

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Il problema della Bouncing Cosmology e le sue
applicazioni**

Relatore:
Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:
Antonio Viscusi
Matr. N85001200

Anno Accademico 2019/2020

*I had a dream, which was not all a dream.
The bright sun was extinguish'd, and the stars
Did wander darkling in the eternal space,
Swung blind and blackening in the moonless air;
Morn came and went — and came, and brought no day...
—Lord Byron, *Darkness**

Indice

Introduzione	ii
1 La formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale	1
1.1 L'azione di Hilbert-Einstein nel formalismo hamiltoniano	1
1.2 La Quantizzazione Canonica	6
1.3 Come interpretare la funzione d'onda dell'Universo?	8
2 Come la Gravità Quantistica affronta il problema dell'Universo Ini- ziale	11
2.1 Limite semiclassico e approssimazione WKB	11
2.2 Il minisuperspazio	13
2.3 Un modello di minisuperspazio	15
2.3.1 La derivazione dell'Equazione di Friedmann	15
2.3.2 Modello di Universo in espansione	17
3 La Cosmologia Big Bounce in un Universo di Bianchi	20
3.1 Gli Universi di Bianchi	21
3.2 Lo studio della dinamica della Cosmologia Quantistica nel modello di Universo di Bianchi I	23
3.3 Il limite semiclassico e il confronto con l'andamento quantistico	27
3.4 L'Universo di Bianchi IX	33
3.5 L'interpretazione del Big Bounce	34
4 Conclusioni	37

Introduzione

Le teorie fondamentali della Fisica formulate nel ventesimo secolo sono la Meccanica Quantistica, adatta a spiegare gli aspetti microscopici del mondo fisico, e la Relatività Generale, adatta a studiare le strutture astrofisiche e cosmologiche.

In questa tesi si considerano le condizioni iniziali dell'Universo, in vista di una formulazione quantistica della cosmologia.

È infatti noto che una descrizione relativistica dell'Universo perde di significato negli istanti immediatamente successivi alla sua "nascita".

Il problema fondamentale è cercare di formulare tramite le leggi della Meccanica Quantistica i concetti di spazio e tempo, ma ad oggi tutti i tentativi rivolti a formulare una teoria definitiva della Gravità Quantistica sembrano non aver avuto successo. Partendo da questo punto di vista si sono formulati degli schemi effettivi volti ad indagare le condizioni iniziali da cui è emerso l'Universo osservato.

Lo scopo di questo lavoro è studiare alcuni modelli cosmologici che si ottengono applicando degli schemi di quantizzazione ai sistemi dinamici che descrivono universi. Si studierà infine un modello dell'Universo in cui opportune grandezze determineranno un comportamento oscillante, portando le dimensioni spaziali del cosmo ad aumentare nel primo periodo e a diminuire fino a raggiungere una "nuova singolarità" nel periodo finale, sostenendo quindi la struttura di un Universo ciclico, in cui ogni singolarità finale è la singolarità iniziale di un nuovo cosmo.

Il lavoro è organizzato in quattro Capitoli: nei primi due si introducono la base matematica e le motivazioni fisiche necessarie per lo studio scelto, ottenendo la struttura matematica e l'equazione fondamentale per il modello cosmologico che si desidera considerare; nel terzo si studia il modello di Universo desiderato ottenendo e interpretando i risultati, che si espongono infine nel Capitolo finale.

Capitolo 1

La formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale

Introduzione

In questo Capitolo si introdurrà la struttura matematica e le motivazioni fisiche utili per ottenere una funzione d'onda che renda possibile studiare l'Universo nei suoi istanti iniziali come un oggetto quantistico. Il Capitolo inizia introducendo brevemente la formulazione hamiltoniana della Relatività Generale, facendo uso del formalismo Arnowitt-Deser-Moser (ADM), che permette di avere a disposizione una struttura spaziale su cui studiare le grandezze dinamiche; si passa poi a definire suddette grandezze dinamiche, utili per procedere alla quantizzazione canonica, ottenendo inoltre l'equazione di Wheeler-DeWitt e la sua soluzione, che avrà il ruolo di funzionale d'onda dell'Universo. Nella sezione finale si interpreterà il risultato del funzionale di Wheeler-DeWitt, alla luce del significato che si desidera ottenere, in modo da poterlo trattare come un oggetto matematico che descrive un Universo fisicamente osservabile.

1.1 L'azione di Hilbert-Einstein nel formalismo hamiltoniano

Si noti inizialmente che la Relatività Generale sviluppata in formalismo lagrangiano è una teoria di campo covariante a vista, il cui campo fondamentale è il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, e in cui la varietà considerata ha dimensione 4.

La formulazione hamiltoniana invece prevede una decomposizione 3+1 della metrica, in cui i gradi di libertà dinamici sono le (tre) componenti spaziali: per andare avanti nello studio, si applica il formalismo ADM.

Si fissi una topologia nello spazio-tempo, $\mathbb{R} \times V^3$, dove V^3 è una varietà compatta, e sia X^α un sistema di coordinate, con $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Si definisce ora il fogliettamento per le (iper)superfici tridimensionali di tipo spazio di topologia V^3 .

Se si definisce una trasformazione di coordinate come [1]

$$X^\alpha = X^\alpha(x^0, x^i) \quad (1.1)$$

si ottiene una famiglia diipersuperfici (che d'ora in avanti si diranno semplicemente superfici) in cui la coordinata x^0 è la coordinata temporale, e le x^i sono (una scelta di) coordinate locali su ogni superficie. Ovvero ogni scelta di x^0 "blocca temporalmente" una superficie di tipo spazio, e il variare di x^0 restituisce il fogliettamento. Le superfici sono i "fogli".

Ora, su ogni superficie (bloccato x^0 , dunque) si può scegliere un punto arbitrario e da lì definire i vettori di base tangenti alla superficie, X^α , e il versore normale alla stessa, n^α , che per come sono definiti soddisfano le condizioni

$$g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu} n_i^\mu n^\nu = -1 \quad (1.2)$$

si definisce ora il vettore di deformazione

$$N^\alpha \equiv \dot{X}^\alpha = \partial_0 X^\alpha(x^0, x^i), \quad (1.3)$$

che è fondamentale per connettere punti che hanno stesse coordinate spaziali ma afferiscono a diversi valori, x^0 e $x^0 + dx^0$, della componente temporale. Si può ovviamente scrivere questo vettore esplicitando due contributi, usando la base di vettori $\{n^\alpha, X_i^\alpha\}$, e ottenere così il vettore di deformazione

$$N^\alpha \equiv N n^\alpha + N^i X_i^\alpha, \quad (1.4)$$

dove N è detta funzione di *lapse*, che descrive lo spostamento locale alla superficie, e N^i è la funzione di *shift*, che invece descrive lo spostamento tangenziale alla superficie stessa.

Si vuole ora studiare come si comporta un campo arbitrario quando la superficie considerata cambia. Bisogna quindi proiettare il campo in direzione normale e tangenziale rispetto alla superficie. Dovendo soddisfare le equazioni (1.2), l'unica proiezione non banale è quella parallela alla superficie, ovvero

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}(X^\alpha(x^s; x^0)) X_i^\mu X_j^\nu, \quad (1.5)$$

che è una metrica tridimensionale indotta sulla arbitraria superficie, fissato x^0 , dal fogliettamento stesso: descrive cioè la geometria della superficie nelle coordinate locali x^i . Può risciversi usando il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e le n_i ,

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j \quad (1.6)$$

Nel caso in cui il versore normale alla superficie sia del genere tempo, dalle relazioni $n_i = 0, n_0 = 1$ si ha che la (1.6) diventa

$$h_{ij} = g_{ij} \quad (1.7)$$

Inoltre si può scrivere la metrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (1.8)$$

utilizzando le definizioni di h_{ij} , N , N^j e le condizioni

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1 \\ g_{\mu\nu} n^\mu X^\nu = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

nel modo seguente [2]

$$ds^2 = -(N^2 - N^j N_j) dt^2 + 2N^i dx_i dt + h_{ij} dx^i dx^j \quad (1.10)$$

E' così definita la forma ADM della metrica dello spazio tempo.

Il prossimo passo è scrivere l'azione di Hilbert-Einstein utilizzando la metrica (1.10).

L'azione di Hilbert-Einstein nella formulazione lagrangiana consta di due termini integrali: il primo definito in una varietà V di dimensione 4, in cui compare il determinante del tensore metrico e la differenza tra la curvatura scalare $R(g)$ e la costante cosmologica Λ ; e il secondo, definito sulla ipersuperficie compatta ∂V di dimensione 3, in cui compare la traccia del tensore di curvatura estrinseca K e il determinante della metrica indotta sulla varietà tridimensionale.

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_V d^4x \sqrt{-g} [R(g) - 2\Lambda] + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} K \quad (1.11)$$

Nella formulazione hamiltoniana le nuove variabili attraverso cui si esprime la azione sono il vettore di *lapse*, il vettore di *shift* e il tensore metrico h_{ij} (e dove

è evidente la divisione tra le componenti spaziali e quella temporale, secondo il formalismo ADM). L'azione assumerà dunque la forma

$$S(N, N^j, h_{ij}) = \int N dt d^3x \mathcal{L} \quad (1.12)$$

dove la nuova grandezza \mathcal{L} è la densità di lagrangiana data da

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{h}N}{16\pi G_N} (K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R) \quad (1.13)$$

e la grandezza K_{ij} è, con $t = \text{costante}$,

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} (N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij}) \quad (1.14)$$

Inoltre K_{ij} è il tensore di curvatura estrinseca, h è il determinante della metrica (tridimensionale), ${}^{(3)}R$ è la curvatura intrinseca della superficie (tridimensionale). I simboli "·" e "|" descrivono invece la derivata parziale rispetto a t e la derivata covariante rispetto alla metrica h_{ij} .

Studiando la (1.14) si nota che la K_{ij} (la curvatura estrinseca) contiene le derivate temporali di h_{ij} , e le derivate spaziali di N_i , mentre il termine ${}^{(3)}R$, che è la curvatura intrinseca, contiene solo derivate spaziali di h_{ij} . Inoltre, poichè dalla (1.13) si osserva che non compaiono derivate temporali dei vettori di *lapse* e di *shift*, si vede che N e N_i non sono variabili dinamiche. Le variabili dinamiche saranno quindi le h_{ij} .

Definendo i momenti coniugati di N e N_i come

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0 \\ p^i &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}_i} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

si ottengono i cosiddetti "vincoli primari". Per i momenti coniugati a h_{ij} si ha

$$p^{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N} (h^{ij} K - K^{ij}) \quad (1.16)$$

Si può ora cercare la forma hamiltoniana dell'azione esprimendo la (densità di) lagrangiana \mathcal{L} utilizzando la trasformata di Legendre \mathcal{H} e i momenti coniugati p^{ij} , ovvero

$$\mathcal{L} = p_{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{H} \quad (1.17)$$

Si ottiene quindi la azione

$$S(p^{ij}, h_{ij}, N, N^i) = \int dt d^3x (p^{ij} \dot{h}_{ij} - N \mathcal{H}_0 - N^i \mathcal{H}_i) \quad (1.18)$$

dove le nuove grandezze

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &\equiv \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N} (K_{ij} K^{ij} - K^2 - {}^{(3)}R) = \\ &= \frac{16\pi G_N}{2\sqrt{h}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{il} h_{kl}) p^{ij} p^{kl} - \frac{\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G_N} \equiv \\ &\equiv 16\pi G_N G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} - \frac{\sqrt{h} {}^{(3)}R}{16\pi G_N} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\mathcal{H}_i \equiv -\frac{2p^j_{|j}}{16\pi G_N} \quad (1.20)$$

sono definite rispettivamente *superhamiltoniana* e *supermomento*.

Ricordando che i vincoli primari sono sempre validi, si ha che le $\dot{p} = \dot{p}_i = 0$. Dunque le rispettive parentesi di Poisson diventano

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\{H, p\} = \frac{\delta H}{\delta N} = 0 \\ \dot{p}_i &= -\{H, p_i\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

che restituiscono i "vincoli secondari" o "dinamici" [10]

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = 0 \quad (1.22)$$

Queste relazioni sono equivalenti alle Equazioni di Einstein nel vuoto $G_{00} = G_{0i} = 0$ dove

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.23)$$

è il Tensore di Einstein [11].

Le altre equazioni di Einstein G_{ij} , con $i \neq j$, si ottengono sotto forma di equazioni di Hamilton con le grandezze h_{ij} e p_{ij} , ovvero

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ij} &= \frac{\delta H}{\delta p^{ij}} \\ \dot{p}^{ij} &= -\frac{\delta H}{\delta h_{ij}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Queste relazioni contengono tutta la dinamica della geometria: definendo infatti i valori di h_{ij} e p_{ij} come condizioni iniziali, che soddisfino le (1.22) su una superficie del fogliettamento, le soluzioni delle Equazioni di Hamilton (1.24), diverse per ogni superficie scelta al variare di t , sono verificate per tutte le altre superfici. Quello che si fa, dunque, è porre un vincolo (quantistico) agli stati permessi del campo gravitazionale.

1.2 La Quantizzazione Canonica

Si procede ora a trasformare le variabili canoniche "classiche" in operatori che soddisfino le regole di commutazione [3]. Le variabili classiche sono h_{ij} e p_{ij} ; nella rappresentazione di Schrödinger si ha

$$\begin{cases} [\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{p}^{kl}(\mathbf{x}')] = i\delta_{ij}^{kl}\delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ [\hat{h}_{ij}, \hat{h}_{kl}] = 0 \\ [\hat{p}^{ij}, \hat{p}^{kl}] = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V^3) \end{cases} \quad (1.25)$$

dove V^3 è la varietà scelta e $\delta_{ij}^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k)$. Si può ora trasformare il superhamiltoniano e il supermomento \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_i in grandezze quantistiche, in modo da ottenere operatori agenti su un generico stato $|\Psi\rangle$. I vincoli dinamici (1.22) diventano equazioni legate allo stato $|\Psi\rangle$, ovvero [10]

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_0 |\Psi\rangle = 0 \\ \hat{\mathcal{H}}_i |\Psi\rangle = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

che già seleziona tra tutti gli stati possibili quelli fisicamente accettabili.

Si sceglie ora la rappresentazione per gli operatori. Nella rappresentazione *metrica*

si ottiene

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{ij} &= h_{ij} \\
 \hat{p} &= -i \frac{\delta}{\delta N} \\
 \hat{p}^i &= -i \frac{\delta}{\delta N_i} \\
 \hat{p}^{ij} &= -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

In questo modo la $|\Psi\rangle$ diventa una funzione delle h_{ij} , quindi la si potrà riscrivere come $\Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]$, il che restituisce una descrizione del campo gravitazionale come vettore dello spazio delle configurazioni della metrica.

Si può notare dalle precedenti equazioni che le grandezze \hat{h}_{ij} e \hat{p}^{ij} non commutano, inoltre, le equazioni (1.26) non dipendono dal tempo: sembrano descrivere dunque modelli di universi *stazionari*, in contrasto con i risultati delle osservazioni. Questa caratteristica della teoria era già stata osservata da DeWitt [3], che aveva proposto, al fine di "recuperare" il ruolo del tempo come variabile anche dopo aver effettuato la quantizzazione, di considerare le grandezze h_{ij} come già contenenti la variabile temporale.

Ora, utilizzando la definizione classica della superhamiltoniana (1.19), il suo corrispettivo quantistico, e la prima delle (1.26), si ottiene l'equazione vincolare nella rappresentazione metrica (o di Schrödinger)

$$[16\pi G_N \nabla^2 + \frac{\sqrt{h}^{(3)} R}{16\pi G_N}] \Psi[h_{ij}] = 0 \tag{1.28}$$

dove

$$\nabla^2 \equiv G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \gamma_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \tag{1.29}$$

è la nuova forma del Laplaciano.

In modo analogo si costruisce l'equazione vincolare per il supermomento.

$$2i h_{km} D_l \frac{\delta \Psi[h_{ij}]}{\delta h_{kl}} = 0 \tag{1.30}$$

Il coefficiente γ_{ij} che compare all'interno della (1.29) dipende da come si ordinano i fattori del commutatore tra le variabili dinamiche (cosa che in linea di principio si può fare in modo arbitrario), mentre la grandezza D_l che compare nella (1.30) è la derivata covariante della metrica tridimensionale h_{ij} .

L'equazione (1.28) è detta *Equazione di Wheeler-DeWitt* e la sua soluzione,

$\Psi[h_{ij}]$, prende il nome di funzionale d'onda dell'Universo (a meno di opportune condizioni al contorno). Sarà dunque questa l'equazione da studiare per una descrizione quantistica dell'Universo.

Si introduce, per concludere la sezione, il concetto di *spazio superspazio*, definito come lo spazio delle configurazioni: si introduce come lo spazio di tutte le possibili metriche tridimensionali, $\mathcal{R} = \text{Riem}(V^3)$, a meno dei loro diffeomorfismi, $\text{Diff}(V^3)$. Il superspazio è definito come $\mathcal{S} = \mathcal{R}/\text{Diff}(V^3)$, e ha una struttura matematica infinito-dimensionale ($6 \times \infty^3$).

L'Equazione di Wheeler-DeWitt implementa la dinamica (quantistica) poichè quando si fissa il tempo, che è uno dei gradi di libertà della metrica locale, si identifica una superficie rispetto alla geometria quadridimensionale, e facendo ciò si specifica come si propaga la funzione d'onda tra una ipersuperficie e l'altra. Ed è proprio questa propagazione "nel tempo" che rappresenta la dinamica.

1.3 Come interpretare la funzione d'onda dell'Universo?

Una interpretazione della funzione d'onda dell'Universo potrebbe partire, ad una prima analisi, da una analogia con l'interpretazione della funzione d'onda dell'Equazione di Schrödinger della Meccanica Quantistica "ordinaria" [4], in cui, definite Ψ_1 e Ψ_2 due soluzioni dell'Equazione di Schrödinger, la grandezza

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \int d^3x \Psi_1 \Psi_2, \quad (1.31)$$

che ha la proprietà di essere definita positiva ($(\Psi, \Psi) \geq 0$), descrive la probabilità di individuare la particella nel suo spazio delle configurazioni da parte di un osservatore esterno, che "prepara" il sistema in un determinato stato iniziale, e almeno concettualmente è in grado di ripetere l'osservazione.

Questa interpretazione della probabilità nella Meccanica Quantistica ordinaria incontra un problema concettuale quando si applica al caso cosmologico che si desidera studiare: la funzione d'onda in esame descrive la totalità dell'Universo, che per definizione contiene tutto ciò che è osservabile. Dunque non è possibile definire un osservatore *esterno* che applichi la definizione di probabilità della Meccanica Quantistica ordinaria. L'Universo non interagisce con nessun apparato classico che potrebbe ospitare un osservatore perché non *esiste* alcun apparato fisico al di fuori dell'Universo.

C'è dunque bisogno di una nuova interpretazione della probabilità che soddisfi le condizioni del caso cosmologico.

Si vedranno quindi in breve alcune interpretazioni alternative a quella di Copena-

ghen [4], che è l'interpretazione più storicamente legata alla Meccanica Quantistica "ordinaria", sviluppata nella sua formulazione fondamentale da Bohr e Heisenberg. Si accennerà alla Teoria dei Molti Mondi, proposta dallo stesso Wheeler insieme con Everett; alla interpretazione di Hartle, a quella di Hawking e infine a quella di Vilenkin.

Si descriverà innanzitutto la Interpretazione di Copenaghen: secondo questa visione bisogna distinguere i processi quantistici da quelli "classici". Sia $|\Psi\rangle^S$ la funzione d'onda corrispondente a un sistema S , che si può esprimere come una sovrapposizione lineare di un insieme completo di autostati di un osservabile A , ovvero

$$|\Psi\rangle^S = \sum_m a_m |\Psi\rangle_m^S. \quad (1.32)$$

Sia invece $|\Psi\rangle^A$ la funzione d'onda che corrisponde a un sistema di misura A nel suo stato iniziale.

Quando i due sistemi interagiscono, l'interpretazione di Copenaghen assume che il risultato della misura, il processo di *osservare* per definire la misura dell'esperimento, porti al collasso della funzione d'onda in un autostato, descritto come

$$|\Psi\rangle_m^S |\Psi\rangle^A [A_m], \quad (1.33)$$

dove si ottiene il valore A_m con una probabilità $P_m = |a_m|^2$.

Secondo l'interpretazione dei Molti Mondi [5], a differenza della versione di Copenaghen, non si distingue tra i processi squisitamente quantistici e i processi classici: si suppone che esista una sovrapposizione che esprime simultaneamente tutti i risultati degli esperimenti eseguiti in differenti universi, e che ad ogni universo (e al risultato dell'esperimento eseguito al suo interno) corrisponda uno dei termini della sovrapposizione. La sovrapposizione sarà del tipo

$$\sum_m a_m |\Psi\rangle_m^S |\Psi^A[A_m]\rangle \quad (1.34)$$

che appunto descrive contemporaneamente un insieme di esperimenti. In termini differenti, si può affermare che ogni universo è una copia in cui il sistema è effettivamente in uno stato $|\Psi_m^S\rangle$. Si ottiene così di nuovo il risultato dell'interpretazione "standard" nel caso in cui si colleghi la definizione di $|a_m|^2$ al numero di universi in cui l'esperimento ottiene quel risultato.

In un "universo" tipico, in cui l'esperimento su un sistema può risultare in infiniti modi (ovvero, in questa interpretazione, ci sono $N \rightarrow \infty$ universi in cui si può effettuare l'esperimento), $|a_m|^2$ definisce la probabilità che un sistema di misura indichi l'autovalore A_m dell'osservabile nello stato $|\Psi\rangle$.

Questa interpretazione della Meccanica Quantistica sembra quindi essere in accordo con il concetto della funzione d'onda dell'Universo. Il problema principale, di matrice filosofica, è costituito dall'impossibilità di *avere esperienza* di mondi differenti dal nostro Universo.

Per la teoria di Hawking che si discosta dalla teoria dei "Molti Mondi" [7] si parte da un Universo considerato come un sistema "unico", in cui lo stato di un suo sottosistema si definisce solo in relazione al resto dell'Universo. Il significato di probabilità è diverso sia dalla versione di Copenaghen che da quella dei Molti Mondi: la probabilità può prevedere solo se, nel caso avvenga un evento A, un evento B accada o meno.

La Teoria di Hartle [6] propone invece un criterio di interpretazione della funzione d'onda come di "correlazione" tra le variabili dinamiche dell'Universo. In questa interpretazione, i picchi di $|\Psi|^2$ indicano proprio queste correlazioni.

L'ultima teoria trattata, di Vilenkin [8], prevede una interpretazione della densità di corrente "di probabilità", definita per la Meccanica Quantistica ordinaria come [4]

$$\mathbf{J} \equiv \frac{i}{2}(\Psi_1^* \nabla \Psi_2 - \Psi_2^* \nabla \Psi_1) \quad (1.35)$$

che porta a una definizione di probabilità non necessariamente positiva ovunque. Considerando non una soluzione arbitraria dell'Equazione di Wheeler-DeWitt, ma una soluzione ai bordi del superspazio, si ottiene una misura della probabilità, definita positiva, data da

$$dP = \mathbf{J} \cdot \mathcal{D}[\Sigma], \quad (1.36)$$

dove $\mathcal{D}[\Sigma]$ è un vettore normale alla superficie del superspazio.

Tra tutte le interpretazioni del funzionale d'onda dell'Universo, si è interessati in questo lavoro a conservare un limite (che si dirà classico) in cui torni la definizione di probabilità della Meccanica Quantistica ordinaria.

Sarà questo il punto di partenza del Capitolo successivo.

Capitolo 2

Come la Gravità Quantistica affronta il problema dell'Universo Iniziale

Introduzione

In questo Capitolo si studierà il limite semiclassico della Meccanica Quantistica con cui si cercherà di recuperare una definizione applicabile della funzione d'onda dell'Universo Ψ .

Si parlerà inoltre del ruolo del tempo all'interno della teoria della Gravità Quantistica e della Equazione di Wheeler-DeWitt, e di come una opportuna scelta di superspazio consenta di accordare la Cosmologia Quantistica alle condizioni iniziali dell'Universo.

Il Capitolo inizia studiando il limite semiclassico della Teoria per poter definire quando e come lo spazio-tempo "classico" entri nella teoria della Cosmologia Quantistica; nella sezione successiva si studierà una restrizione del superspazio (definita come *minisuperspazio*), in cui si semplifica il formalismo dell'Equazione di Wheeler-DeWitt, che nel superspazio infinito-dimensionale risulta difficile da trattare; e infine si studierà un modello di minisuperspazio per un universo omogeneo e isotropo e con un campo scalare massivo omogeneo, interpretando il risultato di Universo che si otterrà.

2.1 Limite semiclassico e approssimazione WKB

Un problema concettuale affligge la definizione del tempo nella teoria della Gravità Quantistica. Riprendendo infatti il formalismo ADM, in cui si è operato il fogliettamento definendo la (iper)superficie tridimensionale a un istante di tempo

fissato, non si può però identificare una superficie fondamentale, da cui "far partire" l'evoluzione dinamica che è poi ciò che unisce, come già detto, due superfici successive.

Il motivo per cui il limite semiclassico all'interno della teoria della gravità quantistica ha un ruolo importante è la natura delle osservazioni, che essendo effettuate nell'Universo attuale, prevedono un Universo necessariamente classico.

Ed è proprio in questo limite che si cerca di dare una definizione consistente del tempo.

Si parte dall'Equazione di Wheeler-DeWitt (e si riporta la utile posizione

$\frac{1}{m_p^2} = 16\pi G_N \approx 3.35 \cdot 10^{-9} \frac{Nm^2}{kg^2}$) scritta nel modo seguente,

$$\left(\frac{1}{m_p^2}\nabla^2 - m_p^2 U\right)\Psi[h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = 0 \quad (2.1)$$

Si riporta inoltre la forma della funzione d'onda, utilizzando il nuovo parametro $\frac{1}{m_p^2}$,

$$\Psi[h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = e^{im_p^2 S} \quad (2.2)$$

dove S , l'azione, si scrive come

$$S \equiv S_0 + m_p^{-2} S_1 + O(m_p^{-4}) \quad (2.3)$$

All'ordine più basso dell'approssimazione Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [9] si ottiene

$$\Psi \approx e^{im_p^2 S_0} \quad (2.4)$$

dove S_0 è reale e rappresenta la fase dei modi oscillanti di Ψ .

La funzione d'onda avrà i suoi picchi attorno alle regioni dello spazio delle fasi che soddisfano le equazioni

$$p^{ij} = m_p^2 \frac{\partial S_0}{\partial h_{ij}}, \quad p^\phi = m_p^2 \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \quad (2.5)$$

dove p^{ij} e p^ϕ sono i momenti coniugati di h^{ij} e ϕ . Si dimostra che le (2.5) sono un integrale primo per le equazioni di campo classiche, e sono quindi un insieme di soluzioni.

Si vuole ora dare attenzione al problema delle condizioni iniziali.

Preso una funzione S_0 , se ci sono n parametri per le soluzioni (2.5), la soluzione generale delle equazioni di campo avrà dimensione $2n-1$. Imponendo poi le

condizioni al contorno, si ottiene una soluzione particolare, oscillante con grandi valori di fase.

Si può inoltre definire un parametro, necessario per identificare i punti lungo le traiettorie (classiche) degli integrali primi (2.5). Lo si denota con τ , all'interno dell'equazione

$$\frac{d}{d\tau} = 2\nabla S_0 \cdot \nabla \quad (2.6)$$

Questo parametro τ corrisponde al *tempo proprio* lungo le traiettorie classiche. Dopo aver definito questa grandezza si può concludere che il tempo emerge solo come un parametro con cui si indicano i punti dello spazio delle traiettorie dove la funzione d'onda di Wheeler-DeWitt è piccata.

Si può inoltre recuperare la nozione di simmetria classica per traslazioni temporali grazie alla libertà di scegliere il medesimo parametro τ .

Ancora, si ottiene dallo studio delle condizioni iniziali il concetto di spazio-tempo come appropriato nella Cosmologia Quantistica solo nei punti in cui affiora un picco della soluzione dell'Equazione di Wheeler-DeWitt (dove i picchi sono a loro volta una funzione di come si scelgono le condizioni al contorno).

Una rielaborazione delle considerazioni descritte può visualizzarsi in modo migliore come segue: il limite semiclassico della Teoria Quantistica della Gravità è la regione del superspazio dove la funzione d'onda di Wheeler-DeWitt oscilla con grandi valori di fase, i quali indicano a loro volta forti correlazioni tra le variabili dei momenti coniugati della (2.5). Queste grandezze descrivono delle traiettorie classiche nel superspazio, e il vettore tangente a queste traiettorie è proprio il tempo; si ottiene così il concetto di spazio-tempo anche all'interno di un approccio quantistico alla gravità.

2.2 Il minisuperspazio

Come introdotto in precedenza, la necessità di restringere lo studio ad uno spazio finito dimensionale è dovuta alla difficoltà di lavorare su un superspazio che, come si è visto, è infinito-dimensionale. La procedura di restrizione si opera *bloccando* tutti i gradi di libertà che non si desidera controllare e ottenendo quindi uno spazio delle configurazioni detto *minisuperspazio*.

Nonostante la semplificazione dello spazio, la scelta di operare su un minisuperspazio presenta delle difficoltà, legata a due fattori: il primo riguarda la scelta stessa di bloccare alcuni gradi di libertà, così facendo impedendo allo spazio di ospitare le fluttuazioni di stato fondamentale e dunque violando il Principio di Indeterminazione di Heisenberg; il secondo invece è legato alla incertezza che il modello di minisuperspazio effettivamente restituisca un modello approssimato

di una teoria completa.

Per superare almeno in parte questi problemi, si può studiare il modello di minisuperspazio non come una approssimazione di teoria completa, ma come un modello "base" (*toy model*) della stessa, interessato solo alle previsioni cosmologiche.

Ai problemi appena trattati si aggiunge la impossibilità di questo modello a trattare le onde gravitazionali e le fluttuazioni di densità, necessarie per la spiegazione dell'insorgere di strutture a larga scala.

L'Universo osservato infatti presenta delle deviazioni dalla omogeneità. Si possono quindi introdurre all'interno di un modello di minisuperspazio fluttuazioni lineari che "disturbino" la metrica omogenea e isotropa.

In questi modelli, la metrica è della forma

$$h_{ij} = e^{2\alpha} \Omega_{ij}, \quad (2.7)$$

dove Ω_{ij} è la metrica tridimensionale (una 3-sfera). Il campo scalare è invece assunto omogeneo, ovvero

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) \quad (2.8)$$

Se si introduce una perturbazione, la metrica e il campo scalare diventano

$$\begin{aligned} h_{ij} &= e^{2\alpha} (\Omega_{ij} + \epsilon_{ij}) \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

si sviluppa inoltre l'azione al secondo ordine di perturbazione.

Si consideri ora il caso delle perturbazioni del campo scalare (si trascurano invece le perturbazioni della metrica, perché il calcolo sarebbe complicato dalla presenza dei gradi di libertà di gauge). L'Equazione di Wheeler-DeWitt diventa, con l'aggiunta della perturbazione,

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_\phi)\Psi(h_{ij}, \Phi) = 0, \quad (2.10)$$

dove $\hat{\mathcal{H}}_\phi$ è appunto il termine derivante dalle perturbazioni. Questa equazione si può risolvere operando una approssimazione analoga a quella di Born-Oppenheimer, fattorizzando la funzione d'onda:

$$\Psi(h_{ij}, \Phi) = \psi_0(h_{ij}, \phi)\chi(h_{ij}, \delta\phi) \quad (2.11)$$

La nuova forma della funzione d'onda di Universo ora consta di due fattori: il primo, in cui la $\psi_0(h_{ij}, \phi)$ descrive la parte semiclassica della funzione d'onda, e il secondo, $\chi(h_{ij}, \delta\phi)$, che invece tiene conto delle fluttuazioni.

Si cerca quindi, scrivendo la Ψ in questo modo, di risolvere l'Equazione di Wheeler-DeWitt nella regione del superspazio dove le variabili del minisuperspazio sono semiclassiche, mentre le perturbazioni sono quantistiche.

I risultati restituiscono una funzione d'onda ψ_0 coincidente con quella del minisuperspazio, e una χ che è una soluzione dell'Equazione di Schrödinger per le fluttuazioni del campo (scalare) lungo le traiettorie (classiche) della metrica. Ovvero la χ soddisfa l'equazione

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \hat{H}_\phi \chi, \quad (2.12)$$

dove τ è il tempo proprio definito nella (2.6).

Imponendo ora le condizioni al contorno per la funzione d'onda si ottiene una soluzione particolare della Equazione di Wheeler-DeWitt, e quindi una particolare χ per la (2.12). Si fornisce quindi uno stato, detto di vuoto, su cui poi si innestano le fluttuazioni quantistiche. Questo stato, nel caso di una Equazione di Wheeler-DeWitt, è detto "*Bunch-Davies Vacuum*", o "vuoto euclideo", ed è lo stesso che si assume quando si calcolano le fluttuazioni di densità nel caso dei modelli inflazionari.

La Cosmologia Quantistica, in ultima analisi, riesce a risolvere il problema delle condizioni iniziali perchè implementando i modelli di minisuperspazio prevede, come nel caso classico, la fase inflazionaria e perchè attraverso le perturbazioni del minisuperspazio stesso seleziona lo stato di vuoto scelto. Tutto questo lo si può ottenere scegliendo le opportune condizioni al contorno per la funzione d'onda di Universo.

2.3 Un modello di minisuperspazio

Si studia ora un modello di minisuperspazio dove l'unico grado di libertà (gli altri, come si è detto, sono "bloccati") è dato dal fattore di scala $a(t)$. Per poter introdurre accuratamente questo modello bisogna mostrare innanzitutto come è definita classicamente la grandezza appena citata: il fattore di scala.

2.3.1 La derivazione dell'Equazione di Friedmann

Si riporta, per iniziare questa sottosezione, la metrica standard di Friedman-Robertson-Walker [11]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[F(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (2.13)$$

dove

$$F(r) = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (2.14)$$

e k , detto *indice di curvatura*, può assumere i valori $k = -1, 0, 1$, che descrivono rispettivamente universi spazialmente aperti, piatti e chiusi; inoltre

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.15)$$

è l'elemento angolare.

Ora applicando le equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

(dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore momento-energia) accoppiandole alla metrica scelta, otteniamo l'equazione che governa l'andamento del fattore di forma [11], [12]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.17)$$

dove ρ è la densità di massa, p è la pressione isotropica (entrambe le grandezze sono parametri del tensore momento-energia $T_{\mu\nu}$) e Λ è la *costante cosmologica*. Il valore di p dipende dal tipo di materia che si sceglie per l'Universo: nel caso di un Universo dominato da "polvere", $p = 0$; per un Universo dominato dalla radiazione invece $p = \frac{1}{3}$.

Consideriamo il caso $p = 0$. Si ha, per la conservazione della massa, $\rho a^3 = \text{costante}$, e l'equazione

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2 c^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G_N \rho}{3c^2} \quad (2.18)$$

diventa

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G_N \rho a^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} \quad (2.19)$$

che è detta *Equazione differenziale di Friedman* [11].

Si può ora studiare il caso scelto.

2.3.2 Modello di Universo in espansione

Per studiare il modello scelto si riscrive la (2.19) nel modo seguente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{\Gamma}{3}, \quad (2.20)$$

dove si definisce $\Gamma = 8\pi G_N \rho_{vuoto}$ come la densità di energia del vuoto fornita dal campo scalare, e si trascura per ora la costante cosmologica Λ . Si pone inoltre $c = 1$ e infine, poichè il modello di universo è chiuso, $k = +1$.

Questa equazione ha la seguente soluzione di de Sitter [13]

$$a(t) = a_0 \cosh(a_0^{-1}t) \quad (2.21)$$

dove $a_0 = \left(\frac{\Gamma}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Questa soluzione descrive un Universo che in un istante di tempo nell'*infinito passato* era infinitamente grande, che si contrae fino ad una dimensione (minima) per a_0 , per poi espandersi di nuovo e raggiungere una dimensione infinita in un *infinito futuro*.

Classicamente, non è possibile che l'Universo nasca dal nulla (come invece descrive il meccanismo - quantistico - di Vilenkin, detto del *tunneling dal nulla*). Studiando la natura quantistica del problema però, e utilizzando la Equazione di Wheeler-DeWitt, si può cercare una soluzione.

Nella metrica di Friedman-Robertson-Walker (2.13) si ha che la funzione di *shift* N_i è nulla, quindi la curvatura estrinseca K_{ij} , la grandezza K e la curvatura intrinseca ${}^{(3)}R$ diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} K_{ij}(FRW) &= -\frac{1}{2N} \dot{h}_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} h_{ij} \\ K &= h^{ij} K_{ij} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \\ {}^{(3)}R &= -\frac{6}{a^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

(dove la grandezza N nella metrica FRW è pari a $N = 1$).

Si ottiene infine lo scalare di curvatura R scritto nel modo seguente

$$R = K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R = -6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{6}{a^2} \quad (2.23)$$

Si passa ora a scrivere l'azione, partendo dalla sua forma "classica" (primo termine nella (1.11)):

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_V d^4x \sqrt{-g} [R(g) - 2\Lambda], \quad (2.24)$$

che diventa, usando la (2.23) e imponendo $\Lambda_{vuoto} = \Gamma = 8\pi G_N \rho_{vuoto}$,

$$S_{E-H} = \frac{3\pi}{4G_N} \int dt [a\dot{a}^2 - a + \frac{a^3 \Lambda_{vuoto}}{3}] \quad (2.25)$$

dove il termine tra parentesi quadre è la lagrangiana del sistema \mathcal{L} .

Il grado di libertà dinamico (l'unico non "bloccato" in questo modello) è a , quindi il suo momento coniugato si calcola, usando la (1.15),

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{4G_N} a (1 - \frac{\Lambda_{vuoto}}{3} a^2) \quad (2.26)$$

la hamiltoniana dunque diventa, usando la (1.17),

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} - \mathcal{L} = -\frac{G_N p_a^2}{3\pi a} - \frac{3\pi}{4G_N} (1 - \frac{\Lambda_{vuoto}}{3} a^2) \quad (2.27)$$

Applicando la procedura di quantizzazione canonica (1.27), dove in questo caso si pone

$$p_a = -i \frac{\partial}{\partial a} \quad (2.28)$$

si può ora scrivere l'Equazione di Wheeler-DeWitt (2.1) nel modo seguente:

$$[\frac{d^2}{da^2} - \frac{9\pi^2}{4G_N^2} (a^2 - \frac{\Lambda_{vuoto}}{3} a^4)] \Psi(a) = 0 \quad (2.29)$$

Questa equazione ha la forma di una Equazione di Schrodinger in una dimensione, per una particella di energia totale $E = 0$ che si muove in un potenziale $U(a)$ pari a

$$U(a) = \frac{9\pi^2 a_0^2}{4G_N^2} [(\frac{a}{a_0})^2 - (\frac{a}{a_0})^4], \quad (2.30)$$

dove a_0 è lo stesso della (2.21), con $\Gamma \equiv \Lambda$.

Come si è detto in precedenza, questo modello di Universo prevede che da uno spazio infinitamente grande in un infinito passato si arrivi a una dimensione spaziale minima a_0 , per poi tornare in un infinito futuro ad un Universo spazialmente infinito, che si è espanso in modo esponenziale. Classicamente, per una particella che (come nel caso appena esposto) ha energia totale nulla, la regione $0 < a < a_0$ è classicamente proibita, mentre è invece permessa la regione dove $a \geq a_0$.

Se si considera però il suo comportamento quantistico la particella può, partendo dalla posizione $a = 0$, attraverso la barriera di potenziale descritta dall'Equazione di Wheeler-DeWitt, *apparire* nella posizione $a = a_0$. Questo sembrerebbe proprio confermare l'idea di Vilenkin del *tunneling dal nulla*.

Nel Capitolo III si studierà un modello alternativo di Universo, detto Universo di Bianchi I, in cui si introdurrà una costante cosmologica negativa $-\Lambda$, con $\Lambda > 0$, e se ne studierà il limite semiclassico come si è fatto in modo generale in questo Capitolo.

Capitolo 3

La Cosmologia Big Bounce in un Universo di Bianchi

Introduzione

In questo Capitolo si studierà un modello alternativo di Universo, in cui si prende in considerazione un Universo di Bianchi di Tipo I in presenza di una costante cosmologica negativa, come detto nella conclusione del Capitolo II.

Si noterà che il limite semiclassico corrisponde a un Universo isotropo in espansione, anche se privo di materia; si studierà inoltre, dopo aver utilizzato le variabili dinamiche dell'Universo di Bianchi I, anche la dinamica di un Universo di Bianchi IX, che descrive un più generale modello di Universo non omogeneo almeno localmente.

Infine, si mostrerà che esiste una soluzione di Universo oscillante quando si collega la costante cosmologica $-\Lambda$ ad una opportuna scelta di coordinate dinamiche che descrivano le isotropie e le anisotropie del modello.

Il motivo di questa scelta risiede nel voler cercare di studiare cosa avviene negli istanti iniziali di un Universo omogeneo e isotropo sondandone l'evoluzione con gli strumenti della Natura, che sono intrinsecamente quantistici.

Nella sezione iniziale si introdurrà il modello di Universo di Bianchi, specificando le differenze tra il modello di Bianchi I e il modello di Bianchi IX. Si studierà dunque l'Equazione di Wheeler-DeWitt utilizzando un set di grandezze di Misner, ottenendo il risultato e interpretandolo. Si passerà poi a studiare il limite semiclassico del problema, e la dinamica dei valori di aspettazione delle grandezze quantistiche considerate, mostrando il comportamento delle stesse in relazione alle grandezze classiche, e confrontandone i risultati; successivamente si introdurrà brevemente il più generale modello di Bianchi IX, e si studierà in che modo può accordarsi al modello di Bianchi I. Per concludere il lavoro si trarranno le

conclusioni e si esporranno le considerazioni sul Big Bounce ottenuto.

3.1 Gli Universi di Bianchi

Gli Universi di Bianchi sono una immediata generalizzazione della metrica piatta FRW. Nel caso di un Universo di Bianchi I la metrica prevede la separazione del fattore di scala $a(t)$ in ogni direzione cartesiana,

$$ds^2 = -dt^2 + a_x^2 dx^2 + a_y^2 dy^2 + a_z^2 dz^2, \quad (3.1)$$

dove come è solito si pone $c = 1$ [14] [15]. La metrica, in ogni istante di tempo t , è *omogenea*, perchè i fattori di scala $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ non dipendono dalle coordinate spaziali ma solo dal tempo, ma non *isotropa*, poiché i suddetti fattori di scala non sono necessariamente uguali tra loro.

Identificato quindi un insieme di particelle nello spazio-tempo, questo insieme potrà cambiare il proprio volume (espandendosi o contraendosi, come nel caso FRW) ma potrà anche modificare la propria forma.

Questa proprietà viene descritta definendo un vettore σ detto di taglio, che si annulla nel caso della metrica FRW omogenea e isotropa.

I vari Universi di Bianchi si ottengono definendo in che modo determinati campi vettoriali, detti di Killing, commutano tra loro [16], [17].

Si definisce campo di vettori di Killing $\vec{\zeta}_i$, con $i = 1, 2, 3$, un campo che abbia la proprietà di rendere la derivata di Lie, effettuata rispetto a un tensore metrico tridimensionale, nulla. Ovvero:

$$\mathcal{L}_{\vec{\zeta}_i} h_{ab} = 0, \quad (3.2)$$

con h_{ab} metrica tridimensionale e \mathcal{L} derivata di Lie,

$$\mathcal{L}_{\vec{\zeta}_i} h_{ab} = \zeta_i^c \partial_c h_{ab} + h_{bc} \partial_a \zeta_i^c + h_{ac} \partial_b \zeta_i^c, \quad (3.3)$$

dove ζ_i^c denota la c -esima componente del campo $\vec{\zeta}_i$, e ∂_c invece è la derivata rispetto alla componente x^c della direzione della metrica.

La (3.2) è lineare, quindi ogni combinazione lineare di campi di Killing è ancora un campo di Killing, e questo rafforza la richiesta degli Universi di Bianchi sullo spazio omogeneo.

La classificazione dei vari Universi di Bianchi si effettua considerando il commutatore $[\vec{\zeta}_i, \vec{\zeta}_j]$ di due campi di Killing $\vec{\zeta}_i$ e $\vec{\zeta}_j$. Considerando il commutatore, che non è in generale nullo, si deve ottenere un risultato che sia esso stesso un campo

di Killing, dovendo questa operazione lasciare lo spazio invariante. Proiettando in componenti l'operazione di commutazione, si ottiene

$$[\vec{\zeta}_i, \vec{\zeta}_j]^c \equiv \zeta_i^a \partial_a \zeta_j^c - \zeta_j^b \partial_b \zeta_i^c \quad (3.4)$$

In un modello di Universo omogeneo, l'insieme dei tre $\vec{\zeta}_i$ ($i = 1, 2, 3$) è un insieme completo, e quindi ogni commutatore deve essere espresso come una combinazione lineare di campi di Killing, ovvero

$$[\vec{\zeta}_i, \vec{\zeta}_j] = C_{ij}^l \zeta_l, \quad (3.5)$$

dove i valori C_{ij}^l sono fondamentali e si chiamano *costanti di struttura*. Queste grandezze restano costanti nel tempo per uno spazio-tempo con una geometria quadridimensionale il cui tensore metrico è $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, dove \vec{n} è il versore di tipo tempo normale alla ipersuperficie, tale da soddisfare (il versore) la relazione $[\vec{\zeta}_i, \vec{n}]$.

Si definiscono otto tipi di Universi di Bianchi indipendenti, oltre a due scelte diverse a seconda del parametro h .

I modelli in analisi, entrambi omogenei, sono il modello di Bianchi I, che rappresenta una metrica FRW piatta, e il modello di Bianchi IX, che invece descrive la metrica FRW chiusa.

Un motivo della scelta dei modelli di Bianchi per descrivere l'Universo risiede nelle conseguenze del Teorema di Wald [18], che afferma che un Universo in espansione accelerata tende all'isotropia; e se l'Universo nei suoi momenti iniziali ha subito un periodo di inflazione, già oggi è possibile trovare traccia di questa isotropia. Inoltre, dal momento che l'Universo attuale sembra trovarsi in una nuova fase di espansione accelerata, le tracce di anisotropia saranno nel futuro sempre più in diminuzione, confermando la previsione di un Universo sempre più isotropo.

Per un Universo omogeneo ma non isotropo la Equazione di Friedman [19] contiene anche un termine relativo al vettore di taglio σ , assumendo la nuova forma

$$3\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = 8\pi G\rho + \sigma^2 - \frac{{}^3R}{2} + \Lambda \quad (3.6)$$

dove G è la costante di gravitazione, ρ è la densità di energia della sorgente, $\sigma^2 \equiv \frac{\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}{2}$ è detto *scalare di taglio*, 3R è lo scalare di curvatura di Ricci tridimensionale e Λ è la costante cosmologica. Il nuovo termine è proprio lo scalare di taglio, che modifica il tasso di espansione quando σ diventa sufficientemente grande.

Inoltre, si denota il rapporto al primo membro della (3.6) con H , chiamandolo *parametro di Hubble*, $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Si vede che nel modello di Bianchi I, isotropo, il parametro di taglio ha un andamento $\sigma \propto \frac{1}{a^3}$ [20].

Nel caso di un modello che debba accordarsi alla singolarità iniziale, in assenza di espansione accelerata si ha che il modello classico del Big Bang prevede che l'orizzonte comovente si restringa tornando indietro nel tempo. Si può quindi, considerando nulla la curvatura in quegli istanti, ottenere la facile relazione $H \propto \sigma \propto \frac{1}{a^3}$. Il fattore di scala $a(t)$ a sua volta evolve rispetto al tempo come $a \equiv (a_x a_y a_z) \propto t^{\frac{1}{3}}$, nel caso di un Universo iniziale in cui domina la materia (nel caso di un Big Bang in cui domina la radiazione, $a \propto t^{\frac{1}{2}}$) [21].

Un'analisi di questo tipo sarebbe però incompleta, poiché manca il termine σ^2 , che domina rispetto a qualsiasi tipo di sorgente di energia, nelle prime fasi successive al Big Bang. Diventa infatti comparabile al parametro di Hubble H , descrivendo un Universo che nei suoi primi istanti iniziali si espande lungo alcune direzioni e si restringe lungo altre: un modello del genere fu proposto da Misner, e fu denominato "Mixmaster Universe" [22].

Si è ora pronti a esporre il modello di Universo di Bianchi preso in esame.

3.2 Lo studio della dinamica della Cosmologia Quantistica nel modello di Universo di Bianchi I

Come si è detto, lo studio inizia considerando l'evoluzione della dinamica quantistica di un modello di Bianchi I con una costante cosmologica negativa $-\Lambda$, con $\Lambda > 0$. Le variabili utilizzate sono le variabili di Misner $\{\alpha, \beta_{\pm}\}$ [22], in cui α descrive il volume isotropo dell'Universo, e β_{\pm} descrive invece le anisotropie del modello.

Il superhamiltoniano in questo modello diventa [24]

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-3\alpha}}{24\pi} [-p_{\alpha}^2 + p_{+}^2 + p_{-}^2] - \pi e^{3\alpha} \Lambda \quad (3.7)$$

dove le variabili considerate $\{p_{\alpha}, p_{+}, p_{-}\}$, sono i momenti coniugati alle variabili di Misner.

Poiché tornerà utile ai fini della quantizzazione, si introduce la posizione

$$\rho = e^{\frac{3}{2}\alpha} \quad \rightarrow \quad p_{\rho} = \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}\alpha} p_{\alpha} \quad (3.8)$$

In questo modo il superhamiltoniano (3.7) diventa

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{32\pi} p_{\rho}^2 + \frac{p_{+}^2 + p_{-}^2}{24\pi\rho^2} - \pi\rho^2\Lambda \quad (3.9)$$

Dopo aver definito le variabili $\{\rho, \beta_+, \beta_-\}$ e i rispettivi operatori $\{p_\rho, p_+, p_-\}$ in modo da avere

$$p_i \rightarrow -i \frac{d}{dq_i}, \quad q_i = \{\rho, \beta_+, \beta_-\} \quad (3.10)$$

si può già scrivere l'operatore di Wheeler-DeWitt introducendo la funzione d'onda dell'Universo, che sarà ovviamente funzione di ρ e β_\pm , ovvero $\psi(\rho, \beta_\pm)$. L'operatore sarà quindi

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(\rho, \beta_\pm) = \left[\frac{3}{32\pi} \partial_\rho^2 - \frac{\partial_+^2 + \partial_-^2}{24\pi\rho^2} - \pi\rho^2\Lambda \right] \psi(\rho, \beta_\pm) \quad (3.11)$$

Dopo aver introdotto le grandezze necessarie alla teoria se ne studierà la dinamica. Si considera la metrica nel formalismo ADM (1.10): si recuperano le definizioni di (1.18), (1.19), (1.20), rispettivamente dell'azione nel formalismo ADM, del Superhamiltoniano e del Supermomento, riportate come segue

$$\begin{aligned} S(h_{ij}, N, N^i) &= \int dt d^3x (p^{ij} \dot{h}_{ij} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i) \\ \mathcal{H}_0 &= 16\pi G_N G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} - \frac{\sqrt{h}^{(3)} R}{16\pi G_N} \\ \mathcal{H}_i &\equiv -\frac{2p^j_{|j}}{16\pi G_N} \end{aligned} \quad (3.12)$$

e dove G_{ijkl} è la *supermetrica*

$$G_{ijkl} = \frac{8\pi G_N}{\sqrt{h}} (h_{ik}h_{jl} + h_{jk}h_{il} - h_{ij}h_{kl}) \quad (3.13)$$

Si riportano inoltre i vincoli dinamici, o secondari, che si ottengono dalla variazione dei vincoli primari rispetto a N e N_i ,

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = 0 \quad (3.14)$$

Ora si vuole accordare l'azione alle *condizioni di Gauss* ($g_{00} = -1, g_{0i} = 0$), e lo si fa introducendo un termine aggiuntivo alla grandezza S , che ora sarà

$$S[g_{\mu\nu}, M, M_i] = S^G + S^F, \quad (3.15)$$

dove S^G è l'azione della prima delle (3.12), e S^F è data da

$$S^F[g_{\mu\nu}, M, M_i] = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \left[-\frac{1}{2} M \sqrt{-g} (g^{00} + 1) + M_i \sqrt{-g} g^{0i} \right], \quad (3.16)$$

avendo definito le grandezze

$$\begin{aligned} M &\equiv -\frac{\mathcal{H}^G}{\sqrt{h}} \\ M_i &\equiv \frac{\mathcal{H}_i^G}{\sqrt{h}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

nel modo descritto (\mathcal{H}^G e \mathcal{H}_i^G sono la seconda e la terza delle (3.12) per la S^G). L'azione della (3.15) non è invariante sotto trasformazioni di coordinate, a causa della scelta di utilizzare le coordinate di Gauss che soddisfacessero le condizioni medesime. Si può però ritrovare la invarianza se si opera una parametrizzazione di coordinate x^α in modo da avere $X^\mu = (T(x^\alpha), X^i(x^\alpha))$, dove la T è la variabile temporale e le X_i sono le variabili spaziali. La nuova azione diventa

$$\begin{aligned} S[g_{\alpha\beta}, M, M_i, X^\mu] &= S^G + S^F = \\ &= -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2} M (g^{\alpha\beta} T_{,\alpha} T_{,\beta} + 1) + M_i g^{\alpha\beta} T_{,\alpha} X_{,\beta}^i \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove il secondo e il terzo termine all'interno delle parentesi quadre dell'integrale costituiscono il termine di sorgente del campo gravitazionale, denominato *Fluido di riferimento Gaussiano*.

Le Equazioni di Einstein con la metrica $g_{\alpha\beta}$ sono

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G_N T_{\alpha\beta} \quad (3.19)$$

dove

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^F}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (3.20)$$

è il tensore momento-energia relativo al fluido considerato che, non avendo un termine di pressione, descrive il fluido di riferimento Gaussiano come "polvere". Scrivendo ora la forma canonica dell'azione, usando per il tensore stress-energia $T^{\alpha\beta} = M U^\alpha U^\beta$ (poichè si impone la condizione $M^i = 0$), si ha una nuova forma dell'azione

$$S[h_{ij}, M, M_i, X^\mu] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left[\dot{h}_{ij} p^{ij} + \dot{X}^\mu p_\mu - (N^i \mathcal{H}_i + N \mathcal{H}) \right] \quad (3.21)$$

dove analogamente all'azione, anche il Superhamiltoniano e il Supermomento diventano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^G + \mathcal{H}^F \quad , \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^G + \mathcal{H}_i^F \quad (3.22)$$

Essendo le \mathcal{H}^F e \mathcal{H}_i^F grandezze relative al fluido di riferimento, nel caso di polvere incoerente si ha $\mathcal{H}^F = p$ e $\mathcal{H}_i^F = 0$.

Per i vincoli dinamici invece, le relazioni diventano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^G + \mathcal{H}^F = \mathcal{H}^G + p = 0 \\ \mathcal{H}_i &= \mathcal{H}_i^G + \mathcal{H}_i^D = \mathcal{H}_i^G = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si procede ora alla quantizzazione. Si utilizzano le relazioni (1.27) in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij} &= h_{ij} \\ \hat{p}^{ij} &= -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \\ \hat{X}^\mu &= X^\mu \\ \hat{p}_\mu &= -i \frac{\delta}{\delta X^\mu} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Inoltre per il funzionale d'onda $\Psi[X^\mu, h_{ij}]$, utilizzando le condizioni sul Supermomento del fluido, si ottiene la condizione

$$\frac{\delta}{\delta X^i} \Psi[X^\mu, h_{ij}] = 0, \quad (3.25)$$

che descrive una funzione d'onda che non dipende dalle componenti spaziali del fluido, ma solo dalla componente temporale T . Si può quindi scrivere $\Psi[T, h_{ij}]$. Il vincolo sul supermomento totale diventa

$$\hat{\mathcal{H}}_i \Psi[T, h_{ij}] = 0 \quad (3.26)$$

che a sua volta identifica una funzione d'onda che dipende solo dalla geometria (tridimensionale).

Si può quindi scrivere l'Equazione di Wheeler De-Witt, utilizzando le (3.23), (3.24):

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi[T, h_{ij}] = [\hat{\mathcal{H}}^G - i \frac{\delta}{\delta T}] \Psi[T, h_{ij}] = 0 \quad (3.27)$$

ovvero

$$i \frac{\delta}{\delta T} \Psi[T, h_{ij}] = \hat{\mathcal{H}}^G \Psi[T, h_{ij}] \quad (3.28)$$

Questa equazione descrive l'evoluzione del sistema rispetto alla variabile T , ed ha soluzione

$$\Psi[T, h_{ij}] = \int dE \psi(E, h_{ij}) e^{-iET} \quad (3.29)$$

Si può ora scrivere il problema agli autovalori, indipendente dal tempo

$$\hat{\mathcal{H}}^G \psi = E \psi \quad (3.30)$$

L'energia E è associata alla densità di energia della "polvere" con $\rho_{polvere} = -\frac{E}{\sqrt{h}}$. L'Hamiltoniano per il modello di Bianchi I è dato dalla (3.9), nella versione quantizzata (3.11); la (3.30) diventa quindi

$$\left[\frac{3}{32\pi} \partial_\rho^2 - \frac{\partial_+^2 + \partial_-^2}{24\pi\rho^2} - \pi\rho^2\Lambda \right] \psi(\rho, \beta_\pm) = E \psi(\rho, \beta_\pm) \quad (3.31)$$

Studiando una formulazione dell'equazione di Wheeler-DeWitt in questa forma, ci si accorge che la covarianza generale della teoria è conservata attraverso una parametrizzazione, ma anche che l'evoluzione temporale si ottiene utilizzando un particolare tipo di fluido di riferimento (Gaussiano). Un problema importante è però la natura *non positiva* della densità di energia: si cercherà, nelle successive Sezioni, di studiare e di risolvere proprio questa proprietà, che non è consistente con il modello di Cosmologia proposto.

3.3 Il limite semiclassico e il confronto con l'andamento quantistico

Si inizia questa Sezione studiando la versione "classica" della (3.30), ovvero

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{32\pi} p_\rho^2 + \frac{p_+^2 + p_-^2}{24\pi\rho^2} - \pi\rho^2\Lambda = E \quad (3.32)$$

Utilizzando le Equazioni di Hamilton, si cercano le soluzioni per la variabile isotropa ρ ;

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = -\frac{3}{16\pi} p_\rho \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{p_+^2 + p_-^2}{12\pi\rho^3} + 2\pi\rho\Lambda \end{cases} \quad (3.33)$$

sostituendo la prima delle (3.33) nella (3.32), si ottiene

$$\dot{\rho}^2 - \frac{p_+^2 + p_-^2}{64\pi^2\rho^2} + \frac{3}{8}\rho^2\Lambda + \frac{3}{8\pi}E = 0, \quad (3.34)$$

che insieme alla

$$\ddot{\rho}^2 + \frac{p_+^2 + p_-^2}{64\pi^2\rho^3} + \frac{3}{8}\rho\Lambda = 0 \quad (3.35)$$

consentono di scrivere la soluzione

$$\rho(t) = \sqrt{\left(\frac{-E}{2\pi\Lambda}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda(p_+^2 + p_-^2)}{6E^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}}t + \phi\right)\right]} \quad (3.36)$$

Studiando la soluzione si nota la singolarità iniziale per $\rho = 0$ (e quindi $\alpha \rightarrow \infty$, attraverso la (3.8)); la fase ϕ si sceglie in modo da avere la singolarità iniziale per $t = 0$,

$$\phi_0 = \arcsin\left(\mp \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Lambda(p_+^2 + p_-^2)}{6E^2}}}\right) \quad (3.37)$$

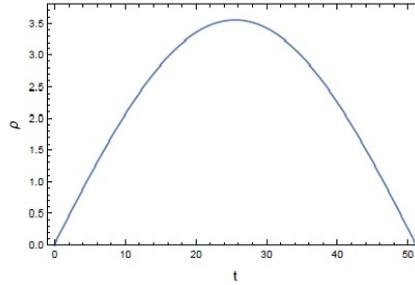


Figura 3.1:

La Fig.(3.1) descrive il comportamento classico della grandezza isotropa ρ , e come si vede c'è una singolarità iniziale ($t = 0$) e una nel futuro (i valori delle grandezze considerate per il grafico sono $\Lambda = 0.01$, $p_+ = p_- = 0.1$, $E = -0,397$).

Analogamente, si può calcolare la soluzione anche delle grandezze descrittive le anisotropie β_{\pm} , ottenendo un andamento classico descritto dalla Fig.(3.2) qui sotto, dove i valori delle grandezze sono uguali al caso della Fig.(3.1):

Si noti che le anisotropie nel modello classico assumono grande valore verso le

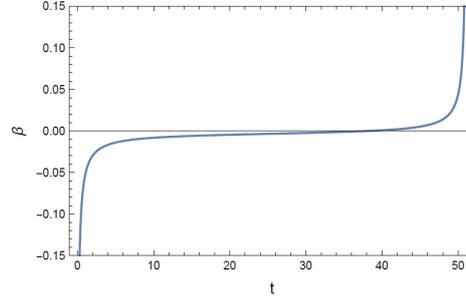


Figura 3.2:

singularità (nel passato e nel futuro). Come nei modelli anisotropi, anche nel modello semiclassico con una costante cosmologica negativa (come quello in esame in questo lavoro) sono presenti delle anisotropie divergenti nei pressi delle singularità.

Ora si desidera studiare la evoluzione quantistica completa della (3.31). L'assenza di un termine di potenziale per le anisotropie consente di scrivere la funzione d'onda $\psi(\rho, \beta_{\pm})$ fattorizzando, dividendo la prima variabile isotropa dalle due variabili anisotrope,

$$\psi(\rho, \beta_{\pm}) = \frac{1}{2\pi} e^{ik_+\beta_+} e^{ik_-\beta_-} \chi(\rho) \quad (3.38)$$

dove $\{k_+, k_-\}$ sono i numeri quantici associati alle variabili $\{\beta_+, \beta_-\}$. Sostituendo la funzione d'onda in questa forma nella (3.31) si arriva alla equazione differenziale

$$[\partial_{\rho}^2 + \frac{k_*^2}{\rho^2} - \Lambda_* \rho^2] \chi(\rho) = E_* \chi(\rho) \quad (3.39)$$

dove $k_*^2 = \frac{4}{9}(k_+^2 + k_-^2)$, $\Lambda_* = \frac{32\pi_2\Lambda}{3}$, $E_* = \frac{32\pi E}{3}$.

Questa equazione rassomiglia ad un oscillatore armonico tridimensionale, dove il momento angolare l è legato alla grandezza k_*^2 attraverso la relazione

$$k_*^2 = -l(l+1).$$

Continuando questa analogia, si sceglie per la funzione d'onda isotropa $\chi(\rho)$ la forma

$$\chi(\rho) = e^{-\frac{\sqrt{\Lambda_*}\rho^2}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{1-4k_*^2}}{2} \epsilon(\rho) \quad (3.40)$$

che restituisce la soluzione per $\rho \rightarrow \infty$ grazie al primo termine esponenziale, e la soluzione relativa a $\rho \rightarrow 0$ grazie al secondo esponenziale.

La funzione $\epsilon(\rho)$ può essere scritta attraverso una (finita) serie di potenze

$$\epsilon(\rho) = \sum_{k=0}^{k'} c_{k,k'} \rho^k \quad (3.41)$$

con $k, k' \in 2\mathbb{N}$ (la serie è finita affinché si possano riprodurre soluzioni fisicamente accettabili - i.e. non convergenti).

Introducendo la funzione (3.41) nella (3.39), e facendo troncatura la serie in modo che $c_{k+2,k'} = 0$, si ottiene

$$E_* + \sqrt{\Lambda_*} (\sqrt{(1 - 4k_*^2) + 2k' + 2}) = 0 \quad (3.42)$$

ovvero

$$E_{k',k_{\pm}} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} \left[\sqrt{1 - \frac{16}{9}(k_+^2 + k_-^2) + 2k' + 2} \right] \quad (3.43)$$

affinchè gli autovalori dell'energia siano reali, è necessario che i numeri quantici $\{k_+, k_-\}$ soddisfino la relazione

$$(k_+^2 + k_-^2) \leq \frac{9}{16} \quad (3.44)$$

In questo modo il valore dell'energia è sempre negativo per ogni valore dello spettro e dunque la densità di energia della "polvere" (associata all'energia E), $\rho_{polvere}$, sarà sempre positiva.

Si può quindi scrivere la forma della intera funzione d'onda che è soluzione dell'equazione (3.31):

$$\psi(\rho, \beta_{\pm}) = A e^{ik_+\beta_+} e^{ik_-\beta_-} e^{-\frac{\sqrt{\Lambda_*}\rho^2}{2}} \rho^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4k_*^2}}{2}} \sum_{k=0}^{k'} c_{k,k'} \rho^k, \quad (3.45)$$

dove A è una opportuna costante di normalizzazione.

Scopo di questa ultima parte della Sezione è effettuare un confronto tra gli andamenti "classici" delle grandezze ρ e β_{\pm} e i valori di aspettazione degli analoghi quantistici, $\hat{\rho}$ e $\hat{\beta}_{\pm}$.

L'evoluzione temporale del valore medio di $\hat{\rho}$ è:

$$\langle \hat{\rho} \rangle_t = \int_0^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_{\pm} (\Psi_{k'^*,k_{\pm}^*})^* \rho \Psi_{k'^*,k_{\pm}^*} \quad (3.46)$$

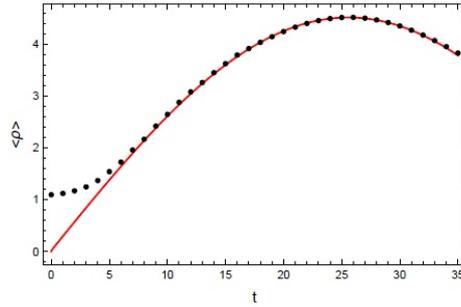


Figura 3.3:

Si riporta in Fig.(3.3) il grafico dell'andamento della (3.46) confrontato con l'andamento classico di Fig.(3.1):

Si vede dal grafico (in cui i valori sono parametrati come segue: $\Lambda = 0.01$, $k'^* = 5$, $k_+^* = k_-^* = 0.1$, e in cui la linea rossa rappresenta l'andamento classico, e i punti l'andamento quantistico) che per grandi valori di t i due andamenti sono coincidenti, mentre per valori vicini alla singolarità iniziale $t = 0$ il comportamento quantistico devia da quello classico mostrando non un andamento singolare, ma "da rimbalzo".

Una tesi a favore di questa interpretazione arriva dallo studio dell'incertezza $\Delta\rho^2$ e dall'evoluzione temporale del suo valore medio:

$$\langle \Delta\rho^2 \rangle_t = \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty d\beta_\pm (\Psi_{k'^*, k_\pm^*})^* \rho^2 \Psi_{k'^*, k_\pm^*} - \langle \hat{\rho} \rangle_t^2 \quad (3.47)$$

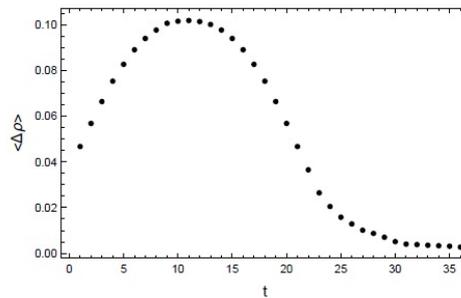


Figura 3.4:

Il grafico in Fig.(3.4) mostra due aspetti interessanti, ai due estremi dei valori di t : vicino al valore $t = 0$ si nota un andamento crescente fino al massimo

di $\langle \Delta\rho^2 \rangle$, sempre piccolo rispetto al valore di aspettazione $\langle \hat{\rho} \rangle$; d'altra parte, per grandi valori di t , l'incertezza diminuisce sempre più, restituendo un valore sempre più "classico" anche per il valor medio quantistico, dimostrando che l'Universo diventa sempre più "classico" all'aumentare del valore della variabile temporale.

Si procede ora in modo analogo al confronto tra il valore di aspettazione relativo alle anisotropie e il loro valore classico.

L'evoluzione temporale del valor medio di $\hat{\beta}_{\pm}$, è

$$\langle \hat{\beta}_{\pm} \rangle_t = \int_0^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_{\pm} (\Psi_{k'^*, k_{\pm}^*})^* \beta \Psi_{k'^*, k_{\pm}^*} \quad (3.48)$$

In Fig.(3.5) è mostrato il confronto tra i due andamenti:

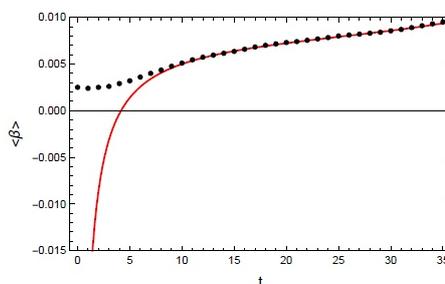


Figura 3.5:

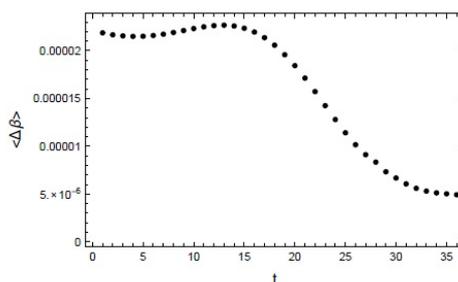


Figura 3.6:

Si nota come anche in questo caso i due andamenti sono coincidenti quando si va molto avanti nel tempo; inoltre, la divergenza delle anisotropie nei pressi della singolarità iniziale presente nel caso classico, nel caso quantistico non si presenta, poiché anche nel limite $t \rightarrow 0$ le anisotropie restano piccole e finite.

Come prima, a sostegno di queste interpretazioni c'è il grafico dell'andamento dell'incertezza $\langle \Delta\beta^2 \rangle$, di equazione

$$\langle \Delta\beta^2 \rangle_t = \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty d\beta_\pm (\Psi_{k'^*, k_\pm^*})^* \beta^2 \Psi_{k'^*, k_\pm^*} - \langle \hat{\beta} \rangle_t^2 \quad (3.49)$$

in cui si osserva (Fig.(3.6)) che l'andamento è simile alla incertezza legata alla variabile ρ , restituendo quindi per grandi valori di t ("nel distante futuro" rispetto agli istanti iniziali dell'Universo) un andamento classico, e restando non divergente anche nei pressi della singolarità iniziale, dove è piccola rispetto al valor medio $\langle \hat{\beta}_\pm \rangle$.

Si è parlato finora della singolarità iniziale, ma le considerazioni fatte valgono anche, nel modello di Bianchi I, per la singolarità futura, in cui dunque il Big Crunch previsto viene rimosso e sostituito da un "rimbalzo", donando al modello studiato la caratteristica ciclica propria delle Cosmologie Big-Bounce [25].

3.4 L'Universo di Bianchi IX

Prima di interpretare ulteriormente i risultati del modello appena studiato, si introduce brevemente il modello di Universo di Bianchi IX, in cui è presente un termine di potenziale, che rappresenta la curvatura spaziale del modello (si ricorda che il modello di Universo di Bianchi I prevedeva un universo spazialmente piatto). La nuova forma del Superhamiltoniano di equazione (3.9) è

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{32\pi} p_\rho^2 + \frac{p_+^2 + p_-^2}{24\pi\rho^2} + \frac{\pi}{2} \rho^{\frac{2}{3}} V_{IX}(\beta_\pm) - \pi\rho^2 \Lambda = E, \quad (3.50)$$

dove il potenziale si scrive come [24]

$$V_{IX}(\beta_\pm) = e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+} \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + 2e^{4\beta_+} [\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1] \quad (3.51)$$

Si vede immediatamente che l'unica differenza tra il modello di Universo di Bianchi I e il IX è la presenza peculiare del potenziale V_{IX} . Si è interessati quindi a cercare un regime in cui questo potenziale risulta trascurabile rispetto al contributo dato dai termini, cinetici e di costante cosmologica, presenti nella (3.50), in modo da riportare almeno in quel regime il modello di Universo di Bianchi IX, più generale, nell'ambito di un modello più facile da studiare.

A questo fine, si studia il rapporto relativo tra il potenziale $V^* = \frac{\pi}{2} \rho^{\frac{2}{3}} V_{IX}(\beta_\pm)$ e il valore assoluto dell'energia $|E|$ data dalla (3.43), valutato nel punto di "rimbalzo",

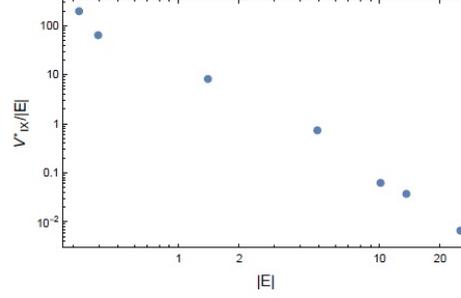


Figura 3.7:

ovvero quando l'energia E cambia (Fig.(3.7)).

Come si nota dalla Fig.(3.7), all'aumentare del valore dell'energia il contributo del termine di potenziale diventa sempre più trascurabile: questa è una buona prova a sostegno dell'interpretazione di un Universo di Bianchi IX che, almeno per grandi valori di $|E|$, presenta la stessa evoluzione cosmologica dell'Universo di Bianchi I studiato.

3.5 L'interpretazione del Big Bounce

Scopo di questa sezione è mostrare il ruolo della costante cosmologica negativa per l'ottenimento di un Big Bounce. Si studierà quindi un modello di Bianchi I *senza* costante cosmologica, utilizzando la dinamica ai polimeri [26], in modo da rendere discreta la variabile isotropa ρ e mostrare che l'andamento dei valori di aspettazione quantistici delle Sezioni precedenti e quello della dinamica (semi-classica) ai polimeri sono equivalenti.

Si utilizzano quindi le stesse variabili spaziali $\{\rho, \beta_+, \beta_-\}$, in cui come detto l'unica variabile a divenire discreta è ρ .

La dinamica semiclassica impone di scrivere il Superhamiltoniano (3.9), con $\Lambda = 0$ e il termine relativo al momento cinetico

$$p_\rho^2 \rightarrow \frac{2}{\mu^2} [1 - \cos(\mu p_\rho)], \quad (3.52)$$

nel modo seguente:

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{16\pi\mu^2} [1 - \cos(\mu p_\rho)] + \frac{p_+^2 + p_-^2}{24\pi\rho^2} = E \quad (3.53)$$

Anche in questo caso come nel precedente, si può risolvere la dinamica imponen-

do le Equazioni di Hamilton (3.33), che in questo caso assumono la forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = -\frac{3}{16\pi\mu} \sin(\mu p_\rho) \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{p_+^2 + p_-^2}{12\pi\rho^3} \end{cases} \quad (3.54)$$

Utilizzando la (3.53) e le (3.54), si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\ddot{\rho} + \frac{(p_+^2 + p_-^2) \left(1 - \frac{2\mu^2(p_+^2 + p_-^2)}{9\rho^2} + \frac{16}{3}\pi\mu^2 E\right)}{64\pi^2\rho^3} = 0 \quad (3.55)$$

che non è possibile risolvere analiticamente.

Si cerca però di risolvere la precedente equazione operando una integrazione numerica, per confrontarne l'andamento con quello quantistico analizzato in precedenza. Si scelgono gli stessi parametri $\{p_+, p_-, E\}$, e le stesse grandezze corrispondenti $\{k'^*, k_+, k_-\}$. L'unico parametro a variare è μ . Gli andamenti sono mostrati in Fig.(3.8).

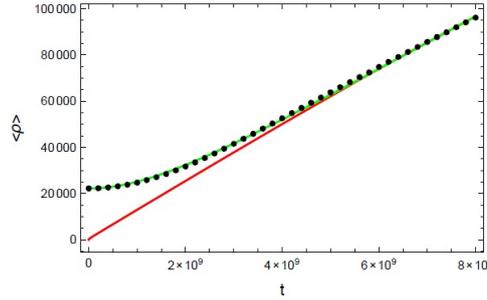


Figura 3.8:

Si vede dal grafico in Fig.(3.8) che esiste una scelta di μ ($\mu = 3.08 \cdot 10^5$ nella scelta dei parametri fatta) per cui l'andamento di $\rho(t)$ ottenuto con l'approccio ai polimeri semiclassico coincide con il valore di aspettazione $\langle \hat{\rho} \rangle_t$ ottenuto con l'approccio quantistico impiegato in precedenza.

Nello specifico, la linea rossa rappresenta la traiettoria classica di $\rho(t)$, quella verde rappresenta la traiettoria ottenuta con l'approccio ai polimeri, e i punti sono i valori di aspettazione di $\langle \hat{\rho} \rangle_t$.

Si vede quindi che nei pressi di una singolarità la presenza di una costante cosmologica si comporta come una modifica alla grandezza discreta nella dinamica ai polimeri.

Si può quindi cercare una diretta e più profonda correlazione tra la suddetta costante cosmologica Λ e l'unico valore che si può liberamente modificare, ovvero

il parametro μ .

Graficando l'andamento di μ in funzione di Λ si ottiene il grafico logaritmico seguente (Fig(3.9)), in cui ogni linea corrisponde a diversi valori di $\{k', k_+, k_-\}$ nel calcolo del valore di aspettazione di $\langle \hat{\rho} \rangle_t$.

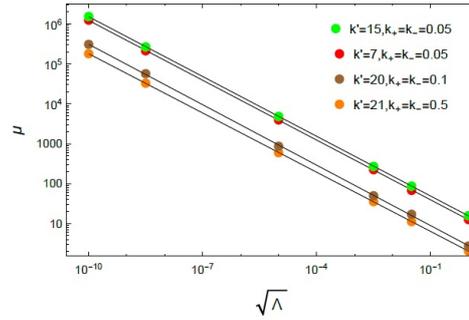


Figura 3.9:

La relazione che si ottiene, in forma logaritmica, tra Λ e μ è

$$\log \mu = \log \alpha_k - \frac{1}{2} \log \sqrt{\Lambda} \quad (3.56)$$

che diventa

$$\mu^2 \sqrt{\Lambda} = \alpha_k^2, \quad (3.57)$$

dove i valori α_k dipendono dai parametri $\{k', k_+, k_-\}$. E' quindi evidente una legge tra il fattore di scala della dinamica ai polimeri e la costante cosmologica del modello di Universo di Bianchi.

Capitolo 4

Conclusioni

In conclusione discutiamo i risultati ottenuti. Si è visto come anche in un Universo descritto nei suoi istanti iniziali da un funzionale quantistico di Wheeler-DeWitt, strumento fondamentale per la descrizione del Cosmo "appena nato", si può trovare una relazione tra le grandezze dinamiche proprie della Meccanica Quantistica e le grandezze "classiche" (i.e. Costante Cosmologica) della Cosmologia.

Si è indagato quindi proprio il rapporto tra la Meccanica Quantistica e la Cosmologia del Big Bang, ottenendo una soluzione di Universo oscillante, "costretto" tra una singolarità iniziale e una finale.

Si è inoltre dotata la singolarità finale di una natura propria del "Big Bounce", mettendola in relazione alla presenza di una costante cosmologica negativa, caratteristica del comportamento "ciclico" dell'Universo ottenuto.

Lo studio proposto riguarda l'Universo omogeneo dominato da "polvere", che ha definito anche la particolare scelta di coordinate, generalizzata solo successivamente grazie alle condizioni di Gauss sulla metrica.

Si conclude quindi descrivendo l'intera Cosmologia studiata.

L'Universo iniziale, originato attraverso un "*tunneling dal nulla*", si espande a partire dalla singolarità iniziale prevista dal modello di Universo di Bianchi I. Le grandezze iniziali sono quantistiche, e sono ben descritte dal funzionale d'onda di Wheeler-DeWitt; l'evoluzione dell'Universo le porta nell'Universo "attuale" a coincidere con le grandezze classiche. La presenza di una densità di energia positiva è garantita dall'aver considerato un Universo dominato da "polveri", e dalla scelta particolare dei valori associati alle grandezze quantistiche. La presenza di una costante cosmologica negativa porta l'Universo ad assumere, dopo aver raggiunto un "*turning point*", una fase opposta a quella iniziale di espansione: l'Universo si contrae tendendo verso la singolarità finale prevista dal modello di Bianchi I (l'andamento è analogo al caso di un Universo di Bianchi IX, a patto che il termine di potenziale sia trascurabile). E' in questo momento che la natura quantistica del modello permette di evitare la singolarità propria del Big Crunch e

a donare all'Universo la caratteristica ciclica, portando ancora una volta i fattori di scala dell'Universo di Bianchi (che è omogeneo ma non isotropo), a cambiare in modo indipendente l'uno dall'altro: dopo un periodo di "transizione" l'Universo assume di nuovo la proprietà di espansione inflazionaria, entrando in una nuova evoluzione.

Bibliografia

- [1] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *The Dynamics of General Relativity*, "Gravitation: an introduction to current research", Louis Witten ed., Wiley, New York, 7, (1962), 227
- [2] Y.F. Cai, D. A. Easson, R. Brandenberger, *Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology*, JCAP08(2012)020
- [3] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160** (1967), 1113
- [4] D. Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publications, Inc. (1951), New York
- [5] A Fundamental Exposition by H. Everett III, with papers by J. A. Wheeler, B. S. Dewitt, L. N. Cooper and D. Van Vechten, N. Graham, Edited by B. S. DeWitt and N. Graham *The Many-Worlds Interpretation*, Princeton University Press (1973), Princeton, New Jersey
- [6] J. B. Hartle, *Initial conditions and quantum cosmology*, Proceedings of the Twenty-sixth Liege International Astrophysical Colloquium, Liege, Belgium (1986), 1-16
- [7] S.W.Hawking, *The quantum state of the universe*, Nuclear Physics B **239** (1984), 257
- [8] A. Vilenkin, *Approaches to quantum cosmology*, Phys. Rev. D **50** (1994), 2581
- [9] D. J. Griffiths, D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (2018), Cambridge, United Kingdom
- [10] S. Capozziello, M. De Laurentis, *F(R) theories of gravitation*, Scholarpedia, 10(2):31422 (2015), doi:10.4249/scholarpedia.31422
- [11] W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological*, Oxford University Press Inc. (2001), New York

- [12] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, Living Reviews in Relativity 4 (1999), 2001
- [13] A. Vilenkin, *Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model*, Phys. Rev. D **32**, (1985), 2511
- [14] G. Montani, A. Marchia, R. Moriconi, *Bianchi I model as a prototype for a cyclical Universe*, Phys. Let. B **777** (2018), 191
- [15] E. Russell, C. B. Kilinc, O. K. Pashaev, *Bianchi I Model: An Alternative Way To Model The Presentday Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **442** (2014), 2331
- [16] A. Pontzen, *Bianchi universes*, Scholarpedia, 11(4):32340. doi:10.4249/scholarpedia.32340 (2016)
- [17] A. Pontzen, A. Challinor, *Linearization of homogeneous, nearly-isotropic cosmological models*, Class. Quant. Grav. **28**, (2011) 185007
- [18] R.M. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant*, Phys. Rev. D **28** (1983), 2118
- [19] R.M. Wald, *Oscillating Universes*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **275**, (1995), 850
- [20] R. Brandenberger, P. Peter, *Bouncing Cosmologies: Progress and Problems*, Foundations of Physics **47**, (2017), 797
- [21] P. J. Steinhardt, N. Turok, *The Cyclic Model Simplified*, New Astron. Rev. **49** (2005), 43
- [22] C. W. Misner, *Mixmaster Universe*, Phys. Rev. Letters, **22**, (1969), 1071
- [23] J. D. Barrow, C. Ganguly, *Cyclic mixmaster universes*, Phys. Rev. D **95**, (2017), 083515
- [24] R. Moriconi, G. Montani, S. Capozziello, *Big-bounce cosmology from quantum gravity: the case of cyclical Bianchi I Universe*, Phys. Rev. D **94**, (2016), 023519
- [25] R. Brandenberger, *The Matter Bounce Alternative to Inflationary Cosmology*, arXiv:1206.4196 [astro-ph.CO]
- [26] A. Corichi, T. Vukasinac, J.A. Zapata, *Polymer Quantum Mechanics and its Continuum Limit*, Phys. Rev. D **76**, (2007), 044016

