

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Il monopolio magnetico

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Candidato:
Giorgio Magliocco
Matricola:
N85000657

Anno Accademico 2019-2020

INTRODUZIONE

L'esistenza o meno di particelle con carica magnetica è uno delle domande ancora aperte della fisica moderna. La contrapposizione tra l'abbondanza di testimonianze empiriche dell'esistenza di cariche elettriche e l'assenza completa di prove della presenza nell'universo del loro corrispettivo magnetico, nonostante i notevoli sforzi tecnologici profusi, è sicuramente vista da alcuni come una risposta negativa alla domanda di cui sopra. È assolutamente sensato chiedersi il perché di un interesse ancora vivo della comunità scientifica per degli oggetti fisici che potrebbero non essere celati ai nostri strumenti d'indagine in quanto semplicemente non esistere. Ci sono innumerevoli risposte a questa domanda e questa tesi certamente non promette di fornirle tutte. Un motivo ci è sicuramente fornito dagli studi di Paul Dirac, che riuscì, come vedremo nel corso di questa trattazione, a trovare una connessione tra l'esistenza dei monopoli e la risposta a un'altra domanda aperta della fisica fondamentale, ossia "l'origine" della quantizzazione della carica elettrica. Menzioniamo inoltre che, come dimostrato da 't Hooft e Polyakov in un articolo del 1974, i monopoli magnetici emergono spontaneamente in determinate teorie di gauge note come GUT (Grand unified theories) che sinora hanno riscosso un notevole successo nell'interpretazione dei dati sperimentali in contesti piuttosto ampi. I monopoli magnetici si possono studiare da molte prospettive e con molti strumenti, che ne evidenzino di volta in volta aspetti differenti e diversamente interessanti. Questa tesi si concentrerà sullo studio classico dei sistemi di particelle aventi carica magnetica, oltre che elettrica. Uno degli obiettivi principali sarà quello di esplicitare le caratteristiche del moto di questi sistemi, determinandone le leggi di forza, la geometria e alcune costanti del moto. La convinzione è quella che, definire nel dettaglio le peculiarità del moto dei monopoli, sia un passo fondamentale per l'interpretazione corretta dei risultati degli esperimenti che ne potrebbero rilevare l'esistenza. Più nel dettaglio la struttura della tesi sarà la seguente: nel capitolo 1 spiegheremo il legame tra l'esistenza dei monopoli e le equazioni di Maxwell, dopodiché ricaveremo le equazioni di forza e le costanti del moto, nel capitolo 2 determineremo la geometria del moto nonché alcuni elementi del formalismo hamiltoniano, nel capitolo 3 parleremo del potenziale vettore associato al campo d'induzione magnetica in presenza di un monopolio magnetico e ricaveremo la condizione di quantizzazione (l'unico momento in cui faremo uso della meccanica quantistica) e infine, nel capitolo 4, dedicato alle conclusioni, accenneremo a uno dei metodi tramite i quali è condotta la ricerca di particelle con carica magnetica.

CAPITOLO 1

CARICHE MAGNETICHE

1.1 Il problema della carica magnetica nella fenomenologia dell'elettromagnetismo

Quello che attualmente è chiamato elettromagnetismo classico è una branca della fisica che ha avuto uno sviluppo massiccio nel corso del diciannovesimo secolo ed ha conseguito lo strabiliante risultato di inserire una molteplicità di fenomeni, alcuni dei quali noti all'uomo da tempi immemori, altri scoperti proprio grazie ai suggerimenti che questa teoria ha dato, in un quadro teorico non ambiguo e popolato, da pochi "elementi", specialmente se raffrontato col quantitativo enorme di risultati empirici ai quali ha fornito una spiegazione. Sotto questo punto di vista l'elettromagnetismo ha rappresentato una delle sintesi più eleganti partorite dal pensiero umano ed un'espressione brillante del paradigma riduzionistico che permea tuttora il pensiero "occidentale". Le equazioni di Maxwell, che sono i postulati dell'elettromagnetismo, istituiscono delle relazioni tra delle quantità dette campo elettrico e campo magnetico, e tra queste ultime e delle distribuzioni spaziali statiche o dinamiche di un'altra quantità, detta la carica elettrica. Fissato un sistema di riferimento quindi, la carica elettrica è un'entità che, semplicemente occupando una posizione fissa nello spazio, genera un campo elettrico statico e, attraverso il suo moto, genera un campo magnetico, oltre che un campo elettrico variabile. Notiamo quindi da subito "un'asimmetria" nelle equazioni di Maxwell (che sarà espressa matematicamente nel prossimo paragrafo): mentre è prevista un'entità, la carica elettrica, che genera un campo elettrico e magnetico come appena spiegato, non è prevista una carica magnetica che, da ferma, generi il campo magnetico e in moto generi il campo elettrico, oltre che un campo magnetico variabile. Quella che, da un punto di vista matematico, può sembrare "un'anomalia", rende conto, tra gli altri, di un risultato sperimentale noto da millenni e che, espresso nei termini dell'elettromagnetismo è il seguente: non è possibile dividere un magnete in più frammenti in modo che anche solo uno di questi non sia a sua volta un magnete, ossia presenti un polo nord e un polo sud. Questo dato empirico è consistente con l'affermazione che le linee di campo magnetico sono chiuse, il che è espresso dall'equazione di Maxwell che afferma che il rotore del campo magnetico è diverso da zero. Per quanto riguarda "l'orientamento" delle linee di campo queste risultano uscenti dal polo nord del

magnete ed entranti nel polo sud. Ciò si traduce nell'equazione di Maxwell che asserisce che, in ogni punto dello spazio, la divergenza del campo magnetico è nulla. Globalmente questo significa che il flusso del campo magnetico attraverso qualunque superficie chiusa è nulla, il che, per il teorema di Gauss, esprime l'assenza, nel volume considerato, di una sorgente che sia l' analogo magnetico della carica elettrica. Ad ora, in nessun esperimento è stata mai osservata una particella con carica magnetica ma, il ruolo rilevante che le simmetrie rivestono in ogni branca della fisica fondamentale e altre motivazioni, una delle quali sarà chiarita nel secondo capitolo di questo testo, ci portano a supporre, o quantomeno a sperare, che non sarà così ancora a lungo. L'avanzamento della tecnologia ha infatti ampliato notevolmente le possibilità d'indagine del mondo fisico che ci circonda e non è da escludere che, un giorno, possano considerarsi realizzabili le condizioni che renderebbero osservabili i monopoli magnetici, qualora esistessero. Per il resto di questa trattazione partiremo quindi dal presupposto che particelle con carica magnetica esistano e chiameremo quelle dotate sia di carica elettrica che magnetica col termine *dioni*.

1.2 Equazioni di Maxwell e simmetrie di dualità

Iniziamo ricordando che le equazioni di Maxwell, nel vuoto e in assenza di cariche elettriche, sono simmetriche per la sostituzione $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (-\mathbf{B}, \mathbf{E})$, dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrico e $\mathbf{B}$ il vettore d'induzione magnetica, che d'ora in poi chiameremo semplicemente "vettore campo magnetico". La simmetria di cui sopra viene violata se inseriamo nelle equazioni le cariche elettriche, tramite le relative densità di carica ρ_e e di corrente $\mathbf{J}_e$. È noto che le equazioni di Maxwell non contengono cariche magnetiche ma, se supponiamo che quest'ultime esistano, ed inseriamo le relative densità di carica ρ_m e di corrente di carica $\mathbf{J}_m$, otteniamo un nuovo set di equazioni che risulta nuovamente simmetrico per la medesima sostituzione appena vista, a patto di effettuare anche le trasformazioni $(\rho_e, \rho_m) \rightarrow (\rho_m, -\rho_e)$ e $(\mathbf{J}_e, \mathbf{J}_m) \rightarrow (\mathbf{J}_m, -\mathbf{J}_e)$. Le nuove equazioni ottenute saranno dette sono:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_e \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_m \\
 -(\partial\mathbf{E}/\partial t)/c + \nabla \wedge \mathbf{B} &= 4\pi\mathbf{J}_e \\
 -(\partial\mathbf{B}/\partial t)/c - \nabla \wedge \mathbf{E} &= 4\pi\mathbf{J}_m
 \end{aligned} \tag{1}$$

con le densità magnetiche che devono soddisfare le stesse equazioni di continuità viste per quelle elettriche. Varrà dunque la relazione $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = \partial \rho_m / \partial t$. Prima di analizzare le conseguenze osservabili di queste nuove equazioni che legano i campi elettrici e magnetici, definiamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}'_e \\ \mathbf{J}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_m \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (2b)$$

con θ parametro reale.

Queste applicazioni, dette *trasformazioni di dualità*, sono rotazioni negli spazi tra i quali sono definite. Sarebbe banale mostrare come, invertendo le (2a) e le (2b) e scrivendo le variabili $\rho_e \rho_m \mathbf{J}_e \mathbf{J}_m \mathbf{E} \mathbf{e} \mathbf{B}$ nella (1) in funzione delle $\rho'_e \rho'_m \mathbf{J}'_e \mathbf{J}'_m \mathbf{E}' \mathbf{e} \mathbf{B}'$, si ottengano delle equazioni, in termini delle variabili d'arrivo, che hanno la stessa identica forma delle equazioni nelle variabili di partenza. Il fatto che le (1) siano invarianti per trasformazioni di dualità implica che sia una convenzione, almeno classicamente, attribuire a una particella unicamente carica elettrica e non magnetica o viceversa. Posta quest'arbitrarietà rimane da chiarire se tutte le particelle che compongono la materia abbiano o meno lo stesso rapporto tra carica elettrica e magnetica. In caso positivo sarebbe sempre possibile scegliere un valore di θ nelle (2a) e (2b) tale che $\rho'_m = 0$ e $\mathbf{J}'_m = 0$ e renda dunque le equazioni (1) identiche alle equazioni di Maxwell nella forma che già conosciamo. Se scegliessimo, come è usuale, di conferire all'elettrone carica elettrica $q_e = -e$ e carica magnetica $q_m = 0$, la precisione dei dati sperimentali in nostro possesso ci porterebbero ad affermare che il protone avrebbe carica elettrica $q_e = +e$ e carica magnetica in modulo $|q_m| < 2 \cdot 10^{-24} e$, ossia praticamente nulla. Possiamo quindi affermare, con un esiguo margine d'errore, che le particelle che compongono la materia ordinaria possiedono unicamente carica elettrica oppure, in ultima analisi, che il rapporto tra la loro carica elettrica e quella magnetica è costante. Per quanto riguarda altre particelle elementari più instabili, invece, i limiti sulle loro cariche magnetiche, pur piccoli, possono essere maggiori.

1.3 Equazioni del moto di Newton

La forza $\mathbf{F}_{ab}$ che agisce su una particella A avente massa m_a , carica elettrica e_a e carica magnetica g_a , immersa nel campo di forze generato da una particella B avente massa m_b , carica elettrica e_b e carica magnetica g_b , è la seguente:

$$\mathbf{F}_{ab} = e_a[\mathbf{E}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{B}_{ab})/c] + e_a[\mathbf{B}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{E}_{ab})]/c$$

dove abbiamo chiamato $\dot{\mathbf{x}}_a$ la velocità della particella A e rispettivamente $\mathbf{E}_{ab}$ e $\mathbf{B}_{ab}$ i vettori campo elettrico e campo magnetico dovuti alla particella B.

Dedicheremo la maggior parte del presente paragrafo a chiarire l'origine dell'espressione di $\mathbf{F}_{ab}$ appena introdotta. Seguiremo un procedimento inverso rispetto a quello visto nel paragrafo precedente. Partiremo da una condizione nella quale entrambe le particelle, pur dotate per ipotesi, sia di carica magnetica che elettrica, mostrino unicamente quest'ultima. Ci porteremo poi, tramite trasformazioni di dualità, nella condizione in cui le due particelle manifestino entrambi i tipi di cariche.

In un sistema di riferimento solidale con la particella B, il campo generato dalla carica magnetica posseduta dalla particella B, che è radiale, è incorporabile in quello elettrico generato dalla stessa particella in virtù della sua carica elettrica. Fatta questa precisazione, ricordando che una carica elettrica non genera campo magnetico nel sistema in cui appare in quiete, dalle equazioni di Maxwell nel vuoto, il campo elettrico $\mathbf{E}_{ab}^\circ$ e quello magnetico $\mathbf{B}_{ab}^\circ$ nel punto $\mathbf{x}_a$, dovuti alla particella B, avente posizione $\mathbf{x}_b$, sono dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ab}^\circ &= e_b^\circ \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 \\ \mathbf{B}_{ab}^\circ &= 0\end{aligned}\tag{3}$$

Con $\mathbf{x}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ e $r_{ab} = |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$

Ricalcoliamo le stesse quantità in un sistema di riferimento in cui la particella B risulti in moto rettilineo uniforme con velocità $\dot{\mathbf{x}}_b$. Per far ciò ci avvaliamo delle trasformazioni di Lorentz che, nel limite $|\dot{\mathbf{x}}_b|/c \rightarrow 0$, ossia per velocità molto minori di quella della luce nel vuoto, ci forniscono le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{ab} &= e_b^\circ \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2) \\ \mathbf{B}'_{ab} &= (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{E}_{ab})/c + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2)\end{aligned}\quad (4)$$

Effettuiamo adesso una trasformazione di dualità che conferisca alla particella B una carica magnetica non nulla g'_b e che, chiaramente, modificherà anche la carica elettrica della stessa, rendendola e'_b . Tale trasformazione, dato che sinora la particella B è stata formalmente considerata priva di carica magnetica, assume la forma:

$$\begin{aligned}e'_b &= e_b^\circ \cos \theta \\ g'_b &= e_b^\circ \sin \theta\end{aligned}\quad (5a)$$

Come abbiamo già visto nel paragrafo precedente, il campo elettrico e quello di magnetico sono modificati da una trasformazione in cui la matrice ha gli stessi elementi di quelli della applicazione appena scritta:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}''_{ab} &= \mathbf{E}'_{ab} \cos \theta - \mathbf{B}'_{ab} \sin \theta \\ \mathbf{B}''_{ab} &= \mathbf{E}'_{ab} \sin \theta + \mathbf{B}'_{ab} \cos \theta\end{aligned}\quad (5b)$$

La particella A manifesta ancora solamente carica elettrica e_a° e ha una velocità $\dot{\mathbf{x}}_a$ dunque la forza a cui è sottoposta è data da:

$$\mathbf{F}''_{ab} = e_a^\circ [\mathbf{E}''_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{B}''_{ab})/c] \quad (6)$$

Ricaviamo in forma esplicita l'espressione dei campi:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}''_{ab} &= e'_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 - g'_b (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{x}_{ab}) / cr_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2) \\ \mathbf{B}''_{ab} &= g'_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 - e'_b (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{x}_{ab}) / cr_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2)\end{aligned}\quad (7)$$

Applichiamo infine una trasformazione di dualità alla particella A in modo che anche quest'ultima guadagni una carica magnetica non nulla g_a :

$$\begin{aligned} e_a &= e_a^\circ \cos \varphi \\ g_a &= e_a^\circ \sin \varphi \end{aligned} \quad (8a)$$

Le cariche della particella B si modificano quindi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e_b &= e'_b \cos \varphi - g'_b \sin \varphi \\ g_b &= e'_b \sin \varphi + g'_b \cos \varphi \end{aligned} \quad (8b)$$

e di conseguenza otteniamo i campi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ab} &= \mathbf{E}_{ab}'' \cos \varphi - \mathbf{B}_{ab}'' \sin \varphi \\ \mathbf{B}_{ab} &= \mathbf{E}_{ab}'' \sin \varphi + \mathbf{B}_{ab}'' \cos \varphi \end{aligned} \quad (8c)$$

Dalle (8c) usando la (7) e le (8b) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ab} &= e_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 - g_b (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{x}_{ab}) / cr_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2) \\ \mathbf{B}_{ab} &= g_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 - e_b (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{x}_{ab}) / cr_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_b^2/c^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Riscriviamo ora $\mathbf{F}_{ab}''$ al fine di verificare che questa coincide con $\mathbf{F}_{ab}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ab}'' &= e_a^\circ [\mathbf{E}_{ab}'' + (\dot{\mathbf{x}}_b \wedge \mathbf{B}_{ab}'')/c] \\ &= e_a^\circ [\mathbf{E}_{ab} \cos \varphi + \mathbf{B}_{ab} \sin \varphi \\ &\quad + \dot{\mathbf{x}}_a \wedge (-\mathbf{E}_{ab} \sin \varphi + \mathbf{B}_{ab} \cos \varphi) / c] \\ &= e_a^\circ \cos \varphi [\mathbf{E}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{B}_{ab})/c] + e_a^\circ \sin \varphi [\mathbf{B}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{E}_{ab})/c] \\ &= e_a [\mathbf{E}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{B}_{ab})/c] + e_a [\mathbf{B}_{ab} + (\dot{\mathbf{x}}_a \wedge \mathbf{E}_{ab})/c] = \mathbf{F}_{ab} \end{aligned}$$

Sostituendo le (9) nel penultimo membro dell'espressione precedente otteniamo:

$$\mathbf{F}_{ab} = (e_a e_b + g_a g_b) \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^3} + \frac{(e_a g_b - e_b g_a)}{c} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{ab} \wedge \mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^3} + O\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_b^2}{c^2}, \frac{\dot{\mathbf{x}}_a \cdot \dot{\mathbf{x}}_b}{c^2}\right)$$

Ricaviamo ora $\mathbf{F}_{ab}$ in alcuni casi particolari:

- a) Entrambe le particelle hanno esclusivamente carica magnetica ($e_a = 0, e_b = 0$):

$$\mathbf{F}_{ab} = g_a g_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_a \cdot \dot{\mathbf{x}}_b / c^2)$$

- b) Entrambe le particelle hanno esclusivamente carica elettrica ($g_a = 0, g_b = 0$):

$$\mathbf{F}_{ab} = e_a e_b \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3 + O(\dot{\mathbf{x}}_a \cdot \dot{\mathbf{x}}_b / c^2)$$

- c) Una particella ha unicamente carica elettrica, mentre l'altra ha puramente carica magnetica (*Ad esempio* $g_a = 0, e_b = 0$):

$$\mathbf{F}_{ab} = (e_a g_b / c) \dot{\mathbf{x}}_{ab} \wedge \mathbf{x}_{ab} / r_{ab}^3$$

In generale, ad ogni modo, come accade di frequente per i sistemi a due corpi, risulta conveniente descrivere il moto in termini della coordinata del centro di massa $\mathbf{X}$ e della coordinata relativa $\mathbf{x}$ ottenendo, tramite semplici passaggi algebrici, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{X}} &= 0 \\ m\ddot{\mathbf{x}} &= \alpha \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \beta \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}}{r^3} \end{aligned} \quad (10)$$

dove $r = |\mathbf{x}|$ ed M e m sono rispettivamente la massa totale e la massa ridotta del sistema.

Inoltre abbiamo posto:

$$\begin{aligned} \alpha &= e_a e_b + g_a g_b \\ \beta &= (e_a g_b - e_b g_a) / c \end{aligned}$$

Dalla (10) deduciamo che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema di riferimento scelto, dunque ci disinteresseremo del suo moto, concentrando questa trattazione unicamente sullo studio del moto nella coordinata relativa $\mathbf{x}$, salvo un piccolo appunto nel paragrafo successivo.

1.4 Costanti del moto

In questa sezione sfrutteremo le leggi di forza ricavate nel paragrafo precedente e riportate nelle equazioni (10), per dedurre alcune costanti del moto di un sistema formato da due dioni in interazione.

Dalla prima delle (10) ricaviamo immediatamente la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del centro di massa. La seconda equazione delle (10) ha invece delle implicazioni meno immediate, che ci accingiamo ad affrontare. In primis notiamo che, nonostante il campo di forze non sia centrale, si conserva l'energia meccanica del sistema

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \alpha/r$$

questo perché $E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + U$ dove $U = - \int (\alpha \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \beta \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}}{r^3}) d\mathbf{x}$ e spezzando l'integrale nella somma di due integrali il primo dà come risultato α/r , mentre il secondo fornisce un contributo nullo, data l'ortogonalità tra i vettori $\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}$ e $d\mathbf{x}$. Il risultato appena trovato equivale a dimostrare che la forza derivante dal campo magnetico generato da un dione non compie lavoro.

Diversamente, potremmo facilmente dimostrare come, proprio a causa del termine in $\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}$ che compare nella legge di forza, non si conservi il momento angolare $\mathbf{l} = \mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}$.

Calcoliamo ora il momento della forza scegliendo come polo l'origine:

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \wedge (\alpha \mathbf{x}/r^3 + \beta \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}/r^3) = \beta \mathbf{x} \wedge (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x})/r^3$$

Sfruttando la nota identità vettoriale $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ abbiamo

$$\mathbf{M} = \beta [\dot{\mathbf{x}} r^2 - \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})]/r^3$$

Usando la regola di derivazione di *Leibnitz* con pochi calcoli giungiamo all'equazione:

$$d/dt(\beta \mathbf{x}/r) = \beta \mathbf{x} \wedge (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x})/r^3$$

Ma per definizione abbiamo che $\mathbf{M} = d\mathbf{l}/dt$, quindi:

$$d/dt(\mathbf{l} - \beta \mathbf{x}/r) = 0$$

Quest'ultima relazione esprime una legge di conservazione per la quantità:

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} - \beta \mathbf{x}/r \quad (11)$$

Che chiameremo *momento angolare di Poincaré*

Anticipiamo ora un risultato, che tratteremo dettagliatamente nel prossimo paragrafo, anche se non nella sua forma più generale. Il momento angolare orbitale $\mathbf{l}$, infatti, compie un moto di precessione attorno all'asse su cui giace il momento angolare di Poincaré $\mathbf{L}$. È immediato far notare come, nonostante $\mathbf{l}$ non si conservi, il suo modulo sia una costante del moto, infatti:

$$\mathbf{L}^2 = (\mathbf{l} - \beta \mathbf{x}/r)^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} + \beta^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}/r^2 - 2\beta \mathbf{l} \cdot \mathbf{x}/r$$

Ma:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Quindi:

$$\mathbf{l}^2 = \mathbf{L}^2 - \beta^2 = \text{cost}$$

essendo sia $\mathbf{L}^2$ che β^2 costanti.

Abbiamo ricavato dunque che, benché il moto non sia piano perché il vettore $\mathbf{l}$ non è costante, sussiste comunque una conservazione analoga a quella espressa da una delle leggi di Keplero sul moto planetario. Infatti la costanza del modulo di $\mathbf{l}$ implica, seguendo gli stessi calcoli affrontati da Keplero, che il vettore $\mathbf{x}$ spazia aree uguali in tempi uguali, ossia si sposti con una velocità areale costante, data da $|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}|$.

Una volta trovate queste costanti del moto valide per tutte le coppie di dioni in interazione, concentriamo la nostra attenzione su una particolare sottoclasse di sistemi, ossia quelli in cui una particella ha solo carica elettrica mentre l'altra ha puramente carica magnetica. In questi sistemi la seconda delle (10), per la quale ora abbiamo $\alpha = 0$, assume la forma:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \beta \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}}{r^3} \quad (12)$$

La forza e dunque l'accelerazione risultano perpendicolari al vettore velocità e questo comporta immediatamente l'esistenza della costante del moto $|\dot{\mathbf{x}}|$. Infatti:

$$d/dt(\dot{\mathbf{x}}^2) = d/dt(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = 2\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 0$$

Ricaviamo adesso un'espressione della distanza tra le due particelle. Partiamo dalla considerazione che, utilizzando due volte la regola di derivazione di *Leibnitz*, si ha:

$$d^2/dt^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 2\dot{\mathbf{x}}^2$$

Integrando rispetto al tempo entrambi i membri di questa relazione abbiamo

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}^2 t + A$$

Da cui, ponendo la costante arbitraria A uguale a $-2\Gamma/m$, per motivi che saranno chiariti in seguito, otteniamo:

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}^2 t - 2\Gamma/m \quad (13)$$

Integriamo anche quest'espressione e otteniamo:

$$r^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 t^2 - 4\Gamma t/m + C$$

Possiamo riscrivere quest'ultima quantità sommando e sottraendo $4\Gamma^2/\dot{\mathbf{x}}^2 m^2$ ottenendo:

$$r^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 (t - 2\Gamma/\dot{\mathbf{x}}^2 m)^2 + (C - 4\Gamma^2/\dot{\mathbf{x}}^2 m^2)$$

da cui ricaviamo la distanza minima tra le due particelle:

$$r_{min} = \sqrt{C - 4\Gamma^2/\dot{\mathbf{x}}^2 m^2}$$

Riguardo Γ , per ora ci basti sapere che è una costante del moto benché la sua dipendenza dal tempo nella (13) sembri suggerire il contrario. Questo sarà dimostrato in un successivo paragrafo in cui si spiegherà il legame tra la costante Γ e l'invarianza da riscaldamento dell'equazione del moto (12).

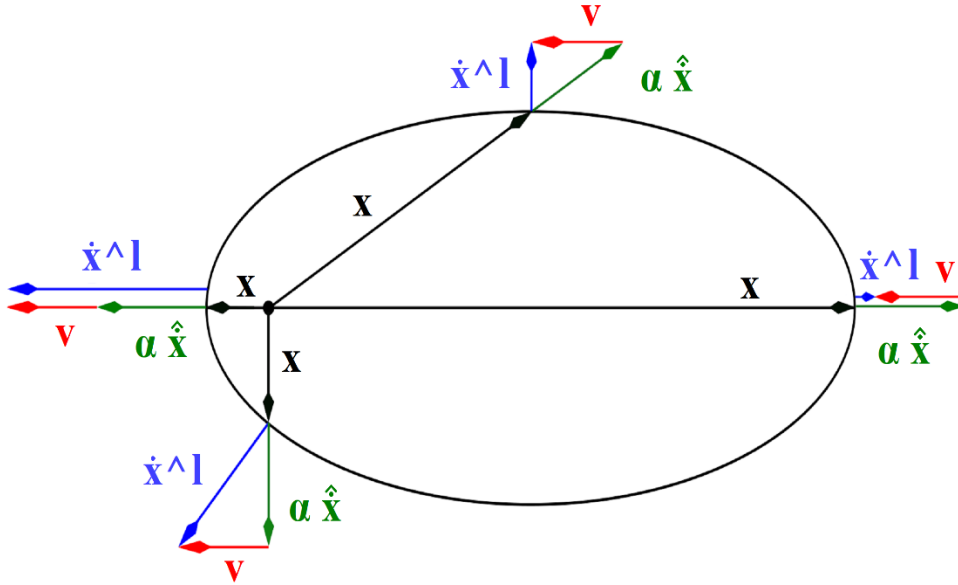
Prima di introdurre la prossima costante del moto richiamiamo al lettore la definizione di *vettore di Runge-Lenz*, propria dei sistemi Kepleriani, ossia in cui due corpi puntiformi interagiscono con forze centrali aventi intensità inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Se $\mathbf{x}$ è la posizione di un corpo rispetto all'altro ed m è la massa ridotta del sistema risulta ovviamente che:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{x} / r^3$$

Con α negativa e da non confondere con quella incontrata in precedenza. Il vettore di *Runge-Lenz*, che indichiamo con $\mathbf{v}$, è una costante del moto di tali sistemi ed è dato da:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{l} + \alpha \mathbf{x} / r$$

Questo vettore è diretto dal fuoco dell'orbita ellittica descritta dal vettore $\mathbf{x}$, al punto della traiettoria a distanza minore dal fuoco. In tale posizione $\dot{\mathbf{x}}$ è perpendicolare a $\mathbf{x}$.



Abbiamo visto che esiste una costante vettoriale, per i sistemi Kepleriani, che è funzione di $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ ed $\mathbf{l}$ e come, nei sistemi formati da coppie di dioni, il vettore $\mathbf{L}$ si conservi, analogamente a quanto accade con $\mathbf{l}$ nei sistemi caratterizzati da forze centrali. In questo senso cercheremo ora una costante per il nostro sistema che sia una funzione di $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ ed $\mathbf{L}$ e che rappresenterà l'analogo, per sistemi descritti dall'equazione (12), del vettore di *Runge-Lenz* per i sistemi kepleriani.

Introduciamo dunque un vettore $\mathbf{W}$ definito come segue:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{L} \quad (14)$$

Affinché $\mathbf{W}$ sia un vettore, i coefficienti di tale combinazione lineare devono essere scalari e dunque possono essere funzioni unicamente delle quantità $\mathbf{x}^2, \dot{\mathbf{x}}^2$ e $\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$. Per ricercare i coefficienti per i quali $\mathbf{W}$ risulta una costante del moto calcoliamo:

$$\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{L} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$$

Ricordando che $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, esplicitando $\mathbf{L}$ funzione di $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$, usando la (12) e imponendo che i coefficienti dei in $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ siano contemporaneamente nulli si perviene al sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{R} - (\mu^2/r^4)V &= 0 \\
R + \dot{V} &= 0 \\
\dot{S} - (\mu/mr^3)V &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Con $\mu = \beta/m$

Per risolvere questo sistema introduciamo l'angolo φ , complementare a quello tra i vettori $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$, da cui ricaviamo:

$$|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}| = r |\dot{\mathbf{x}}| \cos \varphi$$

e dunque

$$\cos \varphi = s/rv$$

dove per semplificare la notazione abbiamo rinominato con s la velocità areale $|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}|$ e con v il modulo della velocità $|\dot{\mathbf{x}}|$.

Notando che:

$$d/dt = (d\varphi/dt)(d/d\varphi) = (s/r^2v)(d/d\varphi)$$

Possiamo sostituire le derivate temporali con le derivate angolari nelle (15) e ottenere il sistema:

$$\begin{aligned}
dR/d\varphi - (\mu v \cos \varphi)^2/s &= 0 \\
R + (dV/d\varphi) (\cos \varphi v)^2/s &= 0 \\
dS/d\varphi - V(\mu v \cos \varphi)/ms^2 &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Ponendo adesso $F = V \cos \varphi$ ed eliminando R troviamo:

$$d^2F/d\varphi^2 - (1 + \mu^2/s^2)F = 0$$

Ossia un'equazione differenziale del secondo ordine, a coefficienti costanti e omogenea. Dall'integrale generale di quest'equazione, esplicitando F otteniamo:

$$V = (A \sin[\varphi \sqrt{(1 + \mu^2/s^2)}] + B \cos[\varphi \sqrt{(1 + \mu^2/s^2)}])/\cos \varphi \tag{17}$$

con A e B costanti fissate dalle condizioni iniziali.

Sostituendo il coefficiente V, appena determinato, nelle (16) possiamo ricavare R ed S e dunque ottenere $\mathbf{W}$. È possibile dare più semplicemente un'interpretazione geometrica del vettore costante $\mathbf{W}$, fissando le condizioni iniziali in modo che $B=0$ nella (16). Infatti in tal caso, per $\varphi = 0$, ossia per $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ ortogonali, $V=0$ e dunque, dalla (14) risulta:

$$\mathbf{W} = R\mathbf{x}(\varphi = 0) + S\mathbf{L}$$

Con $\mathbf{x}(\varphi = 0)$ che indica il punto della traiettoria più vicino all'origine, cioè quello per il quale $\mathbf{x}$ risulta è perpendicolare a $\dot{\mathbf{x}}$. Abbiamo dunque trovato l'analogo del vettore di *Runge-Lenz* per il nostro sistema e denoteremo tale vettore con $\mathbf{V}$. Su quest'ultima affermazione faremo una precisazione nel prossimo capitolo, dopo aver determinato con maggior dettaglio altri aspetti geometrici del moto. In generale il vettore $\mathbf{W}$ è una combinazione di $\mathbf{V}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L} \wedge \mathbf{V}$ e presenta singolarità unicamente per $\varphi = \pm\pi/2$, cioè per $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ paralleli. Una condizione del genere, ossia un moto radiale, si verifica solo per una distanza infinita tra le due particelle, quindi tali condizioni di divergenza non hanno significato fisico e possono essere ignorate.

CAPITOLO 2

INTERAZIONI CLASSICHE

2.1 Geometria del moto

In questo paragrafo di accingiamo a dimostrare quanto anticipato in merito al moto di precessione del momento angolare di Poincaré, restringendoci però al caso particolare di una particella con carica elettrica, in moto in una regione di spazio in cui sia presente il campo generato da una carica magnetica fissa.

Notiamo subito che il nostro proposito può essere indirettamente, ma facilmente, raggiunto, mostrando che la particella con carica elettrica, la cui posizione rispetto al monopolo magnetico è indicata dal vettore $\mathbf{x}$, descrive nel suo moto una spirale sulla superficie di un cono, nel cui vertice sia posto il monopolo magnetico e sul cui asse giaccia il vettore di Poincaré $\mathbf{L}$, definito nella (11).

Per mostrare come la traiettoria sia poggiata su di un cono, ci basterà ricavare come l'angolo ρ tra i vettori $\mathbf{L}$ e $\mathbf{x}$ sia una costante del moto. Calcoliamo dunque:

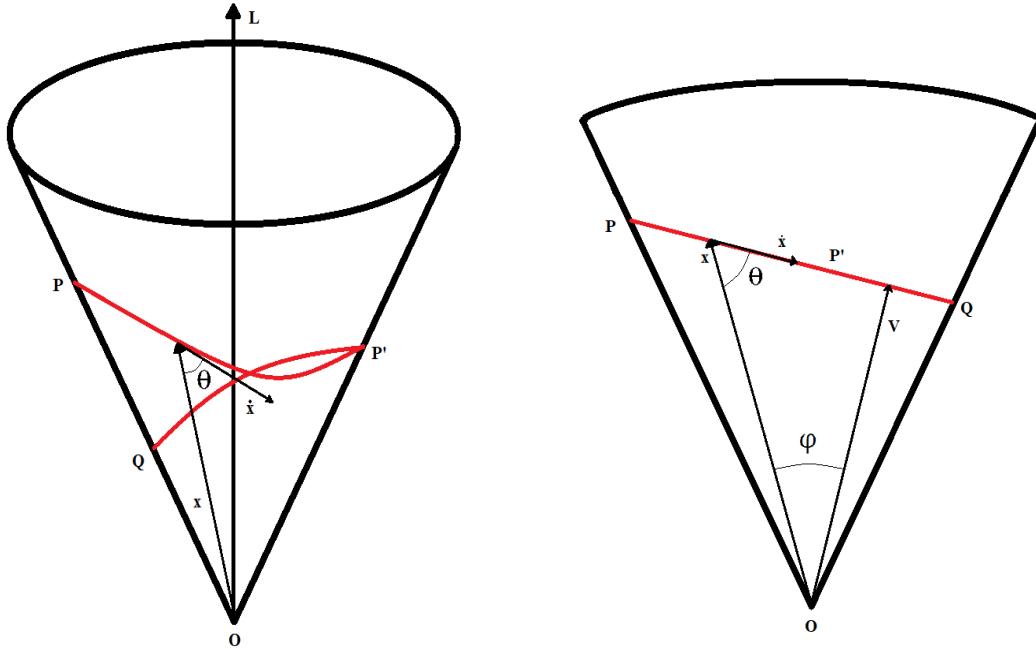
$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{x}/r - \beta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}/r$$

Il primo termine del secondo membro dell'equazione precedente può essere riscritto usando l'identità vettoriale $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$ e ottenendo dunque la relazione:

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\beta$$

Ricordiamo che β è una costante e $-\beta = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}} = |\mathbf{L}| \cos \rho$, dunque ρ è a sua volta costante. Per dimostrare che la traiettoria è una spirale evidenziamo, in primis, come un qualunque suo tratto sia una geodetica su una superficie conica. Uno dei modi per ottenere questo risultato sarebbe mostrare che il campo di forza è ortogonale, punto per punto, alla superficie del cono su cui si svolge il moto, ma qui proponiamo un metodo più semplice, che sfrutta esplicitamente una caratteristica della superfici coniche. Una curva su una superficie conica, infatti, è una geodetica se e solo se, nello sviluppo su di un piano di tale superficie, la curva si trasforma in un gruppo di segmenti paralleli. Ad ogni segmento corrisponderà “un giro” della particella intorno al cono, dove l'inizio e la fine di ogni giro è segnalato dal passaggio del punto materiale per due posizioni puntate

dallo stesso versore $\hat{\mathbf{x}}$. Per semplicità abbiamo rappresentato in figura la traiettoria sul cono corrispondente ad un solo giro e il relativo sviluppo in un singolo segmento.



Come evidenziato nelle figure, il fatto che i vettori $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ siano tangenti al cono fa sì che questi giacciono nel piano tangente alla superficie conica nel punto in cui sono applicati e dunque l'angolo θ tra i due vettori risulti inalterato nello sviluppo, su di un piano, di tale superficie.

Da

$$|\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}| = |\dot{\mathbf{x}}| |\mathbf{x}| \sin \theta$$

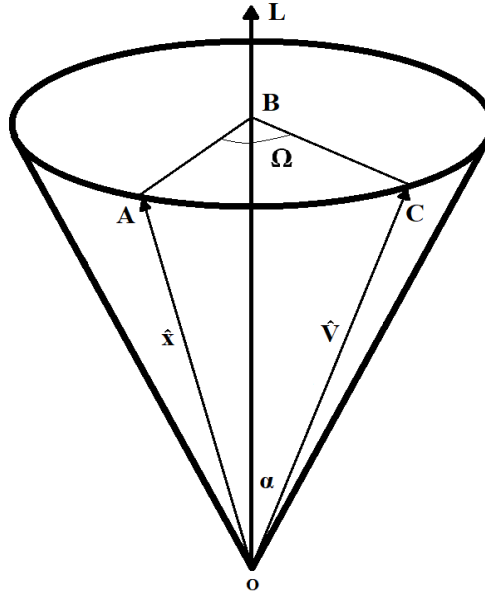
ricordando che $|\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}|$ e $|\dot{\mathbf{x}}|$ sono costanti del moto si ottiene che anche $|\mathbf{x}| \sin \theta$ è una costante e dunque la curva passante per i punti PP' e Q nella figura a destra è un segmento. È interessante far notare che, per costruzione geometrica, $|\mathbf{x}| \sin \theta$ corrisponde al modulo del vettore $\mathbf{V}$ incontrato nel paragrafo precedente.

Osserviamo ora che, data la seguente relazione:

$$(d/dt)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \wedge (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x})/r^3 = (\mathbf{L} \wedge \hat{\mathbf{x}})/r^2$$

il moto del versore $\hat{\mathbf{x}}$ è una rotazione, intorno all'asse su cui giace il vettore $\mathbf{L}$, con velocità angolare variabile $|\mathbf{L}|/r^2$. I risultati appena ottenuti non bastano ancora a dimostrare che la traiettoria seguita dalla particella sia una spirale. Sulla

superficie di uno cono infatti esistono geodetiche che delineano traiettorie chiuse, come ad esempio l'ellisse. Completeremo la dimostrazione nel prossimo paragrafo, una volta esplicitato un formalismo hamiltoniano per il nostro problema. Alla luce delle considerazioni geometriche introdotte nel presente paragrafo diamo ora un'ulteriore caratterizzazione del vettore $\mathbf{W}$, mostrando come l'angolo $\varphi\sqrt{(1 + \mu^2/s^2)}$, che compare nella (17), sia esattamente quello che il piano contenente i vettori $\mathbf{V}$ ed $\mathbf{L}$ forma con quello in cui giacciono i vettori $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{L}$.



Chiamiamo α la semiapertura del cono e definiamo i segmenti $OC \equiv \hat{\mathbf{V}}$ e $OA \equiv \hat{\mathbf{x}}$. Indichiamo con OB il segmento che giace lungo la direzione del vettore di Poincaré $\mathbf{L}$ e ha modulo $\cos \alpha$, come in figura. Detto Ω l'angolo formato dall'intersezione dei piani OCB e OAB , per definizione, la sua misura è data dal rapporto tra l'arco AC e il segmento AB . Dato che gli angoli tra i vettori che giacciono su una superficie conica vengono conservati nel suo sviluppo su un piano è evidente che $AC = \varphi$. Da questa considerazione, notando che $AB = \sin \alpha$, ricaviamo che $\Omega = \varphi / \sin \alpha$. Osservando ora che:

$$\sin \alpha = (1 + \mu^2/s^2)^{-1/2}$$

$$\Omega = \varphi\sqrt{(1 + \mu^2/s^2)}$$

abbiamo che

$$\cos[\varphi\sqrt{(1 + \mu^2/s^2)}] = (\hat{\mathbf{V}} \wedge \mathbf{L}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{L}) / |\hat{\mathbf{V}} \wedge \mathbf{L}| |\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{L}|$$

2.2 Formalismo Hamiltoniano

In questo paragrafo ricaveremo una possibile funzione hamiltoniana per un sistema formato da due dioni in interazione. Questo passaggio, oltre ad avere un valore nell'ambito dello studio classico del sistema in esame, sarebbe necessario qualora volessimo impostare il problema da un punto di vista quantistico. Una nota hamiltoniana per una particella con carica elettrica q , in moto in un campo magnetico è la seguente:

$$H = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m + U(\mathbf{x})$$

dove $\mathbf{p}$ è l'impulso, m e q sono rispettivamente la massa e la carica della particella, $U(\mathbf{x})$ è un'energia potenziale e $\mathbf{A}$ è il potenziale vettoriale, dal quale è possibile ottenere il campo magnetico calcolandone il rotore. Facciamo notare tuttavia che, per motivi che saranno dettagliati nel terzo capitolo, il fatto che, in presenza di un monopolio magnetico, la divergenza del vettore $\mathbf{B}$ non sia ovunque nulla, come si vede dalle (10), non ci permette di trovare un potenziale vettore tale che $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ in tutto lo spazio.

Occorre dunque cercare un'altra hamiltoniana che non richiami esplicitamente un potenziale vettore e, per far ciò, sarebbe conveniente passare preliminarmente attraverso il formalismo lagrangiano, per giungere a quello hamiltoniano. In realtà anche questo caso incontriamo un ostacolo, in quanto non è possibile scrivere una lagrangiana per il nostro sistema usando come coordinata la posizione relativa $\mathbf{x}$, usata sinora. Tale lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, infatti, sarebbe una funzione scalare, ossia $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = F(\mathbf{x}^2, \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}^2, t)$. Dunque le quantità:

$$\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 2x_i [\partial F / \partial (\mathbf{x}^2)] + \dot{x}_i [\partial F / \partial (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x})]$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_i = 2\dot{x}_i [\partial F / \partial (\dot{\mathbf{x}}^2)] + x_i [\partial F / \partial (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x})]$$

sostituite nelle equazioni di Eulero non potrebbero portare alla:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \alpha \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \beta \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}}{r^3}$$

Esiste fortunatamente un metodo per ottenere un'hamiltoniana per il nostro sistema che si basa su semplici passaggi geometrici. Dati i due vettori $\mathbf{L}$ e $\mathbf{x}$ è possibile ottenere un vettore $\mathbf{y}$ ortogonale a $\mathbf{L}$, contenuto nel piano individuato da $\mathbf{L}$ e $\mathbf{x}$, tramite il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, dunque:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} / \mathbf{L}^2)\mathbf{L}$$

Lo stesso procedimento può essere seguito per la coppia di vettori $\mathbf{L}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ ottenendo

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}} - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L} / L^2) \mathbf{L}$$

I vettori $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ sono per costruzione le proiezioni rispettivamente di $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ in un piano ortogonale al vettore $\mathbf{L}$. A partire da $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$, applicando l'identità vettoriale $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ otteniamo:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{L} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{L})] / L^2$$

$$\dot{\mathbf{y}} = [\mathbf{L} \wedge (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{L})] / L^2$$

e dunque:

$$\mathbf{y} \wedge m\dot{\mathbf{y}} = [|\mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}|^2 / L^2] \mathbf{L} \quad (18)$$

e

$$m\ddot{\mathbf{y}} = \alpha \frac{|\mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}|^2}{L^3} \frac{\mathbf{y}}{y^3} - \frac{\beta^2}{m} \frac{|\mathbf{x} \wedge m\dot{\mathbf{x}}|^4}{L^4} \frac{\mathbf{y}}{y^4} \quad (19)$$

Possiamo normalizzare i vettori appena visti definendo le seguenti trasformazioni:

$$\mathbf{z} = (|\mathbf{x}|/|\mathbf{y}|) \mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = (|\dot{\mathbf{x}}|/|\dot{\mathbf{y}}|) \dot{\mathbf{y}} \quad (20)$$

Le nuove variabili introdotte conservano i moduli dei rispettivi vettori di partenza, infatti

$$z^2 = (x^2/y^2) y^2 = x^2$$

e analogamente

$$\dot{z}^2 = \dot{x}^2$$

e permettono di riscrivere il vettore di Poincaré $\mathbf{L}$ come un momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}}$$

nel nuovo spazio delle fasi di coordinate $(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ con $\mathbf{q} = m\dot{\mathbf{z}}$.

L'equazione del moto diventa quella di un punto materiale sottoposto alla sovrapposizione di due campi sferici con lo stesso centro: un campo Coulombiano, il cui coefficiente rimane invariato dalla (10) e un campo la cui intensità decresce come $1/z^3$, con $z = |\mathbf{z}|$. Abbiamo cioè:

$$m\ddot{\mathbf{z}} = (\alpha\mathbf{z}/z^3) - (\beta^2/m)(\mathbf{z}/z^4) \quad (21)$$

La scomparsa, in questa nuova forma, del termine di Biot-Savart presente nella (10), ci permette di ricavare agevolmente un'hamiltoniana per il sistema nella nuove coordinate:

$$H(z, p) = \mathbf{q}^2/2m + \alpha/z - \beta^2/mz^2 \quad (22)$$

Scrivendo la trasformazione inversa a quella che ci ha portato allo spazio dei vettori $(\mathbf{z}, \mathbf{q})$, cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\sqrt{(\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}})^2 - \beta^2}}{|\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}}|^2} \mathbf{z} - \beta \frac{|\dot{\mathbf{z}}|}{|\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}}|^2} \mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\sqrt{(\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}})^2 - \beta^2}}{|\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}}|^2} \dot{\mathbf{z}} - \beta \frac{|\dot{\mathbf{z}}|}{|\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}}|^2} \mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (23)$$

otteniamo che, mentre ogni punto $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ ha un unico corrispettivo $(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ tramite le (20), l'insieme dei vettori $(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ che, tramite le (21) sono mappati univocamente in vettori $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, deve soddisfare la condizione d'invertibilità:

$$(\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}})^2 - \beta^2 > 0 \quad (24)$$

che ha una motivazione fisica nel fatto che $(\mathbf{z} \wedge m\dot{\mathbf{z}})^2 - \beta^2 = L^2 - \beta^2 = I^2 = 0$ si realizza solo nel caso in cui le due particelle occupino la stessa posizione e un'origine matematica legata alle condizioni d'esistenza delle (23). È interessante far notare come, per $\beta \rightarrow 0$ la (21) ci mostri che otteniamo di nuovo un campo di forze Coulombiano e le (23) che la trasformazione vista si riduce a un'identità. Nel caso, già affrontato, di un sistema formato da due particelle, una avente solo carica elettrica e un'altra unicamente carica magnetica, dunque per il quale $\alpha = 0$, l'equazione del moto nella nuova coordinata introdotta diventa quella di una particella in un campo di forze centrali, il cui modulo decresce come l'inverso del cubo della distanza dal centro d'attrazione, ossia:

$$m\ddot{\mathbf{z}} = -(\beta^2/m)(\mathbf{z}/z^4)$$

In un sistema del genere la (22) mostra che le uniche orbite ammissibili per la particella sono aperte. I potenziali centrali come il nostro, infatti, che decrescono con l'inverso del quadrato della distanza, a differenza di quanto accade per quelli dei sistemi kepleriani, non prevedono orbite chiuse. Un sistema formato da una carica elettrica e una magnetica non prevede dunque stati legati.

Ora che abbiamo finalmente dimostrato che le orbite sono delle spirali possiamo commentare il risultato trovato alla fine del paragrafo 1.4, relativo alla costante vettoriale $\mathbf{V}$. Se immaginiamo di sviluppare la nostra superficie conica su di un

piano, la spirale geodetica percorsa dalla particella si trasforma in un gruppo di segmenti paralleli. Segnando, per ogni segmento, la posizione alla minima distanza dal vertice del cono, si ottiene un insieme di punti disposti su una retta ortogonale ad ognuno dei segmenti. Su tale retta giace il vettore $\mathbf{V}$, che conserva la propria direzione per tutto il moto ma cambia modulo ad ogni giro che la particella compie intorno al cono (che corrisponde a un diverso segmento nel piano) e muta il verso quando la particella supera l'origine. Non è corretto quindi dire che il vettore $\mathbf{V}$ è una costante di tutto il moto ma sicuramente lo è la sua direzione e, limitatamente a un singolo giro intorno al cono, lo sono il suo verso e il suo modulo $|\mathbf{x}| \sin \theta$.

2.3 Invarianza per riscaldamento e conseguenze

In questo paragrafo dimostreremo come la quantità Γ , che compare nella relazione (13) e che qui ricaviamo esplicitamente:

$$\Gamma = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}} t - \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot m \dot{\mathbf{x}} \quad (25)$$

sia una costante del moto in sistemi di due particelle in cui una ha solo carica elettrica e l'altra ha puramente carica magnetica.

Dimostreremo come l'esistenza di questa costante sia legata all'evidente invarianza dell'equazione del moto (12) per la *trasformazione di riscaldamento*:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \lambda \mathbf{x} \\ t &\rightarrow \lambda^2 t \end{aligned} \quad (26)$$

con λ parametro reale non nullo.

Purtroppo, come spiegato nel paragrafo precedente, non disponiamo di una Hamiltoniana in termini di $\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ tramite la quale, usando il teorema di Noether, dimostrare il legame tra la quantità Γ e le (26). Possiamo tuttavia immediatamente notare come le condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^2 &= \mathbf{x}^2 \\ \dot{\mathbf{z}}^2 &= \dot{\mathbf{x}}^2 \end{aligned}$$

ricavate nel paragrafo precedente per la trasformazione (20), ci permettono di affermare che l'equazione del moto

$$m \ddot{\mathbf{z}} = -(\beta^2/m)(\mathbf{z}/z^4) \quad (27)$$

risulta invariante per delle nuove trasformazioni di riscalamento, quali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &\rightarrow \lambda \mathbf{z} \\ t &\rightarrow \lambda^2 t \end{aligned} \quad (28)$$

con λ parametro reale non nullo.

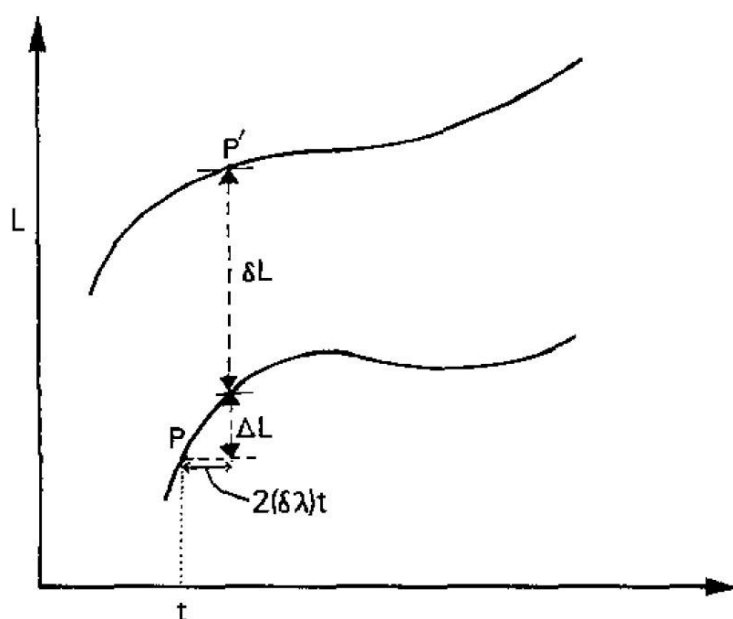
Notando poi che l'energia potenziale $U = -\beta^2/2mz^2$ è tale che

$$U' \equiv U(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^{-2} U(\mathbf{z})$$

e che $\mathcal{L} = m\dot{\mathbf{z}}^2 - U$, ricaviamo una condizione analoga per la lagrangiana

$$\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^{-2} \mathcal{L}(\mathbf{z})$$

Consideriamo ora la trasformazione infinitesima $1 + \delta\lambda$ e grafichiamo, in funzione del tempo, le lagrangiane $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$



Dalla figura evinciamo che la differenza tra le lagrangiane nello stesso istante è data da

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \lambda^{-2}\mathcal{L} - \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$$

Dove $\Delta\mathcal{L}$ è l'incremento dell'hamiltoniana $\mathcal{L}$ a seguito del riscalamento temporale. Possiamo scrivere tale quantità come:

$$\Delta\mathcal{L} = (\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{z}) \cdot \delta\mathbf{z} + (\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\mathbf{z}}) \cdot \delta\dot{\mathbf{z}}$$

e dunque, sviluppando in serie di potenze $\mathcal{L}'$ abbiamo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= (1 - 2\delta\lambda + \dots)\mathcal{L} - \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\lambda}\delta\lambda - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{z}}} \cdot \frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial\lambda}\delta\lambda \\ &= -2\delta\lambda - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\lambda}\delta\lambda - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{z}}} \cdot \frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial\lambda}\delta\lambda\end{aligned}$$

Data l'invarianza della lagrangiana ho $\delta\mathcal{L} = 0$ quindi, dividendo l'equazione precedente per $\delta\lambda$ abbiamo

$$0 = -2L - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{z}}} \cdot \frac{\partial\dot{\mathbf{z}}}{\partial\lambda}$$

Usando le equazioni di Lagrange e notando che $\partial(\lambda\mathbf{z})/\partial\lambda = \mathbf{z}$ e $\partial(\lambda\dot{\mathbf{z}})/\partial\lambda = \dot{\mathbf{z}}$ possiamo ottenere

$$-2L - m\ddot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z} - m\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0$$

Dalle relazioni $\mathcal{L} = m\dot{\mathbf{z}}^2 - U$ e $E = m\dot{\mathbf{z}}^2 + U$ otteniamo la relazione tra energia interna e Lagrangiana $E = m\dot{\mathbf{z}}^2 + \mathcal{L}$ che ci permette di ricavare

$$2E - m\ddot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z} - m\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0$$

Integrando rispetto al tempo la precedente equazione, ricordando che E è costante e riconoscendo negli ultimi due termini al primo membro la derivata rispetto al tempo della quantità $-\mathbf{z} \cdot \dot{\mathbf{z}}$, otteniamo

$$C = Et - m\mathbf{z} \cdot \dot{\mathbf{z}}/2$$

dove C è una costante fissata dalle condizioni iniziali. Tornando alla variabile originaria $\mathbf{x}$ la relazione appena vista diventa

$$C = Et - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}/2$$

Ma l'energia interna, per $\alpha = 0$, corrisponde al solo termine cinetico $E = m\dot{\mathbf{x}}^2/2$, quindi

$$C = m\dot{\mathbf{x}}^2 t/2 - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}/2$$

La formula di C corrisponde a quella della quantità Γ , esplicitata nella (25), che risulta essere dunque una costante del moto.

CAPITOLO 3

IL MONOPOLO MAGNETICO DI DIRAC

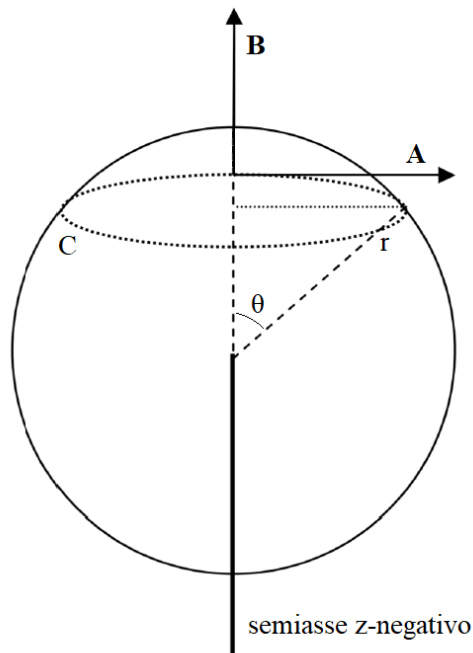
3.1 Potenziale vettore e stringa di Dirac

Nel 1931 il fisico britannico Paul Dirac pubblicò un articolo dal titolo “*Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*” nel quale affrontava l’argomento dell’esistenza di monopoli magnetici. I risultati che Dirac trovò, benché attualmente inseribili in contesti di studio ben più ampi ed espressi in un formalismo che in parte appare ormai desueto, furono così straordinari, da costituire ancora oggi uno dei motivi per i quali, a novant’anni dalla pubblicazione del suo articolo, è ancora vivo l’interesse per la ricerca di monopoli magnetici.

Consideriamo una particella dotata unicamente di carica magnetica g , fissa e posizionata nell’origine del nostro sistema riferimento, indicata con $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. In perfetta analogia con il campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme è immediato, dalla soluzione delle (1), con $\rho_m = g\delta(\mathbf{r})$ e le altre densità di carica e corrente nulle, ottenere un campo magnetico radiale:

$$\mathbf{B} = g \mathbf{r}/r^3 \quad (26)$$

Ci chiediamo se sia ancora possibile, come lo era in assenza di cariche magnetiche, trovare un potenziale vettore $\mathbf{A}$ dal quale poter ricavare il vettore $\mathbf{B}$, in tutto lo spazio, tramite la relazione $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. La risposta a questa domanda è negativa, come si può immediatamente notare dal fatto che la divergenza del vettore $\mathbf{B}$ non è ovunque nulla e quindi il potenziale $\mathbf{A}$ è banalmente singolare nell’origine, che è la posizione occupata dalla carica, ossia quella in cui ci aspettiamo che il modulo del campo magnetico cresca indefinitamente. Accanto alla singolarità appena trovata, che rispecchia una discontinuità fisica, ne troviamo un’altra, che invece rappresenta una patologia dello strumento matematico che abbiamo deciso di utilizzare. Per mostrare ciò, calcoliamo il potenziale vettore associato al campo magnetico della (26), sfruttando la simmetria radiale del sistema in esame. Scegliamo arbitrariamente una semiretta che parta dalla posizione del monopolio e facciamo corrispondere quest’ultima col semiasse z -negativo. Fatto ciò, introduciamo un sistema di coordinate polari come in figura:



Calcoliamo la circuitazione del campo $\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ su una circonferenza C di raggio $r \sin \theta$ e centro lungo l'asse z

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = A_\varphi \cdot 2\pi r \sin \theta$$

Infatti, per simmetria, i contributi alla circuitazione diametralmente opposti relativi alla componente radiale e colatitudinale di $\mathbf{A}$ si eliminano. Com'è noto dall'analisi matematica, se S è la calotta sferica la cui superficie è concatenata alla circonferenza C abbiamo:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Ma il secondo termine dell'espressione precedente corrisponde al flusso del vettore $\mathbf{B}$, che vale

$$\Omega_C(\mathbf{B}) = \int_0^\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{g}{r^2} r^2 \sin \theta d\varphi = 2\pi g(1 - \cos \theta)$$

e dunque abbiamo

$$A_\theta = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

Il potenziale vettore $\mathbf{A}$ ha dunque una singolarità per $\theta = \pi$, ossia lungo il semiasse z-negativo, la cui disposizione è stata fatta in modo completamente arbitrario, mentre il campo $\mathbf{B}$ presenta simmetria sferica e quindi incompatibile con la scelta di un potenziale vettore anisotropo. La semiretta arbitraria lungo la quale il potenziale $\mathbf{A}$ risulta singolare viene denominata *stringa di Dirac*. Il problema appena sollevato troverà una soluzione nel prossimo paragrafo ma intanto facciamo notare, per completezza che, ponendo uguali a zero le componenti sferiche del rotore di $\mathbf{A}$ diverse da quella azimutale, si ottengono le relazioni $A_r = 0$ e $A_\theta = 0$. Il potenziale vettore risulterà dunque tangente ad ogni circonferenza C come quella in figura e, in forma vettoriale, avrà l'espressione

$$\mathbf{A} = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

3.2 I potenziali vettori di Wu-Yang

Una risposta al problema sollevato nel paragrafo precedente fu formulata nel 1968 dai fisici cinesi Tai Tsun Wu e Chen-Ning Yang, i quali proposero che il campo magnetico generato da una carica magnetica puntiforme fosse ricavabile, in tutto lo spazio, a partire da due potenziali vettori, definiti ovunque meno i punti individuati dalle rispettive stringhe di Dirac. Con questo stratagemma tutti i punti di discontinuità di un potenziale, meno l'origine, cadono nel dominio dell'altro e, dall'unione di questi due domini, si ottiene tutto lo spazio, escluso il punto occupato dalla carica magnetica, che continua ad essere, come è inevitabile, una singolarità per il campo.

Tornando alle convenzioni introdotte nel paragrafo precedente, denominiamo con $\mathbf{A}^N$ il potenziale definito in tutto lo spazio, tranne che nell'origine e il semiasse z-negativo e con $\mathbf{A}^S$ il suo simmetrico rispetto alla posizione del monopolo, che sarà quindi definito ovunque meno l'origine e il semiasse z-positivo.

I due potenziali saranno quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^N &= \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \mathbf{A}^S &= - \frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \tag{27}$$

È noto che due potenziali vettoriali che rappresentino lo stesso campo fisicamente osservabile, in questo caso quello del vettore $\mathbf{B}$, debbano essere ricavabili l'uno dall'altro tramite una trasformazione di gauge. Nel nostro caso abbiamo quindi

$$\mathbf{A}^N = \mathbf{A}^S + \nabla \cdot \eta \quad (28)$$

Dove η è una funzione scalare della posizione, che ci apprestiamo a determinare.

Dalle (27) è immediato infatti calcolare che:

$$\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \frac{2g}{r \sin \theta} \hat{\phi}$$

ma, scrivendo il gradiente in coordinate sferiche:

$$\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

possiamo ricavare

$$\frac{2g}{r \sin \theta} \hat{\phi} = \nabla \cdot (2g\phi) = \nabla \cdot \eta$$

e dunque:

$$\eta = 2g\phi \quad (29)$$

3.3 Il monopollo di Dirac e la quantizzazione delle cariche

Dalla meccanica quantistica è noto che l'equazione di Schrödinger per una particella con carica elettrica e in un campo magnetico è da:

$$\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Se il campo è generato da un monopollo magnetico abbiamo visto che non esiste un solo potenziale $\mathbf{A}$ dal quale ottenere il vettore $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio intorno alla carica g ma ne esistono ben due, ossia $\mathbf{A}^N$ e $\mathbf{A}^S$, collegati nelle zone in cui i rispettivi domini si intersecano, dalla trasformazione di gauge (28) con η data dalla (29). L'invarianza vista per questi potenziali si riverbera sulle funzioni d'onda e ci fornisce la relazione

$$\psi^S(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{-ie\eta}{\hbar c}\right) \psi^N(\mathbf{r})$$

$\psi^S(\mathbf{r})$ e $\psi^N(\mathbf{r})$ sono rispettivamente definite nei domini dei potenziali $\mathbf{A}^N$ e $\mathbf{A}^S$ e soddisfano le equazioni di Schrödinger che si ottengono ponendo, di volta in volta, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^N$ o $\mathbf{A} = \mathbf{A}^S$. Imponendo la condizione di monodromia per la funzioni d'onda, ossia che questa non cambi per una rotazione spaziale di 2π , si ricava una formula che lega la carica elettrica a quella magnetica:

$$\frac{2eg}{\hbar c} = n \quad \text{con } n \text{ numero intero}$$

L'ultima relazione trovata è la famosa *condizione di quantizzazione di Dirac* e mostra in che modo l'esistenza, anche di un solo monopolio magnetico nell'universo, spiegherebbe, in come conseguenza dei postulati della meccanica quantistica, un dato sperimentale tanto universale quanto misterioso, ossia la quantizzazione della carica elettrica. La relazione trovata da Dirac ha anche il pregio di evidenziare una differenza fondamentale tra i due tipi di cariche. Ponendo infatti $n=1$ otteniamo

$$eg = \hbar c/2$$

e dunque, dal valore della costante di struttura fine $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$, abbiamo:

$$e^2 = \hbar c/137$$

$$g^2 = 137 \hbar c/4$$

da cui otteniamo che il rapporto g^2/e^2 è dell'ordine di 10^3 . Due particelle con carica magnetica quindi, interagirebbero con una forza di diversi ordini di grandezza più intensa rispetto a quella che si instaurerebbe tra due corpi puntiformi, con carica elettrica, posti alla medesima distanza. Quest'ultima osservazione suggerisce anche un motivo per il quale non sono stati ancora osservati monopoli magnetici nell'impossibilità tecnologica di raggiungere l'energia necessaria a spezzare tali dipoli magnetici.

CAPITOLO 4

CONCLUSIONI

Abbiamo più volte, nel corso di questa trattazione, accennato ad alcuni dei motivi che hanno alimentato l'interesse della ricerca fondamentale per i monopoli magnetici. Nel corso dei decenni particelle dotate di carica magnetica sono state ricercate nei contesti più disparati, senza che questo abbia ancora portato alla raccolta di dati che ne evidenzino in maniera incontrovertibile la presenza. Sono stati portati avanti, ad esempio, tentativi di produrre monopoli magnetici negli acceleratori di particelle. Uno dei processi di scattering che è stato sperimentato è consistito nell'urto di un protone e di un antiprotone, che, secondo alcuni modelli, avrebbe dovuto produrre una coppia monopolo-antimonopolo. La mancata produzione di cariche magnetiche, nonostante le altissime energie rese disponibili dagli attuali acceleratori, ha portato a stimare per la massa del monopolo magnetico valori superiori a 360Gev. Tentativi di osservazione sono stati condotti anche analizzando materiale proveniente dalla luna e mediante l'intercettazione di raggi cosmici. Notiamo inoltre che la densità di carica magnetica è una quantità pseudoscalare, motivo per il quale delle leggi della fisica che regolassero le interazioni tra monopoli non godrebbero né di una simmetria di riflessione spaziale né di una di inversione temporale. La violazione di queste simmetrie è molto piccola e spesso associata ai processi di interazione elettrodebole. Per questo motivo è stata avanzata l'ipotesi che i neutrini siano particelle dotate di carica magnetica. La natura elusiva delle particelle con carica magnetica rispetto a quelle con carica elettrica è oltretutto sottolineata dal fatto che, come ottenuto nel paragrafo 2.2 di questa tesi, non esistono stati legati per un sistema formato da una particella con carica elettrica e da una con carica magnetica. Esistono differenti strumenti che sono stati realizzati per la detezione dei monopoli, uno di questi prevede l'utilizzo di anelli superconduttori denominati SQUID(*Superconducting QUantum Interference Device*). Tali dispositivi sarebbero in grado di generare correnti, qualora gli anelli che li costituiscono fossero attraversati da particelle magnetiche. Ovviamente tali strumenti sono estremamente sensibili ed è necessario un isolamento rispetto ai campi magnetici esterni che potrebbero invalidare i risultati delle misure. Infine vogliamo porre l'attenzione sul fatto che, benché particelle con carica magnetica non siano mai state osservate, esistono fenomeni, nell'ambito della fisica della materia condensata, nei quali dei sistemi complessi presentano caratteristiche globalmente simili a quelle dei monopoli magnetici. Non bisogna fare confusione tra le particelle con carica magnetica e questi sistemi, in quanto in questi ultimi, la

divergenza del campo magnetico è ovunque nulla, condizione che, come abbiamo chiarito in questa tesi, è incompatibile con l'esistenza di sorgenti magnetiche.

Riferimenti

E. F. Carter, H. A. Cohen “The Classical Problem of Charge and Pole” American Journal of Physics Vol. 41(1972)

S. Coleman “The magnetic monopole fifty years later” (1981)

A. Aloisi, P. Nali “Dirac e il monopolo magnetico” arXiv:1608.00174 (2016)

J.D. Jackson “Classical electrodynamics, third edition” John Wiley & Sons, Inc. (1998)

P. A. M. Dirac “The theory of magnetic poles” Physical Review 74.7: 817 (1948)

Y.H. Yua “Search for monopoles using superconducting quantum interference device(SQUID)” arXiv:physics/0512220v3 (2005)

T. T. Wu and C. N. Yang Phys. Rev. D 12, 3845 (1975)