontabili. Si richiede quindi che

$$1 = \frac{F_G}{F_E} = \frac{Gm^2 4\pi\epsilon_0}{e^2} \quad (1.2)$$

da cui si ottiene la relazione da soddisfare per la massa

$$m = \sqrt{\frac{e^2}{G4\pi\epsilon_0}} \quad (1.3)$$

A questo punto è sufficiente scrivere la dimensionalità delle grandezze non più in funzione di  $\{L, T, M\}$  ma bensì nella nuova base  $\{\hbar, c, G\}$ , si ricava così

$$\left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] = [L]^3 [T]^{-2} [M] = [\hbar][c]$$

e si ottiene quindi che

$$m \propto \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \equiv m_p \quad (1.4)$$

Il calcolo esatto stabilisce che il rapporto è dell'ordine di  $10^3$ . Il ragionamento qui riportato è approssimativo perché considera solo le equazioni classiche, senza sfruttare i risultati della Relatività Generale o dell'Elettrodinamica Quantistica.

Nonostante i modelli di Gravità Quantistica facciano spesso riferimento alla scala di Planck la sua introduzione è legata solo all'analisi dimensionale di quelle che riteniamo essere le costanti fondamentali di tutta la fisica. In futuro la ricerca potrebbe portare alla scoperta di nuovi fenomeni, legati a nuove costanti fondamentali. Questo costringerebbe ad abbandonare la scala di Planck come strumento utile allo sviluppo dei modelli teorici.

Inoltre l'analisi dimensionale da sola non garantisce nessuna implicazione, è sempre necessario formulare un modello del sistema per verificare l'ammissibilità dei suoi risultati. Un esempio in cui la pura analisi dimensionale porta risultati inutilizzabili è il caso dell'atomo idrogenoide [6]. Supponendo di voler studiare l'atomo di idrogeno senza conoscerne la struttura e senza un modello teorico. Si possono considerare come costanti fondamentali del sistema la massa  $m_e$  e la carica  $e$  dell'elettrone, la permeabilità  $\mu_0$  e la permittività  $\epsilon_0$  del vuoto. L'analisi dimensionale porta ad individuare una distanza e un'energia caratteristiche

$$l = \frac{e^2 \mu_0}{m_e} \approx 3.54 \times 10^{-14} m \quad (1.5)$$

$$E = \frac{m_e}{\mu_0 \epsilon_0} \approx 5.11 \times 10^5 eV \quad (1.6)$$

che non hanno nessuna corrispondenza nella realtà.

In seguito ci si riferirà sempre a distanze e tempi di ordine confrontabile a quelli della scala di Planck anche se, per quanto detto fin qui, questo è un punto discutibile.

## 1.2 Principio di Indeterminazione

Il principio di indeterminazione di Heisenberg può esser visualizzato in un modo molto semplice: per misurare la posizione spaziale di una particella, che possiamo assumere puntiforme, è necessario farla interagire con un fotone. La precisione della misurazione ottenuta è legata alla lunghezza d'onda del fotone: più è corta più la misurazione sarà precisa. D'altra parte una lunghezza d'onda minore implica una frequenza più alta e quindi un'energia più elevata. Durante una misurazione molto precisa il momento della particella subisce una variazione, poiché interagisce con un fotone di momento apprezzabile. Analogamente per determinare con esattezza il momento della particella sarebbe possibile misurare due volte la sua posizione con fotoni dalla frequenza molto bassa, con un intervallo di tempo fra le due operazioni noto.

Il principio di indeterminazione enuncia l'impossibilità di conoscere con precisione arbitrariamente piccola la posizione e il momento della particella. Il tutto si riduce alla ben nota relazione

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.7)$$

Dimostrare che una simile disuguaglianza porta a una ben determinata regola di commutazione fra due operatori è semplice e lo faremo a breve, ma prima

è bene soffermarsi sull'interpretazione matematica del simbolo  $\Delta$ . Si tratta di un'incertezza legata a due misurazioni fatte sulla stessa particella in un certo ordine; le due operazioni devono essere eseguite con abbastanza rapidità da non permettere l'evoluzione del sistema nell'intervallo che le separa. In altre parole sia  $\hat{x}$  che  $\hat{p}$  devono agire sulla stessa funzione d'onda  $\phi$ . Quindi sarebbe più corretto scrivere, seguendo [7],

$$\begin{aligned}\Delta_\phi A &\equiv \sqrt{\langle A^2 \rangle_\phi - \langle A \rangle_\phi^2} \\ &= \|\delta A | \phi \rangle\| \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove

$$\delta A = A - \langle A \rangle_\phi \mathbb{I} \quad (1.9)$$

Dimostriamo ora che se due operatori  $A$  e  $B$  hanno commutatore non nullo allora esiste un principio di indeterminazione definito da

$$\Delta_\phi A \Delta_\phi B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle_\phi | \quad (1.10)$$

Per farlo basta tener presente che  $[A, B] = [\delta A, \delta B]$  e quindi

$$\begin{aligned} | \langle \phi | [A, B] | \phi \rangle |^2 &= | \langle \phi | [\delta A, \delta B] | \phi \rangle |^2 \\ &= | \langle \phi | \delta A \delta B | \phi \rangle - \langle \phi | \delta B \delta A | \phi \rangle |^2 \\ &= | \langle \phi | \delta A \delta B | \phi \rangle - (\langle \phi | \delta A \delta B | \phi \rangle)^* |^2 \\ &= 4 | \Im[\langle \phi | \delta A \delta B | \phi \rangle] |^2 \\ &\leq 4 | \langle \phi | \delta A \delta B | \phi \rangle |^2 \\ &\leq 4 \|\delta A | \phi \rangle\|^2 \cdot \|\delta B | \phi \rangle\|^2 = 4(\Delta_\phi A)^2 (\Delta_\phi B)^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Osserviamo ora cosa succede introducendo anche l'effetto dell'attrazione gravitazionale fra le due particelle.

### 1.3 L'algebra degli $\hat{x}^\mu$

Dal punto di vista della Relatività Generale lo spaziotempo è una varietà quadridimensionale, la cui curvatura viene modificata dalla densità di energia. In Meccanica Quantistica si trascurano queste deformazioni perché le energie in gioco sono molto al di sotto della scala di Planck. Imporre che anche su scala microscopica la concentrazione di energia causa una deformazione dello spaziotempo suggerisce un'algebra di tipo

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \Theta_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

Il motivo per cui gli elementi  $\Theta_{\mu\nu}$  potrebbero non essere tutti nulli, e le conseguenze di questa affermazione, possono essere intuite dal seguente ragionamento. Per conoscere la posizione è necessario far interagire la particella con un fotone

dotato di una certa energia, lo spaziotempo viene deformato da questa energia secondo le leggi della Relatività Generale. L'energia trasportata dal fotone è direttamente proporzionale alla frequenza

$$E = \hbar\omega = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} \quad (1.13)$$

Pertanto una misurazione delle posizione molto precisa è necessario di un fotone molto energetico, il che comporta una maggiore deformazione dello spaziotempo. Si arriva al cosa limite in cui un fotone con  $\lambda \approx l_p$  dovrebbe portare alla creazione di un buco nero microscopico, rendendo di fatto la misurazione impossibile. Secondo la Relatività Generale infatti un buco nero si crea quando una certa energia  $E$  è contenuta in una regione di raggio

$$r_S = \frac{2GE}{c^4} \quad (1.14)$$

detto raggio di Schwarzschild. Se si considera un fotone con  $\lambda = l_p$  si ottiene che il suo  $r_S$  è pari a  $4\pi l_p$ , e si genera un buco nero. Non essendoci osservazioni sperimentali di buchi neri microscopici questa affermazione è nota in letteratura come *Hoop conjecture* [8].

Trascurando di discutere la validità di quest'ultima congettura possiamo affermare che in ogni caso la semplice misurazione della posizione di una particella porta a deformare lo spaziotempo intorno ad essa. Si ottengono pertanto delle relazioni di indeterminazione del tipo

$$\Delta\hat{x}^\mu \Delta\hat{x}^\nu \geq \Gamma_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

e ciò implica delle regole di commutazione fra le coordinate  $\hat{x}^\mu$  non tutte nulle. In generale queste sono esprimibili con una relazione simile a (1.12).

La teoria  $\kappa$ -Minkowski nasce dalla seguente scelta dei commutatori:

$$[\hat{x}^0, \hat{x}^j] = i\lambda\hat{x}^j \quad [\hat{x}^j, \hat{x}^k] = 0 \quad (1.16)$$

dove  $\lambda = 1/\kappa$  (da cui il nome) ha le dimensioni di una lunghezza. La grandezza  $\lambda$  può essere interpretata come il parametro che deforma lo spaziotempo, presumibilmente è una quantità confrontabile alla lunghezza di Planck. Gli operatori non commutanti portano a una relazione di indeterminazione

$$\Delta_\phi\hat{x}^0\Delta_\phi\hat{x}^i \geq \frac{\lambda|\langle\hat{x}^i\rangle|}{2} \quad (1.17)$$

Ora che è stata definita l'algebra dei  $\hat{x}^\mu$  se ne cerca una rappresentazione come operatori sullo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ . Per le componenti spaziali la rappresentazione è banalmente

$$\hat{x}^i|\psi\rangle = x^i|\psi\rangle \quad (1.18)$$

Questi tre osservabili commutano fra loro e formano un set completo, i loro autovettori infatti generano un sottospazio denso nello spazio di Hilbert. La

scelta della rappresentazione di  $\hat{x}^0$  non è unica, in questa tesi studieremo solo la seguente:

$$\hat{x}^0 |\psi\rangle = i\lambda \left( \sum_i x_i \partial_{x_i} + \frac{3}{2} \right) |\psi\rangle = i\lambda \left( r \partial_r + \frac{3}{2} \right) |\psi\rangle \quad (1.19)$$

Possiamo a questo punto riscrivere il principio di localizzabilità in forma radiale

$$[\hat{x}^0, \hat{r}] = i\lambda \hat{r} \quad \Delta_\psi \hat{x}^0 \Delta_\psi \hat{r} \geq \frac{\lambda |\langle \hat{r} \rangle|}{2} \quad (1.20)$$

pertanto l'indeterminazione dipende dal valore di aspettazione dell'operatore  $\hat{r}$ .

Poiché  $\hat{x}^0$  è un osservabile deve essere un operatore autoaggiunto. Il termine  $3/2$  serve a garantire la simmetria dell'operatore, quindi resta da verificare il dominio di autoaggiuntezza. Prima di procedere osserviamo che la possibilità di scrivere questo operatore in funzione di  $r$  suggerisce l'impiego delle coordinate polari. Per definirle si considera

$$\hat{r} \cos \theta = \hat{x}^3 \quad \hat{r} e^{i\varphi} = \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 \quad (1.21)$$

e si nota che

$$\begin{aligned} [x^0, r] &= i\lambda \left( r \partial_r + \frac{3}{2} \right) r - i\lambda \left( r \partial_r + \frac{3}{2} \right) r = i\lambda \left( r + r^2 \partial_r - r^2 \partial_r \right) = i\lambda r \\ [x^0, \cos \theta] &= x^0 \cos \theta - \cos \theta x^0 = i\lambda \left( x^3 \partial_r + \frac{3}{2} - x^3 \partial_r - \frac{3}{2} \right) = 0 \\ [x^0, e^{i\varphi}] &= i\lambda \left( e^{i\varphi} r \partial_r + \frac{3}{2} \right) - i\lambda \left( r e^{i\varphi} \partial_r + \frac{3}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pertanto  $\hat{x}^0$  commuta con tutte le funzioni  $f(\theta, \varphi)$  che non dipendono esplicitamente da  $r$ , è quindi possibile considerare solo funzioni nella forma

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} \psi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (1.23)$$

e concentrarsi solo sulla parte radiale.

Sfruttiamo questo per semplificare la verifica del dominio di autoaggiuntezza

$$\int dr r^2 \psi^* i\lambda \left( r \partial_r + \frac{3}{2} \right) \chi = i\lambda \int dr r^2 \psi^* \frac{3}{2} \chi - i\lambda \int dr \partial_r (r^3 \psi^*) \chi + \psi^* r^3 \chi \Big|_0^\infty$$

Se per  $r \rightarrow 0$  sia  $\psi$  che  $\chi$  tendono a zero più velocemente di  $r^{-3/2}$  l'ultimo termine è nullo. Questa condizione è ovviamente soddisfatta da tutte le funzioni a quadrato sommabile, che soddisfano anche la condizione nell'origine.

L'autoaggiuntezza impone uno spettro completamente reale, spettro che è chiaramente costituito solo da una parte continua. Prendendo come ansatz  $r^\alpha$  si trova che

$$i\lambda \left( r \partial_r + \frac{3}{2} \right) r^\alpha = i\lambda \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) r^\alpha = \lambda_\alpha r^\alpha \quad (1.24)$$

dove

$$\lambda_\alpha = i\lambda \left( \frac{3}{2} + \alpha \right) \quad (1.25)$$

Dal momento che gli autovalori devono essere reali, trattandosi dello spettro di un operatore autoaggiunto, le soluzioni possibili sono tutte nella forma

$$\alpha = -\frac{3}{2} + i\tau \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

Nel piano complesso si tratta quindi di una retta ortogonale alla retta reale, che la interseca in  $-3/2$ .

Gli autovettori approssimati relativi a  $\hat{x}^0$  sono dati dalle distribuzioni

$$T_\tau = \frac{r^{-\frac{3}{2}-i\tau}}{\lambda^{-i\tau}} = r^{-\frac{3}{2}} e^{-i\tau \log(\frac{r}{\lambda})} \quad (1.27)$$

Queste funzioni rappresentano per lo spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski quello che le onde piane rappresentano per lo spazio delle fasi della meccanica quantistica. Non sono stati fisici perché il loro comportamento a zero e all'infinito non è abbastanza buono, non sono quindi elementi dello spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ . Tuttavia il loro prodotto con un qualsiasi vettore dello spazio di Hilbert è ben definito e formano un set completo, ossia generano un sottospazio denso di  $L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$ . Queste due proprietà torneranno molto utili nel prossimo capitolo.

## 1.4 $\kappa$ -Poincaré

La relazione (1.20) implica che le funzioni localizzate nell'origine spaziale abbiano delle proprietà di localizzabilità uniche, ossia siano perfettamente localizzabili sia nello spazio che nel tempo. Ciò non significa che l'origine spaziale sia un punto privilegiato dello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski. Come in Relatività lo spazio deve sempre essere omogeneo e isotropo, pertanto anche l'origine non ha caratteristiche particolari. Questo apparente paradosso si risolve considerando la localizzabilità non come una caratteristica intrinseca di una certa distribuzione ma come una proprietà dipendente dall'osservatore.

Un osservatore  $A$  si trova nella sua origine spaziale e per lui un certo evento che avviene nella sua stessa posizione ha una coordinata temporale ben specificata. In altre parole per l'osservatore  $A$  ha senso dire «qui e adesso» o «qui e un minuto fa». Il discorso cambia quando entra in gioco un secondo osservatore, in un punto diverso dello spazio. Una funzione perfettamente localizzabile per  $A$  non lo sarà per  $B$  e viceversa.

Per analizzare formalmente come le leggi fisiche siano viste da due osservatori diversi è necessario introdurre l'equivalente  $\kappa$ -Minkowski del gruppo di Poincaré. Il relatività Ristretta il gruppo di Poincaré permetteva di passare dalle coordinate  $x^\mu$  dell'osservatore  $A$  a quelle  $x'^\mu$  dell'osservatore  $B$  in modo che per entrambi valgano le stesse equazioni.

Nello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski passare da un osservatore all'altro non è altrettanto semplice per via del principio di localizzabilità. Consideriamo due osservatori  $A$  e  $B$ , entrambi in moto inerziale rispetto all'altro. La trasformazione delle coordinate è data da [9]

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.28)$$

Il tensore  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  permette di passare fra sistemi con diverse direzioni per gli assi e con una certa velocità relativa  $v < c$ . Il vettore  $a^{\mu}$  mette in correlazione sistemi traslati nello spaziotempo. In breve  $a$  può essere visto come il vettore che congiunge le origini spaziotemporali dei due sistemi di riferimento, per  $B$  l'origine di  $A$  si trova nel punto  $a^{\mu}$ . Questo è possibile in Relatività ristretta perché non c'è limite alla precisione con cui un osservatore può conoscere la posizione dell'altro, ma con il principio di localizzabilità questo non vale più.  $A$  può conoscere la posizione di  $B$  solo con una certa incertezza e questo rende il gruppo di Poincaré inutilizzabile.

Tuttavia a questo punto entra in gioco una delle caratteristiche più importanti della teoria  $\kappa$ -Minkowski: sebbene le leggi fisiche non rispettino più la simmetria del gruppo di Poincaré, conservano invece una simmetria rispetto al gruppo quantistico  $\kappa$ -Poincaré.

I gruppi quantistici sono uno strumento matematico estremamente versatile, con varie applicazioni fisiche. Essi rappresentano una generalizzazione del concetto di gruppo.

I gruppi trovano molteplici applicazioni perché spesso le trasformazioni possibili su un certo sistema hanno tale struttura. Affinché ciò accada basta che le trasformazioni possano combinarsi, che per ogni trasformazione esista l'inversa e che esista l'elemento che lascia il sistema uguale a se stesso. In un gruppo quantistico viene meno la richiesta per cui a ogni elemento debba corrispondere uno che ne annulla gli effetti. Tale condizione viene generalizzata con l'introduzione di una nuova operazione, nota come antipode.

La versione generalizzata del gruppo di Poincaré viene chiamata gruppo quantistico  $\kappa$ -Poincaré. In questa tesi non affronteremo tutta la trattazione relativo a queste trasformazioni ma proprio da queste nasce la maggior parte dell'interesse verso questa teoria.

In particolare si dimostra che le traslazioni nello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski sono trasformazioni di coordinate che non commutano fra loro. Vale infatti la relazione

$$[a^0, a^i] = i\lambda a^i \quad (1.29)$$

Le traslazioni spaziali commutano fra loro come in Relatività Ristretta, ma ciò non vale più quando entra in gioco anche una variazione della coordinata temporale.

## Capitolo 2

# La Trasformata di Mellin

Il principio di indeterminazione (1.17) pone dei limiti alla possibilità di localizzare una funzione nel tempo e nello spazio ma, a differenza di quanto succede con il principio di Heisenberg, ora l'indeterminazione ha una dipendenza funzionale dal valore di aspettazione della misura. La forma radiale (1.20) evidenzia questo fenomeno: una funzione d'onda è tanto più localizzabile tanto minore è la sua distanza dall'origine spaziale. Uno stato perfettamente localizzato nell'origine annulla completamente l'indeterminazione ed è perfettamente misurabile anche la sua coordinata temporale.

Prima di affrontare il problema rappresentato dall'origine studieremo la localizzabilità di diverse funzioni d'onda. Per fare ciò introdurremo un prezioso strumento matematico: la trasformata di Mellin. Per descrivere questa nuova operazione ricapitoliamo quanto è noto sulla trasformata di Fourier.

### 2.1 Traslazioni e Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è una applicazione  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  che manda funzioni  $f(x)$  definite sulla retta in funzioni  $\bar{f}(k)$  sempre definite sulla retta. Lei e la sua inversa sono definite come

$$\bar{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad (2.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{f}(k) e^{ikx} \quad (2.2)$$

L'intuizione sottostante a tale operazione consiste nello scomporre la funzione come sovrapposizione di armoniche  $f_k(x) = e^{ikx}$  con  $k \in \mathbb{R}$ , notiamo che queste sono le autofunzioni approssimate dell'operatore momento  $p$ . Introduciamo a questo punto il gruppo delle traslazioni con elementi  $T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , definiti come

$$T_a f(x) = f(x + a) \quad (2.3)$$

con  $a \in \mathbb{R}$ . Osserviamo ora come l'azione del gruppo modifichi il risultato della trasformata:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x+a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x+a) e^{-ik(x+a)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ik(x'-a)} \\
 &= e^{ika} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \\
 &= e^{ika} \mathcal{F}[f(x)]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove  $x' = x + a$ . Una traslazione dell'argomento  $x$  pertanto si traduce in una moltiplicazione della trasformata per una funzione. Ricordiamo inoltre che il generatore del gruppo delle traslazioni è proprio l'operatore  $p$  e pertanto

$$T_a = e^{-\frac{iap}{\hbar}} \tag{2.5}$$

In breve la trasformata di Fourier permette di trattare in maniera compatta l'azione di un gruppo, generato dall'operatore momento, riscrivendo la funzione come sovrapposizione di autovettori approssimati dello stesso operatore.

## 2.2 Dilatazioni e Trasformata di Mellin

Considerata una funzione  $f(x)$  definita sulla semiretta positiva  $\mathbb{R}^+$  con valori in  $\mathbb{C}$ , l'integrale

$$\int_0^{\infty} dx f(x) x^{s-1} \tag{2.6}$$

converge per  $s$  contenuti in un certo insieme  $S \subseteq \mathbb{C}$ , definendo la funzione  $\mathcal{M}[f, s] : S \rightarrow \mathbb{C}$ . Si può dimostrare che l'integrale (2.6) converge per

$$\Re(s) \in (A, B) \tag{2.7}$$

dove  $A, B$  sono numeri tali da soddisfare

$$|f(x)| \leq \begin{cases} Mx^{-A} & x \in [0, 1] \\ Mx^{-B} & x \in ]1, \infty[ \end{cases} \tag{2.8}$$

con  $M$  numero reale positivo. Osserviamo che, se l'integrale converge per un fissato  $s = \alpha + i\beta$ , allora convergerà per ogni  $\alpha + i\tau$  con  $\tau \in \mathbb{R}$ ; in altre parole possiamo chiamare trasformata di Mellin di  $f(x)$  la funzione  $\tilde{f}(\tau) = \mathcal{M}[f(x), \alpha + i\tau]$  definita su  $\mathbb{R}$  con valori in  $\mathbb{C}$ . Fissata la parte reale  $\alpha$  la trasformata è una applicazione  $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , che manda funzioni normalizzate di  $x$  in funzioni normalizzate di  $\tau$

$$F(\tau) = \mathcal{M}[f(x), \alpha + i\tau] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) x^{\alpha-1+i\tau} \tag{2.9}$$

con inversa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \mathcal{M}[f, s] x^s \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau F(\tau) x^{\alpha+i\tau} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove ovviamente supponiamo  $A < \alpha < B$ .

Mostriamo ora come la trasformata di Mellin può essere costruita esplicitamente, ossia come trasformazione isometrica sotto un certo gruppo di trasformazioni. Supponiamo di avere una funzione  $f(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  e di voler studiare l'effetto di un operatore che manda funzioni di argomento  $x$  in funzioni di argomento  $ax$ , con  $a$  numero reale positivo. Chiediamo inoltre che tale operatore conservi la norma, indotta da un certo prodotto scalare. Osserviamo che

$$Af(x) = a^{1/2} f(ax) \quad (2.11)$$

soddisfa tali requisiti rispetto alla norma

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\infty} dx f^*(x) g(x) \quad (2.12)$$

Più in generale gli operatori  $D_a$ , definiti come

$$D_a f(x) = a^{\gamma+1} f(ax) \quad (2.13)$$

per  $\gamma \in \mathbb{C}$ , conservano il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\infty} dx f^*(x) g(x) x^{2\gamma+1} \quad (2.14)$$

Si può dimostrare che al variare di  $a \in \mathbb{R}^+$  essi formano un gruppo, detto gruppo delle dilatazioni, infatti:

- vale la regola di combinazione  $D_a D_b = D_{ab}$ .
- per ogni  $a$  l'inversa di  $D_a$  sarà data da  $D_{1/a}$ .
- l'identità è data da  $D_1$ .

Cerchiamo quindi una base che diagonalizzi tali operatori. Dal teorema di Stone si ha che l'operatore unitario  $D_a$  può essere scritto come

$$D_a = e^{-iaB} \quad (2.15)$$

dove  $B$  è un operatore autoaggiunto, il generatore infinitesimale delle trasformazioni. Per determinare  $B$  si scrive

$$\begin{aligned} Bf(x) &= i \frac{d}{da} \left[ a^{\gamma+1} f(ax) \right]_{a=1} \\ &= i \left[ (\gamma+1) a^{\gamma} f(ax) + a^{\gamma+1} x f'(ax) \right]_{a=1} \\ &= i \left[ \gamma + 1 + x \frac{d}{dx} \right] f(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

e si trova che i suoi autovettori hanno forma

$$E_\tau = \mathcal{N} x^{-i\tau - \gamma - 1} \quad (2.17)$$

con autovettore  $\tau \in \mathbb{R}$ . Dimostriamo ora brevemente che i vettori  $E_\tau$  sono ortonormali e generano un sottospazio denso dello spazio di Hilbert. Per la ortonormalità si nota che

$$\begin{aligned} \langle E_\tau | E_{\tau'} \rangle &= \int_0^\infty dx x^{i\tau - \gamma - 1} x^{-i\tau' - \gamma - 1} x^{2\gamma + 1} \\ &= \int_0^\infty dx x^{i(\tau - \tau') - 1} \\ &= \int_{-\infty}^\infty dx e^{i(\tau - \tau')x} = \delta(\tau - \tau') \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove si è effettuato un cambio di variabile  $y = e^x$ . Per la completezza invece

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty E_\tau(x) E_\tau(x') d\tau &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\tau \log(x/x')} (xx')^{-\gamma - 1} d\tau \\ &= (xx')^{-\gamma - 1} \delta(\log(x) - \log(x')) \\ &= (xx')^{-2\gamma - 1} \delta(x - x') \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove si sfrutta la proprietà della delta di Dirac:  $\delta(f(x)) = (f'(x_0))^{-1} \delta(x - x_0)$  con  $x_0$  zero semplice della funzione.

In conclusione ogni funzione  $f$  dello spazio di Hilbert può essere proiettata su questa base, con coefficienti

$$F(\beta) = \langle E_\tau | f \rangle \quad (2.20)$$

$$= \int_0^\infty dx x^{i\tau + \gamma} f(x) \quad (2.21)$$

che è proprio la trasformata di Mellin

$$\tilde{f}(\beta) = \mathcal{M}[f, i\tau + \gamma + 1]$$

Se la trasformata di Fourier proiettava la funzione sulla base delle armoniche  $e^{ikx}$ , la trasformata di Mellin agisce analogamente con le funzioni  $E_\tau$ . L'azione del gruppo delle dilatazioni è simile a quella delle traslazioni per Fourier, infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[D_a f, i\tau + \gamma + 1] &= \int_0^\infty dx x^{i\tau + \gamma} a^{\gamma + 1} f(ax) \\ &= \int_0^\infty dy y^{i\tau + \gamma} a^{-i\tau} f(y) \\ &= a^{-i\tau} \int_0^\infty dy y^{i\tau + \gamma} f(y) \\ &= a^{-i\tau} \mathcal{M}[f, i\tau + \gamma + 1] \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3 Alcune Proprietà della Trasformata di Mellin

Un modo alternativo per visualizzare la trasformata di Mellin è riscriverla come

$$\int_0^{\infty} dx f(x) x^{\alpha+i\tau-1} = \int_0^{\infty} dx f(x) x^{\alpha-1} e^{i\tau \log(x)} \quad (2.23)$$

In questo modo è facile comprendere perché viene definita solo sul semiasse positivo, in caso contrario il logaritmo non sarebbe definito. La relazione generale è

$$\mathcal{M}[f(x), \alpha + i\tau] = \mathcal{F}[f(e^{-y})e^{-\alpha y}, \beta] \quad (2.24)$$

per dimostrarlo basta applicare un cambio di variabile  $x = e^{-y}$  all'integrale [\(2.6\)](#)

$$\int_0^{\infty} dx f(x) x^{\alpha+i\tau-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(e^{-y}) e^{-\alpha y} e^{-i\tau y} \quad (2.25)$$

Questo è utile per dimostrare alcune proprietà della trasformata di Mellin:

$$\mathcal{M}[f(kx), s] = k^{-s} \mathcal{M}[f(x), s] \quad (2.26)$$

$$\mathcal{M}[\partial_x^n f(x), s] = (-1)^n (s-n) \dots (s-1) \mathcal{M}[f(x), s-n] \quad (2.27)$$

$$\mathcal{M}[(x\partial_x)^n f(x), s] = (-1)^n s^n \mathcal{M}[f(x), s] \quad (2.28)$$

$$\mathcal{M}[(x^n \partial_x^n) f(x), s] = (-1)^n s(s+1) \dots (s+n-1) \mathcal{M}[f(x), s] \quad (2.29)$$

con  $k > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Inoltre si può definire un prodotto di convoluzione per la trasformata di Mellin. Il prodotto di convoluzione per Fourier è

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (2.30)$$

e soddisfa la relazione

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (2.31)$$

Per prodotto di convoluzione relativo a Mellin deve valere una regola simile

$$\mathcal{M}[f\tilde{*}g] = \mathcal{M}[f]\mathcal{M}[g] \quad (2.32)$$

e si dimostra che è definito come

$$(f\tilde{*}g)(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)du \quad (2.33)$$

La convoluzione può tornare utile per l'antitrasformata di una funzione del tipo  $\tilde{f}(\tau) = \tilde{a}(\tau)\tilde{b}(\tau) = \mathcal{M}[a\tilde{*}b]$ , che restituisce  $f(r) = (a\tilde{*}b)(r)$ .

## 2.4 Applicazione allo Spaziotempo $\kappa$ -Minkowski

Gli autovettori approssimati  $T_\tau$ , definiti in (1.27), sono una famiglia di funzioni ortonormali e complete, ossia sono una base per lo spazio di Hilbert delle funzioni radiali in  $\mathbb{R}^3$ . Tale spazio di Hilbert si indica con  $L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$ , perché il prodotto scalare che induce la norma è

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\infty dr r^2 f^*(r) g(r)$$

e l'argomento  $r$  è definito solo su  $\mathbb{R}^+$ . Questo si traduce nella possibilità di riscrivere ogni vettore  $f$  di tale spazio come

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tau) &= \int_0^\infty dr r^2 T_\tau^*(r) f(r) \\ &= \int_0^\infty dr r^2 \frac{r^{-\frac{3}{2}+i\tau}}{\lambda^{i\tau}} f(r) \\ &= \int_0^\infty dr \frac{r^{\frac{1}{2}+i\tau}}{\lambda^{i\tau}} f(r) \end{aligned} \quad (2.34)$$

che è, a meno di un fattore moltiplicativo, la trasformata di Mellin

$$\tilde{f}(\tau) = \mathcal{M} \left[ f(r), \frac{3}{2} + i\tau \right] \quad (2.35)$$

Per essere precisi la trasformata di Mellin mappa sempre funzioni definite sul semiasse positivo in funzioni definite su un certo sottoinsieme del piano complesso. Qui stiamo definendo una applicazione, possiamo chiamarla  $\tilde{\cdot}$ , che manda vettori di  $L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$  in vettori di  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti l'operazione inversa, che manda funzioni di  $\tau$  in funzioni di  $r$ , è data da

$$f(r) = \int_{-\infty}^\infty d\tau r^{-\frac{3}{2}} e^{-i\tau \log(r/\lambda)} \tilde{f}(\tau)$$

che è diversa dalla versione classica, imposta da (2.10),

$$\int_{-\infty}^\infty d\tau r^{\frac{3}{2}} e^{i\tau \log(r/\lambda)} \tilde{f}(\tau)$$

Da questo punto in poi con il termine trasformata di Mellin indicheremo solo l'applicazione  $\tilde{\cdot}$  definita, con la sua inversa, come

$$\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr r^{\frac{1}{2}} e^{i\tau \log(r/\lambda)} \psi(r, \theta, \varphi) \quad (2.36)$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty d\tau r^{-\frac{3}{2}} e^{-i\tau \log(r/\lambda)} \tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi) \quad (2.37)$$

Entrambi le operazioni sono trasformate di Mellin, ma in (2.36) si pone  $s = \frac{3}{2} + i\tau$  mentre (2.37) è l'antitrasformata con  $s = -\frac{3}{2} - i\tau$ . Si tratta quindi di un'applicazione che conserva la norma

$$\int_0^\infty |\psi(r)|^2 dr = \int_{-\infty}^\infty |\tilde{\psi}(\tau)|^2 d\tau \quad (2.38)$$

e questo rende  $|\tilde{\psi}(\tau)|^2$  la funzione densità di probabilità con argomento  $\tau$ .

## Capitolo 3

# Localizzabilità

### 3.1 Distribuzioni con simmetria sferica

Consideriamo il caso di uno stato localizzato in un guscio sottile di raggio  $r_0$ . Questa distribuzione massimizza il valore di  $\Delta\hat{x}^0$  perché il valore di  $\hat{r}$  è esattamente determinato.

$$\psi(r) = \frac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \quad (3.1)$$

Calcoliamo la trasformata di Mellin:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tau) &= \mathcal{M}\left[\psi(r), \frac{3}{2} + i\tau\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr r^{\frac{1}{2}} e^{i\tau \log(\frac{r}{\lambda})} \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r_0^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{i\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r_0^{-\frac{3}{2}} e^{i\tau \log \log(r/\lambda)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

La probabilità di ottenere un certo valore  $\tau$  è dato dal modulo quadro

$$|\tilde{\psi}(\tau)|^2 = \frac{1}{2\pi r_0^3} \quad (3.3)$$

Non essendoci dipendenza da  $\tau$  significa che tutti i valori di tempo sono ugualmente probabili. Per tornare alla analogia con il caso del principio di Heisenberg questo si traduce nel fatto che una particella perfettamente localizzata nello spazio ha tutti i valori di momento ugualmente probabili.

Passiamo ora al caso di un guscio spesso con densità costante definito da

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \rho & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

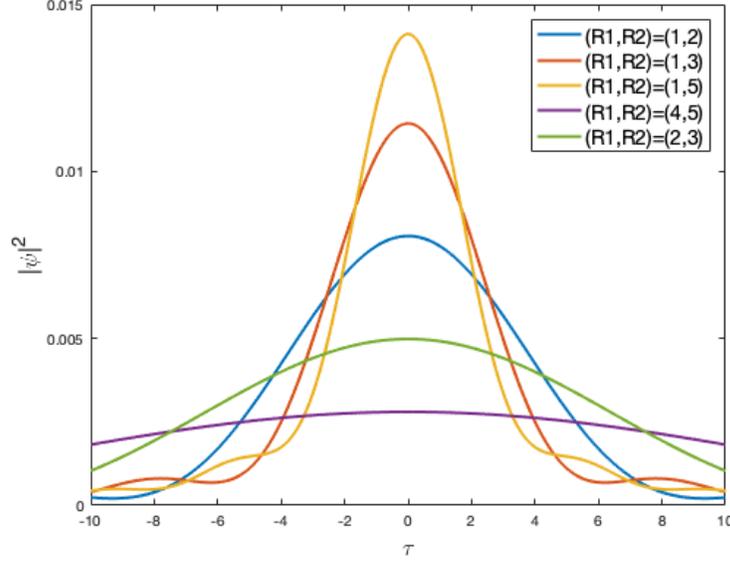


Figura 3.1: Distribuzioni di probabilità in funzione di  $\tau$  di gusci sferici, centrati nell'origine, con raggio interno ed esterno rispettivamente uguali a  $R_1$  e  $R_2$ .

dove  $\rho^2$  è pari all'inverso del volume contenuti fra le due superfici sferiche

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}} \quad (3.5)$$

Passando in trasformata di Mellin si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R_1}^{R_2} dr r^{\frac{3}{2}} e^{i\tau \log(r/\lambda)} \rho \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \frac{r^{\frac{3}{2}+i\tau}}{\lambda^{i\tau}} \left( \frac{3}{2} + i\tau \right)^{-1} \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{R_2^{\frac{3}{2}+i\tau} - R_1^{\frac{3}{2}+i\tau}}{\lambda^{i\tau}} \right] \frac{2}{3 + 2i\tau} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La densità di probabilità in funzione di  $\tau$  è quindi

$$|\tilde{\psi}(\tau)|^2 = \frac{\rho^2}{2\pi} \left[ R_2^3 + R_1^3 - 2R_2^{3/2} R_1^{3/2} \cos \left( \tau \log \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \frac{4}{9 + 4\tau^2} \quad (3.7)$$

Trattandosi di una funzione pari il valore di aspettazione di  $\hat{x}^0$  sarà nullo. La distribuzione ha un picco per  $\tau = 0$  e poi decresce come  $\tau^{-2}$ .

Facendo tendere  $R_1$  a zero si ottiene il caso di una sfera centrata nell'origine con raggio  $R = R_2$ . La densità di probabilità diventa quindi

$$|\tilde{\psi}(\tau)|^2 = \frac{2\rho^2 R^3}{\pi(9 + 4\tau^2)} \quad (3.8)$$

## 3.2 Ellissoide

Consideriamo uno stato localizzato nella porzione di spazio delimitato da un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.9)$$

con densità costante

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{V}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi abc}} \quad (3.10)$$

Per applicare la trasformata di Mellin si deve passare in coordinate polari:

$$\frac{(r \sin \theta \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \theta \sin \varphi)^2}{b^2} + \frac{(r \cos \theta)^2}{c^2} = 1 \quad (3.11)$$

l'equazione dell'ellissoide diventa

$$R(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(abc)^2}{b^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \theta}} \quad (3.12)$$

La trasformata di Mellin di questa funzione è data da

$$\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi) = \frac{2\rho[R(\theta, \varphi)]^{\frac{3}{2}+i\tau}}{\sqrt{2\pi}\lambda^{i\tau}(3 + 2i\tau)} \quad (3.13)$$

che in modulo quadro diventa

$$|\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2 = \frac{2\rho^2[R(\theta, \varphi)]^3}{\pi(9 + 4\tau^2)} \quad (3.14)$$

La densità di probabilità decresce quindi come  $\tau^{-2}$  e la dipendenza angolare è data dal cubo di  $R(\theta, \varphi)$ .

A questo punto è interessante studiare la dipendenza di (3.14) rispetto ai tre semiassi  $(a, b, c)$ . Per semplificare considereremo il caso in cui  $a = b$ ,

$$|\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2 = \frac{3ac^2}{2\pi^2(9 + 4\tau^2)(c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (3.15)$$

in tal modo si elimina la dipendenza dall'angolo  $\varphi$ . Nel limite in cui  $c$  tende a zero si ha che la distribuzione è tutta concentrata su di un disco nel piano  $xy$  con raggio  $a$ , la cui distribuzione nel tempo è

$$\lim_{c \rightarrow 0} |\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2 = \begin{cases} 0 & \theta \neq \pi/2 \\ \infty & \theta = \pi/2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Questo significa che la distribuzione temporale è nulla a meno che non si consideri  $\theta = \pi/2$ , ossia uno stato localizzato sul disco resterà confinato sul disco per ogni valore di  $\tau$ . Al contrario se  $a = b \rightarrow 0$  lo stato è definito solo nella sezione dell'asse  $z$  compresa fra  $c$  e  $-c$ . Il limite restituisce

$$\lim_{a \rightarrow 0} |\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2 = \begin{cases} 0 & \theta \neq 0 \text{ e } \pi \\ \infty & \theta = 0 \text{ e } \pi \end{cases} \quad (3.17)$$

da cui si deduce che la probabilità è diversa da zero solo lungo l'asse  $z$ .

Si nota che nelle direzioni in cui la funzione è più estesa la densità di probabilità nel tempo è maggiore. Quest'ultima affermazione è particolarmente evidente nei due casi limite, che sono

- il piano  $xy$ , ossia  $c \rightarrow 0$  e  $a = b \rightarrow \infty$ ; per cui  $|\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2$  diverge per  $\theta = \pi/2$  ed è nullo per tutti gli altri valori.
- l'asse  $z$ , ossia  $a = b \rightarrow 0$  e  $c = \infty$ ; per cui  $|\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2$  diverge per  $\theta = 0, \pi$  ed è nullo per tutti gli altri valori.

In sintesi la densità di probabilità in una certa direzione  $(\theta, \varphi)$  dipende dall'estensione della distribuzione in quella direzione.

### 3.3 Stato localizzato in una regione sferica

Supponiamo di avere uno stato localizzato in una regione sferica  $S$  di raggio  $R$ , con centro nel punto  $(0, 0, a)$ , con densità di probabilità costante

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{4\pi R^3}} \quad (3.18)$$

L'equazione della superficie sferica

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2 \quad (3.19)$$

in coordinate polari diventa

$$r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta + a^2 - 2ar \cos \theta = R^2 \quad (3.20)$$

e può venir riscritta come un polinomio di secondo grado in  $r$

$$r^2 - 2a \cos \theta r + a^2 - R^2 = 0 \quad (3.21)$$

Per semplificare supponiamo che il raggio sia minore di  $a$ , in modo che l'origine risulti fuori dalla circonferenza e ogni retta passante per essa intersechi due volte la sfera. In questo modo è possibile restringere i valori accettabili di  $\theta$  all'intervallo

$$\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \leq \cos \theta \leq 1 \quad (3.22)$$

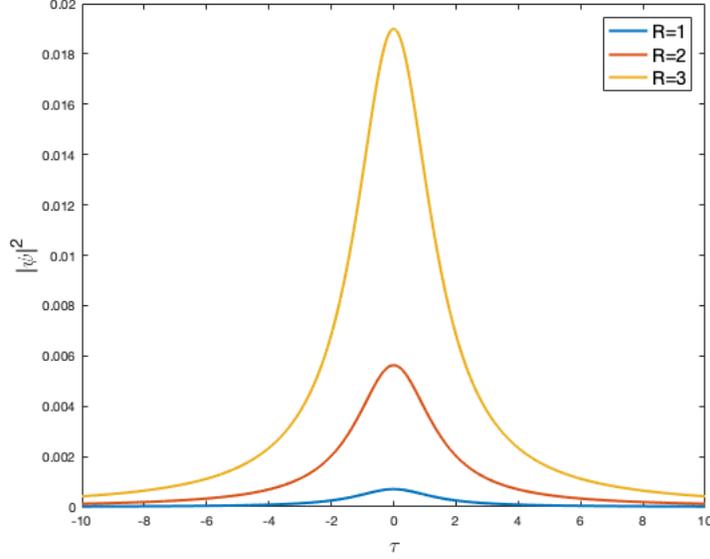


Figura 3.2: Distribuzione di probabilità in funzione di  $\tau$  lungo i tre assi principali di un ellissoide, con  $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ .

In questo modo il discriminante risulta dell'equazione [\(3.21\)](#)

$$\Delta = 4[R^2 - a^2 \sin^2 \theta] \quad (3.23)$$

risulta sempre positivo o nullo, le radici sono

$$r_1(\theta, \varphi) = a \cos \theta + \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.24)$$

$$r_2(\theta, \varphi) = a \cos \theta - \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.25)$$

La trasformata di Mellin di questa distribuzione è

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr \frac{r^{\frac{1}{2}+i\tau}}{\lambda^{-i\tau}} \psi(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda^{-i\tau}} \int_{r_2(\theta, \varphi)}^{r_1(\theta, \varphi)} dr \rho r^{\frac{1}{2}+i\tau} \Theta \left( \cos \theta - \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \right) \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi} \lambda^{-i\tau}} \frac{2}{3 + 2i\tau} \left[ r_1^{\frac{3}{2}+i\tau} - r_2^{\frac{3}{2}+i\tau} \right] \Theta \left( \cos \theta - \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

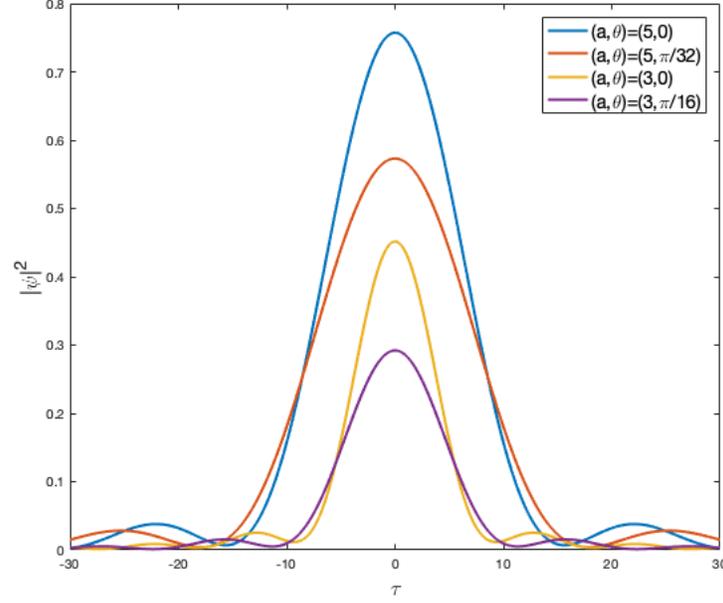


Figura 3.3: Distribuzione in funzione di  $\tau$  di due sfere con  $R = 1$ , una centrata in  $(0, 0, 5)$  e l'altra in  $(0, 0, 3)$ , con diversi valori di  $\theta$ .

Per alleggerire la notazione indicheremo la funzione di Heaviside solo con  $\Theta$ . Il modulo quadro è

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\psi}(\tau, \theta, \varphi)|^2 &= \\
 &= \frac{4\rho^2}{2\pi(9 + 4\tau^2)} \left[ r_1^{\frac{3}{2} + i\tau} - r_2^{\frac{3}{2} + i\tau} \right] \left[ r_1^{\frac{3}{2} - i\tau} - r_2^{\frac{3}{2} - i\tau} \right] \Theta \\
 &= \frac{4\rho^2}{2\pi(9 + 4\tau^2)} \left\{ r_1^3 + r_2^3 - (r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} \left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{i\tau} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{-i\tau} \right] \right\} \Theta \quad (3.27) \\
 &= \frac{4\rho^2}{2\pi(9 + 4\tau^2)} \left\{ r_1^3 + r_2^3 - 2(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} \cos \left( \tau \log \frac{r_1}{r_2} \right) \right\} \Theta
 \end{aligned}$$

La dipendenza dall'angolo  $\theta$  è racchiusa nella formula esplicita di  $r_1$  e  $r_2$  (3.24-3.25). Non c'è dipendenza dall'angolo  $\varphi$  perché il sistema ha simmetria cilindrica, questa non è una perdita di generalità perché è sempre possibile considerare un sistema di riferimento in cui il centro della sfera giaccia sull'asse  $z$ .

### 3.4 Stati perfettamente localizzati

Abbiamo già osservato come la formulazione radiale (1.20) del principio di localizzabilità ammetta distribuzioni perfettamente localizzate, sia spazialmente che temporalmente. In particolare ad avere questa caratteristica sono le distribuzioni localizzate nell'origine spaziale. Per definire tali funzioni è necessario individuare una famiglia di vettori dello spazio di Hilbert che minimizzino il principio di indeterminazione (1.20). Dimostreremo che tali funzioni sono le gaussiane logaritmiche, che rappresentano la controparte delle gaussiane per lo spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski. L'equazione che definisce questa famiglia di funzioni è

$$L(r, r_0) = \mathcal{N} e^{-\frac{(\log r - \log r_0)^2}{\sigma^2}} \quad (3.28)$$

dove la normalizzazione è data da

$$\mathcal{N} = \frac{e^{-\frac{9}{16}\sigma^2}}{(2\pi)^{3/4} \sqrt{\sigma r_0^3}} \quad (3.29)$$

I valori di aspettazione per potenze qualsiasi di  $\hat{x}^0$  e  $\hat{r}$  su distribuzioni di questo tipo sono

$$\langle (\hat{r})^n \rangle = e^{-\frac{\sigma^2}{8} n(n+6)} r_0^n \quad (3.30)$$

e

$$\langle (\hat{x}^0)^n \rangle = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^n (n-1)!! & n \text{ pari} \end{cases} \quad (3.31)$$

Le varianze sono quindi

$$\begin{aligned} (\Delta_{\phi} r)^2 &= \langle \hat{r}^2 \rangle - \langle \hat{r} \rangle^2 \\ &= e^{-2\sigma^2} r_0^2 - e^{-\frac{7}{4}\sigma^2} r_0^2 \\ &= (e^{-\frac{1}{4}\sigma^2} - 1) \langle \hat{r} \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

e

$$(\Delta_{\phi} x^0)^2 = \langle (\hat{x}^0)^2 \rangle - \langle \hat{x}^0 \rangle^2 \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} - 0 \quad (3.34)$$

Pertanto, con una apposita scelta della  $\sigma$ , risulta

$$(\Delta_{\phi} r)^2 (\Delta_{\phi} x^0)^2 = \frac{\lambda^2 |\langle \hat{r} \rangle|^2}{4} \quad (3.35)$$

A questo punto si applica la trasformata di Mellin a questa famiglia di funzioni, ottenendo

$$\tilde{L}(\tau, r_0) = \frac{\sqrt{\sigma} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\tau(\tau-3i)}}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/4}} \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{i\tau} \quad (3.36)$$

il cui modulo quadro è

$$|\tilde{L}(\tau, r_0)|^2 = \frac{\sigma e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}}}{2(2\pi)^{3/2}} \quad (3.37)$$

Consideriamo a questo punto la famiglia di funzioni  $\{L(r, r_0(\sigma))\}$  caratterizzate da

$$r_0(\sigma) = r^{-\sigma^\alpha} \quad (3.38)$$

con  $\alpha = 2 + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$ . Si può facilmente verificare che nel limite  $\sigma \rightarrow \infty$ , e quindi  $r_0 \rightarrow 0$ , si ha che

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}}}{2(2\pi)^{3/2}} = \delta(\tau) \quad (3.39)$$

Inoltre si trova che  $\langle (\hat{x}^0)^n \rangle = 0 \forall n$ . La distribuzione ottenuta in questo modo è perfettamente localizzata nell'origine dello spaziotempo e sarà indicata con  $|O\rangle$ . A questo punto non è difficile trovare distribuzioni localizzate nell'origine spaziale con

$$\Delta \hat{x}^0 = 0 \quad \langle \hat{x}^0 \rangle = \gamma \quad (3.40)$$

con  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Per farlo basta definire

$$L_\gamma(r, r_0) = r^{-i\gamma} L(r, r_0) \quad (3.41)$$

ossia una nuova distribuzione che differisce da (3.28) solo per una fase. Sfruttando la proprietà della trasformata di Mellin

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[x^{-i\gamma} f(x), \alpha + i\tau] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{\alpha+i(\tau-\gamma)} f(x) \\ &= \mathcal{M}[f(x), \alpha + i(\tau - \gamma)] \end{aligned}$$

si ottiene che

$$\tilde{L}_\gamma(\tau, r_0) = \frac{\sqrt{\sigma} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(\tau-\gamma)^2-3i(\tau-\gamma)]}}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/4}} \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{i(\tau-\gamma)} \quad (3.42)$$

$$|\tilde{L}_\gamma(\tau, r_0)|^2 = \frac{\sigma e^{-\frac{\sigma^2(\tau-\gamma)^2}{2}}}{2(2\pi)^{3/2}} \quad (3.43)$$

Analogamente a quanto fatto prima si trova che il limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma e^{-\frac{\sigma^2(\tau - \gamma)^2}{2}}}{2(2\pi)^{3/2}} = \delta(\tau - \gamma) \quad (3.44)$$

ossia una delta di Dirac centrata in  $\tau = \gamma$ . Queste distribuzioni  $|O_\gamma\rangle$  sono quindi sempre centrate nell'origine spaziale, annullano il principio di localizzabilità ed hanno valore di aspettazione  $\langle O_\gamma | \hat{x}^0 | O_\gamma \rangle = \gamma$ .

### 3.5 Intervalli Temporali

In questo capitolo sfrutteremo l'antitrasformata di Mellin per studiare la localizzabilità spaziale in funzione della coordinata temporale. Considereremo distribuzioni costanti su un intervallo

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt{b}} & \tau \in [a, a+b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.45)$$

che possono essere interpretate come funzioni d'onda di un evento che può essere rilevato, in un punto qualsiasi dello spazio, solo nel lasso di tempo fra  $\tau = a$  e  $\tau = a + b$ . L'antitrasformata restituisce

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi b}} \int_a^{a+b} d\tau e^{-i\tau \log(r/\lambda)} \\ &= \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{4b\pi}} \left[ \frac{e^{-i\tau \log(r/\lambda)}}{-i \log(r/\lambda)} \right]_a^{a+b} \\ &= \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{4b\pi}} \left[ \frac{e^{-i(a+b) \log(r/\lambda)}}{-i \log(r/\lambda)} - \frac{e^{-ia \log(r/\lambda)}}{-i \log(r/\lambda)} \right] \\ &= \frac{ir^{-\frac{3}{2}} e^{-i(a+\frac{b}{2}) \log(r/\lambda)}}{\sqrt{4b\pi}} \left[ \frac{e^{-i\frac{b}{2} \log(r/\lambda)} - e^{i\frac{b}{2} \log(r/\lambda)}}{\log(r/\lambda)} \right] \\ &= \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{b\pi}} \frac{\sin\left(\frac{b}{2} \log(r/\lambda)\right)}{\log(r/\lambda)} e^{-i(a+\frac{b}{2}) \log(r/\lambda)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

che in modulo quadro diventa

$$|\psi(r)|^2 = \frac{r^{-3} \sin^2\left(\frac{b}{2} \log(r/\lambda)\right)}{\pi b \log^2(r/\lambda)} \quad (3.47)$$

Si può osservare che la distribuzione radiale dipende da  $a$  solo per una fase, pertanto il modulo quadro dipende unicamente dal parametro  $b$ , ossia dall'ampiezza dell'intervallo. La funzione (3.47) ha denominatore nullo per  $r = \lambda$  ma

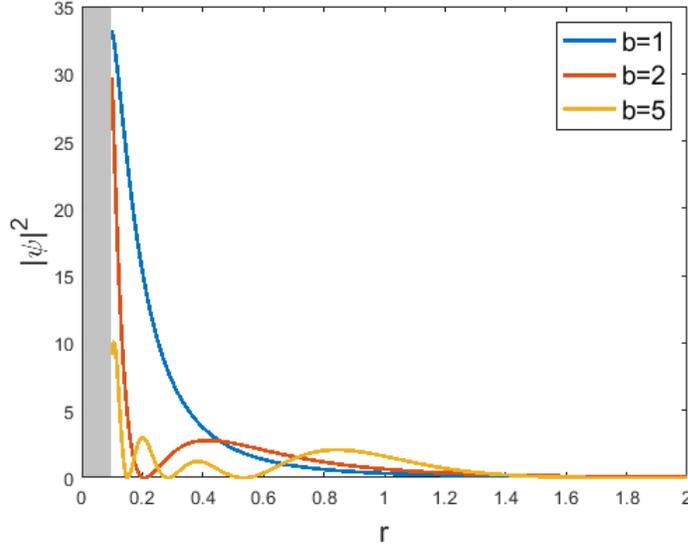


Figura 3.4: Densità di probabilità in funzione di  $r$  per tre intervalli con estremi  $(-b, b)$ . Sono riportati solo i valori per  $r > 0.1$ , nella regione grigia la funzione oscilla raggiungendo picchi sempre più alti senza mai divergere. Il parametro  $\lambda$  è posto uguale a 1.

non ha divergenze poiché

$$\lim_{r \rightarrow \lambda} |\psi(r)|^2 = \lim_{r \rightarrow \lambda} \frac{r^{-3} \sin^2 \left( \frac{b}{2} \log(r/\lambda) \right)}{2\pi \frac{b}{2} \log^2(r/\lambda)} = \frac{1}{2\pi \lambda^3} \quad (3.48)$$

Nell'origine si ha che il limite per  $r \rightarrow 0$  non è definito, infatti mentre il termine  $r^{-3}$  tende a far divergere la funzione il seno ha infinite oscillazioni avvicinandosi a 0. Il logaritmo diverge avvicinandosi all'origine e questo comporta infinite oscillazioni, con minimi sempre 0 e picchi sempre più alti. Il fatto che  $|\psi(0)|^2$  non abbia un valore ben determinato tuttavia non rappresenta un problema poiché ogni misurazione è sempre definita su un certo intervallo. La funzione (3.47) è sempre integrabile, anche in un intorno dell'origine. Questo permette di avere sempre un risultato ben definito per ogni operazione di misura.

# Conclusioni

La teoria dello spaziotempo  $\kappa$ -Minkowski permette di introdurre gli effetti di Gravità Quantistica sfruttando unicamente gli strumenti della Meccanica Quantistica elementare. Dall'algebra degli operatori posizione è stato possibile risalire al principio di localizzabilità. I risultati così ottenuti sono stati sfruttati per studiare la densità di probabilità spaziale e temporale di varie funzioni. I comportamenti interessanti rilevati sono principalmente due.

Il primo riguarda la correlazione dovuta alla distanza rispetto all'origine: tanto più una funzione è localizzata vicino all'origine spaziale tanto più sarà piccola l'indeterminazione sulla coordinata temporale. Questo ha permesso di individuare distribuzioni perfettamente localizzabili.

Il secondo riguarda la parte temporale ed agisce in modo opposto: la posizione relativa all'origine temporale  $\tau = 0$  è ininfluenza per quel che riguarda la distribuzione radiale.

# Bibliografia

- [1] F. Lizzi, M. Manfredonia, F. Mercati e T. Poulain - «Localization and Reference Frames in  $\kappa$ -Minkowski Spacetime», (2018).
- [2] F. Lizzi, M. Manfredonia e F. Mercati - «Localizability in  $\kappa$ -Minkowski Spacetime», (2019).
- [3] P. L. Butzer e S. Jansche - «A Direct Approach to the Mellin Transform», (1997).
- [4] J. Bertrand, P. Bertrand e J. Ovarlez - «The Mellin Transform», contenuto in "The Transforms and Applications Handbook", II edizione, CRC Press, (2000).
- [5] D. Meschini - «Planck-scale physics: facts and beliefs», (2006).
- [6] G. Gorelik - «First Steps of Quantum Gravity and the Planck Values», contenuto in "Studies in the history of general relativity. Einstein Studies Vol.3", Birkhaeuser, (1992).
- [7] K. Urbanowski - «Critical look at the time-energy uncertainty relations», (2019).
- [8] S. Hossenfelder - «Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity», (2013).
- [9] G. Gasperini - «Manuale di Relatività Ristretta», Springer, (2010).