

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Magistrale in Fisica

Fluttuazioni di vuoto in presenza di un superconduttore ed energia Casimir

Relatori:

Prof. Luigi Rosa
Prof. Arturo Tagliacozzo

Candidato:

Pierpaolo Ferrigno
N94000446

A.A. 2020/2021

Prefazione

L'effetto Casimir è un fenomeno prodotto dalle *fluttuazioni di punto zero* di un campo elettromagnetico confinato all'interno di una cavità. Questo è osservabile attraverso la definizione della *forza Casimir*, ottenuta come derivata prima dell'energia, che risulta essere una forza di tipo attrattivo che si esercita sulle pareti piane e parallele di una cavità, quando queste sono poste a distanze nell'ordine dei nanometri.

Il fenomeno è puramente quantistico e rappresenta uno dei rari casi in cui la meccanica quantistica si manifesta su scale macroscopiche.

Proprio la sua peculiarità di essere un fenomeno che possa rappresentare un legame tra il mondo microscopico della meccanica quantistica e quello macroscopico, descritto dalla fisica classica, ha reso l'effetto Casimir un fenomeno di grande interesse per la comunità scientifica. Esempio di questo interesse nei confronti di tale effetto è l'esperimento *ARCHIMEDES*, condotto nel laboratorio sotterraneo del SARGRAV.

L'obiettivo scientifico dell'esperimento ARCHIMEDES è quello di produrre una misura del "*peso del vuoto*", cioè di indagare sull'interazione tra le fluttuazioni associate allo stato di vuoto per un campo elettromagnetico, dovute al principio di indeterminazione di Heisenberg, e la forza di gravità, per ottenere indicazioni che possano portare risposte nell'ambito dei fenomeni cosmologici e della fisica delle interazioni fondamentali. Per ottenere questa misura l'esperimento sfrutta una bilancia in grado di misurare le piccole variazioni di peso indotte in due campioni di un materiale ($YBa_2Cu_3O_7$) che ha la proprietà di "intrappolare" o "espellere" energia di vuoto quando viene variata la sua temperatura; questa proprietà è riconducibile al fatto che l'YBCO è un materiale superconduttore di tipo II.

È proprio nell'ottica della caratterizzazione del campione di YBCO, che fa da unità fondamentale dell'esperimento, che si inserisce il seguente lavoro di tesi. Osservando la struttura stratificata del materiale superconduttore, che può essere visto quindi come una serie di cavità Casimir accoppiate, ci si propone di isolare un singolo elemento e di modellizzarlo in modo da poter studiare lo spettro energetico per il sistema, sia nella sua forma completa, che nel contributo associato agli stati legati che si generano nel caso in cui la cavità sia investita da radiazione elettromagnetica.

Per esporre in maniera chiara e lineare i risultati ottenuti, si è deciso di suddividere l'elaborato in sei capitoli:

- Nel primo capitolo si introduce il concetto di energia di punto zero, sviluppato da M. Planck come risposta alle divergenze tra teoria e sperimentazione nate

all' interno degli studi riguardanti la radiazione di corpo nero. Definita quindi l'energia per un campo elettromagnetico, visto come somma di oscillatori armonici disaccoppiati, si deriva analiticamente l' effetto Casimir.

- Considerando che l'YBCO ha la caratteristica di essere un materiale superconduttore HTc, nel secondo capitolo vengono studiati i fenomeni principali associati alla superconduttività e si descrivono i due modelli principali con cui è possibile studiarla: il modello Ginzburg-Landau e la teoria BCS.
- Nel terzo capitolo comincerà lo studio vero e proprio dell' interazione tra la parete materiale e il campo elettromagnetico. Affermando di poter studiare il fenomeno d' interazione attraverso un processo di scattering elastico, si darà descrizione dei modi di campo superficiali che si generano all' interno del materiale (*modi plasmonici*). Si procederà, dunque, introducendo il modello *plasma sheet*, che permetterà di studiare le caratteristiche del fenomeno d'interazione ed in particolare di definire gli stati legati per il campo elettromagnetico sia nel caso in cui lo spessore della parete sia finito sia nel caso in cui questo risulti infinitesimo.
- Una volta compresa la natura fisica e matematica degli stati legati per il campo, si svilupperà un modello "giocattolo", molto semplice, che permetta di valutare analiticamente, ma anche numericamente, il contributo energetico per tali stati. Di questo si occuperà il quarto capitolo.
- Nel quinto capitolo si tornerà a considerare un materiale stratificato, struttura caratteristica dell'YBCO, ottenendo la forma analitica dell' energia Casimir per un materiale di questo tipo. Osservando che il toy model, presentato nel capitolo precedente, è esso stesso una cavità all' interno del materiale stratificato, si applicherà questo nuovo metodo di calcolo per valutare l'energia totale per il modello giocattolo. Si concluderà il capitolo con un breve confronto tra i due metodi di calcolo elaborati e i risultati ottenuti.
- Nell' ottica di poter valutare come varia l'energia Casimir nel passaggio dallo stato normale a quello superconduttivo, si svilupperà un ultimo capitolo in cui l'espressione dell' energia Casimir, supponendo sempre di trovarsi alla temperatura dello zero assoluto, è resa dipendente dalla funzione dielettrica di Mattis-Bardeen, caratteristica per lo stato superconduttivo. In questa sezione non sarà svolta un'elaborazione numerica, ma dopo aver determinato la forma dell'energia Casimir la si studierà qualitativamente cercando di comprendere quali risvolti futuri ci si aspetta una volta applicata al modello proposto.

L'esposizione del lavoro di tesi si chiuderà con un paragrafo conclusivo in cui saranno raccolte osservazioni e commenti sui risultati prodotti.

Indice

Prefazione	I
1 Campo elettromagnetico confinato in una cavità	1
1.1 Energia di punto zero ed effetto Casimir	1
2 Elettrodinamica dei superconduttori	7
2.1 Teoria di Ginzburg- Landau	10
2.1.1 Teoria G-L in presenza di un campo magnetico	12
2.2 La teoria BCS	13
3 Il modello Plasma sheet	17
3.1 I plasmoni di superficie	17
3.2 Descrizione teorica del modello	20
3.3 Condizioni di matching su una superficie d'incidenza	21
3.4 Scattering attraverso il "plasma sheet"	23
3.4.1 Stati continui e legati per plasma sheet a spessore finito	23
3.4.2 Stati continui e legati per plasma sheet a spessore infinitesimo	25
4 Toy Model: plasma sheet	27
4.1 Stima dell' energia degli stati legati	30
4.1.1 Energia in regime non ritardato	30
4.1.2 Energia in regime ritardato	31
5 Il materiale stratificato	35
5.1 Derivazione analitica dell' Energia Casimir	35
5.2 Energia Casimir per il plasma sheet	40
5.3 Energia Casimir e contributo dei plasmoni	42
6 Energia Casimir per lo stato superconduttivo	47
6.1 Utili elementi matematici	47
6.2 La funzione dielettrica di Mattis-Bardeen	49
Appendice A: Campo elettromagnetico su superficie materiale	55
Appendice B: Coefficiente di trasmissione per superfici a distanza L	63
Appendice C: Approccio "fisico" per l'espressione (4.5)	67

Appendice D: Il determinante $\Delta^{(TM)}(\omega)$	69
Appendice E: Teorema dell'argomento	71
Appendice F: Energia degli stati legati in regime di basse frequenze	73
Bibliografia	75

Capitolo 1

Campo elettromagnetico confinato in una cavità

Volendo analizzare il comportamento di una cavità Casimir e dell' energia ad essa associata in uno stato metallico normale e confrontarlo con lo stato superconduttore, per le pareti di cui è composta, è utile andare a chiarire i concetti fondamentali che rientrano in questo tipo di studio. Nel capitolo che segue, quindi, ci occuperemo di descrivere i fenomeni associati ad un campo elettromagnetico confinato in una cavità.

1.1 Energia di punto zero ed effetto Casimir

L'effetto Casimir è un fenomeno puramente *quanto-relativistico* che non ha in nessun modo una controparte classica. Il fenomeno, descritto nel 1948 da H.Casimir, è da associare alle fluttuazioni quantistiche dello stato di vuoto di un campo elettromagnetico nel caso in cui questo risultasse vincolato all'interno di una cavità.

Gli studi che portarono alla determinazione dell' effetto Casimir nacquero dall' esigenza di una parte della comunità scientifica di risolvere le contraddizioni generate a causa degli studi riguardanti lo spettro di radiazione del corpo nero, con la conseguente *catastrofe ultravioletta*.

M.Planck, intorno al 1912, diede un significativo contributo, tanto alla risoluzione del problema riguardante il corpo nero, quanto nello spalancare le porte all' interpretazione quantistica della realtà microscopica, definendo l'energia totale media per un risonatore o oscillatore armonico:

$$U(T) = \frac{1}{2} h\nu \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2} h\nu, \quad (1.1)$$

questo implica che $U \neq 0$ quando $T \rightarrow 0$; difatti se $T \rightarrow 0 \Rightarrow U \rightarrow E_0 = \frac{1}{2}h\nu$.

L'equazione (1.1) stabilisce quindi la nascita del concetto di *energia di punto zero*.

L'introduzione dell' energia di punto zero per caratterizzare lo stato fondamentale (che nella teoria quantistica prende il nome di *stato di vuoto*) del risonatore è un punto cruciale del processo di quantizzazione per un campo elettromagnetico. Infatti è noto che un campo elettromagnetico confinato in una cavità può essere assimilato ad un sistema di oscillatori armonici unidimensionali disaccoppiati, quindi

la prima quantizzazione del campo coinciderà con quella degli oscillatori. Per questo motivo l'energia del campo elettromagnetico (cioè gli autovalori per ogni stato $|n\rangle = \bigotimes_k |n_{k_1}\rangle \otimes |n_{k_2}\rangle \otimes |n_{k_3}\rangle \otimes \dots$) sarà descritta dalla relazione:

$$E_n = \sum_k E_{nk} = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right), \quad (1.2)$$

nella quale il pedice k indica il singolo modo vibrazionale e n_k è l'autovalore associato all'operatore $N_k = a_k^\dagger a_k$ rispetto lo stato $|n_k\rangle$: $N_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle$ ¹.

Assumendo che un particolare stato $|n_k\rangle$, che prende il nome di *stato di vuoto* o *vacuum state*, e indicato con $|0\rangle$, sia caratterizzato dall'assenza di fotoni, il singolo modo di campo assume un'energia $\hbar\omega_k/2$, che rappresenta proprio l'energia di punto zero che già avevamo osservato attraverso lo spettro di Planck. Quanto appena affermato è indubbiamente sbalorditivo, considerando che secondo la centenaria visione classica della fisica, nello stato di vuoto, anche detto stato di minima energia, il campo si annulla in ogni punto; ma c'è di più. Nel particolare caso in esame, cioè quando si ha a che fare con un sistema a infiniti gradi di libertà, l'esistenza del energia di punto zero comporta la divergenza del valore associato all'energia del campo: la somma $\sum_k \frac{1}{2}(\hbar\omega_k)$ è evidentemente non convergente. La divergenza emerge a causa della somma dei punti zero dell'energia degli infiniti modi normali che costituiscono il campo elettromagnetico.

Vediamo come, a partire da queste semplici considerazioni che hanno permesso la definizione dell'energia di punto zero, sia possibile descrivere l'effetto Casimir in quanto forza attrattiva tra due lastre parallele poste nel vuoto, elettricamente neutre e perfettamente conduttrici, conseguenza delle fluttuazioni quantistiche dello stato di vuoto.



Figura 1.1: Due lastre parallele, neutre e perfettamente conduttrici, poste nel vuoto ad una distanza d l'una dall'altra, sperimentano una forza attrattiva.

Per rappresentare la configurazione del sistema descritta in figura (1.1) possiamo avvalerci della condizione per cui un campo elettromagnetico sia all'interno di una cavità parallelepipedica di lati $L_x = L_y = L$ e L_z , costituito da due piastre perfettamente conduttrici di area L^2 ciascuna, e poste a distanza $d \equiv L_z$.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto impongono la trasversalità del campo elettrico e del campo magnetico, la scelta della gauge di Coulomb la impone anche per il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Inoltre, la condizione di perfetta conducibilità è soddisfatta se le componenti tangenziali del campo elettrico si annullano sulle pareti del parallelepipedo; analoga limitazione sussiste dunque anche per il potenziale vettore, le cui componenti spaziali, soluzioni dell'equazione di Helmholtz, sono del tipo

¹L'autovalore n_k dello stato $|n\rangle$ rappresenta il numero di quanti di energia, cioè dei fotoni, associati al modo di campo k descritto dallo stato; quindi, il numero totale di fotoni del campo è la sommatoria, su tutti i modi possibili, di ogni singolo autovalore.

$$A_x(\vec{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{\frac{1}{2}} [a_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)], \quad (1.3)$$

$$A_y(\vec{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{\frac{1}{2}} [a_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)], \quad (1.4)$$

$$A_z(\vec{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{\frac{1}{2}} [a_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)], \quad (1.5)$$

dove $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, $V = L^2 L_z$, e

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad (1.6)$$

con n_x , n_y e n_z che possono assumere valori nulli oppure interi positivi.

Ovviamente dovrà essere soddisfatta anche la condizione di normalizzazione

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz [A_x^2(\vec{r}) + A_y^2(\vec{r}) + A_z^2(\vec{r})] = 1.$$

Dall'equazione (1.6) si deduce che non tutte le frequenze sono permesse all'interno del parallelepipedo, e che quelle accettabili sono le sole che verificano l'espressione

$$\omega_{\vec{k},n} = \pi c \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pertanto l'energia di punto zero all'interno del volume è data dalla somma delle energie di punto zero dei singoli modi di campo caratterizzati da frequenze $\omega_{\vec{k},n}$, tali che [6]

$$2 \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty'} \frac{\hbar}{2} \omega_{\vec{k},n} = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty'} \pi \hbar c \left[\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

in cui il fattore 2 prende in considerazione le due possibili polarizzazioni nel caso $n_{x,y,z} \neq 0$, mentre l'apostrofo implica il fattore $\frac{1}{2}$ nel caso in cui uno degli interi $n_{x,y,z}$ si annulli, in tal caso si ha un'unica polarizzazione.

Immaginando di far tendere all'infinito le dimensioni delle superfici laterali, ossia immaginando che le lastre conduttrici diventino infinitamente grandi, pur mantenendo fissa la distanza d fra esse, i modi possibili nelle direzioni x e y diventano infiniti, dunque nella (1.7), la somma rispetto a n_x e n_y è sostituita da un integrale, mentre i valori di n_z continuano ad essere discreti:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{n_z=0}^{\infty'} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \int \int dk_x dk_y.$$

Allora l'energia di punto zero nella nuova configurazione risulta essere:

$$E(d) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty'} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k},n} \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \sum_{n_z=0}^{\infty'} \int_0^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dk_y \left[k_x^2 + k_y^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (1.8)$$

quindi, una quantità infinita in un volume finito.

Se ora anche la distanza d diventa infinita, n_z potrà assumere valori continui; di conseguenza nell'intero spazio vuoto, tutte le frequenze di vibrazione saranno consentite: la somma su n_z diviene un integrale e l'energia di punto zero nell'intero spazio si ottiene dall'integrale triplo

$$E(\infty) = \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.9)$$

che definisce anch'essa una quantità infinita.

Si può dire che l'energia potenziale del sistema nella sua configurazione iniziale, cioè quando le due lastre sono ancora ad una distanza d , è una differenza tra due infiniti, essendo tali sia $E(d)$ che $E(\infty)$; infatti l'energia potenziale del sistema è da considerarsi come l'energia necessaria per portare le due lastre da una distanza d all'infinito:

$$U(d) = E(d) - E(\infty) = \frac{L^2 (\hbar c)}{\pi^2} \left(\sum_{n_z=0}^{\infty} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y (k_x^2 + k_y^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (1.10)$$

La forza Casimir si ottiene rendendo finita questa quantità, quindi dando un significato fisico alla differenza di due infiniti.

Ciò è possibile attraverso un'appropriata funzione di cut-off ², che prende in considerazione il limite di conducibilità delle lastre, ossia il fatto che tale proprietà non è più vera a grandi frequenze, o in altri termini, a lunghezze d'onda dell'ordine delle dimensioni atomiche. Se sull'energia potenziale espressa tramite l'equazione (1.10) si applica una trasformazione di coordinate, da cartesiane a polari (u, θ) , nel piano $k_x k_y > 0$, allora questa si può scrivere come

$$U(d) = \frac{L^2 (\hbar c)}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \left[\sum_{n_z=0}^{\infty} \int_0^\infty du u (u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty du u (u^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right), \quad (1.11)$$

dove θ varia tra 0 e $\pi/2$, e $dk_x dk_y = u du d\theta$.

La funzione di cutoff è definita come

$$f(k) = f([u^2 + k_z^2]^{\frac{1}{2}}),$$

di modo che posto $k_m \sim \frac{1}{a_0}$, con a_0 raggio atomico di Bohr, si ottenga

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \ll k_m \\ 0 & \text{se } k \gg k_m. \end{cases}$$

²Sia Ω un aperto di R^n e siano $B_r \subset B_R \subset \Omega$. Una funzione $\eta : \Omega \rightarrow [0,1]$ è una funzione di cut-off tra $B_r(x_0)$ e $B_R(x_0)$ se vale identicamente 1 su $B_r(x_0)$, 0 su $\Omega / B_R(x_0)$ e $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$.

In questa approssimazione l'effetto Casimir risulta essere essenzialmente proprio delle basse frequenze, caratterizzato da energia potenziale

$$U(d) = \frac{L^2 (\hbar c)}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left[\sum_{n_z=0}^{\infty'} \int_0^{\infty} du u (u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2})^{\frac{1}{2}} f([u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2}]^{\frac{1}{2}}) - \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} du u (u^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} f([u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2}]^{\frac{1}{2}}) \right], \quad (1.12)$$

ed effettuando il cambio di variabili $x = \frac{u^2 d^2}{\pi^2}$ e $k = \frac{k_z d}{\pi}$, diviene

$$U(d) = \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} \right) L^2 \left(\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) - \int_0^{\infty} dk F(k) \right) \quad (1.13)$$

con

$$F(k) \equiv \int_0^{\infty} dx (x + k^2)^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{\pi}{d} [x + k^2]^{\frac{1}{2}}\right).$$

Infine si applica la formula di Eulero-Maclaurin [7] per la quale, nel caso in cui $F(\infty) \rightarrow 0$, vale

$$\sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) - \int_0^{\infty} dk F(k) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots$$

e considerando che la funzione $F(k)$ può essere scritta come

$$F(k) = \int_{k^2}^{\infty} du \sqrt{u} \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{u} \right),$$

si otterrà

$$F'(k) = -2k^2 f\left(\frac{\pi}{d} k\right), \quad F'(0) = 0, \quad F'''(0) = -4,$$

con tutte le derivate di ordine superiore nulle per $k = 0$.

Concludendo, dagli ultimi risultati ottenuti possiamo ricavare, in maniera piuttosto agevole, l'espressione che descrive la forza che si esercita tra le due lastre; infatti dalle condizioni sulle derivate della funzione $F(k)$ si può riscrivere la formula di Eulero-Maclaurin, che diventa:

$$\sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) - \int_0^{\infty} dk F(k) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{4}{720},$$

e conseguentemente

$$U(d) = \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} \right) L^2 \left(\frac{-4}{720} \right) = -L^2 \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} \right).$$

Si può, da questa ultima relazione, estrapolare un valore finito dell'energia potenziale e indipendente dalla funzione di cutoff; ne risulta una forza attrattiva, per unità d'area, fra le due lastre

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}, \quad (1.14)$$

che prende il nome di *Forza Casimir* o *Effetto Casimir*.

L'Effetto Casimir quindi può essere definito, in prima istanza, anche come la manifestazione macroscopica delle condizioni al contorno imposte dai confini materiali del sistema allo stato di vuoto del campo elettromagnetico, e la dimostrazione che le fluttuazioni quantistiche di tale stato possono essere finite ed osservabili. Nello spazio libero, dove le fluttuazioni di vuoto sono isotropiche, l'effetto Casimir non ha modo di verificarsi, pertanto se ne deduce che esso dipende fortemente dalla geometria del sistema. Infine, è interessante notare, che sebbene la forza Casimir sia prodotta dal campo elettromagnetico, la carica elettrica non compare nella sua definizione. Compare invece il prodotto $\hbar c$, il che consente di ribadire quanto affermato nell'introdurre l'effetto: la forza Casimir è prettamente quantistica, oltre che relativistica, e non ha alcuna controparte classica.

Capitolo 2

Elettrodinamica dei superconduttori

Definiti i passi fondamentali che permettono di derivare l'effetto Casimir e ricordando che l'obiettivo principale di questo lavoro è lo studio dell'energia Casimir nella transizione conduttore-superconduttore che si può generare nelle pareti metalliche che compongono la cavità, descriviamo brevemente gli aspetti fondamentali che riguardano la dinamica dei fenomeni superconduttivi.

Nel 1911, H. K. Onnes osservò che per alcuni elementi al di sotto di una certa temperatura si manifestava un comportamento esotico. In particolare si ottenne che un buon numero di materiali metallici risultavano "superconduttori" a basse temperature, poichè la funzione che descriveva la loro resistività caratteristica $\rho(T)$ era del tipo descritta in figura (2.1).

Come conseguenza immediata di questa proprietà si ha che per i metalli nello stato superconduttivo persistono delle correnti interne anche in condizione di campo elettrico nullo; questa caratteristica può essere ottenuta se si tiene conto della relazione $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$, quindi nel caso in cui $\rho = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$, e si avrà un campo elettrico nullo in ogni punto del superconduttore. In questo modo la densità di corrente elettrica superficiale \vec{J} può essere finita e si osserva un flusso di corrente non nullo (*correnti persistenti*) anche con un campo elettrico nullo.

La presenza di correnti persistenti dimostra la necessità di una resistività nulla per il superconduttore.

Per comprendere come si possano realizzare delle correnti persistenti, immaginiamo di studiare un superconduttore circolare sul quale sia definito il flusso ϕ di un campo magnetico \vec{B} : $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Sfruttando l'equazione di Maxwell riguardante il rotore di \vec{E} ed applicando il teorema di Stokes si avrà:

$$-\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ T < T_c \end{matrix} \quad \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (2.1)$$

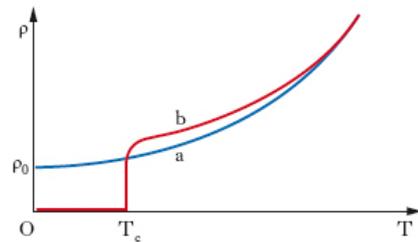


Figura 2.1: Grafico della resistività ρ in funzione della temperatura, che confronta stato normale (curva blu) e stato superconduttivo (curva rossa).

da cui si può concludere che il flusso magnetico attraverso l'anello si mantiene costante.

Consideriamo adesso lo stesso sistema ma nello stato normale, quindi al disopra della temperatura critica T_c , ed applichiamo un campo magnetico esterno \vec{B}_{ext} che attraversi il materiale. Raffreddiamo l'anello metallico portandolo nello stato superconduttivo. Se spegniamo la sorgente di campo magnetico, al fine di mantenere ϕ costante, il superconduttore sostiene il proprio campo magnetico con la formazione di una corrente indotta \vec{I} , che è proprio la corrente che osserviamo come persistente. Si noti inoltre che se nel superconduttore si avesse $\rho \neq 0$ allora la corrente andrebbe a decadere invalidando la (2.1).

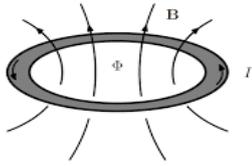


Figura 2.2: Correnti persistenti generate da un flusso magnetico ϕ su un anello superconduttore.

Un'altra importante prova a sostegno della superconduttività all'interno dei metalli fu l'osservazione di quello che prese il nome di *Effetto Meissner-Ochsenfeld*, cioè dell'espulsione, dall'interno del superconduttore, di un campo magnetico applicato esternamente, fintanto che questo sia di piccola intensità.

Per spiegare tale fenomeno, consideriamo una sfera di materiale metallico a temperatura $T < T_c$, sulla quale applichiamo un piccolo campo magnetico esterno \vec{B} (figura 2.3). Il superconduttore, secondo l'effetto Meissner, reagisce ad un debole campo magnetico producendo correnti interne \vec{J}_{int} di "schermaggio" tali da espellere il campo magnetico esterno. A partire dall'effet-

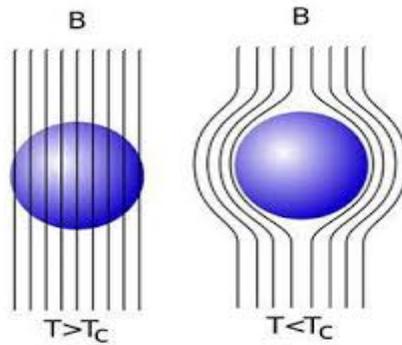


Figura 2.3: Effetto Meissner-Ochsenfeld.

to Meissner-Ochsenfeld, si può dimostrare che se $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{int} + \vec{J}$ e chiamiamo \vec{M} il vettore di magnetizzazione, allora si può scrivere:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{J}_{int} + \vec{J} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{M} = -\vec{H}, \quad (2.2)$$

cioè che un materiale che sia superconduttore è anche un diamagnete perfetto.

Introducendo l'effetto Meissner-Ochsenfeld è stato specificato che questo ha validità solo nel caso in cui il campo magnetico in cui è immerso il superconduttore è di debole intensità; allora sembra naturale chiedersi cosa succeda se il campo magnetico

esterno viene fatto via via crescere. Nel caso in cui il superconduttore venga immerso in un campo magnetico esterno, questo può manifestare due comportamenti diversi che classificano i materiali in superconduttori di tipo I e II.

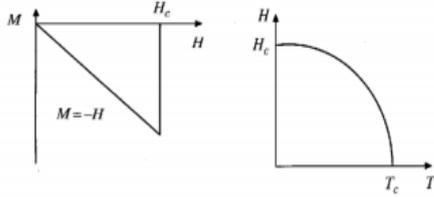


Figura 2.4: Grafici $M-H$ e $H-T$ che mostrano le caratteristiche dei superconduttori di tipo I.

Se un superconduttore è classificato di tipo I allora un campo magnetico debole all'interno del materiale si annulla, in accordo con l'effetto Meissner e $\vec{M} = -\vec{H}$, la magnetizzazione aumenta linearmente ma si annulla improvvisamente in corrispondenza di un valore critico H_c del campo. (Figura 2.4)

Quindi per superconduttori di tipo I si ha un solo campo critico al di sopra del quale il carattere superconduttivo si perde, mentre se si è al di sotto si ha che il campo magnetico è completamente espulso.

Se invece il superconduttore è detto di tipo II, si avranno due campi critici H_{c1} e H_{c2} che caratterizzeranno il materiale con un comportamento come descritto in figura (2.5).

Per valori minori di H_{c1} , si è nel regime di totale validità dell'effetto Meissner e quindi varrà la relazione $\vec{M} = -\vec{H}$; per valori successivi a H_{c1} , la magnetizzazione si discosta dall'andamento lineare e inizia a diminuire (in modulo) fino ad annullarsi per un valore del campo magnetico $H_{c2} > H_{c1}$.

Lo stato intermedio per il superconduttore, che si genera tra i valori critici del campo, è anche detto *stato di Abrikosov*, che per primo spiegò la natura della transizione di fase, con la presenza di vortici, che permettono la penetrazione del campo nel metallo.

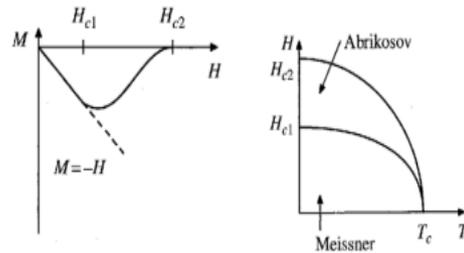


Figura 2.5: Grafici $M-H$ e $H-T$ che mostrano le caratteristiche dei superconduttori di tipo II.

Equazioni di London

La prima teoria fenomenologica riguardante la superconduttività è proposta nel 1935 dai fratelli Fritz e Heinz London. *Le equazioni di London* permettono di legare la densità di corrente elettrica \vec{J} al potenziale vettore \vec{A} che descrive il campo elettromagnetico.

Per procedere alla derivazione di queste equazioni bisogna assumere che la densità numerica n degli elettroni all'interno del materiale sia costituita da due contributi n_s e n_n , tale che valga la relazione $n = n_s + n_n$, con n_s che indica la densità di elettroni superconduttivi, cioè capaci di viaggiare nel materiale senza dissipare la propria energia, mentre n_n indicherà la densità elettronica degli elettroni di una corrente ohmica standard. Inoltre questi due contributi alla densità elettronica vanno considerati uniformi.

Gli elettroni, inclusi nel termine n_n , trasportano una corrente che segue la legge di Ohm:

$$\vec{J}_n = \sigma_n \vec{E} \quad \sigma_n = \frac{e^2 n_n \tau}{m_e}$$

(modello di Drude)

con τ tempo che intercorre tra due collisioni successive tra elettroni e m_e massa dell'elettrone.

Se la densità di elettroni n_s è vista come un "superfluido", cioè un insieme di elettroni che si muove senza dissipare energia, e e^* è la carica delle particelle costituenti il superfluido, allora scriveremo: $\vec{J}_s = -e^* n_s \vec{v}_s$.

Applicando la legge di Newton:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_s = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m},$$

alle relazioni precedenti, possiamo ottenere la *prima equazione di London*

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_s = \frac{e^{*2} n_s}{\bar{m}} \vec{E} \quad (2.3)$$

con \bar{m} massa del superfluido.

La prima equazione è estremamente utile nel formalizzare la mancanza di dissipazione per una corrente superconduttiva, ma non è in grado di descrivere l'effetto Meissner-Ochsenfeld e il comportamento del campo magnetico, che invece è possibile esprimere attraverso la *seconda equazione di London*. Infatti, facendo il rotore della (2.3) e sfruttando le equazioni di Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{J}_s = \frac{e^{*2} n_s}{\bar{m}} \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{e^{*2} n_s}{\bar{m}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \wedge \vec{J}_s = -\frac{e^{*2} n_s}{\bar{m}} \vec{B} \quad (2.4)$$

Utilizzando la legge di Ampere e ricordando la definizione di \vec{B} come rotore del potenziale vettore, le due equazioni di London possono essere riassunte nel sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_s = \frac{\vec{E}}{\mu_0 \lambda_L^2} \\ \vec{J}_s = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

con $\lambda_L^2 = \sqrt{\frac{m}{n_s \mu_0 e^2}}$ detta lunghezza di penetrazione di London.

2.1 Teoria di Ginzburg- Landau

Parallelamente alla teoria fenomenologica dei fratelli London, Ginzburg e Landau svilupparono un modello teorico per descrivere la superconduttività, studiandola come una teoria di campo medio e costruendola in analogia con la teoria delle transizioni di fase termodinamiche di Landau.

La teoria si fonda sull'introduzione di una variabile complessa ψ detta *parametro d'ordine*¹, che risulterà essere nulla nella fase normale e diversa da zero in quella superconduttiva.

¹Ci si limiterà a presentare la teoria nei suoi aspetti fondamentali e unicamente nel caso in cui il parametro d'ordine può considerarsi indipendente dalla posizione, quindi per un materiale che risulti omogeneo.

L'interpretazione fisica del parametro d'ordine è d'associare alla relazione $|\psi|^2 = n_s$, con n_s densità di portatori di carica superconduttivi.

Tale approccio all'analisi della superconduttività è analogo al caso della magnetizzazione di un magnete per temperature inferiori alla T_{Curie} . Per tali temperature il materiale sviluppa un momento magnetico \vec{M} , con un particolare verso e direzione, definito dall'orientamento dei singoli momenti magnetici di atomi e molecole che lo costituiscono. Al disopra di T_{Curie} la magnetizzazione risulta, invece, nulla. In questo caso, la magnetizzazione \vec{M} svolge il ruolo di parametro d'ordine. Analogamente ψ è nullo per $T > T_c$ (stato normale) e $\psi \neq 0$ per $T < T_c$.

Le transizioni di fase avvengono quando l'energia libera del sistema è non analitica in corrispondenza di alcuni valori delle variabili termodinamiche. La classificazione si basa sull'ordine della prima derivata della funzione energia libera che presenta una discontinuità nella transizione. Seguendo l'analogia con la magnetizzazione, anche la superconduttività è una transizione di fase di secondo ordine, cioè la discontinuità è presente nella derivata seconda dell'energia, mentre la derivata prima risulta continua (si vedano le figure 2.4 e 2.5).

Ginzburg e Landau ipotizzarono che l'energia libera dovesse dipendere in modo regolare da ψ ; essendo una variabile complessa e dovendo l'energia libera essere reale, si ha che potrà dipendere da ψ solo attraverso il suo modulo $|\psi|$. Sfruttando il fatto che ψ deve andare a zero alla temperatura critica, è possibile espandere l'espressione dell'energia in potenze di $|\psi|$ attorno T_c . Allora la densità di energia ($f = \frac{F}{V}$):

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots \quad b(T) > 0 \quad (2.6)$$

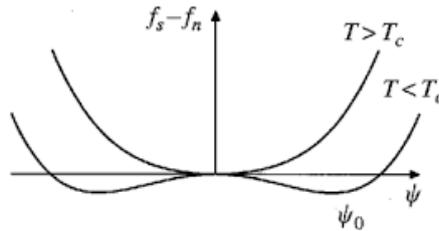


Figura 2.6: Energia libera in funzione del parametro d'ordine.

con f_s e f_n densità di energia nella fase normale e superconduttrice rispettivamente.²

A seconda del segno di $a(T)$ si hanno curve diverse, come si può osservare in figura (2.6). Se $a(T) > 0$, la curva presenta un minimo per $|\psi| = 0$; mentre per $a(T) < 0$ si verificano due minimi per $|\psi| = \pm \sqrt{-\frac{a(T)}{b(T)}}$, ed un massimo in $|\psi| = 0$.

²Si noti che la funzione energia libera contiene solo potenze pari di $|\psi|$. Le potenze dispari del parametro d'ordine devono necessariamente essere escluse poichè la funzione deve conservare la simmetria per scambio $\psi \rightarrow -\psi$, caratteristica della fase ad alta temperatura.

Una volta definito l'andamento e delle funzioni che descrivono l'energia libera nella transizione conduttore-superconduttore, si assume che la condizione $a(T) > 0$, con conseguente minimo per $|\psi| = 0$, era caratteristica dello stato conduttore.

Il parametro $a(T)$ decresce gradualmente al variare della temperatura fino ad annullarsi per $T = T_c$, dove lo stato del sistema cambia improvvisamente. In prossimità della temperatura critica possiamo espandere in serie di Taylor i parametri $a(T)$ e $b(T)$, in modo che il parametro d'ordine, in un intorno di T_c risulti essere:

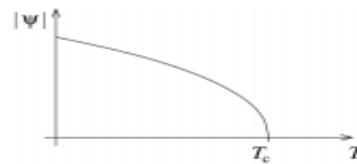


Figura 2.7: Parametro d'ordine in funzione della temperatura.

$$|\psi| = \begin{cases} \sqrt{n_s} (T - T_c)^{\frac{1}{2}} & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases} \quad (2.7)$$

il cui andamento è descritto nella figura (2.7), caratteristico delle transizioni di fase di secondo ordine.

Rottura spontanea della simmetria

Quando abbiamo introdotto il parametro d'ordine, si è posta l'attenzione nello specificare la sua natura complessa. Mostriamo adesso una conseguenza di tale caratteristica.

Se ψ è una variabile complessa allora potrà essere scritta come $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, con θ fase arbitraria. Questo vuol dire che l'energia libera sarà indipendente dal particolare valore di θ , manifestando una simmetria sotto il gruppo di trasformazioni $U(1)$. Sebbene ci sia un insieme infinito di soluzioni che minimizzano l'energia libera, solo uno potrà essere realizzato in concreto ed il sistema sceglierà arbitrariamente un solo valore della fase per lo stato di minimo. Il sistema in questa nuova condizione non è più invariante per rotazione e la simmetria $U(1)$ si dice *spontaneamente rotta*. La rottura spontanea della simmetria coincide con la situazione per cui una simmetria definita per il potenziale non si manifesta per lo stato fondamentale del sistema, e rappresenta una spiegazione elegante per le transizioni di fase e il comportamento peculiare dei sistemi che le presentano.

2.1.1 Teoria G-L in presenza di un campo magnetico

La vera efficacia della teoria di Ginzburg-Landau è mostrata quando studiamo un materiale superconduttore in presenza di un campo magnetico, poichè la teoria è capace, in queste condizioni, di formalizzare anche l'effetto Meissner-Ochsenfeld.

Se si tiene conto anche dell' energia dell' elettrone materiale in accoppiamento minimale con il campo magnetico, allora l'energia libera è descritta dalla relazione:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{1}{2m} |(i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})\psi(\vec{r})|^2 + a(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(\vec{r})|^4 + \dots^3 \quad (2.8)$$

dove si è esplicitata la dipendenza del parametro d'ordine dalla posizione considerando che il materiale possa anche avere una natura non omogenea.

Ovviamente quella appena definita è la densità di energia libera, mentre l'energia libera totale deve tenere conto di tutto il volume materiale (V) e del campo magnetico agente in tutto lo spazio e sarà:

$$F[\psi, \vec{A}] = \int_V \left(\frac{1}{2m} |(i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right) d^3\vec{r} + \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.9)$$

assunta indipendente dallo spazio e dalla temperatura.

Per trovare le equazioni che il parametro d'ordine deve risolvere dobbiamo minimizzare il funzionale energia libera rispetto ψ e al suo complesso coniugato:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} + \frac{2ie}{\hbar}\vec{A})^2\psi(\vec{r}) + a\psi(\vec{r}) + b|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r}) &= 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} + \frac{2ie}{\hbar}\vec{A})^2\psi^*(\vec{r}) + a\psi^*(\vec{r}) + b|\psi(\vec{r})|^2\psi^*(\vec{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se invece facciamo la variazione della (2.9) rispetto al potenziale vettore, si ottiene l'equazione per la corrente quantomeccanica:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{ie\hbar}{2m} (\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) - \frac{4e^2}{m} |\psi|^2 \vec{A} \equiv \vec{J}_s \quad (2.11)$$

Le due equazioni (2.10), unite alla (2.11), prendono il nome di *Equazioni di Ginzburg-Landau* e descrivendo completamente il comportamento di un superconduttore in presenza di un campo elettromagnetico, ma in un contesto generalizzato, rappresentano un'evoluzione delle Equazioni di London.

2.2 La teoria BCS

La teoria BCS, dai nomi dei fisici J.Bardeen, L.N.Cooper e J.R.Schrieffer che l'hanno formulata nel 1957, rappresenta l'approccio microscopico allo studio dei fenomeni associati alla superconduttività.

Alla base di questa teoria c'è l'idea, sviluppata da Cooper, che nei superconduttori avviene la formazione di coppie di elettroni debolmente legati, dette *coppie di Cooper*, che possono muoversi nel metallo in modo coerente, quindi senza dissipare energia.

La coppia di Cooper, idealmente, è l'effetto della distorsione del reticolo cristallino che caratterizza il metallo, per effetto del passaggio di un elettrone di conduzione.

³All' interno dell'equazione compare un fattore 2 davanti la carica elettronica che non è previsto dal canonico accoppiamento elettrone-campo elettromagnetico. La spiegazione è da associare alla definizione della teoria BCS e alla trattazione microscopica della superconduttività.

Questo passando nei pressi degli ioni positivi del reticolo stabilisce una deformazione virtuale del reticolo. A loro volta gli ioni avvicineranno un altro elettrone di impulso opposto.

L'interazione generata è estremamente debole e la coppia può essere rotta innalzando semplicemente la temperatura. Esiste una temperatura critica al disopra della quale le coppie non si possono formare e il metallo perde il carattere superconduttivo.

Descriviamo il modello BCS in maniera più formale.

Consideriamo un gas di fermioni a basse temperature ed introduciamo due operatori $a_{\vec{p},\alpha}^\dagger$ e $a_{\vec{p},\alpha}$, che rispettivamente creano e distruggono un elettrone di impulso \vec{p} e spin α (\uparrow o \downarrow) e per i quali valgono le regole di anticommutazione:

$$\begin{aligned}\{a_{p,\alpha}^\dagger; a_{p',\beta}\} &= \delta(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{\alpha,\beta} \\ \{a_{p,\alpha}^\dagger; a_{p',\beta}^\dagger\} &= 0 \\ \{a_{p,\alpha}; a_{p',\beta}\} &= 0\end{aligned}$$

L'Hamiltoniana del sistema si può allora scrivere come:

$$H - \mu N = \sum_{p,\alpha} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) a_{p,\alpha}^\dagger a_{p,\alpha} - g \sum_{p,p'} a_{p',\uparrow}^\dagger a_{-p',\downarrow}^\dagger a_{-p,\downarrow} a_{p,\uparrow} \quad (2.12)$$

in cui $N = \sum_{p,\alpha} a_{p,\alpha}^\dagger a_{p,\alpha}$ è l'operatore "numero di particelle" che insieme a μ , moltiplicatore di Lagrange, rappresenta il potenziale chimico. Il fattore g davanti al secondo termine, rappresenta la costante di accoppiamento tra due elettroni con momento e spin opposto.

Se si introduce la cosiddetta *funzione di gap*:

$$\Delta = g \sum_p \langle a_{-p,\downarrow} a_{p,\uparrow} \rangle \quad (2.13)$$

ed utilizziamo l'approssimazione di campo medio, considerata la natura debole dell'interazione, l'Hamiltoniana potrà scriversi in maniera semplificata e quadratica rispetto gli operatori di creazione e distruzione, anche se non conserva la carica:

$$H - \mu N = \sum_{p,\alpha} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) a_{p,\alpha}^\dagger a_{p,\alpha} - \sum_p \left(\Delta a_{p,\uparrow}^\dagger a_{-p,\downarrow}^\dagger + \Delta^* a_{-p,\downarrow} a_{p,\uparrow} \right) \quad (2.14)$$

Si può riscrivere H in forma matriciale e diagonalizzarla sulla base $(a_{p,\uparrow}, a_{-p,\downarrow}^\dagger)$ attraverso una matrice U , tale che valga:

$$U^\dagger H U = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \gamma_{p,0} \\ \gamma_{p,1} \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} a_{p,\uparrow} \\ a_{-p,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad \pm E_p = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) + |\Delta|^2}$$

(autovalori della matrice \mathbf{H})

(2.15)

con $\gamma_{p,0}$ e $\gamma_{p,1}$ nuovi operatori che corrispondono ad eccitazioni dello stato fondamentale.

La matrice U che diagonalizza H sarà:

$$U = \begin{pmatrix} u_p & v_p \\ -v_p & u_p \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

dove u_p e v_p sono numeri complessi, definiti a meno di una fase relativa arbitraria θ , il cui modulo quadro soddisfa:

$$|u_p|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{E_p} \right) \quad |v_p|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{E_p} \right) \quad |u_p|^2 + |v_p|^2 = 1$$

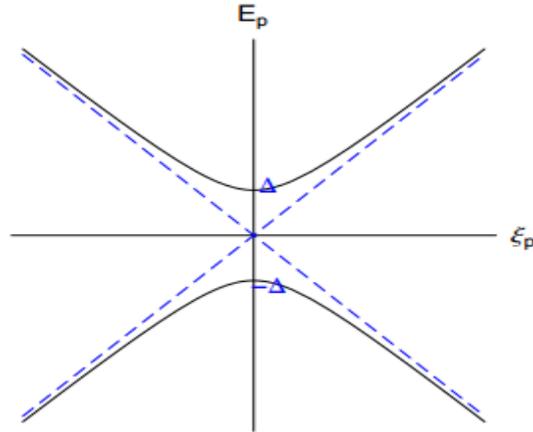


Figura 2.8: Spettro energetico. Le linee tratteggiate rappresentano lo spettro in energia dello stato normale, mentre la curva continua quello delle quasi particelle.
 $\xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu$

E_p definisce lo spettro energetico delle coppie di Cooper, come riportato in figura (2.8). Si osserva che Δ rappresenta proprio il gap energetico fra il minimo dello spettro e lo zero, cioè la quantità di energia che bisogna fornire per creare una quasi-particella. Δ funge da parametro d'ordine e il suo valore non nullo caratterizza la fase superconduttiva.

Capitolo 3

Il modello Plasma sheet

Come anticipato nella prefazione, uno degli obiettivi che si pone questo lavoro di tesi è quello di studiare le variazioni per lo stato di vuoto di un campo elettromagnetico in interazione con un blocco di materiale superconduttivo del tipo HTc.

In questo capitolo quindi ci occuperemo di valutare, una volta introdotto un modello efficace per descrivere il materiale investito dalla radiazione elettromagnetica, le caratteristiche dell'interazione ed in particolare modo la forma delle condizioni di bordo da applicare lungo le superfici interagenti.

3.1 I plasmoni di superficie

Nei capitoli successivi, ci occuperemo di descrivere l'energia Casimir associata ad un materiale multistrato a partire dallo studio dell'interazione tra un campo elettromagnetico, che inizialmente si propaga nel vuoto, con un materiale metallico. Per descrivere correttamente l'energia, oltre al contributo dei fotoni del campo, non possiamo trascurare i contributi superficiali che nascono dall'interazione, sottoforma di eccitazione delle particelle che compongono il materiale.

In questo paragrafo ci occuperemo allora di sviluppare una breve spiegazione riguardante la natura di questi contributi, che prenderanno il nome di *plasmoni*.

I plasmoni di superficie possono essere definiti come eccitazioni, associate al campo elettromagnetico, che si propagano lungo l'interfaccia dielettrico-conduttore, in modo che risultino evanescenti penetrando perpendicolarmente il materiale. Questi modi superficiali nascono attraverso l'accoppiamento dei campi elettromagnetici con le oscillazioni dei portatori di carica nel plasma attraverso cui si modella il materiale.

Per chiarire la natura di queste eccitazioni superficiali e le caratteristiche che ne discendono, consideriamo le equazioni di Maxwell su una superficie piana che faccia da divisione tra un dielettrico e un conduttore.

[4]In assenza di sorgenti esterne sappiamo che a partire dall'equazione che descrive il comportamento del rotore del campo elettromagnetico, è possibile ricavare l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = 0 \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r} e^{-i\omega t}) \quad (3.1)$$

con ϵ costante dielettrica del conduttore.

Per semplicità, assumiamo che il problema imposto dall'equazione appena ottenuta sia a superfici piane; in particolare il campo penetra nel materiale lungo la direzione \hat{z} , mentre si propaga unicamente nella direzione \hat{x} : $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)e^{ik_{\parallel}x}$, con $k_{\parallel} = k_x$.

L'equazione (3.1) si riscrive come:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_{\parallel}^2\right) \vec{E}(z) = 0 \quad (3.2)$$

Naturalmente, un'equazione del tutto simile può essere definita anche per il campo magnetico \vec{H} , procedendo allo stesso modo.

Affinchè sia possibile, a partire dall'equazione (3.2), determinare il profilo di propagazione delle onde, abbiamo bisogno di determinare esplicitamente le diverse componenti per il campo elettrico \vec{E} e magnetico \vec{H} .

Usando le due equazioni di Maxwell relative ai rotori dei campi e la loro forma armonica, per il problema sopra definito, otteniamo le sei equazioni di raccordo sulla superficie:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_x \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - ik_{\parallel} E_z = i\omega\mu_0 H_y \quad (3.3b)$$

$$ik_{\parallel} E_y = i\omega\mu_0 H_z \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\epsilon E_x \quad (3.3d)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - ik_{\parallel} H_z = -i\omega\epsilon E_y \quad (3.3e)$$

$$ik_{\parallel} H_y = -i\omega\epsilon E_z. \quad (3.3f)$$

Il sistema di equazioni così ottenuto è evidentemente composto da due sistemi accoppiati, che possono essere separati nel caso in cui si considerino singolarmente le due polarizzazioni (TE e TM) del campo elettromagnetico¹.

Quando si considera un'onda elettromagnetica nel modo "Transverse Magnetic" (TM), si impone che questa soddisfi le condizioni $B_z = 0$ e $E_z \neq 0$, che corrispondono al caso in cui il campo magnetico va considerato completamente contenuto nel piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda (asse \hat{z}), o più semplicemente che il campo magnetico oscilla nel piano descritto dalla superficie d'incidenza. Il caso "Transverse Electric" (TE) è caratterizzato, invece, dalla condizione $E_z = 0$, $B_z \neq 0$, che descrive la dinamica per cui il campo elettrico è totalmente contenuto nel piano della superficie su cui l'onda incide.

¹Il conto appena concluso è riproposto in dettaglio nel capitolo successivo (per un caso più specifico), dopo aver definito il modello attraverso il quale si vuole descrivere il materiale.

Quindi, per i modi di campo TM si avranno condizioni di raccordo e equazione delle onde nella forma:

$$E_x = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$E_z = -\frac{k_{\parallel}}{\omega\epsilon} H_y; \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{\parallel}^2\right) H_y = 0$$

ricavate dalle (3.3b), (3.3d) e (3.3f).

Per i modi TE, attraverso (3.3a), (3.3c) e (3.3f) si avrà:

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (3.5)$$

$$H_z = \frac{k_{\parallel}}{\omega\mu_0} E_y; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{\parallel}^2\right) E_y = 0.$$

Dobbiamo definire le condizioni di bordo. La superficie di interazione, posta nel piano $z=0$, sia la divisione tra un conduttore ($z<0$) con costante dielettrica $\epsilon_1(\omega)$ e un dielettrico ($z>0$) con costante dielettrica $\epsilon_2(\omega)$.

Poichè cerchiamo stati del campo elettromagnetico localizzati alla superficie, poniamo $\kappa_j \equiv ik_{z,j}$ ($j=1,2$), componente del vettore d'onda perpendicolare all' interfaccia tra i due mezzi.

Le equazioni (3.4) diventano, per $z>0$:

$$H_y(z) = A_2 e^{ik_{\parallel}x} e^{-\kappa_2 z}$$

$$E_x = \frac{iA_2}{\omega\epsilon_2} \kappa_2 e^{ik_{\parallel}x} e^{-\kappa_2 z} \quad (3.6)$$

$$E_z = -A_2 \frac{k_{\parallel}}{\omega\epsilon_2} e^{ik_{\parallel}x} e^{-\kappa_2 z}$$

e per $z<0$

$$H_y(z) = A_1 e^{ik_{\parallel}x} e^{\kappa_1 z}$$

$$E_x = -\frac{iA_1}{\omega\epsilon_1} \kappa_1 e^{ik_{\parallel}x} e^{\kappa_1 z} \quad (3.7)$$

$$E_z = -A_1 \frac{k_{\parallel}}{\omega\epsilon_1} e^{ik_{\parallel}x} e^{\kappa_1 z},$$

Richiedendo che valga la continuità di H_y , E_x e $\epsilon_i E_z$ nel passaggio tra i due mezzi materiali, si ottiene che devono essere soddisfatte le condizioni:

$$A_1 = A_2; \quad \kappa_2 \epsilon_1 = -\kappa_1 \epsilon_2.$$

Si noti che, con la convenzione di segni proposta agli esponenti, che mette in risalto che il campo deve essere un'onda evanescente quando si propaga nel materiale conduttore, il confinamento alla superficie richiede che $Re[\epsilon_1] < 0$ se $\epsilon_2 > 0$, quindi le onde superficiali esistono solo per le interfacce tra materiali con segni opposti della parte reale delle loro costanti dielettriche, cioè tra conduttore ed isolante.

Sostituendo le due espressioni per H_y in (3.4) ed usando le condizioni di continuità ottenute, avremo:

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 &= k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \\ \kappa_2^2 &= k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad k_{\parallel} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}, \quad (3.8)$$

che, poichè \vec{k}_{\parallel} rappresenta il vettore d'onda della componente del campo parallela alla superficie, descrive l'equazione di dispersione dei plasmoni di superficie che si propagano lungo l'interfaccia tra i due materiali.

Descritti quindi i plasmoni provenienti dai modi di campo polarizzati TM, occupiamoci del caso TE. Seguendo un ragionamento analogo, si ottiene che le componenti del campo soddisferanno le condizioni di continuità se è soddisfatta la relazione:

$$A_1(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$$

che risulta soddisfatta se $A_1 = 0 = A_2$.

Si può quindi affermare che non esistono modi di campo superficiali per la polarizzazione TE. I plasmoni di superficie esistono solo per polarizzazioni TM.

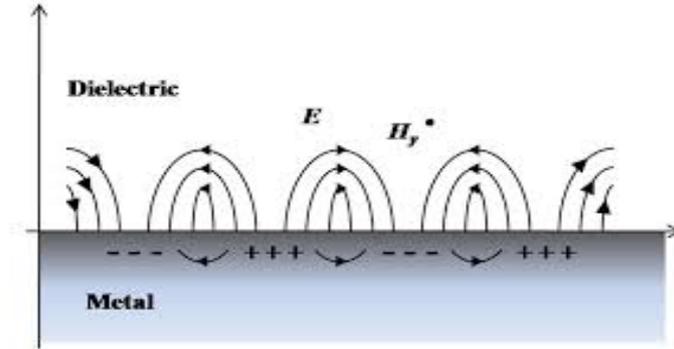


Figura 3.1: Rappresentazione dei plasmoni sull'interfaccia fra un metallo e un dielettrico.

3.2 Descrizione teorica del modello

Avendo intenzione di costruire un modello, che sia tanto valido per analizzare il comportamento del campo elettromagnetico nel caso in cui questo incida su un materiale metallico nel suo stato normale, quanto nel caso superconduttivo, cominciamo a valutare una situazione semplificata che però ci permetta di studiare l'interazione adeguatamente, tenendo a mente che l'obiettivo finale è quello di poter descrivere in maniera soddisfacente il caso in cui l'interazione avvenga con materiali stratificati.

Consideriamo allora un blocco di materiale a superfici infinite, piane e parallele, caratterizzato macroscopicamente da una costante dielettrica $\epsilon(\omega)$, assunta indipendente dalla posizione. In questa sezione ci limiteremo a studiare il caso in cui

il materiale metallico si trova nel suo stato normale, descrivendo l'interazione attraverso un processo di scattering elastico tra i fotoni del campo elettromagnetico e il blocco metallico, visto come un plasma di elettroni con frequenza caratteristica ω_p .

Il modello, come si può intuire facilmente, prende il nome di *plasma sheet*, proprio dal fatto che il materiale, di cui è composto il blocco, viene visto come un plasma di costante dielettrica $\epsilon(\omega)$.

Inoltre, se lo spessore del blocco viene ridotto ad una lamina sottile, non solo questa descrizione continua a rimanere valida, ma le si può affiancare una seconda interpretazione equivalente che studia la lamina come se fosse, all'interno del processo di interazione, una discontinuità spaziale, che comporta un "salto" nella continuità delle componenti del campo; salto proporzionale al fattore $\Omega = \frac{2\pi ne^2}{mc^2}$, che tiene conto dei portatori di carica [1][3].

Consideriamo allora la lamina materiale, descritta dal modello appena introdotto, supponendo che questa sia investita dalla radiazione elettromagnetica che incide normalmente sulla superficie metallica. Imporremo che per il campo elettromagnetico sia k_z la componente del vettore di propagazione normale alle superfici ($\hat{z} \equiv 3$), mentre le componenti nelle direzioni $\hat{x} \equiv 1$ e $\hat{y} \equiv 2$ risulteranno parallele alla superficie di interfaccia vuoto-materiale. Si noti, infine, che sarà necessario considerare campi a bassa frequenza (grandi lunghezze d'onda), in modo che il materiale non risulti trasparente quando investito dalla radiazione elettromagnetica.

Nelle condizioni appena presentate, ci proponiamo di determinare le condizioni di raccordo tra il campo elettromagnetico, che si propaga nel vuoto, e quello che invece si propagerà nel materiale nella sua fase normale. Ricordando inoltre che vale la classificazione dei modi di campo in Transverse Magnetic (TM) e Transverse Electric (TE), ottenuta sfruttando la proprietà di trasversalità della polarizzazione del campo elettromagnetico nel vuoto, esamineremo separatamente gli effetti delle condizioni di raccordo sui due modi di campo. Il procedimento integrale è riportato in Appendice A e ci porterà ad affermare che per un campo elettromagnetico ϕ , che soddisfa le condizioni imposte, deve essere soluzione per il problema agli autovalori:

$$\partial_z^2 \phi = \left(k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \phi. \quad (3.9)$$

3.3 Condizioni di matching su una superficie d'incidenza

Conoscendo sia la dinamica del campo elettromagnetico nel vuoto sia di quello che si propaga all'interno del mezzo materiale, non ci resta che valutare come queste si raccordano sulla superficie del materiale conduttore. In particolare, per semplificare l'analisi possiamo sfruttare la polarizzazione delle onde elettromagnetiche che descrivono il campo.

Quando un'onda piana, come nel caso del campo elettromagnetico ϕ , incide su una superficie di separazione tra due materiali ottici, nello specifico il vuoto e il materiale conduttore, viene decomposta in un'onda trasmessa ed una riflessa. Ogni componente, polarizzata casualmente, può essere a sua volta descritta come la

sovrapposizione di due polarizzazioni lineari ortogonali, la polarizzazione (o modo) TE (Transverse Electric) e la polarizzazione TM (Transverse Magnetic).

Quindi, invece di procedere alla definizione delle condizioni di raccordo dei campi sulla superficie vuoto-materiale in via del tutto generale, diversifichiamo l'analisi dell'onda elettromagnetica trasmessa rispetto ai due stati di polarizzazione che può assumere.

Il processo, completo dei passaggi espliciti, che porta alla definizione delle condizioni di raccordo sulla superficie di separazione dielettrico-conduttore, è descritto in Appendice A.

Di seguito saranno riportati brevemente solo i risultati accompagnati dalla logica con cui li si è derivati.

Si può cominciare a prendere in esame il campo elettromagnetico polarizzato TM, per il quale vale la condizione $B_z = 0$.

Dall'Elettrodinamica classica, si conosce che quando un campo elettromagnetico passa attraverso una superficie di separazione tra due mezzi materiali deve essere imposta la conservazione delle componenti normali alla superficie stessa dei vettori \vec{D} e \vec{B} e delle componenti tangenti dei vettori \vec{E} e \vec{H} .

Affinchè la componente del campo magnetico tangenziale alla superficie di separazione risulti continua nel passaggio tra un mezzo e l'altro, deve essere verificata la condizione:

$$\epsilon(\omega)_L \phi_L - \epsilon(\omega)_R \phi_R = 0, \quad (3.10)$$

con ϕ soluzione dell'equazione (3.9) e i pedici R e L che indicano il campo nel mezzo materiale, cioè nella parte destra rispetto la superficie d'incidenza e il campo nel vuoto nella semipiano sinistro.

Richiedere che le componenti del campo elettrico tangenziale alla superficie e contemporaneamente quella normale del vettore spostamento si conservino, equivale a richiedere che risultino continue le derivate prime del campo ϕ nel passaggio da un mezzo all'altro:

$$\phi'_L - \phi'_R = 0. \quad (3.11)$$

Allo stesso modo si possono definire le condizioni di matching relative ai modi di campo polarizzati TE, per i quali vale la relazione: $E_z = 0$.

Anche in questo caso le condizioni di matching da imporre sulla superficie sono quelle che ci permettono di affermare la conservazione delle componenti: D_n , B_n , E_t e $H_t = B_t$, nel passaggio tra il vuoto e la lastra metallica.

Nel caso specifico, seguendo quanto detto per il caso TM, si otterrà: $\phi_L - \phi_R = 0$ e $\phi'_L - \phi'_R = 0$.

Riassumendo, un campo elettromagnetico ϕ , soluzione dell'equazione (3.9), nel passaggio da dielettrico a conduttore deve soddisfare le condizioni di raccordo:

$$\begin{array}{lll} \phi_L - \phi_R = 0 & \phi'_L - \phi'_R = 0 & (TE) \\ \epsilon_L(\omega)\phi_L - \epsilon_R(\omega)\phi_R = 0 & \phi'_L - \phi'_R = 0 & (TM) \end{array} \quad (3.12)$$

3.4 Scattering attraverso il "plasma sheet"

Una volta definite le condizioni di raccordo per la superficie che separa un dielettrico da un conduttore infinitamente esteso descritto come un plasma, su cui incide un campo elettromagnetico, ci proponiamo di analizzare gli stati del sistema in modo da poter ottenere informazioni riguardanti l'energia dello stesso.

Il sistema, composto dal campo che si propaga inizialmente nel vuoto e dal materiale su cui incide, sarà descritto attraverso un'Hamiltoniana che agendo sugli stati del sistema definisce uno spettro di energie.

Lo spettro può essere separato in due contributi: una parte riguarderà gli autovalori associati agli stati discreti, propri dei fotoni che saranno vincolati al materiale, quindi saranno *stati legati* e prenderanno il nome di *plasmoni*, l'altro contributo sarà invece uno spettro continuo, proprio degli *stati di scattering* che dipenderanno dalla componente del vettore d'onda del campo che incide sulla superficie in direzione normale, quindi con la possibilità di penetrare il materiale e fuoriuscirne.

Il sistema sarà studiato attraverso il modello plasma sheet, quindi descritto come una lastra metallica con facce piane e parallele sulla quale inciderà un campo ϕ soluzione del problema:

$$\left(\partial_z^2 - k_{\parallel}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi = 0 \quad (3.13)$$

Si è già introdotto, nel paragrafo (3.2), che quando il blocco di materiale è un plasma sheet questo può essere studiato contemporaneamente in due limiti differenti: se lo spessore della lastra è finito, avremo la descrizione di corpo dielettrico attraverso la funzione $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, mentre se si impone il limite di spessore infinitesimo la lastra si riduce ad un vero e proprio "foglio" di materiale che all'interno dell'interazione è approssimabile ad un potenziale a forma di δ dominato dal fattore Ω che tiene conto dei portatori di carica nel materiale.

In questo paragrafo ci occuperemo allora di sviluppare tre problemi differenti: inizieremo studiando gli stati continui e legati sia nel caso di plasma sheet a spessore finito, sia nel limite di spessore infinitesimo; inoltre valuteremo come si modificano le condizioni di raccordo nel passaggio da un limite all'altro.

3.4.1 Stati continui e legati per plasma sheet a spessore finito

Si comincerà a valutare il caso di un plasma sheet di spessore finito a , parametrizzato attraverso $z \in (0, a)$, e costante dielettrica $\epsilon(\omega)$. Si supporrà che le singole interfacce del blocco di materiale siano poste a $z = 0$ e $z = a$. Per il campo ϕ , che è stato introdotto all'inizio di questo paragrafo, si avranno stati di scattering che assumeranno la forma generale:

$$\phi(k_{\parallel}, k_z) = \begin{cases} e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z} & z < 0 \\ t e^{iqz} + r e^{-iq(a-z)} & 0 < z < a \\ t e^{-ik_z z} & z > a \end{cases} \quad (3.14)$$

dove r e t sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e trasmissione propri del materiale che compone la lastra. k_z rappresenta la componente normale alla super-

ficie d'incidenza con cui il campo si propaga nel vuoto, mentre q quella con cui si propaga nel materiale; varranno quindi le relazioni: $\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 + k_z^2$ e $\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 + q^2$.

Per quanto riguarda gli stati legati li si potrà esprimere in via del tutto generale nella forma:

$$\phi_{bs}(k_{\parallel}, \kappa_0) = \begin{cases} Ae^{\kappa_0 z} & z < 0 \\ Be^{-\kappa_a z} + Ce^{-\kappa_a(a-z)} & 0 < z < a \\ De^{-\kappa_0 z} & z > a \end{cases} \quad (3.15)$$

con $k_0 = -ik_z$, $\kappa_a = -iq$ e i coefficienti A,B,C e D incogniti.

Se ci concentriamo sugli stati di scattering osserviamo che per determinarli completamente bisogna definire i coefficienti r e t in funzione di k_z , q e k_{\parallel} .

Per farlo, cominciamo con il considerare la singola interfaccia posta in $z=0$, in modo che lo stato di scattering (3.14) si scriva come:

$$\phi(k_{\parallel}, k_z) = \begin{cases} e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z} & z < 0 \\ t e^{iqz} & z > 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

ed imponiamo le condizioni di raccordo:

$$\begin{aligned} \phi_L - \phi_R &= 0 & \phi'_L - \phi'_R &= 0 & (TE) \\ \epsilon_L(\omega)\phi_L - \epsilon_R(\omega)\phi_R &= 0 & \phi'_L - \phi'_R &= 0 & (TM) \end{aligned} \quad (3.17)$$

ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + r - t = 0 \\ k_z(1 - r) - qt = 0 \end{cases} \quad (TE, z = 0) \quad \begin{cases} 1 + r - \epsilon(\omega)t = 0 \\ k_z(1 - r) - qt = 0 \end{cases} \quad (TM, z = 0) \quad (3.18)$$

Risolvendo la (3.18) si definiscono i coefficienti, per ogni polarizzazione del campo, per la singola interfaccia posta in $z=0$:

$$t = \frac{2k_z}{k_z + q} \quad r = \frac{k_z - q}{k_z + q} \quad (TE) \quad (3.19)$$

$$t = \frac{2k_z}{\epsilon(\omega)k_z + q} \quad r = \frac{\epsilon(\omega)k_z - q}{\epsilon(\omega)k_z + q} \quad (TM)$$

Si può dimostrare, ed è fatto in Appendice B, che il coefficiente di trasmissione "totale" per una lastra di spessore a, può essere scritto in funzione dei coefficienti r e t di singola interfaccia :

$$t = e^{i(k_z - q)a} \frac{t_2 t_1}{1 + \frac{t_1}{t_1^*} r_1^* r_2 e^{2iqa}}, \quad (3.20)$$

dove i coefficienti segnati con l'apice "*" rappresentano i complessi coniugati e i pedici 1 e 2 identificano la prima e la seconda interfaccia.

Nel caso particolare del sistema che stiamo analizzando i coefficienti r e t sono posti identici per le superfici indicate dai pedici 1 e 2, quindi l'espressione precedente si semplifica:

$$t = e^{i(k_z - q)a} \frac{t_1^2}{1 + \frac{t_1}{t_1^*} |r_1|^2 e^{2iqa}}, \quad (3.21)$$

Sostituendo le (3.19) nell' espressione della trasmissione totale, si perviene alla scrittura dei coefficienti di trasmissione per il plasma sheet di spessore finito:

$$t = \frac{\left(\frac{2k_z}{k_z+q}\right)^2}{1 + \left(\frac{k_z-q}{k_z+q}e^{iqa}\right)^2} e^{i(k_z-q)a} \quad (TE) \quad (3.22)$$

$$t = \frac{\left(\frac{2k_z}{\epsilon(\omega)k_z+q}\right)^2}{1 + \left(\frac{\epsilon(\omega)k_z-q}{\epsilon(\omega)k_z+q}e^{iqa}\right)^2} e^{i(k_z-q)a} \quad (TM)$$

Avendo determinato i coefficienti di trasmissione totali ed essendo collegati a quelli di riflessione dalla relazione $|r|^2 + |t|^2 = 1$, abbiamo completamente determinato la forma degli stati di scattering in funzione di k_z e k_{\parallel} .

Per quanto riguarda la determinazione degli stati legati, invece di risolvere un sistema che mi permetta di definire i coefficienti incogniti, imponendo le condizioni di raccordo, si può utilizzare la definizione di plasmoni come poli del coefficiente di trasmissione sull' asse immaginario $\kappa_0 = -ik_z$.

Ovviamente ci limiteremo a studiare solo gli stati legati per i campi polarizzati TM, poichè per quelli TE sappiamo già che non si realizzeranno. Imponiamo nullo il denominatore della seconda espressione contenuta nella (3.22):

$$\frac{\epsilon(\omega)k_z - q}{\epsilon(\omega)k_z + q} = -\sigma e^{-iqa} \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon(\omega)\kappa_0 - \kappa_a}{\epsilon(\omega)\kappa_0 + \kappa_a} = -\sigma e^{-\kappa_a a} \quad \sigma = \pm 1 \quad (3.23)$$

con κ_0 e κ_a che dipendono direttamente da k_{\parallel} .

La (3.23) determina completamente gli stati di plasmonone che sono evidentemente funzione solo di k_{\parallel} . In particolare si avranno due stati legati: uno descritto da una funzione d'onda "simmetrica" che proviene dal caso $\sigma = 1$, l'altro "antisimmetrico" che deriva da $\sigma = -1$.

Le due simmetrie sono da associare alla risposta reciproca delle due interfacce di cui il sistema si compone; infatti, già nella sezione (3.4.1) si era vista una simmetria che era stata definita di specchiamento che imponeva $B = \pm C$. Quando $B=C$ si ha la (3.23) con $\sigma = 1$, mentre $B=-C$ coincide con il caso $\sigma = -1$.

3.4.2 Stati continui e legati per plasma sheet a spessore infinitesimo

Si valuti adesso il sistema descritto precedentemente nel limite in cui lo spessore risulti infinitesimo ($a \rightarrow 0$), ma tale da poter distinguere sempre due interfacce poste in $z=0$ e $z=a$.

Le condizioni di matching non potranno più essere quelle usate nel caso precedente, poichè il "foglio" sottile di materiale che ora si considera, non potrà essere descritto "macroscopicamente" attraverso la costante dielettrica. Quindi diventeranno [3]:

$$\begin{aligned} \phi_L - \phi_R &= 0 & \phi'_L - \phi'_R &= -2\Omega\phi & (TE) \\ \phi_L - \phi_R &= 2\frac{\Omega c^2}{\omega^2}\phi' & \phi'_L - \phi'_R &= 0 & (TM) \end{aligned} \quad (3.24)$$

con $\Omega = \frac{2\pi n_2 D e^2}{mc^2}$, fattore proporzionale alla densità di portatori di carica nel mezzo.

Nel limite $a \rightarrow 0$ lo stato legato si scriverà:

$$\phi_{bs} = \begin{cases} Ae^{\kappa_0 z} & z < 0 \\ Be^{-\kappa_0 z} + Ce^{\kappa_0 z} & 0 < z < a \\ De^{-\kappa_0 z} & z > a. \end{cases} \quad (3.25)$$

che rispetto a $z = \frac{a}{2}$ manifesterà unicamente il comportamento antisimmetrico descritto da $B=-C$.

Procedendo analogamente al caso precedente, consideriamo la singola interfaccia a $z=0$ e imponiamo le condizioni di raccordo. Poichè la lamina sottile di materiale è praticamente a spessore nullo supporremo che valga $k_z = q$, condizione di scattering elastico.

Valutando singolarmente le polarizzazioni:

$$\begin{cases} 1 + r - t = 0 \\ ik_z(1 - r) - ik_z t = -2\Omega t \end{cases} \quad (TE, z = 0) \quad \begin{cases} 1 + r - t = 2\frac{\Omega}{\omega^2} ik_z t \\ t = 1 - r \end{cases} \quad (TM, z = 0) \quad (3.26)$$

da cui deriviamo

$$t = \frac{ik_z}{ik_z - \Omega} \quad r = \frac{\Omega}{ik_z - \Omega} \quad (TE) \quad (3.27)$$

$$t = \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\Omega k_z} \quad r = \frac{i\Omega k_z}{\omega^2 + i\Omega k_z} \quad (TM)$$

Ottenuti coefficienti per singola interfaccia, deriviamo attraverso la (3.21) il coefficiente di trasmissione per il sistema completo:

$$t = \frac{\left(\frac{ik_z}{ik_z - \Omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{ik_z - \Omega} e^{ik_z a}\right)^2} \quad (TE) \quad (3.28)$$

$$t = \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega^2 + i\Omega k_z}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Omega k_z}{\omega^2 + i\Omega k_z} e^{ik_z a}\right)^2} \quad (TM)$$

Sempre in analogia al caso precedente determiniamo gli stati legati come poli del coefficiente di trasmissione:

$$1 + \left(\frac{\Omega k_z}{\omega^2 + i\Omega k_z} e^{ik_z a}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega^2 - \kappa_0 \Omega}{\kappa_0 \Omega} = -\sigma e^{-\kappa_0 a} \quad \sigma = \pm 1 \quad (3.29)$$

La soluzione in questo caso esiste solo per $\Omega > 0$, quindi quando il plasma sheet a spessore infinitesimo è visto come un potenziale attrattivo. Inoltre, il sistema in questo limite, presenta solo uno stato legato antisimmetrico come ci si aspettava.

Capitolo 4

Toy Model: plasma sheet

Nel capitolo precedente sono state determinate le equazioni, le cui soluzioni individuano gli stati di plasmone per un plasma sheet con spessore finito.

In questo capitolo ci proponiamo di sviluppare un modello semplice per descrivere il plasma sheet come una cavità e determinare l'energia associata agli stati legati di tale sistema.

Prima di introdurre le caratteristiche del modello giocattolo è bene chiarire l'idea su cui si baseranno le considerazioni che saranno fatte nel corso di questo e dei prossimi capitoli.

Dalle condizioni (3.17) è evidente che quello che è stato definito come "plasma sheet a spessore finito" altro non è che il modello a "corpo dielettrico" [1], ampiamente utilizzato nella caratterizzazione di fenomeni riguardanti l'interazione fotone-materia.

Per un elemento metallico, le cui dimensioni lineari risultino nell'ordine del millimetro, è usuale utilizzare un approccio macroscopico che si basi su una funzione dielettrica di risposta $\epsilon(\omega)$. La funzione dielettrica del materiale non differisce molto tra la fase superconduttiva e la fase normale, ad eccezione della gamma di frequenze corrispondenti all'energia di gap superconduttrice (Δ). Se si studiano i modi di campo TM, si verifica che, in corrispondenza delle energie per cui si osservano le differenze tra stato normale e superconduttivo, la condizione $B_z = 0$ lungo la superficie esclude qualsiasi componente di propagazione all'interno del materiale, situazione che verifica l'equazioni di London. Quindi, anche se definiremo un sistema che ha dimensioni lineari le quali suggerirebbero un approccio di tipo microscopico, limitando lo studio ai modi di campo TM (è possibile dimostrare che i contributi all'energia Casimir per i modi TE sono trascurabili rispetto a quelli TM) ci aspettiamo che l'approccio macroscopico, determinato dall'uso della funzione dielettrica, sia capace di portare risultati soddisfacenti.

Uno dei risultati che allora ci si aspetta di ottenere, oltre a quelli già definiti nella prefazione, sarà quello di dimostrare che l'andamento dell'energia Casimir per lo spettro completo, ottenuta attraverso un approccio macroscopico, è in accordo con l'andamento teorico aspettato se il toy model venisse studiato come un plasma sheet di spessore infinitesimo.

Introduciamo il sistema del quale vogliamo studiare lo spettro energetico.

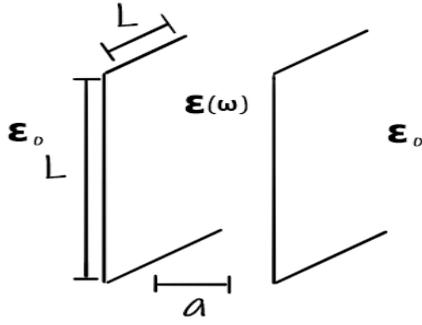


Figura 4.1: Rappresentazione della barriera per il modello semplificato.

L'apparato, mostrato in Figura (4.1), che compone la cavità che studieremo, è costituito da due interfacce metalliche poste a distanza a . Le singole interfacce avranno superficie laterale $L^2 = \mathcal{A}$ e delimiteranno la "cavità" piena di un materiale caratterizzato da una costante dielettrica $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Si supponrà che all'esterno delle cilindri ci sia il vuoto.

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, in particolare in quello relativo ai plasmoni di superficie, valuteremo il processo di scattering sulla lastra solo dei modi di campo TM, poichè per quelli TE già sappiamo non poter ottenere alcun

contributo.

Se imponiamo che le singole interfacce siano poste in $z=0$ e $z=a$, allora il campo elettromagnetico ϕ , con le stesse caratteristiche definite nel capitolo precedente, dovrà scriversi come:

$$\phi = \begin{cases} Ae^{\kappa_0 z} & z < 0 \\ Be^{-\kappa_a z} + Ce^{-\kappa_a(a-z)} & 0 < z < a \\ De^{-\kappa_0 z} & z > a, \end{cases} \quad (4.1)$$

con $\kappa_0 = -ik_z = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ e $\kappa_a = -iq = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}}$, rispettivamente componente perpendicolare del vettore d'onda del campo, appena prima e subito dopo aver interagito con il materiale.

Poichè la cavità è modellizzata come plasma sheet e si stanno considerando solo i modi TM, allora sulle singole interfacce della cavità dovremo imporre le condizioni di raccordo: $\epsilon_L \phi_L - \epsilon_R \phi_R = 0$, $\phi'_L - \phi'_R = 0$, con i pedici L e R che indicano il lato sinistro e destro rispetto ogni superficie che si sta considerando.

Imporre le condizioni al bordo ci porta a definire il seguente sistema:

$$\begin{cases} A - \epsilon(\omega)[B + Ce^{-\kappa_a a}] = 0 \\ \kappa_0 A + \kappa_a [B - Ce^{-\kappa_a a}] = 0 \\ -De^{-\kappa_0 a} + \epsilon(\omega)[Be^{-\kappa_a a} + C] = 0 \\ \kappa_0 De^{-\kappa_0 a} - \kappa_a [Be^{-\kappa_a a} + C] = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Rispetto a $z = \frac{a}{2}$, il sistema manifesta un'evidente simmetria per riflessione: $A = \mp D$ e $B = \pm C$; quindi posso valutare la singola lamina in $z = 0$ e ridurre il sistema a sole due equazioni:

$$\begin{cases} A - B\epsilon(\omega)[1 \pm e^{-\kappa_a a}] = 0 \\ \kappa_0 A + B\kappa_a [1 \mp e^{-\kappa_a a}] = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon(\omega)[1 \mp e^{-\kappa_a a}] \\ 1 & \frac{\kappa_a}{\kappa_0}[1 \pm e^{-\kappa_a a}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

La simmetria imposta rispetto $z = \frac{a}{2}$ rende evidente che il sistema avrà solo due stati legati, realizzati rispettivamente per la condizione $B=C$ (*plasmone simmetrico*) e $B=-C$ (*plasmone antisimmetrico*).

Il sistema (4.3) può essere espresso in forma di matrice a blocchi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon(\omega)[1 - e^{-\kappa_a a}] & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\kappa_a}{\kappa_0}[1 + e^{-\kappa_a a}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\epsilon(\omega)[1 + e^{-\kappa_a a}] \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\kappa_a}{\kappa_0}[1 - e^{-\kappa_a a}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ B^a \\ A^s \\ B^s \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Se denominiamo Δ_a il determinante associato al primo blocco e Δ_s quello del secondo, avremo che il determinante Δ della matrice completa dei coefficienti sarà scritto come $\Delta = \Delta_s \Delta_a$.

Richiedere che il sistema omogeneo abbia soluzione non banale equivale a richiedere che Δ_s e Δ_a siano nulli separatamente¹:

$$\begin{aligned} \Delta_s = 0 & \rightarrow \frac{\kappa_a}{\kappa_0}[1 + e^{-\kappa_a a}] = -\epsilon(\omega)[1 - e^{-\kappa_a a}] \\ \Delta_a = 0 & \rightarrow \frac{\kappa_a}{\kappa_0}[1 - e^{-\kappa_a a}] = -\epsilon(\omega)[1 + e^{-\kappa_a a}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le due condizioni, una volta espressa la costante dielettrica in funzione di ω e sostituita al loro interno, si riscrivono come:

$$\begin{aligned} \omega_s = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \coth(\kappa_a \frac{a}{2})}} & \quad \omega_a = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \tanh(\kappa_a \frac{a}{2})}} \\ \text{(plasmone simmetrico)} & \quad \text{(plasmone antisimmetrico)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove si è imposto che per il particolare materiale valga $\kappa_0 = \kappa_a$, cioè che il campo elettromagnetico si propaga nel materiale a velocità prossime a quelle della luce nel vuoto.

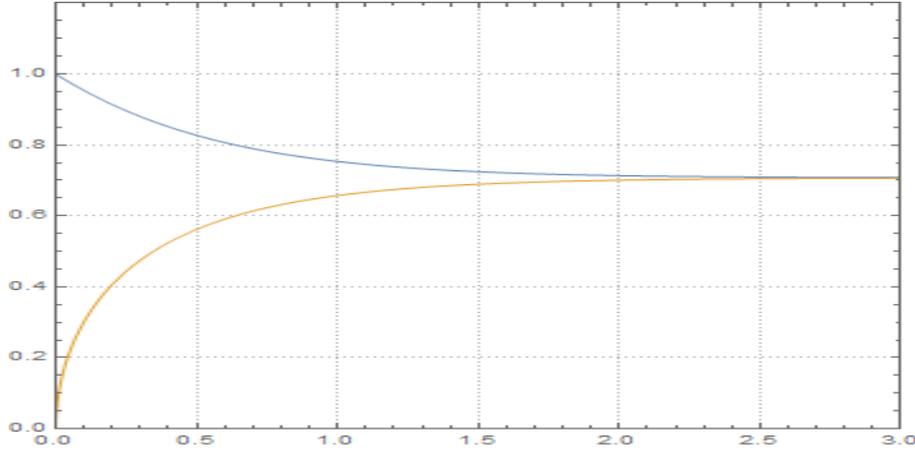


Figura 4.2: Il grafico rappresenta l'andamento di $\frac{\omega_s}{\omega_p}$ (curva blu) e $\frac{\omega_a}{\omega_p}$ (curva arancione) in funzione di $\kappa_a \frac{a}{2}$.

Dalla figura si può osservare che se ci si mette nelle condizioni di valutare piccole lunghezze d'onda ($\kappa_a \frac{a}{2} \gg 1$), le onde superficiali si disaccoppiano e le due superfici che compongono la lastra subiscono oscillazioni indipendenti con una frequenza

¹Le stesse condizioni sono ottenute in Appendice C attraverso un approccio che permette di comprendere perchè sono fisicamente necessarie.

$\omega = \omega_p/\sqrt{2}$, caratteristica di un gas di elettroni semi-infinito con un unico bordo piano; nell'altro caso, per il quale varrà $\kappa_a \frac{a}{2} \ll 1$, saranno prodotte sia oscillazioni normali alla superficie, con frequenza ω_p , sia oscillazioni tangenziali alla superficie con frequenza $\omega^2_{2D} = \pi N k_{||} a$.

4.1 Stima dell' energia degli stati legati

Avendo definito gli stati legati, espressi attraverso ω_s e ω_a , per il plasma sheet che rappresenta il modello giocattolo, si vuole adesso stimare l'energia per tali stati.

Il plasma sheet, anche se in maniera poco convenzionale poichè pieno, può essere visto come una cavità Casimir e in quanto tale si potrà valutare la sua energia non rinormalizzata attraverso la relazione:

$$E_0(a) = \frac{\mathcal{A}\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{||} dk_{||} \sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{||}, \kappa_{a,\sigma}) \quad (4.7)$$

con $\sum_{\sigma=\pm 1} \omega(k_{||}, \kappa_{a,\sigma}) = \omega_s + \omega_a$.

La natura dell'energia degli stati legati per il plasma sheet differisce molto se valutata per regimi differenti. In particolare valuteremo il caso che prende il nome di regime *non ritardato* (o limite di velocità infinita) e lo confronteremo con il caso in cui la propagazione del campo elettromagnetico avviene con velocità finita.

4.1.1 Energia in regime non ritardato

Imporre il regime non ritardato vuol dire supporre che sia valida la condizione: $\frac{\omega^2}{c^2} \ll k_{||}^2$, quindi significa considerare la velocità con cui si propaga il campo nel materiale infinita.

Poichè $\kappa_0 = \kappa_a = \sqrt{k_{||}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, imporre il regime non ritardato coincide con imporre $\kappa_0 = k_{||}$.

L'espressione (4.7) per l'energia si scriverà come:

$$E_0(a) = \frac{\omega_p \mathcal{A}\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} k_{||} dk_{||} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(k_{||} \frac{a}{2})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(k_{||} \frac{a}{2})}} \right) \quad (4.8)$$

Valutiamo il solo contributo antisimmetrico, poichè per l'altro si potrà sviluppare un ragionamento analogo.

Cominciamo con imporre la sostituzione $k_{||} \frac{a}{2} = y \rightarrow k_{||} dk_{||} = \frac{4}{a^2} y dy$:

$$E_{0a}(a) = \frac{2\omega_p \mathcal{A}\hbar}{a^2 \pi} \int_0^{\infty} dy \frac{y}{\sqrt{1 + \tanh(y)}} \quad (4.9)$$

L'energia così espressa deve essere rinormalizzata, operiamo quindi un'integrazione per parti:

$$E_{0a}(a) = \frac{2\omega_p \mathcal{A}\hbar}{a^2 \pi} \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(y)}} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} dy \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(y)}} \right) \right] \quad (4.10)$$

Il primo termine in parentesi quadra è evidentemente divergente, mentre il secondo termine è un integrale convergente; quindi rinormalizzare l'energia equivale a trascurare il primo termine e scrivere:

$$E_0^{(rin)}(a) = -\frac{2\omega_p \mathcal{A} \hbar}{a^2 \pi} \left[\int_0^\infty dy \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(y)}} \right) + \int_0^\infty dy \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(y)}} \right) \right] \quad (4.11)$$

dove si è reintradotto il termine simmetrico opportunamente rinormalizzato.

Essendo gli integrali convergenti si può sviluppare l'integrazione numerica ed ottenere:

$$E_0^{(rin)}(a) \sim -\frac{2\omega_p \mathcal{A} \hbar}{a^2 \pi} (1.2 \cdot 10^{-2}) \quad (4.12)$$

4.1.2 Energia in regime ritardato

Consideriamo adesso il regime "ritardato", quindi un campo che non si propaga a velocità infinita e per il quale deve valere: $\kappa_0 = \kappa_a = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$.

Introducendo le variabili adimensionali:

$$x = \frac{c}{\omega_p} k_{\parallel} \quad \nu = \frac{\xi}{\omega_p} \quad \ell = a \frac{\omega_p}{2c}$$

le relazioni (4.6) si scrivono come:

$$\nu_s(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \nu_s^2})}} \quad \nu_a(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \nu_a^2})}} \quad (4.13)$$

(plasmone simmetrico) (plasmone antisimmetrico)

che rendono evidente che la variabile ν dipende implicitamente dalla variabile x .

Si possono allora introdurre due funzioni:

$$f_\ell(x, \nu_a) = \nu_a - \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \nu_a^2})}} \quad g_\ell(x, \nu_s) = \nu_s - \frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \nu_s^2})}} \quad (4.14)$$

in modo che le (4.13) si riscrivano come: $f_\ell(x, \nu_a) = 0$, $g_\ell(x, \nu_s) = 0$.

Applicando alle funzioni appena definite il *Teorema del Dini* (o teorema delle funzioni implicite) si avrà:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu_a(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f_\ell(x, \nu_a)}{\frac{\partial}{\partial \nu_a} f_\ell(x, \nu_a)} \quad \frac{\partial}{\partial x} \nu_s(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} g_\ell(x, \nu_s)}{\frac{\partial}{\partial \nu_s} g_\ell(x, \nu_s)} \quad (4.15)$$

Si è adesso nelle condizioni di valutare l'energia degli stati legati anche in questo regime.

La relazione (4.8) si può riscrivere attraverso le variabili adimensionali:

$$E_0(a) = \frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} \int_0^\infty dx x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \nu^2})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \nu^2})}} \right) \quad (4.16)$$

Integrando per parti e sostituendo le (4.15) si ottiene:

$$\begin{aligned}
E_0(a) &= \frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} g_\ell(x, \nu_s) + \frac{\partial}{\partial x} f_\ell(x, \nu_a) \right] \\
&= \frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} (I_1 + I_2)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} g_\ell(x, \nu_s) \right] \quad I_2 = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} f_\ell(x, \nu_a) \right]$$

Per valutare numericamente gli integrali I_1 e I_2 è necessario svolgere le derivate e scriverne i rapporti; la funzioni che si ottengono però saranno ancora dipendenti sia dalla variabile x che da ν , quindi non risulteranno integrabili numericamente.

Affinchè si possa riscrivere la funzione integranda dipendente unicamente dalla variabile x , in modo che possa essere integrata, si può pensare di sviluppare in serie le funzioni ν_s e ν_a nel limite $\nu \rightarrow 0$, in modo che se ci si limita al primo ordine dello sviluppo, la funzione $\nu(x)$ si riduca alla forma espressa nel regime *non ritardato*²:

$$\begin{aligned}
\nu_a &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(x\ell)}} \\
\nu_s &= \frac{1}{\sqrt{1 + \coth(x\ell)}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

dove si è considerato: $x = \frac{c}{\omega_p} k_{||}$, $\ell = \frac{\omega_p}{2c} a \Rightarrow x\ell = \frac{a}{2} k_{||}$.

Allora si possono definire due nuove funzioni $F_\ell(x)$ e $G_\ell(x)$ che ci permettano di valutare numericamente gli integrali (4.17):

$$G_\ell(x) = \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} g_\ell(x, \nu_a) \right] \Big|_{\nu_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \coth(x\ell)}}} \stackrel{\ell=1}{\Rightarrow} I_1 = \int_0^\infty dx G_1(x) \sim -0.059$$

$$F_\ell(x) = \frac{x^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} f_\ell(x, \nu_s) \right] \Big|_{\nu_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(x\ell)}}} \stackrel{\ell=1}{\Rightarrow} I_2 = \int_0^\infty dx F_1(x) \sim 0.048$$

con le funzioni $F_1(x)$ e $G_1(x)$ che assumono la forma:

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= -\frac{\ell x^3}{2} \left\{ \left(-\ell\nu - \sqrt{x^2 + \nu^2} (1 + \coth[\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}]) \right)^{\frac{3}{2}} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{x^2 + \nu^2} \cosh[2\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}] (1 + \coth[\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}])^{\frac{3}{2}} \right\}^{-1} \Big|_{\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \coth(x\ell)}}, \ell=1}
\end{aligned}$$

²In Appendice F è riportato un metodo alternativo per la stima dell' energia, nell'approssimazione di basse frequenze, che non fa uso del teorema delle funzioni implicite.

$$F_1(x) = \ell x^3 \operatorname{sech}^2[\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}] \left\{ 2(\ell\nu) \operatorname{sech}^2[\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}] + \right. \\ \left. 2\sqrt{x^2 + \nu^2} (1 + \tanh[\ell\sqrt{x^2 + \nu^2}])^{\frac{3}{2}} \right\}^{-1} \Big|_{\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(x\ell)}}, \ell=1}$$

Concludendo, si può affermare che l'energia Casimir per gli stati legati del plasma sheet, descritto dal toy model in regime ritardato, nel caso in cui $\ell = 1$, risulta essere:

$$E_0(a) = -\frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} (1.1 \cdot 10^{-2}) \quad (4.19)$$

Capitolo 5

Il materiale stratificato

Così come è già stato anticipato nella prefazione, questo lavoro ha come obiettivo quello di descrivere una cavità Casimir dal punto di vista energetico, valutando il contributo proveniente dagli stati di plasmone e confrontandolo con l'energia Casimir totale della cavità.

Poiché questo tipo di analisi la si fa pensandola finalizzata al progetto Archimedes, si conterà che le cavità studiate saranno quelle prodotte dall'alternarsi degli strati di ossido rameoso (CuO) con il vuoto, in modo da replicare la struttura dell'YBCO, che è un dielettrico nella fase normale e diviene superconduttore HTc a temperature relativamente basse.

Con questa intenzione, nei capitoli precedenti ci siamo occupati di descrivere il comportamento e le caratteristiche di un lamina materiale sottile (che potrebbe idealmente essere il singolo piano di CuO) investita da radiazione elettromagnetica.

In questo capitolo ci occuperemo allora di descrivere gli aspetti più interessanti dell'interazione tra un campo elettromagnetico e un materiale stratificato, per la cui descrizione sfrutteremo il modello plasma sheet (a spessore finito), al fine di determinare una formulazione generalizzata che mi permetta di definire *l'Energia Casimir* per un materiale siffatto.

5.1 Derivazione analitica dell' Energia Casimir

Interessati a studiare come poter descrivere l'energia Casimir associata ad un materiale stratificato, quando l'interazione è descritta da un processo di scattering elastico, descriviamo il sistema rappresentato in figura (5.1) in maniera schematica.

La configurazione dell'apparato che analizzeremo sarà quindi composta da due plasma sheet di spessore a e caratterizzate da una costante dielettrica $\epsilon_1(\omega)$; le due lamine si troveranno ad una distanza W l'una dall'altra. Lo spazio tra le piastre è da considerarsi vuoto, mentre all'esterno, per non perdere di generalità, sarà valutata la presenza di un mezzo materiale caratterizzato da $\epsilon_2(\omega)$.

La struttura descritta si ripete periodicamente nello spazio. In particolare si consideri che W si può considerare nell'ordine del nanometro; quindi in circa 3 millimetri di campione si può avere a che fare con un milione di cavità accoppiate.

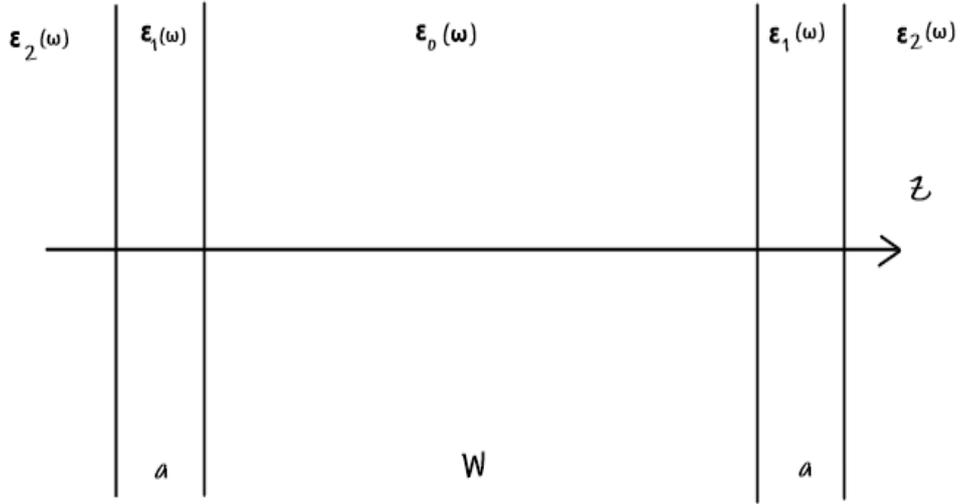


Figura 5.1: Schematizzazione di un materiale stratificato attraverso due piastre parallele di spessore a e costante dielettrica $\epsilon_1(\omega)$, distanti tra loro W .

Per quanto detto nel paragrafo riguardante la derivazione dell' effetto Casimir, nel primo capitolo, per una cavità di larghezza W , come quella che stiamo valutando nel materiale stratificato, si avrà un'energia non rinormalizzata pari a:

$$\begin{aligned}
 E_0(W) &= \frac{L^2(c\hbar)}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \left(k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{W^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{A\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\parallel} dk_{\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \omega,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove $\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{W^2} = k_{\parallel}^2 + \lambda_n^2$, con λ_n^2 che rappresenta gli n autovalori che risolvono il problema $\partial_z^2 \phi = \lambda_n^2 \phi$ posto in (3.13), e \mathcal{A} l'area di ogni piastra che compone la cavità.

Il termine $\sum_{n=0}^{\infty} \omega$ indica la somma sui valori delle frequenze permesse per l' intero sistema e non più per la singola cavità, come nella relazione precedente.

Quindi risulta evidente che se si vuole conoscere l' energia nello stato di vuoto del sistema è necessario studiare questo termine.

Per farlo procediamo ancora a valutare il processo di scattering tra campo elettromagnetico e cavità.

Imponendo un sistema di riferimento che vede la sua origine nella metà della lunghezza W , diremo che le piastre sono posizionate in modo che le singole interfacce risultino poste a $z = -\frac{W}{2} - a$, $z = -\frac{W}{2}$, $z = \frac{W}{2}$ e $z = \frac{W}{2} + a$; in modo tale che il campo ϕ , che risolve il problema $\partial_z^2 \phi = \left(k_{\parallel}^2 - \epsilon_i(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}\right) \phi$, con $i = 0, 1, 2$ e $\epsilon_0(\omega) = 1$,

possa essere scritto come [5]:

$$\phi = \begin{cases} Ae^{\kappa_2 z} & z < -\frac{W}{2} - a \\ Be^{\kappa_1 z} + Ce^{-\kappa_1 z} & -\frac{W}{2} - a < z < -\frac{W}{2} \\ De^{\kappa_0 z} + Ee^{-\kappa_0 z} & -\frac{W}{2} < z < \frac{W}{2} \\ Fe^{\kappa_1 z} + Ge^{-\kappa_1 z} & -\frac{W}{2} < z < -\frac{W}{2} + a \\ He^{-\kappa_2 z} & z > \frac{W}{2} + a, \end{cases} \quad (5.2)$$

con $\kappa_j = -ik_j = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \epsilon_j \frac{\omega^2}{c^2}}$ ($j=0,1,2$) vettore d'onda che descrive la propagazione perpendicolare del campo rispetto l'interfaccia nei tre mezzi; i coefficienti A,B,C,...,H sono incogniti, ma il loro significato fisico è intuitivamente associabile a quello dei coefficienti della matrice di scattering per il sistema completo.

Bisogna imporre le condizioni di raccordo sulle varie interfacce. Valutiamo separatamente i modi del campo con polarizzazioni differenti. Ricordiamo le condizioni di matching ottenute nel terzo capitolo:

$$\begin{aligned} \epsilon_R(\omega)\phi_R - \epsilon_L(\omega)\phi_L = 0 & \quad \phi'_R - \phi'_L = 0 & (TM) \\ \phi_R - \phi_L = 0 & \quad \phi'_R - \phi'_L = 0 & (TE) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se si considerano i modi di campo TM, applicare le condizioni di raccordo al campo espresso tramite le (5.2), equivale a scrivere un sistema lineare omogeneo che ha soluzione non banale solo se il determinante dei coefficienti $\Delta(\omega)$ soddisfa la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta^{(TM)}(\omega) \equiv \beta^2 \left[\lambda^{-2} \left(\gamma^{-1} \eta r_{10}^+ r_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} r_{10}^- r_{12}^- \right)^2 \right. \\ \left. - \lambda^2 \left(\gamma^{-1} \eta r_{10}^- r_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} r_{10}^+ r_{12}^- \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove si sono applicate le sostituzioni: $\beta = e^{-\kappa_2(\frac{W}{2}+a)}$, $\gamma = e^{-\kappa_1(\frac{W}{2}+a)}$, $\eta = e^{-\kappa_1(\frac{W}{2})}$, $\lambda = e^{-\kappa_0(\frac{W}{2})}$, $R_0 = \kappa_0, R_1 = \kappa_1, R_2 = \kappa_2 \rightarrow r_{ij}^{\pm} = R_i \epsilon_j \pm R_j \epsilon_i \quad i, j = 0, 1, 2$.

I passaggi espliciti sono riportati in Appendice D.

Allo stesso modo, ovviamente sfruttando le condizioni di raccordo opportune ed imponendo $q_{ij}^{\pm} = R_i \pm R_j$ ($i, j = 0, 1, 2$), possiamo definire:

$$\begin{aligned} \Delta^{(TE)}(\omega) \equiv \beta^2 \left[\lambda^{-2} \left(\gamma^{-1} \eta q_{10}^+ q_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} q_{10}^- q_{12}^- \right)^2 \right. \\ \left. - \lambda^2 \left(\gamma^{-1} \eta q_{10}^- q_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} q_{10}^+ q_{12}^- \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Risolvere direttamente le due equazioni ottenute per ottenere i valori di ω risulta essere un'impresa piuttosto complessa da portare a termine; per semplificare la risoluzione possiamo affidarci al *teorema dell'argomento* (enunciato e dimostrato in Appendice E) che ci permette di affermare:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \{\text{numero di zeri}\} - \{\text{numero di poli}\}$$

con $f(z)$ funzione complessa integrata lungo una curva chiusa γ .

Nel nostro caso, osservando che la funzione $\Delta(\omega)$ presenta z_k zeri in corrispondenza dei valori di ω , potremo scrivere il teorema nella forma:

$$\sum_{k,n} m_k \omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \omega d \log \Delta(\omega), \quad (5.6)$$

dove, nel membro di sinistra, non compare la sommatoria sui poli poichè non sono presenti nella funzione $\Delta(\omega)$ e si è considerato che $\frac{\Delta'(\omega)}{\Delta(\omega)}$ ha poli del primo ordine con residuo integrale m_k lungo gli zeri z_k . Il Δ che compare nella (5.6) è da considerarsi come la somma dei determinanti provenienti da TE e TM.

Se consideriamo come percorso di integrazione una curva chiusa γ , tale che sia soddisfatta la condizione $m_k = 1$, la (5.6) diventa:

$$\sum_n \omega = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{i\infty}^0 \omega d \log \Delta(\omega) + \int_{C_+} \omega d \log \Delta(\omega) \right] \quad (5.7)$$

con la curva C_+ che indica il quarto di circonferenza di raggio infinito e centro nell'origine nel quadrante tutto positivo del piano complesso di ω , Figura(5.3).

Il secondo integrale nel membro di destra della (5.7) è da calcolare supponendo, come è naturale, che valga:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega} = 0, \quad (5.8)$$

lungo ogni direzione radiale nel piano complesso di ω . Il risultato è infinito, e quindi indipendente da a:

$$\int_{C_+} \omega d \log \Delta(\omega) = 4 \int_{C_+} d\omega. \quad (5.9)$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = -i\omega$ e sostituendo nell' equazione (5.7), si ottiene:

$$\sum_n \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^0 \xi d \log \Delta(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_{C_+} d\xi. \quad (5.10)$$

La somma così ottenuta è evidentemente divergente, poichè entrambi i termini del membro destro lo sono. Affinchè sia possibile eliminare il comportamento divergente degli integrali e produrre un energia "finita", è necessario procedere attraverso la *rinormalizzazione*.

Prima di descrivere il processo di rinormalizzazione, è utile osservare come si sia definito il circuito d'integrazione γ introdotto in (5.6).

Se si considera il piano complesso di ω , dove la parte reale è valutata sull' asse delle ascisse e la parte immaginaria (descritta dalla variabile ξ) su quello delle ordinate, si può verificare che gli stati legati si realizzeranno per valori immaginari di ω , Figura (5.2), dove si è supposto, per semplicità, che si producano solo due stati di plasmone ξ_s e ξ_a , come avviene nel caso del toy model descritto nel paragrafo precedente.

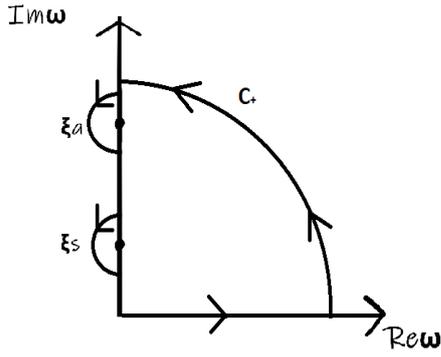


Figura 5.2: Circuito d'integrazione che si potrebbe utilizzare per valutare l'integrale (5.6) nel piano complesso.

Se si volesse sviluppare l'integrale complesso al membro di destra della relazione (5.6), si potrebbe pensare di chiudere il circuito γ girando attorno agli zeri del determinante, seguendo il verso descritto in Figura (5.2).

In realtà la curva chiusa può essere scelta in maniera più semplice, introducendo un fattore δ infinitesimo.

Per comprendere in che modo l'introduzione di un elemento infinitesimo, possa deformare il circuito d'integrazione, consideriamo le relazioni, ormai più che note :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 + k_z^2 \quad k_z = i\kappa$$

Se, allora, si sceglie un elemento δ tanto piccolo che il suo contributo non modifichi la fisica del sistema, è possibile richiedere che valga: $k_z = i\kappa + \delta$.

A partire da questo si può osservare che:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 + (i\kappa + \delta)^2 \sim k_{\parallel}^2 + 2i\kappa\delta - \kappa^2$$

dove ci si è limitati a valutare il primo ordine in δ .

L'ultima relazione ottenuta può essere scritta nella forma:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{\parallel}^2 \left(1 + 2i \frac{\kappa}{k_{\parallel}^2} \delta \right) - \kappa^2$$

la quale rende evidente che il termine δ ha come effetto quello di spostare "leggermente" le singolarità che erano puramente immaginarie lungo l'asse reale.

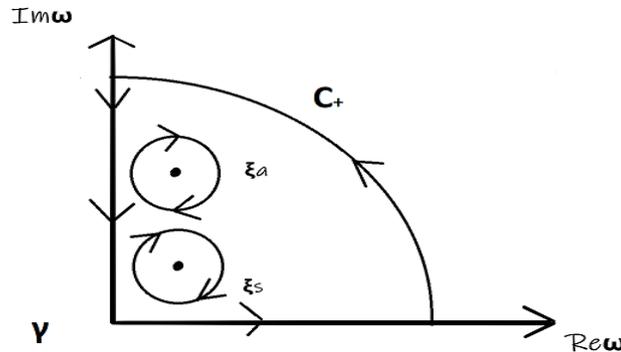


Figura 5.3: Curva chiusa γ che definisce il percorso su cui fare l'integrale in (5.7).

Il cammino di integrazione γ può essere ridisegnato come in Figura (5.3) e quindi, valutando tutto nel limite $\delta \rightarrow 0$, ottenere dalla (5.6) la somma d'integrali in (5.7).

Si può adesso ritornare a sviluppare il processo di rinormalizzazione. Consideriamo allora di portare la distanza a , che divide le due cavità, all' infinito, in modo che queste non interagiscano più; in una condizione di questo tipo avremo:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_n \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \xi d \log \Delta^\infty(\omega) + \frac{2}{\pi} \int_{C_+} d\xi, \quad (5.11)$$

Sappiamo, allora, che l'energia rinormalizzata può essere definita come la differenza tra quella ottenuta nella (5.7) e i termini asintotici:

$$\begin{aligned} E_0^{(rin)}(W, a) &= - \frac{\mathcal{A}\hbar}{2\pi} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \left[\sum_n \omega - \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_n \omega \right] \\ &= - \frac{\mathcal{A}\hbar}{2\pi} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \xi d \log \frac{\Delta(\xi)}{\Delta_\infty(\xi)} \right] \\ &= - \frac{\mathcal{A}\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \int_{-\infty}^\infty \xi d \log \frac{\Delta(\xi)}{\Delta_\infty(\xi)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se denominiamo $\frac{\Delta(\xi)}{\Delta_\infty(\xi)} = \Delta_{(rin)}(\xi)$, e separiamo i contributi TM e TE:

$$\begin{aligned} E_0^{(rin)}(W, a) &= - \frac{\mathcal{A}\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \left[\int_{-\infty}^\infty \xi d \log \Delta_{(rin)}^{(TM)}(\xi) + \int_{-\infty}^\infty \xi d \log \Delta_{(rin)}^{(TE)}(\xi) \right] \\ \Delta_{(rin)}^{(TM)}(\xi) &= 1 - \left(\frac{r_{10}^- r_{12}^+ e^{\kappa_1 a} - r_{10}^+ r_{12}^- e^{-\kappa_1 a}}{r_{10}^+ r_{12}^+ e^{\kappa_1 a} - r_{10}^- r_{12}^- e^{-\kappa_1 a}} \right)^2 e^{-2\kappa_0 W} \\ \Delta_{(rin)}^{(TE)}(\xi) &= 1 - \left(\frac{q_{10}^- q_{12}^+ e^{\kappa_1 a} - q_{10}^+ q_{12}^- e^{-\kappa_1 a}}{q_{10}^+ q_{12}^+ e^{\kappa_1 a} - q_{10}^- q_{12}^- e^{-\kappa_1 a}} \right)^2 e^{-2\kappa_0 W} \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2 Energia Casimir per il plasma sheet

Se si fa riferimento alla Figura (5.1), che rappresenta il materiale stratificato, si può notare che questa può essere ridotta alla struttura che descrive il modello giocattolo attraverso semplici operazioni.

Infatti, se si applicano le sostituzioni: $W \rightarrow a$, $a \rightarrow d$ e si scambiano le $\epsilon_0(\omega)$ con le $\epsilon_1(\omega)$, valutato il sistema nel limite per cui $d \rightarrow \infty$, allora la cavità in figura (5.1) si riduce al plasma sheet in figura (4.1).

Si può quindi affermare che il toy model, in quanto struttura dotata di due interfacce che la delimitano, è da considerarsi come una cavità Casimir atipica, essendo piena.

Valutiamo, quindi, l'energia Casimir per la "cavit " plasma sheet descritta dal modello giocattolo. Come fatto anche nei capitoli precedenti, si inizia ad analizzare il caso TM.

Poich  si   dimostrato che il sistema che si sta analizzando pu  essere prodotto a partire dalla struttura generale della cavit  nel materiale stratificato, deriviamo, attraverso le stesse sostituzioni, l'espressione per l'energia Casimir del plasma sheet. Il sistema generale definito dalla (72) in Appendice D, nel caso particolare si riduce al seguente sistema espresso in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon(\omega) & -\epsilon(\omega)e^{-\kappa_a a} & 0 \\ \kappa_0 & \kappa_a & -\kappa_a e^{-\kappa_a a} & 0 \\ 0 & \epsilon(\omega)e^{-\kappa_a a} & \epsilon(\omega) & -e^{-\kappa_a a} \\ 0 & -\kappa_a e^{-\kappa_a a} & -\kappa_a & \kappa_0 e^{-\kappa_a a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

Di conseguenza, l'espressione (5.13) ci permette di derivare il determinante ri-normalizzato della matrice dei coefficienti, che risulter  essere:

$$\Delta_{(rin)}^{(TM)}(\xi) = 1 - \left(\frac{\epsilon(\xi)\kappa_0 - \kappa_a}{\epsilon(\xi)\kappa_0 + \kappa_a} \right)^2 e^{-2\kappa_a a} \quad \epsilon(\xi) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\xi^2} \quad (5.15)$$

attraverso cui, nell'ipotesi che sia valida l'approssimazione $\kappa_0 = \kappa_a$, si ottiene l'energia Casimir rinormalizzata:

$$E_0^{(rin)}(a) = -\frac{\mathcal{A}\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \int_0^\infty \xi d \log \left[1 - \left(\frac{\epsilon(\xi) - 1}{\epsilon(\xi) + 1} \right)^2 e^{-2\kappa_a a} \right] \quad (5.16)$$

L'integrale pu  essere adimensionalizzato attraverso le sostituzioni:

$$\nu = \frac{\xi}{\omega_p} \quad x = \frac{c^2}{\omega_p^2} k_{||} \quad \ell = \frac{\omega_p}{2c} a$$

$$\Rightarrow E_0^{(rin)}(\ell) = -\frac{\hbar\omega_p^3 \mathcal{A}}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty x dx \int_0^\infty \nu d \log \left[1 - \left(\frac{1}{1 + 2\nu^2} \right)^2 e^{-4\ell\sqrt{x^2 + \nu^2 + 1}} \right]$$

Integrando per parti ed invertendo l'ordine d'integrazione:

$$E_0^{(rin)}(\ell) = \frac{\hbar\omega_p^3 \mathcal{A}}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dx x \log \left[1 - \left(\frac{1}{1 + 2\nu^2} \right)^2 e^{-4\ell\sqrt{x^2 + \nu^2 + 1}} \right] \quad (5.17)$$

Operiamo un cambio di variabile: $x^2 = u \rightarrow 2x dx = du$

$$\begin{aligned} E_0^{(rin)}(\ell) &= \frac{\hbar\omega_p^3 \mathcal{A}}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{2} \int_0^\infty du \log \left[1 - \left(\frac{1}{1 + 2\nu^2} \right)^2 e^{-4\ell\sqrt{u + \nu^2 + 1}} \right] \\ &= \frac{\hbar\omega_p^3 \mathcal{A}}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{2} \left(-\frac{4\ell\sqrt{1 + \nu^2} \text{PolyLog}[2, \frac{e^{-4\ell\sqrt{\nu^2 + 1}}}{(1 + 2\nu^2)^2}] + \text{PolyLog}[3, \frac{e^{-4\ell\sqrt{\nu^2 + 1}}}{(1 + 2\nu^2)^2}]}{8\ell^2} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Imponendo $\ell = 1$, come fatto nel caso della stima dell'energia per i plasmoni, si ottiene l'energia Casimir per il plasma sheet giocattolo:

$$E_0^{(rin)}(\ell) = \frac{\hbar\omega_p^3 \mathcal{A}}{2\pi c^2} (-7.46 \cdot 10^{-3}) \quad (5.19)$$

dove si è fatto in modo che il fattore dimensionale risultasse analogo a quello del caso plasmonico.

A questo punto non resta che valutare il contributo energetico associato ai modi TE.

In realtà, si può osservare che, essendo le condizioni al bordo indipendenti da $\epsilon(\omega)$, lo sarà anche il determinante $\Delta^{(TE)}$, quindi con la condizione valida per il toy model $\kappa_0 = \kappa_a$, i modi di campo TE risultano non contribuire all'energia Casimir per il modello giocattolo.

Inoltre, all'inizio del quarto capitolo si è esposto l'argomento a sostegno della validità di un approccio macroscopico nel caso dei modi di campo TM, ma niente è stato specificato per il caso di polarizzazione TE.

Considerando che i modi di campo TE hanno componente $B_z \neq 0$, la quale deve essere macroscopicamente continua sulla superficie di raccordo, si osserva che nel caso il materiale sia in uno stato di superconduttore, le equazioni di London risulteranno violate, quindi l'approccio macroscopico non può essere considerato perseguibile.

L'analisi dei modi TE, che non è oggetto di questo lavoro, necessita di un approccio microscopico e della valutazione dettagliata del meccanismo Anderson-Higgs che si genera tra il campo elettromagnetico e le coppie di Cooper nel piano di CuO.

5.3 Energia Casimir e contributo dei plasmoni

Nel paragrafo appena concluso e nell'ultimo del quarto capitolo, sono stati ottenuti i due risultati che rappresentano il punto centrale di questo lavoro di tesi.

Questi sono stati derivati, supponendo un plasma sheet di spessore $\ell = 1$, attraverso metodologie differenti, spiegate nelle rispettive sezioni, che ci hanno portato ad esiti di diversa natura.

Per comprendere le differenze e poter sviluppare un confronto, in questo paragrafo ci occuperemo di analizzare nel dettaglio le risposte che i due metodi hanno prodotto e di trarre delle conclusioni riguardo l'energia della cavità plasma sheet.

Nel capitolo in cui è stato introdotto il modello giocattolo, si è definita l'energia associata agli stati legati del campo elettromagnetico prodotti nell'interazione con la barriera plasma sheet.

Mentre in quell'occasione si è concentrata l'attenzione sulla possibilità di definire un valore numerico per il contributo energetico degli stati discreti, adesso si è interessati a studiare l'andamento di tale valore al variare della distanza tra le interfacce della lastra.

Per procedere in questa analisi si consideri la relazione (4.17) e la si riscriva nella forma:

$$E_0(a) = \gamma h_{bs}(\ell)$$

con la funzione $h_{bs} = I_1 + I_2$ definiti in (4.17), e $\gamma = \frac{\omega_p^3 \hbar}{2\pi c^2} \sim 10^{-3} \frac{J}{m^2}$.

Inoltre, si noti che l'energia è adesso definita per unità di superficie e si è sottointesa la diretta dipendenza tra le variabili ℓ e a , determinata dalla relazione: $a = \frac{2c}{\omega_p} \ell$.

Quindi, se si suppone che per la densità elettronica sia lecito stimare $n_e = 10^{23} cm^{-3}$,

allora si avrà $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} \sim 10^{16} Hz$, da qui si deduce che per ogni variazione di ℓ di 0.1 unità si avrà una variazione di spessore per la lastra "giocattolo" di $a=2$ nm.

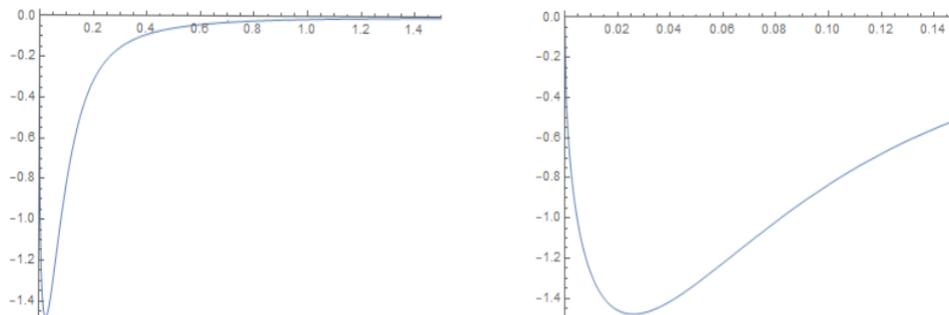


Figura 5.4: Nella figura di sinistra è riportata $h_{bs}(\ell)$ in funzione di ℓ ; nell'immagine a destra la stessa funzione ma osservata in dettaglio nell'intervallo $\ell \in (0; 0.1)$.

Come si può osservare dalla Figura (5.4), la funzione h_{bs} tende velocemente a zero all'aumentare di ℓ e l'energia degli stati legati risulta pressochè nulla già per un plasma sheet spesso una decina di nanometri. Questo andamento ci può far pensare che anche il contributo plasmonico all'energia possa rispecchiare l'andamento di un'energia Casimir e che l'energia degli stati legati sia fortemente incidente rispetto all'energia Casimir totale per il plasma sheet.

Se si analizza nel dettaglio il grafico è possibile individuare due comportamenti interessanti per la funzione:

- Se si considera ℓ che varia nell'intervallo $(0; 0.03)$, che coincide con $a \in (0; 0.06)nm$, si osserva che l'energia degli stati di plasmone aumenta all'aumentare dello spessore. Si può supporre allora che quando il sistema è un plasma sheet di larghezza finita di pochi Angstrom (situazione in cui è assimilabile con il piano di ossido di rame presente nella struttura dell'YBCO), non si manifesta per gli stati legati il comportamento caratteristico dell'effetto Casimir, ma l'energia risulta determinata da fenomeni microscopici di varia natura.
- Se invece si valuta l'energia nel caso in cui $a > 0.06$ nm, si osserva che il contributo energetico apportato dagli stati legati al plasma sheet è energia Casimir, quindi è appropriato pensare la barriera come una cavità Casimir piena.

Per convincerci di quanto detto si può osservare la Figura (5.5).

Dalla letteratura riguardante lo studio dell'effetto Casimir, si può ottenere che quando una cavità è modellizzata attraverso la rappresentazione di plasma sheet a spessore infinitesimo, ci si aspetta un andamento caratteristico nella forma $b\ell^{-5/2}$, con b parametro reale [1][3].

Dalla relazione (1.14), si ricava invece che l'andamento aspettato per l'energia Casimir, se valutata per una cavità a spessore finito, è del tipo $b\ell^{-3}$.

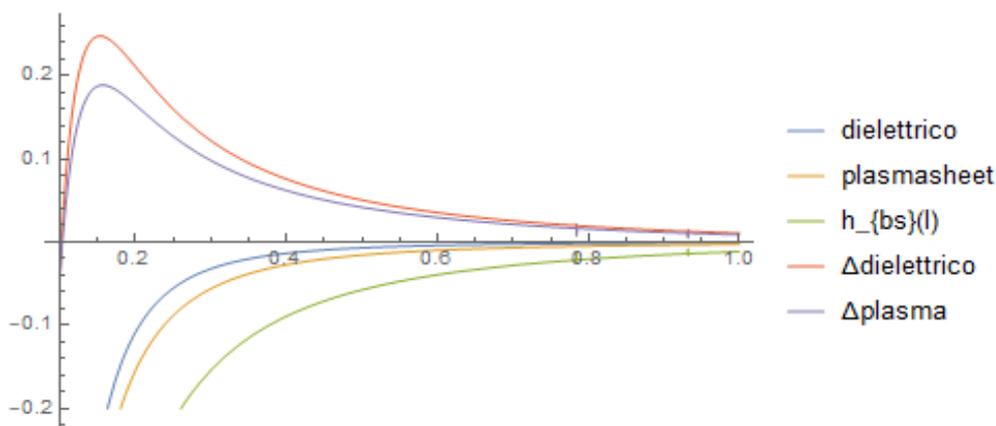


Figura 5.5: Il grafico permette di confrontare l'andamento della funzione $h_{bs}(\ell)$, graficata nell'intervallo $\ell \in (0.06, 1.0)$, con gli andamenti teorici per l'energia Casimir nel caso di cavità modellizzate come plasma sheet finiti (dielettrico) o plasma sheet infinitesimi (plasma sheet).

In figura è riportato l'andamento della funzione $h_{bs}(\ell)$ (in verde) e confrontato con i due andamenti teorici che ci si aspetta per l'energia dello spettro discreto (curva blu e arancione). In particolare, attraverso le due curve rappresentate nel primo quadrante, ottenute facendo la differenza tra la curva h_{bs} e i due andamenti teorici, si deduce che non solo l'energia degli stati legati ottenuta è un contributo Casimir ma anche che l'accordo tra i risultati ottenuti e quelli aspettati è discreto anche nel caso di cavità con spessori inferiori a 2 nm.

Si può adesso passare ad analizzare i risultati derivati nel paragrafo precedente e quindi descrivere come si comporta l'energia Casimir completa per il toy model al variare dello spessore della lastra.

Come fatto nel caso precedente, riscriviamo l'espressione (5.18) come:

$$E_0(a) = \gamma \frac{H(\ell)}{2\pi}$$

con γ fattore dimensionale definito precedentemente.

In Figura (5.6) si può vedere l'andamento dell'energia Casimir definita per il toy model confrontato con gli andamenti teorici per lo spessore finito e nel caso di un plasma sheet infinitesimo.

Si nota subito che i punti relativi al nostro modello si accordano perfettamente, ottenuti tramite un approccio macroscopico, si accordano perfettamente con l'andamento teorico del caso di spessore infinitesimo. Questo non solo verifica che il modello plasma sheet è fortemente correlato al modello dielettrico, ma anche che nell'ipotesi di basse frequenze, per i modi di campo TM, è assolutamente permessa una trattazione macroscopica di una cavità anche se la sua larghezza è nell'ordine del nanometro.

Questa affermazione è ulteriormente avvalorata dal fatto che, richiedendo ad un programma di simulazione numerica (nel nostro caso Wolfram Mathematica) di sviluppare un fit non lineare per la funzione $H(\ell)$ nella forma: $a\ell^b$, si ha $b \sim -2.35$.

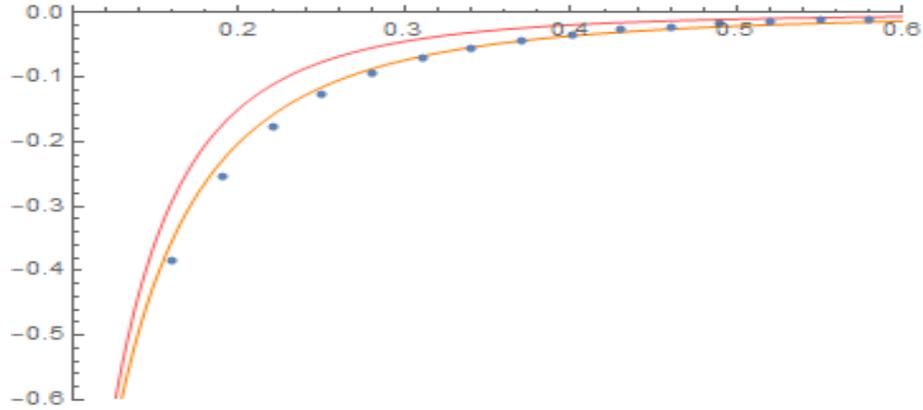


Figura 5.6: In blu è riportato l'andamento della funzione $H(\ell)$ in funzione di ℓ . Rispetto la stessa variabile sono stati graficati i due andamenti teorici per l'energia Casimir: plasma sheet con spessore infinitesimo (arancione) e plasma sheet a spessore finito o modello dielettrico (rosso).

Il risultato, quindi, è perfettamente compatibile con l'andamento $\ell^{-\frac{5}{2}}$ caratteristico del plasma sheet.

Ancora un'osservazione può essere fatta.

Se ci si limita a graficare nell'intervallo $\ell > 0.1$ (al disotto si è già osservato che l'energia dei plasmoni non è un contributo Casimir) gli andamenti per l'energia degli stati legati e per lo spettro completo, Figura (5.7), si osserva che, all'interno dell'energia Casimir completa, il contributo dei modi plasmonici è fortemente dominante rispetto quella degli stati continui (ottenuti per differenza) e quindi che l'analisi dello spettro discreto dell'energia, per i modi TM, può rappresentare una buona approssimazione dell'energia Casimir per una cavità di spessore attorno ai 2 nm ($\ell = 0.1$).

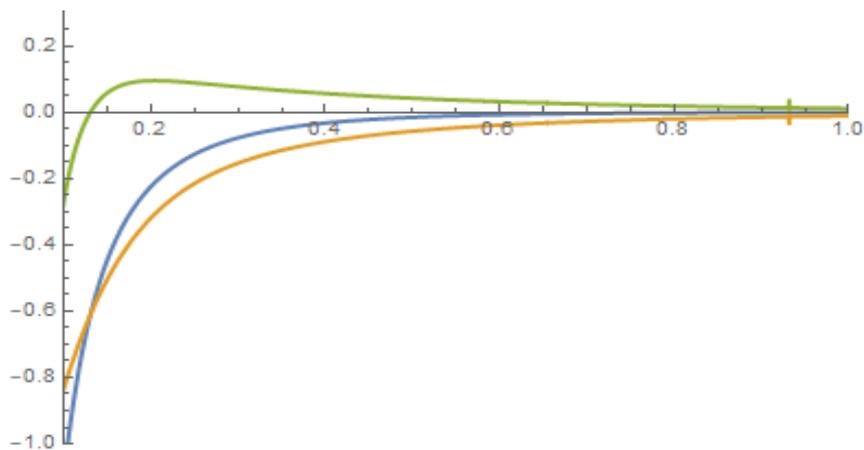


Figura 5.7: In funzione di ℓ sono graficati le funzioni $h_{bs}(\ell)$ (arancione), $\frac{H(\ell)}{2\pi}$ (blu) e la loro differenza che rappresenta l'energia dello spettro continuo (verde).

Capitolo 6

Energia Casimir per lo stato superconduttivo

I risultati ottenuti fino a questo momento, ci hanno permesso, dopo aver considerato un campione di materiale stratificato ed aver isolato una sua unità fondamentale, descrivendola attraverso un modello semplificato, di caratterizzare completamente, dal punto energetico, una cavità Casimir nel caso in cui il materiale di cui è "piena" si trova nella fase *normale*.

In quest' ultimo capitolo si vogliono presentare, senza scendere nel dettaglio della simulazione numerica, gli aspetti fondamentali dell'analisi dello spettro energetico del campo elettromagnetico incidente sulla lamina, descritta con il modello giocattolo, quando questa si presenta nella fase superconduttiva.

In particolare si determinerà la forma dell' espressione che descrive la variazione dell' energia Casimir nella transizione tra le due fasi.

Tutta la trattazione precedente è stata svolta imponendo che la temperatura fosse quella dello zero assoluto; anche lo stato superconduttivo sarà valutato nella stessa condizione, poichè questa non solo soddisfa sicuramente la condizione $T < T_c$, ma rappresenta anche una buona approssimazione per le temperature in cui si realizza effettivamente la superconduttività per il materiale, che possono essere anche inferiori all' ordine del mK.

Quindi, avendo fissato la temperatura per il sistema, è evidente che la variazione energetica è tutta da attribuire al ruolo della costante dielettrica e a come questa cambia tra una fase e l'altra.

Lo studio della costante dielettrica rappresenterà, infatti, il nodo centrale di questo capitolo.

6.1 Utili elementi matematici

Prima di procedere alla definizione della costante dielettrica per lo stato superconduttivo è utile andare a chiarire due strumenti matematici che saranno usati nel processo di derivazioni della funzione $\epsilon(\omega)$: *Trasformate di Kramers-Kroning* e le *regole di somma*.

Le trasformate KK

La funzione dielettrica $\epsilon(\omega)$ è da definirsi come una funzione di "risposta causale", in quanto indica la risposta conseguente all' eccitazione del sistema.

Essendo una funzione di questo tipo, una sua proprietà fondamentale è quella di soddisfare le relazioni di Kramers-Kronig (KK), che sono dette anche Trasformate di KK o Relazioni di dispersione di KK.

Supponendo che la costante dielettrica possa essere scritta in generale come somma di una parte reale e di una immaginaria:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega) \quad (6.1)$$

queste relazioni integrali legano la parte reale alla parte immaginaria . Nel caso della funzione dielettrica si scrivono come

$$\epsilon_1(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\epsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (6.2)$$

$$\epsilon_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\epsilon_1(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

con P che indica la parte principale dell' integrale.

Queste relazioni danno l' importante informazione che ogni processo di assorbimento descritto da $\epsilon_2(\omega)$, deve essere accompagnato da un effetto di dispersione del mezzo alle altre frequenze, descritto da $\epsilon_1(\omega)$.

L'osservazione più importante riguarda comunque i risvolti pratici di queste relazioni. Infatti permettono di calcolare una delle due componenti di una funzione di risposta causale se ne è stata misurata l'altra, con notevoli vantaggi dal punto di vista sperimentale.

Il problema è che la componente conosciuta dovrebbe essere nota in tutto lo spettro. Ciò non è ovviamente possibile, tuttavia, nella maggior parte delle situazioni, è sufficiente che la componente misurata sia disponibile in una regione di spettro finita, che sia la più ampia possibile.

Le regole di somma

Un'altra importante proprietà della funzione dielettrica $\epsilon(\omega)$, descritta come in (6.1), è quella di soddisfare le regole di somma.

Queste sono relazioni integrali che danno come risultato delle quantità che si conservano, ad esempio, al variare della temperatura.

Per come sono definite è evidente che le "regole di somma" possono essere molteplici e di svariata natura. In questa occasione riportiamo solo quella che ci tornerà utile, che coinvolge la parte immaginaria della funzione dielettrica:

$$\int_0^\infty d\omega \omega \epsilon_2(\omega) = \frac{2\pi^2 n_e e^2}{m_e} \quad (\text{global oscillator strenght sum rule}) \quad (6.3)$$

Supponendo che anche per la conducibilità ottica $\sigma(\omega)$ si possa affermare:

$$\sigma(\omega) = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$$

allora, utilizzando la relazione $\epsilon_2(\omega) = \frac{4\pi}{\omega}\sigma_1(\omega)$, si può riscrivere la regola di somma per la conducibilità:

$$\int_0^\infty d\omega \sigma_1(\omega) = \frac{\pi n_e e^2}{2m_e} \quad (6.4)$$

con n_e densità elettronica e m_e massa del singolo elettrone.

6.2 La funzione dielettrica di Mattis-Bardeen

Come è noto, i superconduttori mostrano una dissipazione finita quando sono attraversati da correnti alternate o da campi elettromagnetici variabili nel tempo. [9] A frequenze ω molto inferiori all'energia di gap Δ , introdotta nel secondo capitolo, $\hbar\omega \ll \Delta(T)$, è possibile descrivere la funzione di risposta di un superconduttore attraverso un modello a due fluidi Casimir-Gorter, che prevede la seguente espressione per la parte reale $\sigma_1(\omega)$ della conducibilità complessa $\sigma(\omega)$:

$$\sigma_1(\omega) = \frac{\pi n_s e^2}{2m} \delta(\omega) + \frac{n_n e^2 \tau_n}{m} (1 + \omega^2 \tau_n^2)^{-1} \quad (6.5)$$

dove $\delta(\omega)$ è la funzione delta di Dirac, m e e rispettivamente la massa e la carica dell'elettrone, n_s e n_n le densità elettroniche, dipendenti dalla temperatura, per lo stato superconduttivo e per lo stato normale; infine τ_n indica il tempo di rilassamento per un elettrone "normale", determinato dalle impurità presenti nel campione.

Si è già detto che per σ_1 vale la regola di somma (6.4) con $n = n_n + n_s$.

Una descrizione accurata della conduttività complessa di un superconduttore BCS, per energie di fotone superiori a 2Δ , richiede che si utilizzi la teoria completa di Mattis-Bardeen della conduzione elettrica, che è valida anche nel caso di effetto pelle anomalo. Questa teoria permette di scrivere la parte reale della conducibilità superconduttiva $\sigma_{1s}(\omega)$ in una forma analoga alla (6.5):

$$\sigma_{1s}(\omega) = \kappa \delta(\omega) + \hat{\sigma}_{1s}(\omega). \quad (6.6)$$

Per $\omega > 0$, $\hat{\sigma}_{1s}(\omega)$ risulta:

$$\hat{\sigma}_{1s}(\omega) = \frac{\hbar n e^2}{2m\omega\tau_n} \left[\int_\Delta^\infty dE J_T + \theta(\hbar\omega - 2\Delta) \int_{\Delta-\hbar\omega}^{-\Delta} dE J_D \right], \quad (6.7)$$

dove

$$J_T = g(\omega, \tau_n, E) \left[\tanh\left(\frac{E + \hbar\omega}{2kT}\right) - \tanh\left(\frac{E}{2kT}\right) \right] \quad (6.8)$$

$$J_D = -g(\omega, \tau_n, E) \tanh\left(\frac{E}{2kT}\right)$$

con k costante di Boltzmann. Definendo

$$P_1 = \sqrt{(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2} \quad P_2 = \sqrt{E^2 - \Delta^2},$$

la funzione $g(\omega, \tau_n, E)$ si scrive:

$$g = \left[1 + \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{P_1 P_2} \right] \frac{1}{(P_1 - P_2)^2 + \left(\frac{\hbar}{\tau_n}\right)^2} - \left[1 - \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{P_1 P_2} \right] \frac{1}{(P_1 - P_2)^2 + \left(\frac{\hbar}{\tau_n}\right)^2} \quad (6.9)$$

Il coefficiente κ della funzione delta in (6.6) è determinato in modo che soddisfi la regola di somma:

$$\kappa = \frac{\pi n e^2}{m} \left[\frac{\pi \tau_n \Delta}{\hbar} \tanh\left(\frac{\Delta}{2kT}\right) - 4\Delta^2 \int_{\Delta}^{\infty} dE \frac{\tanh\left(\frac{E}{2kT}\right)}{\sqrt{E^2 - \Delta^2} [4(E^2 - \Delta^2) + \left(\frac{\hbar}{\tau_n}\right)^2]} \right]. \quad (6.10)$$

La conducibilità $\sigma_{1s}(\omega)$ in (6.6) può essere pensata come la somma di tre contributi: una funzione delta di Dirac nell'origine, una componente dipendente dalla temperatura che diverge logicamente in $\omega = 0$, ed una componente di assorbimento con inizio a $2\Delta(T)$.

Per $T < T_c$ una completa definizione di $\sigma_{1s}(\omega)$ richiede tre parametri: la frequenza di plasma $\Omega_n^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$ che fornisce la scala generale per $\sigma_{1s}(\omega)$, il tempo di rilassamento $0\tau_n$ per gli elettroni nello stato normale e l'energia di gap Δ .

Si osserva che a ω fissato per $T \rightarrow T_c$, così come a fissato $T < T_c$ per $z \rightarrow \infty$, $\sigma_{1s}(\omega)$ si può riscrivere attraverso l'espressione di Drude $\sigma_{1D}(\omega)$:

$$\sigma_{1D}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (6.11)$$

Si può adesso passare dalla conducibilità alla funzione dielettrica in modo da determinare la forma della $\epsilon_s(\omega)$ per la teoria di Mattis-Bardeen.

Si cominci a valutare frequenze immaginarie: $\epsilon_s(\omega) = \epsilon_s(i\xi)$ e si esprima, attraverso le trasformate KK, $\epsilon_s(i\xi)$ in termini della sua parte immaginaria valutata per frequenze reali:

$$\epsilon_s(i\xi) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega \epsilon_{2s}(\omega)}{\xi^2 + \omega^2} \quad \xrightarrow{\epsilon_2 = \frac{4\pi}{\omega} \sigma_1} \quad \epsilon_s(i\xi) = 1 + 8 \int_0^{\infty} d\omega \frac{\sigma_{1s}(\omega)}{\xi^2 + \omega^2} \quad (6.12)$$

Se si sostituisce la relazione (6.6) in (6.12), si perviene alla seguente formula:

$$\epsilon_s(i\xi) = 1 + 8 \int_0^{\infty} d\omega \frac{\hat{\sigma}_{1s}(\omega)}{\xi^2 + \omega^2} + \frac{4\kappa}{\xi^2} \quad (6.13)$$

con κ definito in (6.10).

L'equazione (6.13) è già la funzione dielettrica che si stava cercando, ma affinché questa risulti più maneggevole all'interno di un'elaborazione numerica, operiamo pochi passaggi per riscriverla in un'altra forma.

Si sostituisca (6.6) nella regola di somma, in modo che si scriva:

$$\frac{\kappa}{2} + \int_0^{\infty} d\omega \hat{\sigma}_{1s}(\omega) = \frac{\pi n e^2}{2m} \quad (6.14)$$

Le regole di somma saranno valide anche nello stato normale per il dielettrico, quindi si avrà:

$$\int_0^\infty d\omega \sigma_{1D}(\omega) = \frac{\pi n e^2}{2m} \quad (6.15)$$

da cui deriviamo che la (6.14) si riscrive come:

$$\frac{\kappa}{2} = \int_0^\infty d\omega (\sigma_{1D}(\omega) - \hat{\sigma}_{1s}(\omega)). \quad (6.16)$$

Sostituendo la relazione per κ così ottenuta nella (6.13), ed usando la relazione di dispersione per σ_{1D} :

$$\epsilon_D(i\xi) - 1 = 8 \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma_{1D}(\omega)}{\xi^2 + \omega^2}$$

è facile ottenere l'equazione finale che descrive la funzione dielettrica per un materiale superconduttore:

$$\epsilon_s(i\xi) = \epsilon_D(i\xi) - \frac{8}{\xi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 (\sigma_{1D}(\omega) - \hat{\sigma}_{1s}(\omega))}{\xi^2 + \omega^2}. \quad (6.17)$$

Questa scrittura mette in evidenza la rappresentazione della costante dielettrica superconduttiva come "correzione" del modello di Drude, dove il termine correttivo è descritto dalla funzione integrale.

Definita la funzione di risposta $\epsilon_s(\omega)$ per lo stato superconduttivo, si è nelle condizioni di poter determinare le espressioni che definiscono lo spettro energetico completo e quello discreto per il modello giocattolo, nel caso in cui questo manifesti il comportamento di superconduttore.

Questo tipo di analisi, tuttavia, non è argomento di questo lavoro e sarà oggetto di lavori futuri, che si occuperanno anche di determinare numericamente la variazione di energia Casimir per la transizione a partire dalla relazione [9]:

$$\delta E_0^{(rin)}(a) = -\frac{\mathcal{A}\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_{||} dk_{||} \int_0^\infty \xi d \log \left(\frac{\Delta_D^{(rin)}}{\Delta_S^{(rin)}} \right) \quad (6.18)$$

con $\Delta_{D/S}^{(rin)} = \Delta_{D/S}^{(rin)(TM)} + \Delta_{D/S}^{(rin)(TE)}$, con Δ_D ottenuto attraverso la costante dielettrica di Drude e Δ_s con quella di Mattis e Bardeen.

Conclusioni

Nel lavoro di tesi che è stato svolto si è studiata una cavità Casimir al fine di poter comprendere tutte le caratteristiche riguardanti il suo spettro energetico, in modo da avere solide basi su cui sviluppare i processi futuri che dovranno provvedere a valutare la variazione energetica nel caso in cui la cavità sia nello stato superconduttivo.

I risultati ottenuti sono stati determinati a partire da un approccio di scattering. Si è considerato che la cavità fosse investita da radiazione elettromagnetica e quindi lo spettro in energia prodotto per il sistema fosse composto da una parte discreta e da una continua. Si è ipotizzato che nonostante la cavità fosse una barriera estremamente stretta, fosse comunque valido un approccio macroscopico e che quindi potesse essere descritta attraverso la funzione dielettrica; ipotesi poi verificata dalle simulazioni numeriche.

Inizialmente è stato introdotto il processo di scattering, tra fotone e lamina materiale, mettendo in risalto il ruolo degli stati legati che si formano in un'interazione di questo tipo. Quindi, descritto nel dettaglio il modello utile a caratterizzare la barriera, si è valutato numericamente il valore del contributo energetico degli stati di plasmon, prima per un valore fissato dello spessore della cavità e poi analizzando come varia se questo viene modificato.

Si è poi considerato un campione di materiale stratificato che rappresentasse una cavità Casimir ed è stata definita l'energia Casimir dello spettro completo. L'introduzione di un materiale così fatto, ci ha permesso di collegare il sistema che avevamo studiato in precedenza, all'esperimento ARCHIMEDES.

L'YBCO, materiale di cui è composto il campione utilizzato all'interno di questo esperimento, è infatti un materiale superconduttore che manifesta una struttura stratificata. Dimostrando che il sistema modello potesse rappresentare un'unità fondamentale della struttura complessa dell'YBCO, valutarne l'energia Casimir, a partire dall'espressione generale, ci ha permesso di sviluppare il primo passo verso una caratterizzazione microscopica dei comportamenti di tale materiale.

L'analisi numerica ha messo in evidenza tre aspetti fondamentali:

- Per cavità meno larghe di 1 nm lo spettro energetico dei plasmoni non è un contributo Casimir all'energia totale, quindi ha presumibilmente a che vedere con fenomeni microscopici che vanno studiati nel dettaglio.
- Per cavità di spessore superiore a 1 nm anche lo spettro discreto ha un andamento che rispecchia l'andamento di una energia Casimir e il suo contributo è dominante rispetto a quello apportato all'energia totale dagli stati di fotone.

- L'andamento dell' energia totale per il modello, dimostra la correttezza dell' ipotesi di poter usare un approccio macroscopico per un materiale di dimensioni microscopiche, se nel processo di scattering si valutano solo i modi di campo TM, come nel nostro caso.

È evidente che, non solo la valutazione del modello proposto nello stato di superconduttore è un passo fondamentale da compiere, se si vuole arrivare a comprendere tutte le caratteristiche di un materiale come l'YBCO, ma è necessario anche sviluppare un modello microscopico dettagliato, del quale questo lavoro vuole essere solo un preludio.

Appendice A

Campo elettromagnetico su superficie materiale

Se ci mettiamo sufficientemente lontani dalla lastra di materiale metallico saranno valide le quattro equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$

Considerando le condizioni in cui ci siamo posti, possiamo considerare campo elettrico e magnetico scritti in forma d'onda:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{k}_{||}, z) e^{i(\vec{k}_{||} \cdot \vec{x}_{||} - \omega t)} \quad (21)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{g}(\vec{k}_{||}, z) e^{i(\vec{k}_{||} \cdot \vec{x}_{||} - \omega t)}, \quad (22)$$

con $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, $\vec{k}_{||} = (k_1, k_2)$ e $\vec{x}_{||} = (x_1, x_2)$. Sfruttando le equazioni di Maxwell e i campi scritti in questa forma è possibile ricondurre lo studio di tutta la dinamica del campo elettromagnetico alla sola componente perpendicolare alla superficie, cioè quella riguardante l'asse z che, come indicato in precedenza, sarà caratterizzata dal pedice 3. Di seguito sarà mostrato come ricondurre la dinamica del campo \vec{E} alla sola componente f_3 , tenendo bene a mente che per il campo magnetico è possibile seguire un percorso totalmente analogo.

Per ottenere tale risultato è utile ricordare la forma del rotore di \vec{E} :

$$\nabla \wedge \vec{E} = \left(\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right); \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right); \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right), \quad (23)$$

che sfruttando l'equazione (21) può essere riscritta come:

$$\nabla \wedge \vec{E} = \left((ik_2 f_3 - \partial_z f_2); (\partial_z f_1 - ik_1 f_3); (k_1 f_2 - k_2 f_1) \right) e^{i(\vec{k}_{||} \cdot \vec{x}_{||} - \omega t)}. \quad (24)$$

La relazione così ottenuta e la (22) ci permettono di scrivere la prima delle equazioni (20) per componenti, ottenendo:

$$ik_2 f_3 - \partial_z f_2 = \frac{i\omega}{c} g_1 \quad (25)$$

$$-ik_1f_3 + \partial_z f_1 = \frac{i\omega}{c}g_2 \quad (26)$$

$$k_1f_2 - k_2f_1 = \frac{\omega}{c}g_3. \quad (27)$$

Procedendo analogamente ma partendo dalla scrittura del rotore del campo magnetico si perviene alla scrittura per componenti della seconda delle equazioni (20):

$$ik_2g_3 - \partial_z g_2 = -\frac{i\omega}{c}f_1 \quad (28)$$

$$-ik_1g_3 + \partial_z g_1 = -\frac{i\omega}{c}f_2 \quad (29)$$

$$k_1g_2 - k_2g_1 = -\frac{\omega}{c}f_3. \quad (30)$$

Le sei equazioni così ottenute possono essere messe in relazione tra di loro; infatti è evidente che è possibile passare dalle prime tre, ottenute per il campo elettrico, alle successive tre applicando la sostituzione:

$$f \rightarrow g \quad \omega \rightarrow -\omega.$$

Questa osservazione risulta particolarmente utile poichè permetterà di limitare il nostro lavoro alla scrittura delle sole componenti g_1 e g_2 in funzione di f_3 e g_3 , ottenendo poi attraverso la sostituzione le componenti f_1 e f_2 .

Per ottenere la componente g_2 si consideri la seconda delle equazioni (19): $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; questa può essere esplicitata e riscritta considerando la (22):

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = -\partial_z B_z \quad \rightarrow \quad k_1g_1 + k_2g_2 = -i\partial_z g_3 ,$$

moltiplicando per k_2 perveniamo all'equazione:

$$k_2k_1g_1 + k_2^2g_2 = -ik_2\partial_z g_3. \quad (31)$$

Si consideri, adesso, l'equazione (30) moltiplicandola per k_1 :

$$-k_2k_1g_1 + k_1^2g_2 = -k_1\frac{\omega}{c}f_3, \quad (32)$$

sommando quest'ultima all'equazione (31) e tenendo in considerazione che è valida la relazione $k_1^2 + k_2^2 = k_{\parallel}^2$, possiamo scrivere la componente g_2 in funzione di f_3 e g_3 :

$$k_{\parallel}^2g_2 = -ik_2\partial_z g_3 - k_1\frac{\omega}{c}f_3. \quad (33)$$

La componente g_1 può essere ottenuta seguendo lo stesso percorso con la sola differenza che la divergenza del campo magnetico sarà moltiplicata per k_1 mentre l'equazione (30) per k_2 ; infine, sottraendo membro a membro otteniamo:

$$k_{\parallel}^2g_1 = -ik_1\partial_z g_3 + k_2\frac{\omega}{c}f_3. \quad (34)$$

Come anticipato, ottenute le componenti g_1 e g_2 , applicando la trasformazione $f \rightarrow g$, $\omega \rightarrow -\omega$ possiamo ottenere anche le componenti f_1 e f_2 , pervenendo ad un

sistema di quattro equazioni, che descrive tutte le componenti del campo che saranno parallele alla superficie del materiale metallico:

$$g_1 = \frac{-ik_1 \partial_z g_3 + \frac{\omega}{c} k_2 f_3}{k_{\parallel}^2} \quad (35a)$$

$$f_1 = \frac{-ik_1 \partial_z f_3 - \frac{\omega}{c} k_2 g_3}{k_{\parallel}^2} \quad (35b)$$

$$g_2 = \frac{-ik_2 \partial_z g_3 - \frac{\omega}{c} k_1 f_3}{k_{\parallel}^2} \quad (35c)$$

$$f_2 = \frac{-ik_2 \partial_z f_3 + \frac{\omega}{c} k_1 g_3}{k_{\parallel}^2}. \quad (35d)$$

Dimostrato che la dinamica del campo elettromagnetico è completamente riconducibile alle componenti f_3 e g_3 , è utile chiedersi come possano essere determinate queste componenti, che ci aspettiamo possano soddisfare, date le condizioni al contorno poste al sistema in analisi, equazioni nella forma $\partial_z^2 f = \lambda^2 f$ (Equazioni di Helmholtz).

Per ottenere quindi l'equazione dinamica della componente f_3 è possibile procedere derivando rispetto la direzione \hat{z} l'equazione (35d):

$$\partial_z f_2 = \frac{-ik_2 \partial_z^2 f_3 + \frac{\omega}{c} k_1 \partial_z g_3}{k_{\parallel}^2}; \quad (36)$$

successivamente si consideri l'equazione (30) moltiplicata per il fattore $\frac{\omega}{c}$, tale che risulti:

$$\frac{\omega}{c} k_1 g_2 - \frac{\omega}{c} k_2 g_1 = -\frac{\omega^2}{c^2} f_3, \quad (37)$$

questa può essere riscritta sfruttando le equazioni (25) e (26) moltiplicate per k_2 e k_1 rispettivamente:

$$ik_2^2 f_3 - k_2 \partial_z f_2 = \frac{i\omega}{c} k_2 g_1 \quad - ik_1^2 f_3 + k_1 \partial_z f_1 = \frac{i\omega}{c} k_1 g_2, \quad (38)$$

in modo che la (37) sia:

$$k_1^2 f_3 + ik_1 \partial_z f_1 + k_2^2 f_3 + ik_2 \partial_z f_2 = \frac{\omega^2}{c^2} f_3. \quad (39)$$

Si è così ottenuto un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} k_{\parallel}^2 \partial_z f_2 = -ik_2 \partial_z^2 f_3 + \frac{\omega}{c} k_1 \partial_z g_3 \\ k_1^2 f_3 + ik_1 \partial_z f_1 + k_2^2 f_3 + ik_2 \partial_z f_2 = \frac{\omega^2}{c^2} f_3, \end{cases} \quad (40)$$

quindi ricavando dalla prima relazione

$$ik_2 \partial_z f_2 = \frac{k_2^2}{k_{\parallel}^2} \partial_z^2 f_3 + i \frac{k_1 k_2}{k_{\parallel}^2} \frac{\omega}{c} \partial_z g_3$$

e sostituendo nella seconda, abbiamo:

$$k_{\parallel}^2 f_3 + \frac{k_2^2}{k_{\parallel}^2} \partial_z^2 f_3 - \frac{\omega^2}{c^2} f_3 = -ik_1 \partial_z f_1 - i \frac{k_1 k_2 \omega}{k_{\parallel}^2 c} \partial_z g_3. \quad (41)$$

Risulta evidente che il primo termine del secondo membro dell'equazione appena ottenuta deve essere riscritto in funzione di f_3 e g_3 ; questa operazione può essere facilmente sviluppata derivando rispetto la variabile z l'equazione (35b), in modo che risulti:

$$ik_1 \partial_z f_1 = \frac{k_1^2}{k_{\parallel}^2} \partial_z^2 f_3 - i \frac{\omega}{c} \frac{k_1 k_2}{k_{\parallel}^2} \partial_z g_3$$

e che l'equazione (41), sostituendo, possa essere scritta come:

$$\partial_z^2 f_3 - k_{\parallel}^2 f_3 + \frac{\omega^2}{c^2} f_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_z^2 f_3 = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k_{\parallel}^2 \right) f_3. \quad (42)$$

Applicando la sostituzione $f \rightarrow g$, $\omega \rightarrow -\omega$ all'equazione (42) si ottiene facilmente l'equazione dinamica per la componente g_3 del campo:

$$\partial_z^2 g_3 - k_{\parallel}^2 g_3 + \frac{\omega^2}{c^2} g_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_z^2 g_3 = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k_{\parallel}^2 \right) g_3. \quad (43)$$

Ottenuta la dinamica del campo elettromagnetico nel vuoto, che abbiamo visto essere totalmente riconducibile alla risoluzione del problema agli autovalori descritto dalle equazioni (42) e (43), è possibile adesso definire quelle che sono le condizioni di raccordo per il campo elettromagnetico sull'interfaccia vuoto-materiale del metallo nel suo "stato normale".

Per sviluppare le condizioni di matching, saremo portati a sviluppare per il campo che si propaga all'interno del materiale, in linea generale, un ragionamento analogo a quello fatto per il campo elettromagnetico nel vuoto, in modo da poter poi imporre le relazioni che determinano la conservazione delle singole componenti.

In realtà la descrizione della dinamica del campo elettromagnetico all'interno del mezzo materiale può essere fortemente semplificata se si considera che le equazioni di Maxwell nel mezzo possono essere scritte nella forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (44)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (45)$$

con $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$ e supponendo che non stiano agendo effetti magnetici in modo che sia valida l'identità $\vec{B} = \vec{H}$.

Scrivere la prima equazione di Maxwell in termini di vettore spostamento \vec{D} , si traduce nel fatto che le quattro equazioni (35) manterranno la stessa forma ma con le componenti f_3 e g_3 opportunamente moltiplicate per la funzione dielettrica $\epsilon(\omega)$:

$$g_1 = \frac{-ik_1 \partial_z g_3 + \frac{\omega}{c} k_2 \epsilon(\omega) f_3}{k_{||}^2} \quad (46a)$$

$$f_1 = \frac{-ik_1 \partial_z f_3 - \frac{\omega}{c} k_2 \epsilon(\omega) g_3}{k_{||}^2} \quad (46b)$$

$$g_2 = \frac{-ik_2 \partial_z g_3 - \frac{\omega}{c} k_1 \epsilon(\omega) f_3}{k_{||}^2} \quad (46c)$$

$$f_2 = \frac{-ik_2 \partial_z f_3 + \frac{\omega}{c} k_1 \epsilon(\omega) g_3}{k_{||}^2}. \quad (46d)$$

Seguendo lo stesso percorso logico e algebrico utilizzato per il campo elettromagnetico nel vuoto, le componenti f_3 e g_3 saranno espresse come soluzioni delle equazioni:

$$\partial_z^2 f_3 = \left(-\epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} + k_{||}^2 \right) f_3 \quad ; \quad \partial_z^2 g_3 = \left(-\epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} + k_{||}^2 \right) g_3. \quad (47)$$

Abbiamo quindi ottenuto il problema agli autovalori che descrive completamente la propagazione del campo elettromagnetico all' interno del mezzo conduttore di costante dielettrica $\epsilon(\omega)$.

Si è adesso nelle condizioni ottimali per definire le condizioni di raccordo per il campo sulla superficie di separazione dielettrico-conduttore.

Affinchè la trattazione risulti più semplice separiamo il caso in cui il campo è polarizzato in modo da risultare TM rispetto al caso polarizzato TE.

Condizioni di matching per la polarizzazione TM

Il primo caso che prendiamo in esame è quello del campo elettromagnetico polarizzato TM.

La condizione $B_z = 0$, unita alla definizione (22), ci porta ad imporre che la componente lungo l'asse z della funzione $\vec{g}(k_{||}, z)$ sia identicamente nulla:

$$g_3(k_{||}, z) = 0 ;$$

quindi le equazioni (35) (per il campo che si propaga nel vuoto) e (46) (per il campo che si propaga nel conduttore) possono essere riscritte come:

$$g_1 = \frac{\omega k_2 f_3}{c k_{||}^2} \quad g_1 = \frac{\omega k_2 \epsilon(\omega) f_3}{c k_{||}^2} \quad (48a)$$

$$f_1 = -\frac{ik_1 \partial_z f_3}{k_{||}^2} \quad f_1 = -\frac{ik_1 \partial_z f_3}{k_{||}^2} \quad (48b)$$

$$g_2 = -\frac{\omega k_1 f_3}{c k_{||}^2} \quad g_2 = -\frac{\omega k_1 \epsilon(\omega) f_3}{c k_{||}^2} \quad (48c)$$

$$f_2 = -\frac{ik_2 \partial_z f_3}{k_{||}^2} \quad f_2 = -\frac{-ik_2 \partial_z f_3}{k_{||}^2} \quad (48d)$$

alle quali vanno aggiunte l' equazioni che descrivono il problema agli autovalori per f_3 : $\partial_z^2 f_3 = \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f_3$ (per il vuoto); $\partial_z^2 f_3 = \left(k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}\right) f_3$ (per il materiale).

Si impone, allora, la conservazione delle componenti normali alla superficie dei vettori \vec{D} e \vec{B} (che indicheremo come D_n e B_n rispettivamente), e delle componenti tangenti alla superficie dei vettori \vec{E} e \vec{H}^1 (indicate come E_t e B_t).

Le condizioni di continuità di B_n e B_t sono banalmente verificate: la prima dalla condizione $g_3(\vec{k}_{\parallel}, z) = 0$, che caratterizza il modo TM stesso, per verificare la seconda possiamo confrontare le componenti g_1 e g_2 descritte nelle equazioni (48) con le stesse componenti descritte dalle relazioni (46), da cui si ottiene che la componente B_t sulla superficie risulta continua se si verifica:

$$\phi_L - \epsilon(\omega)\phi_R = 0, \quad (49)$$

dove si è usato $\phi \equiv f_3$ con i pedici R e L che indicano il campo nel mezzo materiale, cioè nella parte destra rispetto la superficie d'incidenza e il campo nel vuoto nella semipiano sinistro.

Non ci resta che valutare le condizioni che determinano la continuità delle componenti D_n e E_t .

Richiedere che le componenti del campo elettrico, tangenziali alla superficie, si conservino, equivale a richiedere la continuità delle componenti f_1 e f_2 ; quindi rifacendosi alle equazioni (48), possiamo affermare che la richiesta che f_1 e f_2 siano continue può essere riassunta nella continuità della derivata prima di f_3 :

$$\phi'_L - \phi'_R = 0 \quad (50)$$

La continuità della componente del vettore spostamento elettrico normale alla superficie si può invece dedurre dal problema agli autovalori e coincide con il soddisfare la condizione al bordo (49).

Riassumendo, abbiamo ottenuto due condizioni di matching per il campo elettromagnetico polarizzato TM che abbiamo espresso nella forma:

$$\phi_L - \epsilon(\omega)\phi_R = 0 \quad \phi'_L - \phi'_R = 0.$$

Condizioni di matching per la polarizzazione TE

Alla luce delle considerazioni fatte e dei risultati ottenuti per il caso TM, occupiamoci ora del caso in cui il campo elettromagnetico sia polarizzato TE.

Un campo elettromagnetico polarizzato Transverse Electric soddisfa è caratterizzato da $E_z = 0 \rightarrow f_3(\vec{k}_{\parallel}, z) = 0$, quindi le equazioni (35, 46) si scrivono:

¹considereremo comunque la componente tangenziale di \vec{B} poichè stiamo escludendo che sul nostro sistema stiano agendo effetti magnetici.

$$g_1 = -\frac{ik_1\partial_z g_3}{k_{\parallel}^2} \quad g_1 = -\frac{ik_1\partial_z g_3}{k_{\parallel}^2} \quad (51a)$$

$$f_1 = \frac{\omega k_2 g_3}{ck_{\parallel}^2} \quad f_1 = -\frac{\omega k_2 \epsilon(\omega) g_3}{ck_{\parallel}^2} \quad (51b)$$

$$g_2 = -\frac{ik_2\partial_z g_3}{k_{\parallel}^2} \quad g_2 = -\frac{ik_2\partial_z g_3}{k_{\parallel}^2} \quad (51c)$$

$$f_2 = \frac{\omega k_1 g_3}{ck_{\parallel}^2} \quad f_2 = \frac{\omega k_1 \epsilon(\omega) g_3}{ck_{\parallel}^2}, \quad (51d)$$

alle quali si deve aggiungere il problema agli autovalori el caso in cui il campo si propa-
 paghi nel vuoto o nel materiale: $\partial_z^2 g_3 = \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)g_3$ e $\partial_z^2 g_3 = \left(k_{\parallel}^2 - \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right)g_3$.

Anche in questo caso le condizioni di matching da imporre sulla superficie sono
 quelle che ci permettono di affermare la conservazione delle componenti: D_n , B_n ,
 E_t e $H_t = B_t$, nel passaggio tra il vuoto e la lastra metallica.

La prima richiesta, cioè la conservazione della componente D_n , è banalmente soddi-
 sfatta dalla condizione $f_3 = 0$ che caratterizza il modo in cui è polarizzato il campo;
 le condizioni che soddisfano la conservazione delle altre tre componenti, invece, pos-
 sono essere ottenute confrontando i due set di equazioni in (51) da cui otteniamo,
 seguendo un processo logico analogo al caso TM, che per avere la conservazione di
 B_n e E_t deve essere soddisfatta la condizione per cui, nel passaggio vuoto-materia,
 la funzione $g_3(k_{\parallel}, z)$ risulti continua, mentre la componente B_t risulterà conservata
 se la continuità è imposta sulla derivata prima della funzione g_3 .

Quindi, per il campo elettromagnetico polarizzato TE, otteniamo due condizioni di
 matching che, sfruttando la convenzione del paragrafo precedente, possono essere
 scritte come:

$$\phi_L - \phi_R = 0 \quad \phi'_L - \phi'_R = 0, \quad (52)$$

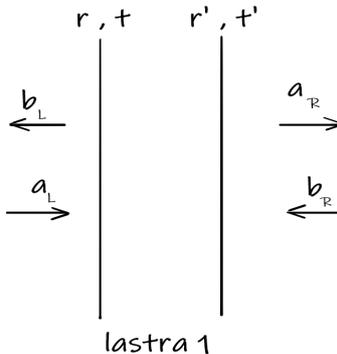
dove stavolta si è imposto $\phi \equiv g_3$.

Appendice B

Coefficiente di trasmissione per due superfici a distanza L

Siano a_L e a_R le funzioni d'onda che descrivono l'onda "in ingresso" rispettivamente sulla parete sinistra e destra della lastra, mentre b_L e b_R le ampiezze d'onda del campo elettromagnetico "in uscita" dopo il processo di scattering (figura 1).

La matrice di *scattering* S e quella di *trasferimento* M saranno allora definite come:



$$\begin{pmatrix} b_L \\ b_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_L \\ a_R \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} b_R \\ a_R \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (53)$$

con le due matrici che a loro volta saranno legate dalle relazioni:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} S_{21}^{\dagger -1} & S_{22} S_{12}^{-1} \\ -S_{12}^{-1} S_{11} & S_{12}^{-1} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Figura 1: Campi in ingresso e in uscita dalla lastra metallica nel processo di scattering unidimensionale.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} M_{21} M_{22}^{-1} & M_{22}^{-1} \\ M_{11}^{\dagger -1} & -M_{12} M_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (55)$$

che permettono di passare agevolmente da una all'altra.

Consideriamo allora la matrice di scattering S_1 relativa alla prima lastra e attraverso le (54) definiamo la matrice di trasferimento M_1 :

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t_1' \\ t_1 & r_1' \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} t_1^{\dagger -1} & r_1' t_1'^{-1} \\ -t_1'^{-1} r_1 & t_1'^{-1} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Dalla stessa matrice S_1 possiamo ricavare la matrice di scattering S_2 , relativa alla seconda lastra, attraverso la traslazione descritta dalla trasformazione:

$$S_2 = \Lambda(L) S_1 \Lambda^{-1}(L) \Big|_{r_1 \rightarrow t_2; t_1 \rightarrow r_2} \quad \text{con } \Lambda(L) = \text{diag}[e^{-ik_z L}, e^{ik_z L}],$$

che tiene conto del cammino ottico fatto dal campo nel passaggio da una lastra all'altra; da cui otteniamo:

$$S_2 = \begin{pmatrix} t_2 & r'_2 e^{-2ik_z L} \\ r_2 e^{2ik_z L} & t'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} e^{2ik_z L} r_2^{\dagger-1} & t'_2 e^{2ik_z L} r'_2{}^{\dagger-1} \\ -e^{2ik_z L} r'_2{}^{\dagger-1} t_2 & e^{2ik_z L} r_2^{\dagger-1} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Ottenute, dunque, le matrici di trasferimento per le singole superfici coinvolte nel processo di scattering, è possibile produrre la matrice di trasferimento M' "per il sistema completo" come il prodotto di M_1 e M_2 :

$$M' = M_1 \cdot M_2 = e^{2ik_z L} \begin{pmatrix} r_2^{\dagger-1} t_1^{\dagger-1} - t'_2 r_2^{-1} t_1{}^{\prime-1} r_1 & t_1^{\dagger-1} (r_2^{\dagger-1} r'_1 + t'_2 r_2^{\dagger-1}) \\ -r_2^{\dagger-1} (t_1^{\dagger-1} t_2 + t'_2 r_1^{-1}) & t_1^{\dagger-1} (-t_2 r'_1 + 1) r_2^{\dagger-1} \end{pmatrix} \quad (58)$$

dove l'operazione "." è l'usuale prodotto riga per colonna tra matrici quadrate.

Applicando la relazione (55) alla matrice M' riusciamo a definire quella che è la matrice S' di scattering, da cui sarà possibile estrarre i coefficienti di riflessione e trasmissione per il sistema a due barriere:

$$S' = \Lambda_{k_z} \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \Lambda_q^{-1} = \Lambda_{k_z} \begin{pmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{pmatrix} \Lambda_q^{-1} = \begin{pmatrix} M'_{22}{}^{-1} M'_{21} & M'_{22}{}^{-1} \\ M'_{11}{}^{\dagger-1} & -M'_{12} M'_{22}{}^{-1} \end{pmatrix}^2 \quad (59)$$

Vediamo come può allora essere scritto il coefficiente di trasmissione a partire dalla relazione: $t = S'_{21} = M'_{11}{}^{\dagger-1}$.

Osservando la (58):

$$M'_{11}{}^{\dagger-1} = e^{2ik_z L} \left[r_2^{-1} t_1^{-1} (1 - r_2 t_1 r_1^{\dagger} t_1^{\dagger-1} r'_2{}^{\dagger-1} t_2^{\dagger}) \right]^{-1} \quad (60)$$

e sfruttando la proprietà di unitarietà della matrice di scattering: $S^{\dagger} = S^{-1}$, che permette di ricavare due relazioni che devono sempre essere soddisfatte:

$$r^{\dagger-1} = r - t' r'^{-1} t, \quad t'^{\dagger-1} = t' - r t^{-1} r',$$

attraverso le quali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} t_1 r_1^{\dagger} t_1^{\dagger-1} &= t_1 [t'_1 - r_1 t_1^{-1} r'_1] [r_1 - t'_1 r_1^{-1} t_1]^{-1} \\ &= [r_1 t_1^{-1} - t'_1 r_1^{\prime-1}]^{-1} [t'_1 r'_1 - r_1 t_1^{-1}] r'_1 \\ &= -r'_1 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} r_2^{\dagger-1} t_2^{\dagger} &= t_1 [t'_2 - r_2 t_2^{-1} t'_2] [r'_2 - t_2 r_2^{-1} t'_2]^{-1} \\ &= t_2 r_2^{-1} [r_2 t_2^{-1} r'_2 - t'_2] [t'_2 - r_2 t_2^{-1} r'_2] \\ &= -t_2 r_2^{-1}, \end{aligned} \quad (62)$$

²Si faccia attenzione al fatto che per definire la matrice S' si è fatto uso delle due matrici Λ_{k_z} e Λ_q , in modo da tenere conto del cammino ottico sulla distanza L, per l'onda incidente con il vettore d'onda k_z ed emergente ad L con il vettore d'onda q.

avremo, sostituendo nella (60), la possibilità di scrivere in maniera definitiva:

$$te^{i(k_z-q)L} = e^{2ik_zL}r_2[1 - r_1't_2]^{-1}t_1 = e^{2ik_zL} \frac{r_2t_1}{1 + \frac{t_1}{t_1'}r_1't_2}. \quad (63)$$

Il coefficiente t , così ottenuto, può essere riscritto tenendo conto che le due barriere sono simmetriche nella risposta, cioè vale la relazione:

$$t_i e^{-iqL} = r_i e^{iqL} \quad i = 1, 2$$

dove si è tenuto conto che il campo elettromagnetico tra le barriere si propaga con il vettore d'onda q .

Sostituendo la relazione all' interno dell'equazione (63) si perviene proprio alla scrittura del coefficiente di trasmissione data dalla (3.20):

$$te^{i(k_z-q)L} = e^{2i(k_z-q)L} \frac{t_2t_1}{1 + \frac{t_1}{t_1'}r_1'r_2e^{2iqL}} \quad \Rightarrow \quad t = e^{i(k_z-q)L} \frac{t_2t_1}{1 + \frac{t_1}{t_1'}r_1'r_2e^{2iqL}} \quad (64)$$

Appendice C

Approccio "fisico" per l'espressione (4.5)

Consideriamo uno strato sottile di materiale di spessore a , parametrizzato attraverso $z \in (0, a)$ e costante dielettrica $\epsilon_a(\omega)$; all'esterno del materiale la funzione dielettrica sarà indicata come ϵ_0 .

Sia all'interno che all'esterno della lamina, se questa è investita da una radiazione elettromagnetica, dovrà essere valida l'equazione di Maxwell:

$$\nabla \wedge H_i = \epsilon_i \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_i \quad i = 0, a \quad (65)$$

Un campo elettromagnetico polarizzato TM che si propaga lungo l'asse \hat{z} potrà essere scritto come:

$$\begin{aligned} H_a &\equiv (0, H_{ay}, 0) [e^{-\kappa_a z} \pm e^{-\kappa_a(a-z)}] e^{i(k_{\parallel a} x - \omega t)} & 0 < z < a \\ E_a &\equiv (E_{ax}, 0, E_{az}) [e^{-\kappa_a z} \pm e^{-\kappa_a(a-z)}] e^{i(k_{\parallel a} x - \omega t)} & 0 < z < a \\ H_0 &\equiv (0, H_{0y}, 0) e^{\kappa_0 z} e^{i(k_{\parallel 0} x - \omega t)} & z < 0; z > a \\ E_0 &\equiv (E_{0x}, 0, E_{0z}) e^{\kappa_0 z} e^{i(k_{\parallel 0} x - \omega t)} & z < 0; z > a \end{aligned} \quad (66)$$

Sostituendo la forma del campo espressa tramite le (66) nella (65), imponendo che $z = 0$, si ottengono le due equazioni per la componente E_x del campo elettrico:

$$\begin{aligned} H_{ay} [-\kappa_a \pm \kappa_a e^{-\kappa_a a}] &= -i\omega \frac{\epsilon_a}{c} [1 \pm e^{-\kappa_a a}] E_{ax} \\ \kappa_0 H_{0y} &= -i\omega \frac{\epsilon_0}{c} E_{0x}, \end{aligned} \quad (67)$$

e le due relative alla componente E_z :

$$\begin{aligned} k_{\parallel a} H_{ay} &= \omega \frac{\epsilon_a}{c} E_{az} \\ k_{\parallel 0} H_{0y} &= -\omega \frac{\epsilon_0}{c} E_{0z}, \end{aligned} \quad (68)$$

Volendo investigare sui fenomeni che avvengono sulla superficie della lastra, concentreremo l'attenzione sulle equazioni (67); quest'ultime possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} E_{ax} &= -H_{ay} \frac{i c \kappa_a}{\epsilon_a \omega} \frac{[1 \mp e^{-\kappa_a a}]}{[1 \pm e^{-\kappa_a a}]} \\ E_{0x} &= H_{0y} \frac{i c \kappa_0}{\epsilon_0 \omega}, \end{aligned} \quad (69)$$

dalle quali, una volta posta la condizione di continuità per le componenti del campo elettrico lungo la superficie della lastra ($E_{ax} = E_{0x}$), risulta semplice ottenere:

$$\frac{\kappa_a}{\epsilon_a} H_{ay} [1 \mp e^{-\kappa_a a}] = -[1 \pm e^{-\kappa_a a}] \frac{\kappa_0}{\epsilon_0} H_{0y}. \quad (70)$$

Imponendo anche la continuità delle componenti del campo magnetico tangenziali alla superficie: $H_{Ly} = H_{0y}$, si ottiene proprio la condizione che cercavamo

$$\frac{\kappa_a}{\epsilon_a} [1 \mp e^{-\kappa_a a}] = -[1 \pm e^{-\kappa_a a}] \frac{\kappa_0}{\epsilon_0}. \quad (71)$$

Appendice D

Il determinante $\Delta^{(TM)}(\omega)$

La sostituzione delle (5.2) nelle condizioni riferite al caso TM espresse in (5.3), portano alla definizione del seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned}
 A\epsilon_2 e^{\kappa_2(-\frac{W}{2}-a)} &= B\epsilon_1 e^{\kappa_1(-\frac{W}{2}-a)} + C\epsilon_1 e^{-\kappa_1(-\frac{W}{2}-a)} \\
 A\kappa_2 e^{\kappa_2(-\frac{W}{2}-a)} &= B\kappa_1 e^{\kappa_1(-\frac{W}{2}-a)} + C\kappa_1 e^{-\kappa_1(-\frac{W}{2}-a)} \\
 B\epsilon_1 e^{-\kappa_1 \frac{W}{2}} + C\epsilon_1 e^{\kappa_1 \frac{W}{2}} &= D e^{-\kappa_0 \frac{W}{2}} + E e^{\kappa_0 \frac{W}{2}} \\
 B\kappa_1 e^{-\kappa_1 \frac{W}{2}} - C\kappa_1 e^{\kappa_1 \frac{W}{2}} &= D\kappa_0 e^{-\kappa_0 \frac{W}{2}} - E\kappa_0 e^{\kappa_0 \frac{W}{2}} \\
 D e^{\kappa_0 \frac{W}{2}} + E e^{-\kappa_0 \frac{W}{2}} &= F\epsilon_1 e^{\kappa_1 \frac{W}{2}} + G\epsilon_1 e^{-\kappa_1 \frac{W}{2}} \\
 D\kappa_0 e^{\kappa_0 \frac{W}{2}} - E\kappa_0 e^{-\kappa_0 \frac{W}{2}} &= F\kappa_1 e^{\kappa_1 \frac{W}{2}} - G\kappa_1 e^{-\kappa_1 \frac{W}{2}} \\
 F\epsilon_1 e^{\kappa_1(\frac{W}{2}+a)} + G\epsilon_1 e^{-\kappa_1(\frac{W}{2}+a)} &= H\epsilon_2 e^{-\kappa_2(\frac{W}{2}+a)} \\
 F\kappa_1 e^{\kappa_1(\frac{W}{2}+a)} - G\kappa_1 e^{-\kappa_1(\frac{W}{2}+a)} &= -H\kappa_2 e^{-\kappa_2(\frac{W}{2}+a)}.
 \end{aligned} \tag{72}$$

Il sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix}
 \epsilon_2\beta & -\epsilon_1\gamma & -\epsilon_1\gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \kappa_2\beta & -\kappa_1\gamma & \kappa_1\gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \epsilon_1\eta & \epsilon_1\eta^{-1} & -\lambda & -\lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \kappa_1\eta & -\kappa_1\eta^{-1} & -\kappa_0\lambda & \kappa_0\lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} & \lambda & -\epsilon_1\eta^{-1} & -\epsilon_1\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \kappa_0\lambda^{-1} & -\kappa_0\lambda & -\kappa_1\eta^{-1} & \kappa_1\eta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_1\gamma^{-1} & \epsilon_1\gamma & -\epsilon_2\beta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_1\gamma^{-1} & -\kappa_1\gamma & \kappa_2\beta
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F \\
 G \\
 H
 \end{pmatrix}
 = 0 \tag{73}$$

dove si sono applicate le sostituzioni: $\beta = e^{-\kappa_2(\frac{W}{2}+a)}$, $\gamma = e^{-\kappa_1(\frac{W}{2}+a)}$, $\eta = e^{-\kappa_1(\frac{W}{2})}$, $\lambda = e^{-\kappa_0(\frac{W}{2})}$. Il sistema lineare omogeneo presenta una soluzione non triviale solo se è soddisfatta la condizione che il determinante della matrice dei coefficienti risulti nullo; la condizione quindi coincide con l'equazione che permette la determinazione

delle frequenze proprie ω :

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) \equiv \beta^2 \left\{ \lambda^{-2} \left[\gamma^{-1} \eta (\kappa_1^2 \epsilon_2 + \kappa_1 \kappa_2 \epsilon_1 + \kappa_1 \kappa_0 \epsilon_1 \epsilon_2 + \kappa_2 \kappa_0 \epsilon_1^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma \eta^{-1} (\kappa_1^2 \epsilon_2 - \kappa_1 \kappa_2 \epsilon_1 - \kappa_1 \kappa_0 \epsilon_1 \epsilon_2 + \kappa_2 \kappa_0 \epsilon_1^2) \right]^2 \right. \\ \left. - \lambda^2 \left[\gamma^{-1} \eta (\kappa_1^2 \epsilon_2 + \kappa_1 \kappa_2 \epsilon_1 - \kappa_1 \kappa_0 \epsilon_1 \epsilon_2 - \kappa_2 \kappa_0 \epsilon_1^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma \eta^{-1} (\kappa_1^2 \epsilon_2 - \kappa_1 \kappa_2 \epsilon_1 + \kappa_1 \kappa_0 \epsilon_1 \epsilon_2 - \kappa_2 \kappa_0 \epsilon_1^2) \right]^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

che può essere riscritta in maniera più compatta se introduciamo una nuova notazione:

$$\begin{aligned} R_0 = \kappa_0, R_1 = \kappa_1, R_2 = \kappa_2 \quad \rightarrow \quad r_{ij}^\pm = R_i \epsilon_j \pm R_j \epsilon_i \quad i, j = 0, 1, 2 \\ \Rightarrow \Delta(\omega) \equiv \beta^2 \left[\lambda^{-2} \left(\gamma^{-1} \eta r_{10}^+ r_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} r_{10}^- r_{12}^- \right)^2 \right. \\ \left. - \lambda^2 \left(\gamma^{-1} \eta r_{10}^- r_{12}^+ - \gamma \eta^{-1} r_{10}^+ r_{12}^- \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Appendice E

Teorema dell'argomento

[8] Il teorema dell'argomento o *principio dell'argomento* può essere considerato come un caso particolare del teorema dei residui, di cui riportiamo l'enunciato:

Teorema .1. *Sia Ω un insieme aperto di \mathbb{C} e sia E un sottoinsieme discreto di Ω (cioè un sottoinsieme chiuso e tale che tutti i suoi punti siano isolati).*

Sia γ una curva chiusa in Ω che sia omotopa a zero in Ω .

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$, allora l'insieme $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ è finito e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in E} \text{Res}(f, a) n(\gamma, a). \quad (76)$$

Teorema .2. *Sia Ω insieme aperto di \mathbb{C} e $f(z)$ una funzione meromorfa³ con un numero finito di zeri e di poli.*

Sia γ una curva chiusa, regolare a tratti, in Ω il cui sostegno non contiene poli o zeri di $f(z)$. Sia γ , inoltre, omotopa in un punto a Ω .

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{a \in Z_f \cup P_f} \text{ord}(f, a) n(\gamma, a) = \\ &= \sum_{a \in Z_f} n(\gamma, a) - \sum_{a \in P_f} n(\gamma, a) \end{aligned} \quad (77)$$

con $Z_f = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$, $P_f = \{a \in \Omega : a \text{ polo di } f(z)\}$ e E definito come nel caso del teorema dei residui; inoltre $\text{ord}(f, a)$ indica l'ordine della funzione $f(z)$ in a , definito come il primo coefficiente non nullo della serie di Laurent della funzione centrata nel punto a , mentre $n(\gamma, a)$ rappresenta l'indice di avvolgimento della curva γ attorno al punto a .

Dimostrazione. Se si considera la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$, si può osservare che le sue singolarità coincidono con i poli e con gli zeri di $f(z)$.

Poichè il sostegno γ soddisfa la condizione: $\gamma \cap (Z_f \cap P_f) = \emptyset$, possiamo applicare il teorema dei residui:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z_f \cup P_f} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) n(\gamma, a). \quad (78)$$

³Una funzione si dice meromorfa in un insieme aperto Ω di \mathbb{C} in Ω se è olomorfa in Ω tranne al più che in un numero finito di poli della funzione stessa.

Calcoliamo i residui di $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

Se a è uno zero per $f(z)$ con molteplicità m : $f(z) = (z-a)^m Q(z)$; con $Q(z)$ funzione olomorfa in un intorno di a in modo che $Q(a) \neq 0$.

Di conseguenza avremo la possibilità di scrivere:

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}Q(z) + (z-a)^m Q'(z);$$

attraverso cui otteniamo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{Q'(z)}{Q(z)}. \quad (79)$$

Possiamo quindi osservare che il residuo vale:

$$\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \left[m + (z-a) \frac{Q'(z)}{Q(z)} \right] = m, \quad (80)$$

quindi $z = a$ è un polo di ordine 1 per $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = \text{ord}(f(z), a) = m$.

Sviluppriamo un discorso analogo nel caso in cui a sia polo di ordine m per $f(z)$: $f(z) = \frac{P(z)}{(z-a)^m}$; con $P(z)$ olomorfa in un intorno di a : $P(a) \neq 0$.

Avremo:

$$f'(z) = -m \frac{(z-a)^{m-1}}{P(z)} + \frac{P'(z)}{(z-a)^m}; \quad \rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-a} + \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

Se calcoliamo esplicitamente il residuo della funzione in a :

$$\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \left[-m + (z-a) \frac{P'(z)}{P(z)} \right] = -m, \quad (81)$$

quindi $z = a$ è un polo di ordine 1 per $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = \text{ord}(f(z), a) = -m$.

Per quanto detto, possiamo allora riscrivere il teorema dei residui nella forma:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z_f \cup P_f} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) n(\gamma, a) = \sum_{a \in Z_f \cup P_f} \text{ord}(f, a) n(\gamma, a) \quad (82)$$

che dimostra la prima parte del teorema.

Per concludere la dimostrazione si può osservare che se γ è una curva chiusa i cui punti interni sono quelli appartenenti all'insieme E , se $a \in E$, non solo $\text{ord}(f(z), a) \neq 0$ ma si può affermare che necessariamente $\text{ord}(f(z), a) = 1$, in quanto l'elemento a è un polo semplice per la funzione. Quindi l'equazione precedente si semplifica in:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{a \in Z_f \cup P_f} \text{ord}(f, a) n(\gamma, a) = \\ &= \sum_{a \in Z_f} n(\gamma, a) - \sum_{a \in P_f} n(\gamma, a). \end{aligned} \quad (83)$$

□

Appendice F

Energia degli stati legati in approssimazione di basse frequenze

Si è osservato che la valutazione numerica per l'energia degli stati legati, in regime ritardato, può essere fatta solo nell'approssimazione in cui lo sviluppo in serie di ν è troncato al primo ordine, che coincide con l'imporre per la variabile la forma che assume in regime non ritardato.

Può essere lecito allora chiedersi cosa succede se l'approssimazione al primo ordine su ν non venga imposta dopo l'applicazione del teorema delle funzioni implicite, ma direttamente nella formulazione dell'energia.

Si consideri nuovamente l'espressione (4.16) e si sostituiscano, al suo interno, le (4.18):

$$\begin{aligned}
 E_0(a) &= \frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1+\coth(\ell x)}})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1+\tanh(\ell x)}})}} \right) \\
 &= \frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} (J_1 + J_2)
 \end{aligned}$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1+\coth(\ell x)}})}} \right)$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1+\tanh(\ell x)}})}} \right)$$

(84)

Risolviamo gli integrali operando un' integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \coth(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1 + \coth(\ell x)}})}} \right) = -0.0620887 \quad \ell = 1 \\
 J_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\ell \sqrt{x^2 + \frac{1}{1 + \tanh(\ell x)}})}} \right) = 0.046364 \quad \ell = 1
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

Allora l'energia associata agli stati legati, nel caso in cui si imponga "direttamente" l'approssimazione, risulta essere

$$E_0(a) = -\frac{\omega_p^3 \mathcal{A} \hbar}{2\pi c^2} (1.6 \cdot 10^{-2})
 \tag{86}$$

Se si confrontano la (4.19) e la (86) si osserva che i due valori numerici differiscono, nel caso di una cavità di spessore $\ell = 1$, dello 0.5%. Da questo si può dedurre che, nonostante l'applicazione del teorema del Dini rappresenti il metodo per ottenere un risultato che abbia un "ordine di esattezza" maggiore, in realtà si può ottenere una stima discreta per l'energia degli stati legati anche senza adoperarlo, nel caso di cavità piuttosto spesse.

Diverso è il caso in cui si valutino cavità in cui ℓ è al disotto di 0.1, dove si arriva ad ottenere una differenza delle stime che raggiunge anche l'80%, quindi in questo caso è invece necessario l'utilizzo del teorema delle funzioni implicite per ottenere una stima corretta dell'energia.

Bibliografia

- [1] M.Bordag, *The Casimir effect for thin plasma sheets and role of the surface plasmons*, J. Phys. A: Math. Gen. 39 6173, 2006
- [2] J.M. Pitarke, *Theory of surface plasmons and surface-plasmon polaritons*, Rep. Prog. Phys. 70,1 ,2007
- [3] G. Barton, *Casimir effects for a flat plasma sheet: I. Energies*, J. Phys. A: Math. Gen.38, 2005
- [4] S.A. Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications*, Springer
- [5] M. Bordag ,U. Mohideen ,V. M. Mostepanenko , *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rep. 3531–205, 2001
- [6] P.W.Milonni, *The Quantum Vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*, Academic Press, 1994
- [7] M.Abramowitz, I.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, US Government Printing Office, p 806, 1997
- [8] L.Ahlfors, *Complex Analysis: An Introduction to The Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill
- [9] G.Bimonte ,E. Calloni , G.Esposito , L.Rosa, *Variations of Casimir from a superconducting transition*, Nuclear Physics B, 726, 441-463, 2005
- [10] A.Tagliacozzo , L.Rosa, E.Calloni , *Variations of Casimir from a superconducting transition*
- [11] R.E.Glover III , M.Tinkham, *Conductivity of superconducting films for photon energies between 0.3 and 40 kT_c*, Phys. Rev. 108 (1957) 243
- [12] D.C.Mattis, J. Bardeen, *Theory of the anomalous skin effect in normal and superconducting metals*, Phys. Rev. 111 (1958) 412
- [13] C.Itzykson , J.Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications Inc.