UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

La violazione del Principio di Equivalenza in teorie di campo a temperatura finita

Relatori:
Salvatore Capozziello

Candidato:
Sibilla Bouché
Matr. $N85001232$

Anno Accademico 2019/2020

A chi
volendo conoscere l'universo
ne è diventato parte

Indice

Introduzione **1**

1 Il Principio di Equivalenza **4**

2 La teoria della Relatività Generale **6**

2.1 L'equazione delle geodetiche 7

2.2 Il Principio di Covarianza Generale 9

2.3 Il calcolo differenziale assoluto 10

2.3.1 La proprietà dei tensori 10

2.3.2 La non tensorialità dei simboli di Christoffel 11

2.3.3 Le derivate covarianti e il trasporto parallelo 12

3 La violazione del Principio di Equivalenza Debole **15**

3.1 Il Principio di Equivalenza Debole vale a livello quantistico? 15

3.2 La violazione del Principio di Equivalenza Debole in Teoria Quantistica di Campo 16

3.3 La violazione del Principio di Equivalenza Debole tramite modificazione dell'equazione delle geodetiche 18

3.4 Applicazione alla metrica di Schwarzschild 20

3.5 Applicazione a una generica metrica diagonale 22

4 Test di precisione del Principio di Equivalenza **24**

4.1 Esperimenti con masse sospese: la bilancia a torsione 25

Conclusioni **29**

Bibliografia **31**

Introduzione

Il valore di una teoria è dato dalla possibilità, a partire dalla stessa, di recuperare validi modelli precedenti in un dato limite e, allo stesso tempo, fornire interpretazioni coerenti per fenomeni ancora inspiegati. Essa dovrebbe, dunque, costituire un ponte tra le certezze apparentemente incontestabili del passato e i dubbi che attanagliano il tempo presente. Tale idea è strettamente legata con la celebre affermazione attribuita a Bernardo di Chartres:

> *"nos esse quasi nanos gigantium humeris insidentes, ut possimus plura eis et remotiora videre".*[1]

La prima espressione del Principio di Equivalenza nasce a partire dalla considerazioni, da parte di Galileo Galilei, sulla discesa in argento vivo di oro e altre pietre: seguendo tale ragionamento, egli afferma che *"se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie descenderebbero con eguali velocità"* [1]. Il Principio asserisce l'equivalenza tra massa inerziale m_i (la *vis insita* di Newton [2]), che rappresenta la resistenza di un corpo al movimento quando ad esso è applicata una forza, e massa gravitazionale m_g, proporzionale all'interazione del corpo con un campo gravitazionale.

Ripreso e affinato nelle opere di Newton e Keplero, i quali consolidarono l'idea di Universalità della Caduta Libera, il Principio di Equivalenza trova la sua forma più completa nella formulazione di Einstein, il quale, nel 1907, osservò l'equivalenza tra un sistema in caduta libera verso la Terra con accelerazione g e uno accelerato della stessa quantità nello spazio. L'idea può essere facilmente visualizzata immaginando di essere in un ascensore: un osservatore solidale con il sistema non sarebbe capace di distinguere l'accelerazione dovuta al campo gravitazionale da quella dovuta a una forza esterna. A partire da questa semplice intuizione, Einstein giunse a una geometrizzazione dello spaziotempo, dando vita a quello che lui stesso avrebbe definito "il pensiero più felice della mia vita".

La Relatività Generale si fonda sull'assunzione che spazio e tempo siano variabili dinamiche unite in un'unica struttura spaziotemporale. La sua dinamica deve riprodurre lo spazio di Minkowski in assenza di un campo gravitazionale. Per essere considerata una teoria autoconsistente, è necessario che, nel limite di basse energie,

[1] dal lat. "noi siamo come nani sulle spalle di giganti, così che possiamo vedere più cose di loro e più lontane"

da essa si recuperi la meccanica newtoniana [3]. Oltre al Principio di Equivalenza, pertanto, Einstein incluse ulteriori assunzioni:

- *Invarianza di Lorentz* - Non esiste un sistema di riferimento (inerziale) privilegiato, i. e. le leggi fisiche sono indipendenti dal sistema di riferimento scelto;
- *Principio di Covarianza Generale* - Le leggi fisiche sono invarianti sotto diffeomorfismo, ossia una funzione differenziabile nelle coordinate locali di due varietà;
- *Principio di Causalità* - In ogni punto dello spaziotempo è definito in modo univoco il concetto di passato, presente e futuro.

La struttura dello spaziotempo che ne consegue è definita da una varietà differenziabile quadridimensionale, dotata di una metrica g, che ne fissa la struttura causale, e una connessione Γ, assunta priva di torsione, che descrive la caduta libera dei corpi su di essa. Nella formulazione di Einstein, in cui Γ è la connessione di Levi-Civita (elemento non tensoriale, che permette di annullare localmente gli effetti di un campo gravitazionale), è solo g a determinare la dinamica dei corpi, descrivendone la struttura causale, la struttura metrica e la caduta libera. In essa, i coefficienti della metrica $g_{\mu\nu}$ rappresentano i potenziali gravitazionali e la curvatura dello spaziotempo è data dalla distribuzione delle masse su di esso, come descritto dal tensore di Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$.
Il Principio di Equivalenza, dunque, riveste un'importanza fondamentale nella formulazione della teoria della Relatività Generale. La sua validità è strettamente correlata alla scelta della connessione di Levi-Civita per Γ, e quindi all'equivalenza tra la struttura metrica e la struttura geodetica dello spaziotempo. Una possibile violazione dello stesso, in particolare a livello quantistico, potrebbe aprire la strada a nuove teorie, estese o alternative, di gravità.

Il presente elaborato ha l'obiettivo di mostrare l'effettiva possibilità di una violazione del Principio di Equivalenza nella sua forma debole, dunque l'ineguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, a temperatura $T \neq 0$. Esso è strutturato come segue:

- La Sezione 1 è dedicata a una descrizione generale del Principio di Equivalenza e delle sue implicazioni: ne vengono presentate tre formulazioni, accennando alle motivazioni che hanno spinto alla discriminazione delle stesse. Si pone particolare enfasi sulla più debole, a partire dalla quale si presenta la possibilità di eliminare localmente gli effetti di un campo gravitazionale.

- Nella Sezione 2 è affrontata la costituzione della Teoria della Relatività Generale, assumendo la validità del Principio di Equivalenza. A partire dallo annullamento dell'accelerazione gravitazionale, in un sistema di riferimento localmente inerziale, si mostra la coincidenza tra la struttura metrica e geodetica della varietà riemanniana spaziotemporale, univocamente legata alla scelta della connessione di Levi-Civita come rappresentazione delle forze gravitazionali. Si introduce, quindi, il Principio di Covarianza Generale come ulteriore declinazione del Principio di Equivalenza e l'imposta necessità di sviluppare un nuovo formalismo covariante, attraverso il calcolo differenziale assoluto: stabilitene le caratteristiche, dallo stesso si approfondisce la natura della connessione Γ di Levi-Civita e la sua relazione con la metrica g, come fondamento delle teorie metriche di gravità.

- Nella Sezione 3 è trattata la possibilità della violazione del Principio di Equivalenza in forma debole, a partire da una particella di prova immersa in un bagno termico di fotoni, seguendo due diversi approcci. Nel primo caso, basandosi sulla Teoria Quantistica di Campo, si considerano le equazioni di Dirac che ne descrivono l'interazione con un campo gravitazionale e uno non-gravitazionale. Attraverso un'opportuna trasformazione unitaria, si esprimono le stesse in una forma in cui i termini di massa sono facilmente individuabili e, con approssimazioni adeguate, è possibile valutarne la dipendenza dalla temperatura, da cui conseguirebbe l'eventuale violazione. Nel secondo caso, si include l'effetto di una temperatura nel computo dell'energia del sistema: a partire da una nuova legge di conservazione per il tensore energia-impulso, si giunge a una formulazione generale dell'equazione delle geodetiche a temperatura finita. In particolare, si analizza il caso di un sistema dotato di simmetria sferica (metrica di Schwarzschild), per poi generalizzare il risultato a una generica metrica diagonale.

- Infine, nella Sezione 4 si presentano i differenti test di precisione atti alla verifica del Principio di Equivalenza in forma debole, che sfruttano il diretto legame di quest'ultimo con l'Universalità della Caduta Libera. Da questa proprietà delle masse soggette a un campo gravitazionale, è definito il parametro di Eötvös, che offre la possibilità di testare il Principio attraverso "esperimenti nulli", garantendo una maggiore precisione. Descritte brevemente le varie tipologie di test, si pone una particolare attenzione alla classe di questi che ha portato i migliori risultati in laboratorio: gli esperimenti con masse sospese su bilance a torsione, effettuati per la prima volta dal barone Eötvös.

1 Il Principio di Equivalenza

La Relatività Generale, in quanto teoria metrica di gravità, trova le sue fondamenta nel Principio di Equivalenza di Gravitazione e Inerzia, che descrive la risposta di un arbitrario sistema fisico a un campo gravitazionale esterno [4]. La prima formulazione del Principio, detta in forma debole, viene attribuita alle considerazioni sulla gravità di Galileo e Newton, e afferma l'equivalenza tra massa inerziale m_i e massa gravitazionale m_g di un corpo: la traiettoria di un corpo neutro, sufficientemente piccolo da avere energia autogravitante trascurabile, è indipendente dalla sua composizione e struttura interna. L'immediata conseguenza è l'impossibilità di distinguere localmente gli effetti di un campo inerziale da quelli di un campo gravitazionale: risulta, dunque, sempre possibile eliminare localmente gli effetti di un campo gravitazionale.

Per dimostrare quanto affermato, si consideri un sistema fisico, immerso in un campo gravitazionale e soggetto a un campo di forze $\mathbf{F}_k$, le cui equazioni del moto sono date da:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m_g \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k. \tag{1}$$

Se si opera con una trasformazione di coordinate tale che:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \quad t' = t, \tag{2}$$

assumendo che sia valido il Principio di Equivalenza Debole, l'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale permette di eliminare il contributo dell'accelerazione di gravità:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k. \tag{3}$$

La cancellazione potrebbe avvenire se si considerasse una qualunque dipendenza di $\mathbf{g}$ da t o $\mathbf{x}$: ciò causerebbe una disomogeneità nel campo gravitazionale a cui il sistema è soggetto (come quella solare che causa le maree sulla Terra [4]). È necessario, dunque, introdurre una precisazione nell'enunciato del Principio, che, nella formulazione più completa, afferma che:

> *In ogni punto dello spaziotempo immerso in un campo gravitazionale arbitrario è possibile scegliere un sistema di coordinate "localmente inerziale" per cui, in una regione sufficientemente piccola intorno al punto da potervi considerare il campo costante, le leggi di natura sono quelle di un sistema in assenza di gravitazione*

ossia le leggi della Relatività Speciale. Einstein giunse a questa prima generalizzazione del Principio di Equivalenza Debole, realizzando che la distinzione sia impossibile non solo per i corpi in caduta libera, ma per qualunque tipo di esperimento. Esso afferma che:

- Il Principio di Equivalenza Debole è valido.
- L'esito di qualunque esperimento locale non gravitazionale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera e dal punto dello spaziotempo in cui viene effettuato.

L'espressione "locale non gravitazionale" indica un esperimento svolto in un laboratorio sufficientemente piccolo da ovviare alle possibili disomogeneità del campo gravitazionale e in cui sono trascurati gli effetti autogravitanti.

Le interazioni gravitazionali, dunque, sono escluse dai due principi appena enunciati. Esse sono introdotte nella formulazione più forte del Principio di Equivalenza, che asserisce:

- Il Principio di Equivalenza Debole è valido sia per corpi autogravitanti che per corpi di prova (*Principio di Equivalenza Debole gravitazionale*).
- L'esito di qualunque esperimento locale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera e dal punto dello spaziotempo in cui viene effettuato.

Il Principio di Equivalenza Forte si riduce a quello di Einstein non appena si annullano la forze gravitazionali.

La possibile violazione del Principio in almeno una delle precedenti formulazioni permette di discriminare tra differenti teorie di gravità: molti autori affermano che l'unica teoria compatibile con il Principio di Equivalenza Forte sia la Relatività Generale.

2 La teoria della Relatività Generale

Risulta semplice, a questo punto, notare una certa analogia tra il Principio di Equivalenza e l'assioma che Gauss ha posto alla base della geometria non-Euclidea [4]: in ogni punto di una superficie curva di coordinate x^μ è possibile definire un sistema di coordinate "localmente cartesiane" $\xi^\alpha(x)$ in cui le distanze seguono la metrica pitagorica. Di conseguenza, le proprietà di una superficie curva, e quindi di un campo gravitazionale, possono essere espresse in termini della derivata jacobiana $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ che permette la trasformazione di coordinate dal sistema localmente cartesiano a quello della superficie.

Il più importante punto di contatto tra la teoria sulle superfici di Gauss e la Relatività Generale sono le proprietà metriche su cui entrambe le teorie sono basate [5]. Nella teoria di Gauss, una geometria piana è basata sul concetto di distanza ds, definita in un sistema di coordinate cartesiane x^i, tra due punti infinitamente vicini:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2, \tag{4}$$

a partire dalla quale, si può costruire il concetto di linea retta come *geodetica*. Generalizzando questa visione a una superficie curva, si possono definire localmente delle coordinate cartesiane ξ^i che permettano di misurare la distanza infinitesima tra due punti vicini come:

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2. \tag{5}$$

Se si definisce un sistema di coordinate curvilinee x^i sulla superficie, le $d\xi^i$ si possono esprimere linearmente in termini di dx^i:

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 \tag{6}$$

in cui i coefficienti g_{ij} costituiscono una *metrica* sulla superficie e ne definiscono la natura in un dato sistema di coordinate.

Analogamente, per il Principio di Equivalenza, nelle immediate vicinanze di un osservatore posto nello spaziotempo quadridimensionale si può definire un sistema di coordinate in cui si annullano le forze gravitazionali e le distanze si misurano con la metrica di Minkowski:

$$ds^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2. \tag{7}$$

Questo invariante può essere espresso, come nella teoria di Gauss, in termini differenziali di un sistema arbitrario di coordinate curvilinee x^i:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{8}$$

Tale analogia ha portato allo sviluppo della Relatività Generale come prima teoria fisica che geometrizzi le relazioni: in essa ogni evento corrisponde a un punto di uno spazio topologico, nello specifico una *varietà riemanniana* (M, g), data da una varietà differenziabile M e da una metrica g che ne definisce il campo gravitazionale. In questo formalismo, le linee di mondo su cui si muovono i corpi puntiformi sono geodetiche della metrica.

2.1 L'equazione delle geodetiche

Assumendo la validità del Principio di Equivalenza, in un sistema localmente inerziale l'equazione del moto di un corpo in caduta libera è data da:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} = 0 \tag{9}$$

in cui ds^2 è il *parametro affine*:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \qquad \eta_{\alpha\beta} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{10}$$

Operando con il cambio di coordinate:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\beta) \tag{11}$$

La (9) diventa:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\xi^\alpha}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\right)\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\left(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}\right) \tag{12}$$

e, applicando nuovamente il cambio di coordinate, si ottiene:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{14}$$

La (14) è detta *equazione delle geodetiche*: in essa, le quantità $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sono dette *connessioni affini* e mettono in relazione spazi tangenti in punti diversi di una varietà

differenziabile. Esse dunque rappresentano il *trasporto parallelo* dei vettori tangenti lungo una curva tra due punti sulla varietà.

Volendo ottenere un'espressione per le connessioni affini in funzione del tensore metrico, si passi dal sistema di riferimento localmente inerziale a un sistema qualsiasi, in cui la metrica è data da:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{15}$$

in cui $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$ è il tensore metrico per una qualunque varietà. Derivando questo rispetto a x^λ, si ottiene:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}, \tag{16}$$

che, ricordando l'espressione per il tensore metrico e per i simboli di Christoffel, può essere riscritta come:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + g_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}. \tag{17}$$

Sommando ciclicamente gli indici, si ottiene:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + g_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}$$

$$g_{\nu\lambda,\mu} = g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\mu} + g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} = g_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} + g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu}$$

e, sottraendo la prima equazione alla somma delle altre due, si ottiene:

$$g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} = 2 g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 2\{\lambda, \mu\nu\}. \tag{18}$$

È quindi possibile definire una nuova quantità, detta *simbolo di Christoffel di prima specie*:

$$g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{\lambda, \mu\nu\} = \{\lambda, \nu\mu\} = \frac{1}{2}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{19}$$

e, moltiplicando questa per $g^{\alpha\lambda}$, si possono definire i *simboli di Christoffel di seconda specie*:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} \{\lambda, \mu\nu\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{20}$$

che corrispondono alle connessioni affini. In Realitivà Generale, dunque, le connessioni affini sono simboli di Christoffel di seconda specie: questo tipo di connessione

è detto di Levi-Civita. Esse sono legate alle derivate del tensore metrico: essendo le connessioni affini una rappresentazione delle forze gravitazionali, risulta che le componenti di $g_{\mu\nu}$ rappresentino i potenziali gravitazionali.

2.2 Il Principio di Covarianza Generale

Nel 1917 non si avevano gli strumenti matematici per definire una "geometria a priori" dello spaziotempo, ossia fissata indipendentemente dalla distribuzione delle sorgenti gravitazionali [6] e dalle coordinate. Einstein interpretò tale necessità con il Principio di Covarianza Generale, che asserisce la validità di un'equazione fisica in un campo gravitazionale solo nel rispetto di due condizioni:

1. L'equazione è valida in assenza di campo gravitazionale, ossia per $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$;
2. L'equazione è invariante sotto diffeomorfismo.

Si può dimostrare l'immediata conseguenza del Principio di Covarianza Generale dal Principio di Equivalenza: presa in considerazione una qualunque equazione che rispetti le due condizioni sopracitate in un campo gravitazionale, dalla 2. consegue che se questa è valida in almeno un sistema di riferimento, può essere generalizzata a qualunque altro sistema. Per il Principio di Equivalenza, però, in ogni punto dello spaziotempo si può definire una classe di coordinate in cui si annullano localmente gli effetti gravitazionali, e vale la metrica minkowskiana: la 1. attesta la validità dell'equazione in tali sistemi, e dunque in qualunque sistema di riferimento [4].

Storicamente, sono di particolare rilevanza le critiche mosse ad Einstein da parte di Erich Kretschmann [7]: questi si soffermò sull'assenza di significato fisico nel Principio di Covarianza Generale, asserendo che la stessa covarianza delle equazioni potesse essere ottenuta arbitrariamente attraverso una trasformazione puramente matematica [8]. La critica fu positivamente accettata da Einstein, che replicò sottolineando la forza euristica del principio e la necessità di produrre un modello teorico che fosse il più semplice e trasparente possibile dal punto di vista del calcolo differenziale assoluto [9]. Egli si soffermò, dunque, sul ruolo della covarianza generale nella scelta di una teoria e sulla poca praticità che la stessa avrebbe in altre teorie [10].

2.3 Il calcolo differenziale assoluto

2.3.1 La proprietà dei tensori

Aspetto fondamentale della teoria della Relatività Generale è la possibilità di scrivere le leggi fisiche in un qualunque sistema di riferimento, secondo il Principio di Covarianza Generale. Ciò è garantito dalla scelta di un sistema di calcolo, indipendente dalle coordinate, formalizzato da G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita [11] alla fine del XIX secolo: il calcolo differenziale assoluto. Esso si basa sull'introduzione di una nuova classe di entità matematiche, dette *tensori*: questi sono oggetti a più indici che, nel passaggio da un sistema di coordinate a un altro, sono soggetti a trasfomazioni lineari (a meno di una matrice jacobiana), appartenenti al gruppo $GL(4)$. I tensori controvarianti si trasformano, rispetto agli indici superiori, come un differenziale:

$$d\bar{x}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \longrightarrow d\bar{A}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} dA^\mu. \tag{21}$$

I tensori covarianti, invece, si trasformano come derivate, rispetto agli indici inferiori:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow \bar{A}_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} A_\mu. \tag{22}$$

I tensori misti, invece, sono dotati di indici di entrambi i tipi e sono pertanto soggetti alla trasformazione:

$$\bar{T}^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} T^{\lambda\mu}_{\nu}. \tag{23}$$

Naturalmente, affinchè si tratti di oggetti non singolari, è necessario che lo jacobiano che definisce il cambio di coordinate sia non nullo:

$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \neq 0, \qquad \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\right) \neq 0. \tag{24}$$

Queste trasformazioni garantiscono che un tensore nullo in un determinato sistema di coordinate sia nullo anche in tutti gli altri e che lo stesso valga per tensori uguali: le equazioni tensoriali sono quindi invarianti per qualunque trasformazione di coordinate, rispettando la Covarianza Generale.

Attraverso alcune proprietà algebriche, da tensori si possono ottenere nuovi tensori, di cui è facile dimostrare la tensorialità:

- Una combinazione lineare di tensori dello stesso rango ha come risultato un tensore di quel rango:

$$T^\mu_\nu = aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu \tag{25}$$

- Il prodotto tra tensori restituisce un tensore il cui rango è la somma dei ranghi dei fattori:
$$T^{\mu\rho}_{\nu} = A^{\mu}_{\nu} B^{\rho}. \tag{26}$$

- La contrazione in un tensore è la somma su due indici misti, che vengono posti uguali:
$$T^{\mu\rho} = T^{\mu\rho\nu}_{\ \ \ \nu}. \tag{27}$$

Da queste proprietà discende che se una quantità di qualsiasi rango, saturata con vettori arbitrati, restituisce uno scalare, allora essa è un tensore. Il tensore metrico è un esempio di tensore di rango 2:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{28}$$

In uno spazio metrico, esso permette di alzare e abbassare gli indici dei tensori, che, dal punto di vista geometrico significa passare dallo spazio cotangente allo spazio tangente alla varietà, e viceversa.:

$$T^{\alpha} = g^{\alpha\beta} T_{\beta}, \qquad T_{\alpha} = g_{\alpha\beta} T^{\beta}. \tag{29}$$

2.3.2 La non tensorialità dei simboli di Christoffel

Prendendo in considerazione i simboli di Christoffel di seconda specie Γ, è importante notare che essi non siano oggetti tensoriali: trattandosi di trasformazioni affini, essi contengono intrinsecamente informazioni sul passaggio tra sistemi di riferimento. Definendo quindi:

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} \tag{30}$$

si operi con un cambio di coordinate $\xi^{\rho} = \xi^{\rho}(x^{\alpha})$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{\rho}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \qquad \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \tag{31}$$

Se i simboli di Christoffel fossero oggetti tensoriali, essi sarebbero di rango 3, dunque:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = & \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\mu}} \left[\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \right] = \\ & \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \left[\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} \right] = \\ & \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \left[\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}} + \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} \right] = \\ & \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} = \\ & \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}}.\end{aligned} \tag{32}$$

Il termine aggiuntivo elimina la tensorialità delle Γ: esse possono essere considerate tensori a condizione che questo si annulli, e dunque nel caso di una trasformazione $\xi^{\rho} = \xi^{\rho}(x^{\alpha})$ lineare, cioè tra sistemi inerziali. La presenza del secondo termine offre la possibilità, passando da un sistema di riferimento inerziale a uno non inerziale, di annullare le connessioni punto per punto: ciò è ottenibile imponendo che il secondo termine sia uguale e opposto al primo. Questa proprietà dei simboli di Christoffel è totalmente in accordo con il Principio di Equivalenza, che prevede l'esistenza di un sistema di coordinate in cui le forze gravitazionali si annullino. I sistemi di riferimento descritti da tali coordinate sono proprio i *sistemi localmente inerziali*.

2.3.3 Le derivate covarianti e il trasporto parallelo

Nonostante le operazioni algebriche tensoriali risultino tanto semplici quanto nel caso particolare di invarianza rispetto a trasformazioni lineari ortogonali, le operazioni differenziali risultano generalmente più complesse [EMean]. Considerando un vettore controvariante A^{μ} in un punto P_1, infatti, i coefficienti di trasformazione $\frac{d\bar{x}^{\mu}}{dx^{\alpha}}$ sono indipendenti dalla posizione solo nel caso di una trasformazione lineare: in questa situazione, le componenti del vettore considerate in un punto vicino a P_1, $A^{\mu} + \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}$, si trasformano come A^{μ} e la derivata $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ presenta un carattere tensoriale. Nel caso in cui, al contrario, $\frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ risulti variabile, la derivata perde il suo carattere tensoriale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\beta}} = & \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\beta}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho} \right) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho} \right) = \\ & \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial A^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} A^{\rho}.\end{aligned} \tag{33}$$

Come per le connessioni affini, anche qui il secondo termine elimina la tensorialità della derivata. Si pone quindi la necessità di introdurre un altro operatore differenziale, che possa descrivere la deviazione dei vettori trasportati parallelamente lungo una geodetica: si deve quindi tenere conto della variazione di un angolo, dovuta alla curvatura della varietà. Se A^μ sono le coordinate di un vettore nel punto P_1, $A^\mu + \delta A^\mu$ sono quelle del vettore trasportato lungo un intervallo dx^μ fino a un punto infinitesimamente vicino P_2. Il termine δA^μ è detto *variazione spuria* e fornisce un'indicazione di quanto la varietà presa in considerazione si discosti dal piano tangente in quel punto, e dunque della rotazione del vettore trasportato. Essa dipende linearmente da dx^μ e A^μ [EMean], :

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta. \tag{34}$$

Essendo, invece, $A^\mu + dA^\mu$ le coordinate del vettore in P_2, in cui dA^μ ne rappresenta la *variazione intrinseca*, e ne quantifica la sola traslazione:

$$dA^\mu = A^\mu{}_{,\alpha} dx^\alpha. \tag{35}$$

La variazione totale di un vettore differenza di questi due termini:

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\sigma \right) dx^\alpha \tag{36}$$

è ancora un vettore. Trovandosi nel caso di una scelta arbitraria per dx^α, il termine:

$$A^\mu{}_{;\alpha} = A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\sigma \tag{37}$$

è un tensore e si definisce *derivata covariante* di un tensore di primo rango. Essa è a tutti gli effetti un'operazione di derivazione, rispettando la proprietà di linearità della somma e la regola di derivazione del prodotto.

L'equivalenza tra struttura metrica e geodetica dello spaziotempo si ha se e solo se la connessione affine è una connessione di Levi-Civita: questa è una caratteristica principale di quelle che si definiscono *teorie metriche*, ossia le teorie in cui si annulla la derivata covariante del tensore metrico:

$$\nabla^\lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{38}$$

Questa condizione garantisce che il campo gravitazionale sia commutativo e che le connessioni siano unicamente definite a partire dalla metrica. Una varietà dotata di

una connessione affine di questo tipo è detta Riemanniana ed è priva di torsione. La scelta della connessione di Levi-Civita è strettamente legata al Principio di Equivalenza, che garantisce la coincidenza tra struttura metrica e struttura geodetica.

Nel caso di teorie non metriche, vale $\nabla^\lambda g_{\mu\nu} = Q^\lambda_{\mu\nu} \neq 0$ e le connessioni affini non sono unicamente definite dalla metrica:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\alpha\lambda}\{\lambda, \mu\nu\} + Q^\lambda_{\mu\nu}. \tag{39}$$

In queste teorie, inoltre, i simboli di Christoffel non hanno indici covarianti simmetrici e si dice che la varietà sia dotata di *torsione*: ciò risulta di grande utilità se si vuole considerare lo spin, oltre alla massa, come sorgente gravitazionale.

3 La violazione del Principio di Equivalenza Debole

Il Principio di Equivalenza è dunque alla base delle teorie metriche di gravitazione: alla sua validità è strettamente legata la scelta della connessione di Levi-Civita per Γ, ma più in generale la relazione che intercorre tra Γ e g. Esso assume un ruolo fondamentale in quanto permette di analizzare in maniera indipendente la struttura causale e geodetica dello spaziotempo e dunque di discriminare tra differenti teorie di gravità. La Relatività Generale, infatti, non può essere considerata una teoria fisica fondamentale, non includendo effetti quantistici. Risulta lecito, quindi, chiedersi se il Principio di Equivalenza si possa mantenere in una teoria di gravità modificata al fine di inglobare effetti quantistici nella descrizione dell'interazione gravitazionale. È dunque di grande interesse investigare sulla sua possibile violazione a livello quantistico, ai fini di porre le basi per la formulazione di una teoria quantistica di gravità.

3.1 Il Principio di Equivalenza Debole vale a livello quantistico?

Un obiettivo fondamentale della fisica moderna è cercare di esprimere tutte le interazioni fondamentali come declinazioni diverse di una stessa simmetria: il paradigma dei vari tentativi di unificazione è descrivere le interazioni attraverso l'apparato concettuale della Meccanica Quantistica [7]. In questo gli stati di un sistema fisico sono descritti da vettori di uno spazio di Hilbert H e i campi fisici sono operatori lineari su H. Fino ad oggi non è stato possibile formulare una teoria quantistica completa e autoconsistente di gravità, negando la possibilità di un'unificazione: ciò è dovuto principalmente alla natura della metrica g che descrive, allo stesso tempo, i gradi di libertà gravitazionali e lo spaziotempo in cui questi sono definiti. Lo spaziotempo, pertanto, non può avere una geometria definita "a priori", essendo esso stesso una variabile dinamica. L'implicazione diretta è che, per poter definire il concetto di causalità, è necessario risolvere le equazioni di campo, accordandole a determinate condizioni iniziali.

Dal punto di vista quantistico, il problema sorge dalla perdita della nozione classica di particella, rappresentata in questo formalismo da un *pacchetto d'onda*:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i\frac{px - \frac{p^2}{2m}}{\hbar}}. \tag{40}$$

Dalla funzione d'onda $\psi(x,t)$, si può definire l'ampiezza di probabilità di trovare la particella in una determinata configurazione spaziotemporale: ne deriva la difficoltà nella definizione di una traiettoria, quindi di una metrica e di un concetto di causalità. In questo modo si apre la strada alla possibilità di una violazione del Principio di Equivalenza: nello specifico, è da considerare che in una teoria quantistica sorgano correzioni radiative alla massa di una particella. Generalmente risulta che queste rispettino il Principio di Equivalenza Debole [12]; in una teoria a temperatura finita, però, l'originarsi di nuovi contributi alla massa della particella potrebbe portare a una violazione dello stesso.

3.2 La violazione del Principio di Equivalenza Debole in Teoria Quantistica di Campo

L'eventuale violazione può essere valutata dalla rinormalizzazione dell'accoppiamento elettromagnetico e gravitazionale di un elettrone immerso in un bagno termostatico [12]. Si devono considerare due possibili limiti per la temperatura finita: il primo, per $T \ll m_0$, in cui gli effetti della temperatura sono dovuti principalmente al bagno termico e si possono trascurare le correzioni relativistiche; il secondo, per $T \gg m_0$, in cui, oltre alla necessità di introdurre correzioni relativistiche, si incorre negli effetti di interazione particella-antiparticella. La derivazione seguente sarà svolta nel caso semplificato di $T \ll m_0$.
Si prenda in considerazione un elettrone dotato di massa a riposo m_0, tale quando $T = 0$, in equilibrio termico con un bagno termostatico di fotoni. Ponendosi nel limite di basse temperature, si vogliano calcolare la massa inerziale e quella gravitazionale dello stesso. L'analisi può risultare complessa a causa della non covarianza dell'equazione d'onda: è conveniente applicare una trasformazione di Foldy-Wouthuysen [13] alla corrispondente equazione di Dirac, ottenendo un'equazione di Schrödinger in cui la massa è facilmente ricavabile.
Si consideri dapprima il caso di un elettrone immerso in un campo elettromagnetico. L'equazione di Dirac risulta:

$$\left(\not{p} - m_0 - \frac{\alpha}{4\pi^2}\not{I}\right)\psi = e\Gamma_\mu A^\mu \psi \tag{41}$$

in cui α è la costante di struttura fine, $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ è il quadripotenziale, con ϕ potenziale scalare e $\mathbf{A}$ potenziale vettore, e abbiamo utilizzato la notazione $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$, con γ^μ matrici di Dirac. La quantità I_μ rappresenta la correzione data dal bagno di

calore, ed è pari a:

$$I_\mu = 2\int d^3k \frac{n_B(k)}{k_0}\frac{k_\mu}{\omega_p k_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{k}} \tag{42}$$

dove $k_\mu = (k_0, \mathbf{k})$, $\omega_p = \sqrt{m_0^2 + p^2}$ ed $n_B(k)$ è la distribuzione di Bose-Einstein:

$$n_B(k) = \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \tag{43}$$

con $\beta = \frac{1}{k_B T}$ e k_B costante di Boltzmann. Il quadrivettore Γ_μ, infine, è dato da:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi^2}\frac{I_0}{E}\right) + \frac{\alpha}{4\pi^2} I_\mu. \tag{44}$$

Applichiamo adesso la trasformazione di Foldy Wouthuysen, ottenendo una forma per l'Hamiltoniana non relativistica [13] e, dunque, un'equazione di Schrödinger:

$$i\frac{\partial \psi_s}{\partial t} = \left[m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0} + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\left(m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}\right)} + e\phi + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}}{2\left(m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}\right)} + ...\right]\psi_s \tag{45}$$

nella quale la massa inerziale è facilmente individuabile calcolando l'accelerazione [7]:

$$\mathbf{a} = -[H, [H, \mathbf{r}]] = \frac{e\mathbf{E}}{m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}} \tag{46}$$

$$m_i = m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}. \tag{47}$$

Dalla (47) è evidente la dipendenza della massa inerziale dalla temperatura. In particolare, la differenza di massa $\delta m = \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}$ rappresenta l'aumento di inerzia necessario ad attraversare il bagno termico.
Un procedimento analogo può essere svolto per la massa gravitazionale [14], a partire da un'equazione di Dirac corrispondente all'interazione dell'elettrone con un campo gravitazionale:

$$\left(\not{p} - m_0 - \frac{\alpha}{4\pi^2}\not{I}\right)\psi = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tau^{\mu\nu}\psi \tag{48}$$

in cui $\tau_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso rinormalizzato e $h_{\mu\nu} = 2\phi_g diag(1,1,1,1)$ con ϕ_g potenziale gravitazionale. Applicando la stessa trasformazione canonica, otteniamo l'equazione di Schrödinger:

$$i\frac{\partial \psi_s}{\partial t} = \left[m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0} + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\left(m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}\right)} + \left(m_0 - \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}\right)\phi_g\right]\psi_s. \tag{49}$$

Anche in questo caso, dal calcolo dell'accelerazione si può identificare la massa gravitazionale:

$$\mathbf{a} = -[H_g, [H_g, \mathbf{r}]] = \frac{m_0 - \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}}{m_0 + \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}} \tag{50}$$

$$m_g = m_0 - \frac{\alpha\pi T^2}{3m_0}. \tag{51}$$

La massa gravitazionale, come quella inerziale, presenta un contributo aggiuntivo che dipende dalla temperatura: dal confronto tra la (47) e la (51), è immediato notare l'equivalenza delle due masse per $T = 0$. Al primo ordine di approssimazione, infatti, si ha:

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m_0^2}. \tag{52}$$

Per $T \neq 0$, invece, si genererebbe una violazione del Principio Equivalenza Debole, che risulta in ogni caso molto piccola a temperature accessibili: essa infatti è $\sim 10^{-17}$ per $T \sim 300K$. Tale violazione scaturisce dalla rottura delle condizioni di invarianza di Lorentz, avendo reso il bagno termico un sistema di riferimento privilegiato [7].

3.3 La violazione del Principio di Equivalenza Debole tramite modificazione dell'equazione delle geodetiche

Un approccio alternativo per giungere ai medesimi risultati della sezione precedente è rappresentato dalla valutazione delle equazioni di Einstein in un sistema analogo. Si prenda dunque in considerazione un elettrone di massa rinormalizzata in equilibrio termico con un bagno termostatico di fotoni, senza fuoriuscire dal limite per cui $T \ll m_0$. In tali condizioni, la relazione di dispersione necessita di una correzione al primo ordine in T^2:

$$E = \sqrt{m_0^2 + |\mathbf{p}|^2 + \frac{2}{3}\alpha\pi T^2} \tag{53}$$

Assumendo che la particella sia sufficientemente piccola rispetto alle lunghezze caratteristiche del campo (es. distanza dalla sorgente del campo), per rendere rigoroso il nostro calcolo imponiamo che le dimensioni della stessa tendano a zero: in questo modo possiamo considerare che le linee di mondo da essa descritte siano contenute in uno stretto tubo quadridimensionale, con raggio anch'esso tendente a zero [15], in cui il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ è non nullo. L'equazione di conservazione per $T^{\mu\nu}$ è:

$$\int_\Sigma d^3x' \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x') = \frac{p^\mu p^\nu}{E} \tag{54}$$

in cui p^μ è il quadrimomento ed $E = p^0 = \int_\Sigma d^3x' \sqrt{-g} T^{00}(x')$ l'energia.
Dalla rinormalizzazione del tensore energia-impulso a temperatura finita [12], in approssimazione di campo debole, si ottiene la sorgente del campo:

$$\Xi^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{E^2}\delta^\mu_0\delta^\nu_0 T^{00}. \tag{55}$$

Come accennato precedentemente, a temperatura finita, l'invarianza di Minkowski è violata dall'introduzione del bagno termico, che identifica un sistema di riferimento privilegiato in cui la radiazione si mantiene isotropa: si ottiene una nuova teoria di gravità in cui, pur continuando a valere la covarianza generale, il gruppo di Lorentz non rappresenta il gruppo di simmetria nello spazio localmente tangente alla varietà, considerabile quasi-Riemanniana [16]. Generalizzando la (55) per uno spaziotempo curvo, si ottiene:

$$\Xi^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{E^2}e^\mu_{\hat{0}}e^\nu_{\hat{0}}T^{\hat{0}\hat{0}} \tag{56}$$

in cui le $e^\mu_{\hat{0}}$ rappresentano le coordinate della tetrade (o *vierbein*) e gli indici tildati sono relativi allo spazio piatto tangente. Assumendo di poter trascurare gli effetti della temperatura sulla geometria dello spaziotempo [16], il tensore di Einstein $G^{\mu\nu}$ rimane invariato e le equazioni di Einstein possono essere espresse come di seguito:

$$G^{\mu\nu} = \Xi^{\mu\nu}. \tag{57}$$

Dalle identità di Bianchi contratte, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ (in cui il punto e virgola rappresenta la derivata covariante), si ottiene l'equazione di continuità per $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(\frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{E^2}e^\mu_{\hat{0}}e^\nu_{\hat{0}}T^{\hat{0}\hat{0}}\right)_{;\nu} \tag{58}$$

che può essere riscritta in termini dei simboli di Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\sqrt{-g}T^{\alpha\nu} = \partial_\nu\left(\sqrt{-g}\frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{E^2}e^\mu_{\hat{0}}e^\nu_{\hat{0}}T^{\hat{0}\hat{0}}\right)\\ + \frac{2\alpha\pi}{3}\Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{T^2}{E^2}e^\alpha_{\hat{0}}e^\nu_{\hat{0}}T^{\hat{0}\hat{0}}.\end{aligned} \tag{59}$$

L'equazione che descrive la risposta della particella al campo esterno può essere ottenuta integrando la 59 sull'ipersuperficie Σ che interseca la linea di mondo della particella per $t = cost$. L'integrazione è notevolmente semplificata applicando il teorema di Gauss, espandendo il campo gravitazionale in serie di potenze intorno a x^μ e trascurando l'accoppiamento con momenti interni della particella [16]. Sostituendo

poi $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$, si ottiene:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu = \frac{d}{ds}\left(\frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{mE}e^\mu_{\hat{0}}\right) + \frac{2\alpha\pi}{3}\frac{T^2}{m^2}\Gamma^\mu_{\alpha\nu}e^\nu_{\hat{0}}e^\alpha_{\hat{0}} \tag{60}$$

e, sfruttando la relazione:

$$E = m\dot{x}^{\hat{0}} = m\dot{x}^\rho e^{\hat{0}}_\rho \tag{61}$$

si giunge finalmente all'equazione delle geodetiche nel caso di una temperatura finita:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu = \frac{2\alpha\pi T^2}{3}\left[\frac{\dot{x}^\nu\partial_\nu e^\mu_{\hat{0}}}{mE} - \frac{e^\mu_{\hat{0}}\left(\ddot{x}^\nu e^{\hat{0}}_\nu + \dot{x}^\nu\dot{x}^\beta\partial_\beta e^{\hat{0}}_\nu\right)}{E^2} + \frac{\Gamma^\mu_{\alpha\nu}e^\alpha_{\hat{0}}e^\nu_{\hat{0}}}{m^2}\right]. \tag{62}$$

3.4 Applicazione alla metrica di Schwarzschild

Come affermato precedentemente, l'equazione (62) può essere utilizzata in situazioni di campo debole, in particolare nel caso di campo statico, come quello terrestre. Prendiamo in considerazione la soluzione di Schwarzschild in coordinate polari, in cui il tensore metrico può essere espresso come:

$$g_{\mu\nu} = diag\left(e^\nu, e^{-\lambda}, -r^2, -r^2\sin^2\theta\right), \qquad e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - 2\phi = 1 - \frac{2M}{r} \tag{63}$$

ricordando che $\partial_t\phi = 0$. Le coordinate della tetrade sono [16]:

$$e^\mu_{\hat{0}} = \delta^\mu_{\hat{0}}e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad e^\mu_{\hat{1}} = \delta^\mu_{\hat{1}}e^{-\frac{\lambda}{2}}. \tag{64}$$

Dall'espressione per i simboli di Christoffel non nulli:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu' e^{2\nu}}{2}, \quad \Gamma^1_{11} = -\frac{\nu'}{2} \tag{65}$$

in cui $\nu = log(1-2\phi)$ e $\nu' = \frac{d\nu}{dr}$, si ottiene, quindi, l'equazione delle geodetiche per $\mu = 0$:

$$\ddot{t} + \nu'\dot{r}\dot{t} = -\frac{2\alpha\pi T^2}{3}\left(\frac{\dot{r}\nu'}{2mE} + \frac{\ddot{t} + \frac{\dot{r}\dot{t}\nu'}{2}}{E^2}e^{\frac{\nu}{2}}\right). \tag{66}$$

La (66) può essere ulteriormente semplificata se si considera che $E = m\dot{x}^{\hat{0}} = m\hat{x}^\alpha e^{\hat{0}}_\alpha = m\dot{t}e^{\frac{\nu}{2}}$:

$$\left(1 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3E^2}\right)\left(\ddot{t} + \nu'\dot{r}\dot{t}\right) = 0. \tag{67}$$

L'equazione delle geodetiche per $\mu = 1$, invece, è data da:

$$\ddot{r} + \frac{\nu'}{2}\left(\dot{t}^2 e^{2\nu} - \dot{r}^2\right) = \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\frac{e^{\nu}\nu'}{2} \tag{68}$$

e può essere riscritta come segue:

$$\ddot{r} + \frac{\nu'}{2}\left(\dot{t}^2 e^{\nu-\lambda} - \dot{r}^2 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}e^{-\lambda}\right) = 0 \tag{69}$$

La (67) e la (69) costituiscono un sistema di equazioni differenziali accoppiate, la cui risoluzione può essere notevolmente semplificata se si considera una particolare relazione che lega $\dot{t}^2$ e $\dot{r}^2$. L'equazione (69) si può quindi esprimere nel seguente modo:

$$2\ddot{r} - \dot{r}^2\nu' + \dot{t}^2\nu' e^{2\nu} - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\nu' e^{\nu} = 0 \tag{70}$$

e può essere riscritta come:

$$e^{\nu}\frac{d}{dr}\left(e^{\lambda}\dot{r}^2 - e^{\nu}\dot{t}^2 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\nu\right) = 0. \tag{71}$$

La precedente espressione implica:

$$e^{\lambda}\dot{r}^2 - e^{\nu}\dot{t}^2 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\nu = cost. \tag{72}$$

il cui valore può essere calcolato normalizzando la quadrivelocità nel limite per $\phi \to 0$. Condizione necessaria affinché ciò sia posssibile è l'assunzione fatta in precedenza, ossia l'indipendenza della geometria dello spaziotempo dalla temperatura. Dalla normalizzazione, tenendo conto della condizione sugli angoli, si ottiene, dunque:

$$\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2 = 1, \tag{73}$$

che, nel limite di campo gravitazionale nullo a distanza infinita (per cui $\nu, \lambda \to 0$ per $r \to \infty$), permette di ricavare:

$$\dot{r}_{\infty}^2 - \dot{t}_{\infty}^2 = -1. \tag{74}$$

È dunque possibile sostituire per $\dot{t}$ e $\dot{r}$ i valori di $\dot{t}_{\infty}$ e $\dot{r}_{\infty}$. Il confronto con la (72), permette di ricavare il valore della costante:

$$e^{\lambda}\dot{r}^2 - e^{\nu}\dot{t}^2 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\nu = -1. \tag{75}$$

La precedente equazione, in approssimazione di campo debole, in cui si trascurano i termini di ordine superiore al primo in $\frac{M}{r}$, riduce l'equazione (69) in:

$$\ddot{r} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\right). \tag{76}$$

Dalla (76), risulta evidente che, anche nel caso di particelle relativistiche, la correzione che la temperatura apporta all'accelerazione è data da uno *shift*, costante e dipendente unicamente dall temperatura, del rapporto tra massa gravitazionale e inerziale:

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}$$

che è esattamente il risultato (52) trovato analizzando il caso quantistico. Esiste dunque un'equivalenza tra i due approcci, sebbene essi si concentrino su aspetti diversi. Come affermato nella precedente sezione, nel caso di basse temperature e in approssimazione di campo debole, la violazione è trascurabile rispetto ad altri meccanismi che deviano dalla legge di Newton.

3.5 Applicazione a una generica metrica diagonale

Si prenda in considerazione il caso più generale di una metrica diagonale espressa in coordinate sferiche [14]:

$$g_{\mu\nu} = diag\left(A(r), -\frac{1}{B(r)}, -r^2, -r^2\sin^2\theta\right). \tag{77}$$

Le coordinate della tetrade e i simboli di Christoffel non nulli sono dati, in questo caso, da:

$$e^0_{\hat{0}} = (A)^{-\frac{1}{2}}; \qquad e^1_{\hat{1}} = (B)^{\frac{1}{2}}, \tag{78}$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{\partial_r A(r)}{2A(r)}; \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{B(r)}{2}\partial_r A(r); \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{B(r)}{2}\partial_r\left(\frac{1}{B(r)}\right). \tag{79}$$

Assumendo, come in precedenza, che le coordinate angolari siano fisse ($\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$), si ricavano le equazioni per le prime due coordinate:

$$\mu = 0 \qquad \ddot{t} + \dot{r}\dot{t}\frac{\partial_r A}{A} = \frac{2\alpha\pi T^2}{3}\left[-\frac{\dot{r}}{2mE}\frac{\partial_r A}{A^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{E^2}\left(\ddot{t} + \dot{r}\dot{t}\frac{\partial_r A}{2A}\right)\right] \tag{80}$$

$$\mu = 1 \qquad \ddot{r} + \dot{r}^2\frac{B}{2}\partial_r\left(\frac{1}{B}\right) + \dot{t}^2\frac{B\partial_r A}{2} = \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\frac{B}{2}\frac{\partial_r A}{A} \tag{81}$$

che, valendo la relazione $E = m\dot{t}e_0^{\hat{0}} = m\dot{t}\sqrt{A}$, possono essere riscritte come di seguito:

$$\mu = 0 \qquad \left(1 + \frac{2\alpha\pi T^2}{3E^2}\right)\left(\ddot{t} + \dot{r}\dot{t}\frac{\partial_r A}{A}\right) = 0 \tag{82}$$

$$\mu = 1 \qquad \ddot{r} + \frac{B}{2}\left[\dot{t}^2\partial_r A + \dot{r}^2\partial_r\left(\frac{1}{B}\right) - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\frac{\partial_r A}{A}\right] \tag{83}$$

e, naturalmente, queste restituiscono rispettivamente la (67) e la (69) se nella metrica si sostituisce $A = e^{\nu}$ e $B = e^{-\lambda}$.
Dalla (82) è semplice ricavare che:

$$\frac{d}{ds}\left(\log \dot{t}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\log A\right) \tag{84}$$

e dunque:

$$\dot{t} = \frac{1}{A}. \tag{85}$$

Per quanto riguarda la coordinata radiale, si può facilmente riscrivere la (83) in termini di una derivata totale:

$$\frac{B}{2}\frac{d}{dr}\left[\frac{\dot{r}^2}{B} - \dot{t}^2 A - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\log A\right] = 0 \tag{86}$$

Assumendo la stessa condizione di normalizzazione usata nel caso particolare di Schwarzschild, la precedente equazione ha come soluzione:

$$\frac{\dot{r}^2}{B} - \dot{t}^2 A - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\log A = -1 \tag{87}$$

che, evidentemente, rappresenta la generalizzazione della (75) e può essere riscritta come:

$$\dot{r}^2 = B\left(\frac{1}{A} + \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\log(A) - 1\right). \tag{88}$$

Quest'ultima espressione, insieme alla (85), può essere sostituita nella (83) per ottenere:

$$\ddot{r} = -\frac{B}{2}\left[\frac{\partial_r A}{A^2} - \left(\frac{1}{A} - 1\right)\frac{\partial_r B}{B} - \frac{2\alpha\pi T^2}{3m^2}\left(\frac{\partial_r A}{A} + \frac{\log(A)\partial_r B}{B}\right)\right] \tag{89}$$

L'equazione (89) può essere applicata a qualunque tensore metrico che sia diagonale.

4 Test di precisione del Principio di Equivalenza

A partire dalle considerazioni effettuate nella Sezione precedente, risulta di particolare interesse analizzare la possibilità di una violazione del Principio di Equivalenza Debole dal punto di vista sperimentale. Per quanto affermato in precedenza, la violazione espressa nella (52) potrebbe essere trascurabile a temperature accessibili: essa è $\sim 10^{-17}$ per temperature dell'ordine di $300K$. Comparando questo risultato con quelli di esperimenti di precisione, valutandone accuratamente gli intervalli di confidenza, si potrebbe discriminare sulla possibilità di una violazione.

Il Principio di Equivalenza è legato con il concetto di Universalità della Caduta Libera: la linea di mondo di un corpo di prova in caduta libera è indipendente dalla sua struttura o composizione [6]. I test sperimentali del Principio di Equivalenza Debole sfruttano la proprietà delle masse di cadere con uguale accelerazione quando soggette a un campo gravitazionale. Nel caso di un'eventuale violazione del Principio in forma debole, si avrebbe che la massa inerziale m_i di un corpo differisca dalla massa gravitazionale m_g, e che l'accelerazione dello stesso sia data da [7]:

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i}\mathbf{g}. \tag{90}$$

Tipicamente, gli esperimenti si soffermano sulla ricerca di un limite superiore per il *parametro di Eötvös*:

$$\eta = 2\left|\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right| = 2\left|\frac{m_{g_1}/m_{i_1} - m_{g_2}/m_{i_2}}{m_{g_1}/m_{i_1} + m_{g_2}/m_{i_2}}\right| \tag{91}$$

in cui a_1 e a_2 sono le accelerazioni di due masse differenti in composizione. Assumendo la validità del Principio di Equivalenza Debole, questo parametro è da considerarsi nullo a meno di incertezze sperimentali: la possibilità di realizzare "esperimenti nulli" offre generalmente un grado di precisione superiore rispetto a esperimenti che misurino quantità non nulle [17]. Per questo motivo, il Principio di Equivalenza Debole è stato testato sperimentalmente con altissima precisione.

Esiste una vasta gamma di esperimenti atti alla verifica dell'Universalità della Caduta Libera: a partire dalle prime osservazioni di masse in caduta libera effettuati da Filofono nel VI secolo [18], e al confronto dei periodi di pendoli semplici operato da Galileo e Newton, l'obiettivo è stato quello di migliorare l'accuratezza delle misure. Ciò ha dato vita a una serie di test di precisione, che sfruttano le diverse declinazioni della Universalità della Caduta Libera:

- *Esperimenti con masse macroscopiche* - Le masse prese in considerazione possono essere sospese o in caduta libera. Nel primo caso, approfondito in questa Sezione, il vantaggio principale è dato dalla possibilità di un lungo tempo di osservazione e di una maggiore modulazione degli errori sistematici e delle perturbazioni esterne; nel secondo, in cui il tempo di osservazione è necessariamente ridotto, si può registrare un segnale decisamente maggiore in quanto proporzionale all'accelerazione gravitazionale [7]. Negli ultimi anni, si è sviluppata l'opportunità di svolgere esperimenti con masse in caduta libera nello spazio, attraverso l'utilizzo di appositi satelliti. A questa classe di esperimenti appartiene il test che ha fornito il risultato più accurato: nell'esperimento MICROSCOPE, che ha raccolto dati dalle orbite di un satellite, effettuate tra il 2016 e il 2018, si è giunti a una stima del parametro di Eötvös pari a $\eta = (1 \pm 18) \times 10^{-15}$ [7].;

- *Lunar Laser Ranging (LLR)*- Sono esperimenti che si basano sulla misura della distanza Terra-Luna attraverso i tempi di andata e ritorno di segnali laser. Essi sono stati svolti a partire dal posizionamento di riflettori cubici sulla superficie lunare nel 1969 [7]. Essendo entrambi i corpi celesti costantemente in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, un'eventuale violazione dell'Universalità della Caduta Libera risulterebbe in una modulazione della distanza misurata;

- *Esperimenti con particelle microscopiche* - Sono una rivisitazione dei test classici con masse macroscopiche, a cui viene applicata l'interferometria atomica con l'obiettivo di migliorare l'accuratezza delle misure. Nonostante ciò, essi non hanno ancora raggiunto una precisione paragonabile agli equivalenti test classici. I principali vantaggi di questo metodo sono dati, oltre che dalla possibilità di ridurre notevolmente gli apparati, dalla conoscenza diretta delle proprietà atomiche delle particelle osservate [7].

4.1 Esperimenti con masse sospese: la bilancia a torsione

La classe più primitiva di test effettuati con masse sospese prevede l'utilizzo di pendoli semplici a cui sono applicate masse di differente composizione: questo tipo di esperimento venne effettuato da Galileo, che, avendo per primo ipotizzato la possibilità di Universalità della Caduta Libera, la testò osservando l'oscillazione di due masse, una di piombo e una di sughero, sospese a fili di uguale lunghezza, traendo come conclusione che *"come la grave va talmente sotto il passo della leggiera, che né in ben cento vibrazioni, né in mille, anticipa il tempo d'un minimo momento, ma*

camminano con passo egualissimo" [1]. L'esperimento fu effettuato con accuratezza pari a 10^{-3}, successivamente raggiunta anche da Newton [2]. Con il miglioramento degli apparati sperimentali, calibrando la lunghezza del pendolo ed effettuando le misure su diversi materiali, gli esperimenti con pendoli semplici hanno testato la validità del Principio di Equivalenza Debole con accuratezza pari a 3×10^{-6}, raggiunta da H. H. Potter, sfruttando materiali radioattivi [19].

Il prototipo di test più preciso è quello che prevede l'utilizzo di una *bilancia a torsione* e fu ideato da Eötvös alla fine del XIX secolo: in questo, due masse di diversa composizione sono sospese ai capi di un'asta rigida di lunghezza l, sospesa a sua volta orizzontalmente tramite un filo sottile. La rotazione della bilancia può essere osservata, tramite un telescopio, attraverso la luce riflessa da uno specchio posto sull'asta. Peculiarità di questo apparato, utilizzato per la prima volta in ambito gravimetrico da Cavendish, è che la torsione della bilancia dipenda dalla differenza nella direzione di forze esterne sui due corpi e non sull'intensità delle stesse [20]. Ciascuno dei due corpi, infatti, subisce l'azione di due forze: la forza centrifuga, determinata dalla massa inerziale, e l'attrazione gravitazionale verso la Terra, soggetta alla massa gravitazionale.

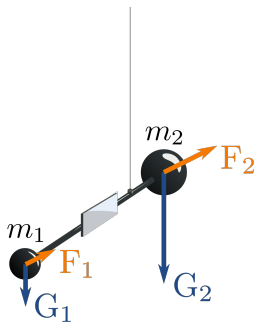

Figura 1: Bilancia a torsione

Nel caso di una violazione del Principio di Equivalenza Debole, l'ineguaglianza delle due masse causerebbe una dipendenza della risultante delle due forze (*gravità apparente*) dalle caratteristiche del corpo [21]. La differenza di accelerazione gravitazionale sui due corpi causerebbe una rotazione della bilancia a torsione, imponendo un momento torcente sul filo pari a [22]:

$$|\mathbf{N}| = \eta l (\mathbf{g} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \tag{92}$$

in cui $\mathbf{k}$ e $\mathbf{i}$ sono rispettivamente i versori lungo le direzioni del filo e dell'asta.

Le maggiori limitazioni a questo tipo di esperimento sono causate da: l'intensità ridotta del segnale, essendo l'accelerazione centrifuga causata dalla rotazione terrestre dell'ordine di pochi mm, e il fatto che una potenziale violazione restituirebbe un segnale continuo [7], difficilmente distinguibile dai possibili effetti mareali di un'eventuale disomogeneità del campo a cui sono soggetti i due corpi, non essendo questi concentrici.

Per ovviare a questa difficoltà è sufficiente ruotare la bilancia di 180°, in modo da cambiare il segno del momento torcente dato dalla violazione, lasciando inalterato quello dovuto ai gradienti del campo gravitazionale. Ponendo, dunque, il sistema in rotazione con frequenza ν_s, generando un segnale alternato, il segnale dato dalla violazione apparirebbe a frequenza ν_s, mentre quello dato dai gradienti avrebbe frequenza $2\nu_s$ [17]. La rotazione può essere ottenuta in due modi: calibrando la bilancia sul campo gravitazionale del Sole in equilibrio con l'inerzia della terra in rotazione, modulando il segnale in un periodo di $24h$, oppure ruotando attivamente il sistema. Effettuando esperimenti nel campo del Sole, la modulazione naturale della frequenza previene la presenza di errori sistematici e rumori dati dalla rotazione meccanica, ma allo stesso tempo il segnale risulta notevolmente ridotto, mentre la rotazione diretta, fornendo un'elevata modulazione del segnale, permette di rimuovere rumori a bassa frequenza ed errori sistematici [7].

La bilancia a torsione di Dicke è stata la prima nel campo gravitazionale del Sole, concludendo con il 95% di confidenza che $\eta(Au, Al) < 3 \times 10^{-11}$ [23]. Una variante dell'esperimento consiste nel sostituire la fibra di torsione con una cosiddetta *fibra fluida*: l'idea nasce dalla necessità di utilizzare masse considerevoli per ottenere un altrettanto grande momento torcente, migliorando la sensibilità dell'apparato. In questa situazione, però, dovrebbe essere utilizzato un filo di diametro molto maggiore per sostenere i corpi, riducendone notevolmente la possibilità di torsione [24]. L'apparato è quindi costituito da due corpi metallici cavi, posti in galleggiamento su dei fluidi, la cui posizione è monitorata da un sistema elettrostatico [7]. Dai primi tentativi effettuati con il nuovo metodo, il Principio di Equivalenza Debole è stato testato giungendo a un'accuratezza di 10^{-11}. Nonostante questo non fosse migliore dei risultati ottenuti con metodi classici, è sembrato molto promettente in quanto derivato da un apparato mai utilizzato in precedenza: si è supposto che la potenziale accuratezza di questo metodo si aggiri intorno a 10^{-14} [24].

Alla data odierna, i migliori risultati in laboratorio sono stati ottenuti negli

esperimenti *Eöt-Wash*, del gruppo di E. Adelberger all'Università di Washington [25]: nel 2008 il Principio di Equivalenza Debole è stato testato con $\eta = (0,3 \pm 1.8) \times 10^{-13}$ nel campo terrestre [20] e poi ripetuto con la stessa accuratezza nel campo del Sole.

Conclusioni

Il Principio di Equivalenza, nella sua forma più debole, costituisce le fondamenta per la costruzione di una teoria metrica di gravità: affermando l'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo, ha come diretta conseguenza l'impossibilità di distinguere l'accelerazione gravitazionale da quella generata da forze esterne. L'interpretazione einsteiniana del Principio prevede di potere, in ogni caso, definire un sistema di coordinate "localmente inerziali" in cui si considerino valide le leggi non-gravitazionali della Relatività Speciale. L'inclusione delle interazioni gravitazionali nella sua formulazione ne prevede una generalizzazione, il Principio di Equivalenza in forma forte, unicamente compatibile con la teoria della Relatività Generale.

Dall'analogia con gli assiomi della geometria non euclidea, Einstein costruì la Relatività Generale come prima teoria geometrica di gravità: in questa, lo spazio e il tempo sono variabili dinamiche unite in una varietà differenziabile tetradimensionale su cui la metrica g, espressione del potenziale gravitazionale, definisce contemporaneamente la struttura causale e geodetica. Tale peculiarità, legata direttamente al Principio di Equivalenza, è conseguenza della scelta della connessione di Levi-Civita che, rappresentando la forza gravitazionale come entità non tensoriale, ne permette localmente l'annullamento.

La validità del Principio di Equivalenza può essere discriminante nell'ottica della formulazione di una teoria unificante delle interazioni fondamentali, che pone la necessità di esprimere le proprietà del campo gravitazionale in un paradigma quantistico. Nel processo, il problema fondamentale è dovuto all'inesistenza di una geometria a priori per lo spaziotempo, essendo questo definito localmente dalle equazioni di campo. Tale caratteristica non si accorda con la ridefinizione, in Meccanica Quantistica, del concetto di particella: questa viene rappresentata da un pacchetto d'onda, ossia un'onda delocalizzata la cui posizione nello spaziotempo viene descritta probabilisticamente dalla funzione $\psi(x,t)$. L'impossibilità di definire una traiettoria, secondo il Principio di Indeterminazione, non permette la costruzione di una metrica e di un concetto di causalità. Risulta quindi di grande interesse, ai fini della formulazione di una teoria quantistica di gravità, investigare circa la validità del Principio di Equivalenza in ambito quantistico.

In particolare, la possibilità di una violazione, e dunque di un'ineguaglianza

tra massa inerziale e gravitazionale di una particella, è stata trattata in condizioni di temperatura finita. Ponendo il sistema in equilibrio con un bagno termico, si è mostrato come, a partire dall'aggiunta di correzioni radiative al computo energetico e operando con opportune trasformazioni relativistiche, si generino contributi aggiuntivi ai termini di massa dipendenti quadraticamente dalla temperatura e risultanti in una violazione del Principio in forma debole. Questa scaturisce dalla perdita dell'invarianza di Lorentz, conseguenza dell'identificazione del bagno termostatico come sistema di riferimento privilegiato. Tale aspetto è stato quindi approfondito dal punto di vista geodetico attraverso la ridefinizione del tensore energia-impulso: questo metodo, applicato a un sistema a simmetria sferica, ha restituito un risultato equivalente nel rapporto tra le due masse. La violazione ottenuta è stata stimata, per temperature accessibili, nell'ordine di 10^{-17}. Le teorie a temperatura finita, quindi, potrebbero rappresentare una buona base di partenza per testare il Principio di Equivalenza Debole a livello quantistico.

Per valutare l'eventualità che la violazione possa essere verificata sperimentalmente è necessario prendere in considerazione le principali caratteristiche e i risultati dei test di precisione del Principio di Equivalenza Debole. Dalla valutazione di questi ultimi risulta che, almeno ai tempi attuali, non si disponga di apparati sperimentali adeguati al fine di rivelare una violazione dell'ordine considerato. Il risultato più preciso ottenuto alla data odierna, infatti, è scaturito dai dati raccolti dall'esperimento MICROSCOPE e ha restituito un valore per il parametro di Eötvös pari a $\eta = (1 \pm 18) \times 10^{-15}$. Attualmente, dunque, non si è in grado di garantire un livello di accuratezza tale da verificare sperimentalmente la validità del Principio di Equivalenza Debole a un ordine di 10^{-17}, lasciando la questione aperta alla possibilità di una violazione. Di conseguenza, è di grande interesse la ricerca di metodi sperimentali innovativi di elevata precisione in cui la violazione prevista si possa manifestare, aprendo la strada a una serie di nuove teorie di gravità, ma più in generale, a una nuova visione dell'universo.

Bibliografia

[1] G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali, L. Elzeviro Ed. (1638) Leiden.

[2] I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Royal Society (1687) London.

[3] S. Capozziello, G. Lambiase, Open problems in gravitational physics, Frascati Physics Series, 58 (2014).

[4] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons (1972) New York.

[5] A. Einstein, The Meaning of Relativity, Routledge (2003) London.

[6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Company (1973) San Francisco.

[7] G. M. Tino, L. Cacciapuoti, S. Capozziello, G. Lambiase, F. Sorrentino, Precision Gravity Tests and the Einstein Equivalence Principle, Progress in Particle and Nuclear Physics, 112 (2020), 205.

[8] E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie, Annalen der Physik, 53 (1917), 575.

[9] A. Einstein, Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Phys. 55 (1918), 241.

[10] J. D. Norton, General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute, Rep. Prog. Phys. 56 (1993), 791.

[11] G. Ricci, T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Mathematische Annalen (in French), 54 (1900), 125.

[12] J. F. Donoghue, B. R. Holstein, R. W. Robinett, The Principle of Equivalence at Finite Temperature, Gen. Rel. Grav. 17 (1985), 207.

[13] L. M. Foldy, S. A. Wouthuysen, On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit, Phys. Rev. 78 (1950), 29.

[14] M. Blasone, S. Capozziello, G. Lambiase, L. Petruzziello, Equivalence principle violation at finite temperature in scalar-tensor gravity, The European Physical Journal Plus, 134 (2019).

[15] A. Papapetrou, Spinning test-particles in general relativity. I, Royal Society, 209 (1951), 248.

[16] M. Gasperini, Gravitational acceleration of relativistic particles at finite temperature, Phys. Rev. D, 36 (1987), 617.

[17] A. M. Nobili, A. Anselmi, Relevance of the weak equivalence principle and experiments to test it: lessons from the past and improvements expected in space, Physics Letters A, 382 (2018), 2205.

[18] A. Nobili, A. Anselmi, Relevance of the weak equivalence principle and experiments to test it: lessons from the past and improvements expected in space, Physics Letters A, 382 (2018), 2205.

[19] H. H. Potter, Some experiments on the proportionality of mass and weight, Royal Society, 104 (1923), 588.

[20] T. A. Wagner, S. Schlamminger, J. H. Gundlach, E. G. Adelberger, Torsion-balance tests of the weak equivalence principle, Classical and Quantum Gravity, 29 (2012).

[21] A. Einstein, Zum Relativitätsproblem, Scientia, 15 (1914).

[22] R. D'Inverno, Introducing Einstein's Relativity, Oxford University Press (1992) Oxford.

[23] P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, The equivalence of inertial and passive gravitational mass, Annals of Physics, 23 (1964), 442.

[24] J. E. Faller, G. M. Kaiser, P. Keyser, The Fluid-Fiber Based Torsion Pendulum: An Alternative to Simply Getting a Bigger Hammer, Precision Measurement and Gravity Experiment (1983), 557.

[25] A. Nobili, Precise gravitation measurements on Earth and in space: Tests of the Equivalence Principle, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", 146 (2001), 609.