

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Il Paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen e alcune sue applicazioni

Relatore:

Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:

Maria Pesacane

Matricola: N85000825

A.A. 2019/2020

“Non posso credere che Dio giochi a dadi con l’universo!”

A. Einstein

“Einstein, smettila di dire a Dio cosa deve fare.”

N. Bohr

Indice

Introduzione	5
1. I fondamenti della meccanica quantistica	
1.1 L'interpretazione di Copenaghen	6
1.1.1 Il concetto di stato	8
1.1.2 Il Principio di Sovrapposizione	9
1.1.3 Il collasso della funzione d'onda	10
1.2 L'entanglement	12
2. Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen e il principio di causalità	
2.1 Realtà, località e completezza	17
2.2 La formulazione matematica del paradosso	19
2.2.1 La versione di Bohm	22
2.3 Il problema della causalità	26
3. Alcune applicazioni dell'EPR	
3.1 Cenni sulle teorie a variabili nascoste	28
3.1.1 La teoria dell'onda pilota	28
3.2 L'interpretazione <i>Many Worlds</i>	30
Conclusioni e prospettive	34
Appendice	
I postulati della meccanica quantistica	36

Riferimenti bibliografici 39

Ringraziamenti

Introduzione

Nata agli inizi del XX secolo, la Meccanica Quantistica rappresenta ancor oggi la teoria in assoluto più soddisfacente per ciò che riguarda la descrizione fisica della natura [1]. Capace di delineare con esattezza il comportamento della materia e le sue interazioni con la radiazione laddove invece tutte le teorie classiche non risultano adeguate, essa trova notevoli applicazioni sia a livello elementare che in ambito macroscopico. Basta pensare al fatto che, per il loro funzionamento, buona parte delle tecnologie moderne si basano appunto sulla Meccanica Quantistica; il laser, il microscopio elettronico, la risonanza magnetica nucleare, giusto per fare alcuni esempi. Nel campo dell'informatica poi, sono stati sviluppati metodi di crittografia quantistica allo scopo di garantire una trasmissione più sicura delle informazioni.

Tuttavia, sebbene esatta e senza dubbio utile per le sue molteplici applicazioni, questa Teoria implica una serie di fenomeni dal carattere controintuitivo, violando talvolta il comune senso della percezione. Ed è per questo motivo che è sempre stata oggetto di critiche e dure contestazioni (si pensi ad esempio al famoso dialogo tra Bohr ed Einstein), tanto che col tempo sono stati ideati tutta una serie di esperimenti mentali al fine di metterne in discussione i principi. Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen ne è sicuramente il più famoso in assoluto. I tre mostrarono come il fenomeno dell'*entanglement*, che deriva appunto dall'interpretazione di Copenaghen della Meccanica Quantistica, dev'essere ritenuto paradossale poiché a conti fatti incompatibile con le leggi della relatività ristretta e soprattutto con i principi di *località* e di *causalità*. Ne consegue che la Meccanica Quantistica così come era stata formulata doveva essere necessariamente una teoria incompleta, e pertanto dovevano esistere dei *parametri nascosti* in grado di completarla.

Ma che cos'è esattamente l'*entanglement* quantistico?

In questo lavoro di tesi proponiamo una disamina di tale paradosso e di alcune sue applicazioni strutturando il nostro discorso in tre parti. Nel primo capitolo esamineremo i concetti fondamentali dell'interpretazione ortodossa di Copenaghen con particolare riguardo proprio al fenomeno dell'*entanglement* e ai principi che ne sono alla base.

Per intenderci, il solo fatto che letteralmente il termine *entanglement* significa "groviglio" (o anche "intreccio") basta a far capire che si tratta di qualcosa di alquanto strano, nonché complesso. Immaginiamo che due amici possiedono due oggetti uguali, sia nella forma che

nell'aspetto, che differiscono soltanto per il colore (per esempio due palle, una rossa e l'altra blu). Supponiamo che, dopo essersi divisi a caso gli oggetti, cioè senza guardarli, uno dei due parte e per assurdo va ai confini dell'universo, o almeno quanto più lontano possibile dal compagno. Accade che appena uno dei due osserva il colore del proprio oggetto istantaneamente intuisce quello dell'altro. Non possiamo dire che tale esempio sia, per così dire, un analogo classico del concetto di *entanglement*, (dalla lettura del relativo paragrafo del primo capitolo di questo testo risulterà ancor più chiaro che in verità l'*entanglement* è un fenomeno non riducibile alla meccanica classica), ma qualcosa di simile accade proprio quando due sistemi quantistici formano uno stato *entangled*. Secondo la Meccanica Quantistica è possibile realizzare un insieme *entangled* di due particelle caratterizzato da determinati valori globali di alcune osservabili. In questo caso, succede che il valore misurato di una definita proprietà dell'insieme per una particella influenza all'istante quello dell'altra in maniera tale da mantenere sempre il valore globale iniziale. E questo vale anche se le due particelle sono abbastanza distanziate. Ciò implica necessariamente la presenza di correlazioni a distanza, contraddistinguendo così il carattere non locale di questa Teoria.

Detto ciò, passeremo dunque, nel secondo capitolo, ad un'analisi del paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen (prima nella versione ufficiale e poi in quella successiva di Bohm) formulato, come si è detto, allo scopo di evidenziare la natura per certi versi misteriosa e contraddittoria di quella che lo stesso Einstein definiva "*fantomatica azione a distanza*". Approfondiremo, quindi, il problema ad essa legato della *violazione del principio di causalità*. Nel terzo ed ultimo capitolo faremo, infine, una valutazione qualitativa della teoria a variabili nascoste di Bohm evidenziandone però, ancora una volta, la non località, per poi concludere con un'analisi dell'interpretazione *Many Worlds* di Everett come possibile applicazione del paradosso.

Capitolo 1

I fondamenti della Meccanica Quantistica

1.1 L'interpretazione di Copenaghen

Nel tentativo di definire un quadro coerente del mondo fisico elementare, l'interpretazione di Copenaghen è senza dubbio la prima e più diffusa interpretazione della Meccanica Quantistica. Si tratta di un'*interpretazione standard* (spesso detta anche *interpretazione ortodossa*) che si ispira fundamentalmente agli studi di Bohr e Heisenberg fatti sulla misura, in relazione all'idea della dualità onda-particella della luce, o in generale della materia [2].

A titolo di esempio consideriamo il cosiddetto *esperimento della doppia fenditura*: un pannello sul quale sono praticate due fenditure viene posto nel mezzo tra una sorgente e uno schermo di osservazione.

Il caso di una sorgente luminosa è stato analizzato per la prima volta dal fisico britannico Thomas Young (da cui la denominazione *esperimento di Young*) al fine di dimostrare la natura ondulatoria della luce. A questo proposito, infatti, l'esperimento mostra che quando il fascio, dopo aver attraversato le due fenditure, colpisce lo schermo, su di esso appare una figura d'interferenza propria dei fenomeni di carattere ondulatorio (**Fig. 1.1**).

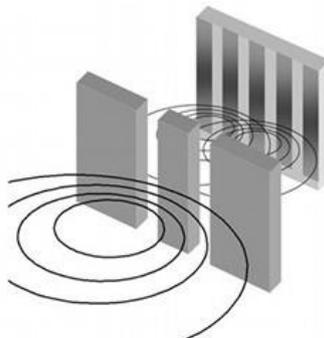


Fig. 1.1: Schema dell'esperimento classico di Young con sorgente di onde elettromagnetiche.

Se però si ripete l'esperimento utilizzando una sorgente di particelle (ad esempio elettroni) è naturale aspettarsi che sullo schermo compaia questa volta una figura a due bande, come si addice al caso di oggetti di natura corpuscolare. Tuttavia, anche per una sorgente in grado di proiettare una singola particella alla volta così che non possa esserci interferenza tra una particella e l'altra, si osserva invece di nuovo la stessa figura di interferenza, come se si trattasse di un'onda (**Fig. 1.2**).

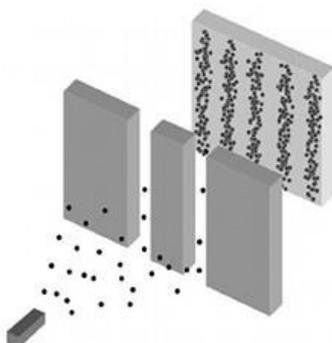


Fig. 1.2: Schema dell'esperimento della doppia fenditura con proiettore di particelle.

Da qui scaturisce la convinzione che una particella deve necessariamente avere una natura sia ondulatoria che corpuscolare poiché se la si considera solo come particella puntiforme allora essa non può che attraversare una sola fenditura, ma in questo caso la figura di interferenza non si dovrebbe vedere. Secondo l'interpretazione di Copenaghen, infatti, una possibile spiegazione è che la particella sia a tutti gli effetti *delocalizzata* nello spazio e quindi è come se allo stesso tempo potesse passare attraverso entrambe le fenditure, oppure in nessuna delle due. Dunque, la posizione di ogni particella può essere stabilita soltanto in maniera probabilistica, talvolta specificando se la probabilità di trovarla in una data regione dello spazio è alta o bassa, ma non si può fare una previsione esatta.

Detto ciò, è chiaro che non è più possibile definire lo stato di una particella (o, nel caso più generale, di un sistema) semplicemente conoscendo la sua *traiettoria* poiché questa quantità non ha più senso compiuto. Si rende pertanto necessario introdurre un nuovo concetto di stato.

1.1.1 Il concetto di stato

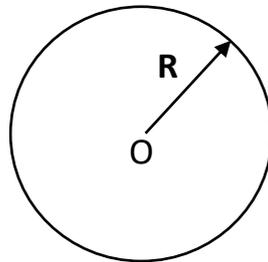
In meccanica quantistica quando si parla di **stato** di un sistema fisico si intende la sua descrizione in termini quantomeccanici. Formalmente [3]:

dato uno spazio di Hilbert H tale che:

$$H = L^2(\Omega)$$

dove $L^2(\Omega)$ è la classe delle funzioni a quadrato sommabile definite su un opportuno dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$, lo stato di un sistema è rappresentato da una funzione complessa $\psi \in H$ detta funzione d'onda¹.

Consideriamo per semplicità ancora una volta un sistema composto da una sola particella; la funzione d'onda vettoriale $\psi(\mathbf{r}, t)$ che ne caratterizza lo stato può essere allora intesa come un raggio dello spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$.



Gli elementi di H che hanno lo stesso raggio rappresentano dunque lo stesso stato.

Detto ciò, la probabilità $dP(\mathbf{r}, t)$ che all'istante di tempo t la particella si trovi nella posizione \mathbf{r} in un elemento di volume $d^3r = dx dy dz$ risulta essere:

$$dP(\mathbf{r}, t) = C|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r \quad (1.1)$$

con C costante di normalizzazione.

¹ Da notare che la funzione d'onda così definita descrive completamente lo stato.

Allora è evidente che:

- a. la quantità $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ corrisponde ad una densità di probabilità, e quindi $\psi(\mathbf{r}, t)$ ad un'ampiezza di probabilità
- b. se scegliamo in particolare $R = 1$, la funzione $\psi(\mathbf{r}, t)$ è normalizzata:

$$\|\psi(\mathbf{r}, t)\|^2 = \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1 \quad (1.2)$$

e la costante C è uguale a 1.

La (1.1.) e (1.2) assicurano che la probabilità complessiva di trovare la particella da qualche parte nello spazio al tempo t è:

$$\int dP(\mathbf{r}, t) = 1 \quad (1.3)$$

Dunque, dal momento che il vettore di stato è definito in uno spazio di Hilbert, data una base dello spazio formata dagli autostati di una qualsiasi grandezza osservabile, e quindi misurabile, tale stato può essere in generale individuato o da un vettore di base stesso (*stato puro*) oppure da una combinazione lineare di vettori di base (*stato misto*).

A questo proposito introduciamo il seguente **principio di sovrapposizione**.

1.1.2 Il Principio di Sovrapposizione

Suddetto principio può essere enunciato nella maniera seguente:

Se un sistema può essere descritto sia da una funzione d'onda ψ_1 che da una ψ_2 , allora esso può anche trovarsi in ogni stato descritto dalla funzione d'onda ψ che sia una generica combinazione lineare delle due precedenti: $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dove c_1 e c_2 sono due arbitrari coefficienti complessi. Viceversa, se un sistema si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda ψ questa può essere scomposta in una combinazione lineare di altri due possibili stati distinti ²[4].

² Spesso si considera il caso più generale di un numero n finito di possibili stati distinti. In tal caso:
 $\psi = \sum_n c_n \psi_n, c_n \in \mathbb{C}$

Per intenderci, se indichiamo con $|\psi\rangle$ la funzione d'onda in questione e con $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ due stati ortogonali normalizzati:

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$$

in virtù del Principio di Sovrapposizione possiamo scrivere:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (1.4)$$

Quindi, se ad esempio $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono due autostati della stessa osservabile A associati rispettivamente agli autovalori a_1 e a_2 , risulta:

$$P_1 = P(a_1) = |\langle\psi|\psi_1\rangle|^2 = |c_1|^2 \quad (1.5)$$

$$P_2 = P(a_2) = |\langle\psi|\psi_2\rangle|^2 = |c_2|^2 \quad (1.6)$$

con:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (1.7)$$

1.1.3 Il collasso della funzione d'onda

Supponiamo che in corrispondenza delle due fessure dell'esperimento della doppia fenditura visto in precedenza siano disposti due detector, che indichiamo rispettivamente come *detector 1* e *detector 2*.

Se entrambi i *detector* sono disattivati l'esperimento si riconduce al caso già discusso nel paragrafo 1.1 di questo capitolo; come si è detto, sullo schermo si osserva una figura d'interferenza caratteristica dei fenomeni ondulatori. Dunque, detti $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ i vettori

d'onda complessivi che si ottengono, il primo oscurando la fenditura 2 e facendo passare le particelle solo attraverso la 1, e il secondo nel modo opposto, in generale per il Principio di Sovrapposizione:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \quad (1.8)$$

Ma:

$$P_{tot} \neq P_1 + P_2 \quad (1.9)$$

poiché P_{tot} contiene anche dei termini dovuti all'interferenza (**Fig. 1.3**).

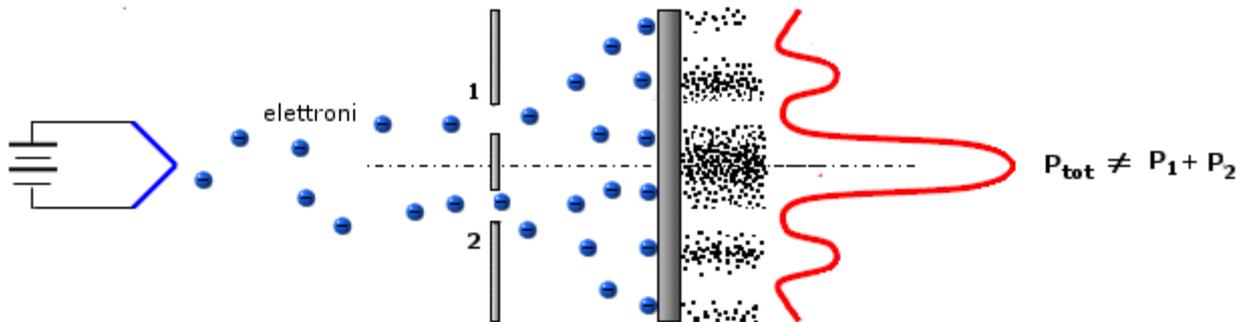


Fig. 1.3: Schema dell'esperimento della doppia fenditura con *detector* disattivati, vista dall'alto.

Se però si accendono i *detector*, alla fine risulta che:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 \quad (1.10)$$

cioè la figura d'interferenza scompare [5].

Questo accade perché essendo a sua volta il *detector* un sistema fisico, esso stesso genera dei campi che possono interagire con il sistema di particelle sul quale si vuole effettuare la misura. Ciò significa che nel momento in cui lo strumento interagisce con il nostro sistema ne modifica

anche lo stato. Pertanto, non sarà più vera la (1.8), ma sarà:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \quad (1.11)$$

oppure:

$$|\psi\rangle = |\psi_2\rangle \quad (1.12)$$

In altri termini l'apparato di misura ha cambiato ψ facendo collassare il sistema sul quale si sta misurando in quello stato relativo all'osservabile di misura.

Questo fenomeno per cui, secondo l'interpretazione di Copenaghen, dopo la misura la funzione d'onda non sarà più una sovrapposizione di autostati della grandezza osservata ma collasserà in uno di essi, viene indicato come **collasso della funzione d'onda** o del vettore di stato, oppure riduzione del pacchetto d'onda.³

1.2 L'entanglement

In alcune condizioni due o più sistemi fisici possono rappresentare sottosistemi di un sistema più ampio il cui stato quantico è descrivibile solo come combinazione dei singoli sottostati.

A tale proposito, si consideri una funzione d'onda $|\psi\rangle$ data dal prodotto tensoriale di due funzioni d'onda $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ normalizzate e appartenenti a due spazi di Hilbert diversi, rispettivamente $H(1)$ e $H(2)$:

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \quad (1.13)$$

Se si effettua una misura di un'osservabile $\hat{A}(1)$ nello spazio di Hilbert $H(1)$, si ha il collasso della funzione $|\varphi(1)\rangle$ in:

³ I principi che sono alla base dell'interpretazione di Copenaghen, tra cui appunto l'oggetto della nostra trattazione, sono sintetizzati in maniera assiomatica in una serie di postulati noti come *i postulati della meccanica quantistica*. Per maggiori informazioni si veda in **Appendice**.

$$|\psi'(1)\rangle = \frac{\hat{P}_n(1)|\varphi(1)\rangle}{\sqrt{\langle\varphi(1)|\hat{P}_n(1)|\varphi(1)\rangle}} \quad (1.14)$$

dove $\hat{P}_n(1)$ è il proiettore, in $H(1)$, nell'autospazio relativo all'autovalore a_n di $\hat{A}(1)$ che viene misurato e $\langle\varphi(1)|\hat{P}_n(1)|\varphi(1)\rangle = P(a_n)$ è la probabilità di osservare tale autovalore.

Dalla definizione di prodotto tensoriale si ha infatti che:

$$\begin{aligned} P(a_n) &= \langle\varphi(1)\chi(2)|P_n(1) \otimes I(2)|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\varphi(1)|\hat{P}_n(1)|\varphi(1)\rangle \langle\chi(2)|I(2)|\chi(2)\rangle \\ &= \langle\varphi(1)|\hat{P}_n(1)|\varphi(1)\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\hat{P}_n(1) = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i(1)\rangle \langle u_n^i(1)| \quad (1.16)$$

dove g_n indica il numero di autovettori ortogonali relativi ad a_n .

Pertanto, la probabilità di osservare un dato autovalore di un'osservabile $\hat{A}(1)$ relativa allo spazio di Hilbert $H(1)$ non dipende dalla funzione d'onda $|\chi(2)\rangle$, ma solo da quella $|\varphi(1)\rangle$.

Alla fine, quindi:

$$|\psi'\rangle = |\varphi'(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \quad (1.17)$$

Dunque, una funzione d'onda espressa da un prodotto tensoriale individua dei sottoinsiemi scorrelati. In altri termini, i risultati di misure diverse relative a singoli sottosistemi distinti corrispondono a variabili casuali indipendenti.

Una situazione del genere occorre quando i sottosistemi vengono preparati separatamente per poi essere uniti senza interagire.

Per esempio: dati due generici sottosistemi con spin $s = 1/2$ appartenenti rispettivamente a $H_s(1)$ e $H_s(2)$:

$$|\varphi(1)\rangle = \alpha_1|1;\uparrow\rangle + \beta_1|1;\downarrow\rangle$$

$$|\chi(2)\rangle = \alpha_2|2;\uparrow\rangle + \beta_2|2;\downarrow\rangle$$

dove $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ e β_2 sono numeri complessi arbitrari, il loro prodotto tensoriale è:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle |\chi(2)\rangle \\ &= \alpha_1\alpha_2|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_1\beta_2|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_2\beta_1|\downarrow\uparrow\rangle + \beta_1\beta_2|\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

In generale però, non tutti i *ket* di H_s sono prodotti tensoriali dei *ket* di $H_s(1)$ e $H_s(2)$; infatti il *ket* più generico di H_s è:

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma|\downarrow\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\downarrow\rangle$$

e non risulta possibile esprimerlo come prodotto tensoriale di due *ket* $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ a meno che non sia soddisfatta la condizione $\alpha/\beta = \gamma/\delta$.

Quando la funzione d'onda globale $|\psi\rangle$ del sistema bipartito non può essere espressa come un prodotto tensoriale, le predizioni fisiche di una misura riguardante uno solo dei due sottosistemi non possono essere espresse soltanto in termini di $|\varphi(1)\rangle$ o $|\chi(2)\rangle$. Questa situazione riflette l'esistenza di correlazioni tra i due sottosistemi; in questo caso i risultati di misure diverse relative a singoli sottosistemi distinti corrispondono a variabili casuali non indipendenti, bensì correlate. In generale il sorgere di una correlazione tra due sottosistemi inizialmente scorrelati è dovuto ad una loro interazione.

Questo fenomeno, del tutto privo di analogo classico, è detto appunto *correlazione quantistica* o anche **entanglement**.

Dopo la misura di un'osservabile $\hat{A}(1)$ nello spazio di Hilbert $H(1)$, la funzione d'onda globale $|\psi\rangle$ *entangled*, cioè non esprimibile come un prodotto tensoriale, diventa:

$$|\psi' \rangle = \frac{\sum_{l=1}^{g_n} \sum_j |u_n^i(1)v_j(2)\rangle \langle u_n^i(1)v_j(2)|\psi\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} \sum_j |\langle u_n^i(1)v_j(2)|\psi\rangle|^2}} \quad (1.18)$$

Per cui, in seguito, la probabilità di misurare un certo autovalore a_n di $\hat{A}(1)$ per $|\psi' \rangle$ dipenderà in generale anche dallo stato $|\chi(2) \rangle \in H(2)$. Se però l'autovalore a_n di $\hat{A}(1)$ è non degenere in $H(1)$, o più in generale, se $\hat{A}(1)$ rappresenta in realtà un insieme completo di osservabili compatibili in $H(1)$, allora la sommatoria su i di cui sopra ha un solo termine e $|\psi' \rangle$ può essere espressa come un prodotto tensoriale di due *ket*:

$$|\psi' \rangle = |u_n(1) \rangle \otimes |\chi'(2) \rangle \quad (1.19)$$

$$|\chi'(2) \rangle = \frac{\sum_j |v_j(2)\rangle \langle u_n(1)v_j(2)|\psi\rangle}{\sqrt{\sum_j |\langle u_n(1)v_j(2)|\psi\rangle|^2}} \quad (1.20)$$

A titolo esemplificativo, nell'esempio precedente con un sistema bipartito caratterizzato solamente dallo spin dei due sottosistemi:

$$|\psi \rangle = \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\uparrow\downarrow\rangle + \gamma |\downarrow\uparrow\rangle + \delta |\downarrow\downarrow\rangle$$

la misura di \hat{s}_{1z} costituisce una misura completa in $H(1)$. La funzione d'onda collassata $|\psi' \rangle$ in seguito a tale misura sarà quindi esprimibile come uno dei due seguenti prodotti tensoriali:

$$|\psi' \rangle = |1; \uparrow\rangle \left(\frac{\alpha}{\beta} |2; \uparrow\rangle + |2; \downarrow\rangle \right)$$

$$|\psi' \rangle = |1; \downarrow\rangle \left(\frac{\gamma}{\delta} |2; \uparrow\rangle + |2; \downarrow\rangle \right)$$

Se non è verificata la condizione $\alpha / \beta = \gamma / \delta$, ovvero se la funzione d'onda iniziale $|\psi\rangle$ non è esprimibile come un prodotto tensoriale essendoci una correlazione tra i suoi due sottosistemi, allora l'esito di una successiva misura di \hat{s}_{2z} sul sottosistema 2 dipenderà da quello della misura precedente di \hat{s}_{1z} sul sottosistema 1 [6].

Pertanto, indipendentemente dallo stato iniziale $|\psi\rangle$ del sistema prima della misura di $\hat{A}(1)$, dopo tale misura, riguardante solo il sottosistema 1, se questa è completa rispetto al sottosistema 1 nonostante non lo sia per il sistema 1+2, la funzione d'onda globale $|\psi'\rangle$ è sempre un prodotto tensoriale. Si osservi, in particolare, che non essendo la funzione d'onda iniziale esprimibile come un prodotto tensoriale, dopo la misura di $\hat{A}(1)$ lo stato $|\chi'(2)\rangle$ del sottosistema 2 dipende dal risultato della misura completa fatta sul sottosistema 1, anche qualora il sottosistema 2 venisse poi a trovarsi infinitamente lontano dall'1 e quindi non interagisse più con esso.

Questa caratteristica un po' paradossale dell'entanglement rappresenta il punto di partenza del paradosso noto come *paradosso di Einstein, Podolsky, Rosen*.

Capitolo 2

Il Paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen e il Principio di Causalità

Nel 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen pubblicano un breve articolo di quattro pagine in cui propongono un interessante *gedankenexperiment*. Nelle pagine seguenti ne riportiamo fedelmente il contenuto (si legga a proposito il paragrafo 2.2).

Tuttavia, prima di analizzare in dettaglio l'argomento in questione, è bene richiamare alcuni principi e assunti fondamentali per la piena comprensione dello stesso.

2.1 Realtà, località e completezza

Secondo un noto principio fisico detto *Principio di Località* o anche *Principio di Azione Locale* [7], due oggetti spazialmente lontani tra loro (A e B) non possono in alcun modo avere un'influenza istantanea l'uno sull'altro (un'influenza esterna su A non può avere alcuna influenza diretta su B).

Tale principio, associato all'assunto realistico per cui ogni oggetto deve necessariamente possedere dei valori per ogni possibile misura che può essere effettuata su di esso prima ancora della misura stessa, caratterizza il cosiddetto *realismo locale*, sul quale si fonda gran parte della fisica che conosciamo.

Dunque, quando si parla di realismo locale si intende la combinazione dei criteri di località e realtà, alla cui base ci sono pertanto i seguenti due presupposti:

- le operazioni di misura devono avere una natura locale nello spazio
- il valore ottenuto da una misura deve essere un elemento fisico reale

Se poi ad ogni elemento di una teoria corrisponde una grandezza fisica reale, allora possiamo dire che tale teoria è completa. Sostanzialmente, in generale diciamo che una teoria fisica è

completa quando ogni elemento della realtà trova in essa una corrispondenza [8].

A questo punto, è evidente che se si accettano questi principi, non si può di conseguenza accettare l'esistenza di fenomeni quantistici quali il collasso della funzione d'onda o l'*entanglement* poiché sarebbero del tutto paradossali. Proprio per questo, l'interpretazione convenzionale della Meccanica Quantistica rifiuta totalmente il realismo locale.

Stando invece alle valutazioni dei tre scienziati, tali assunti risultano senza dubbio incontestabili: il primo poiché, per la relatività ristretta, gli effetti di una misura non possono propagarsi ad una velocità superiore a quella della luce, che è una costante universale; il secondo in quanto l'esperienza stessa mostra come le reali proprietà di un sistema fisico esistano prima che una misura venga fatta.

Pertanto, si assuma la validità dei criteri di:

- realtà
- località
- completezza

Affinché una grandezza fisica possa ritenersi reale è quindi sufficiente poterla stabilire con certezza, senza che una sua misura ne perturbi in qualche modo il sistema.

Se però si hanno due grandezze espresse da due operatori che non commutano tra di loro, non si può ottenere una misura precisa di entrambe poiché l'atto stesso della misura di una altera il valore dell'altra.⁴

È dunque evidente che dev'essere vera una delle seguenti due affermazioni:

- a) la descrizione della realtà fornita dalla funzione d'onda in meccanica quantistica non è completa;
- b) le due grandezze in questione non possono essere simultaneamente reali.⁵

Analizzando opportunamente un sistema **2** (dopo che ha interagito con un sistema **1** sul quale sono state fatte delle misure ⁶), si giunge alla conclusione che se si ipotizza falsa la *a*, allora risulta falsa anche la *b*. Dal momento però che le due affermazioni sono complementari (se è falsa la prima, allora è vera la seconda e viceversa), si arriva inevitabilmente ad un assurdo. Ne consegue che la descrizione della realtà data dalla Meccanica Quantistica non può essere completa.

⁴ In virtù del principio d'indeterminazione di Heisenberg non è possibile definire con assoluta precisione entrambi i valori di due osservabili incompatibili.

⁵ Si osservi che *a* e *b* non possono essere entrambe false poiché altrimenti il principio di indeterminazione sarebbe violato.

⁶ Trattasi chiaramente di un sistema entangled.

2.2 La formulazione matematica del paradosso

Di seguito riportiamo la formulazione matematica avanzata da Einstein, Podolsky e Rosen nell'articolo di cui sopra [9].

Consideriamo una particella con un solo grado di libertà, in uno spazio unidimensionale, descritta dalla funzione d'onda ψ . Detta A una generica grandezza fisicamente osservabile e \hat{A} il corrispondente operatore, se ψ è autofunzione di \hat{A} , ovvero se:

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (2.1)$$

allora la grandezza fisica A possiede certamente il valore a ogni volta che la particella si trova nello stato ψ . Secondo il criterio di Realtà, così come è stato illustrato nel precedente paragrafo, per questa particella esiste un elemento della realtà fisica che corrisponde ad A .

Prendiamo, ad esempio:

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}p_0x} \quad (2.2)$$

dove p_0 è una costante.

Applicando alla (2.2) l'operatore momento:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.3)$$

si ottiene:

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0\psi \quad (2.4)$$

Quindi l'operatore \hat{p} assume certamente il valore p_0 ; si può dunque dire che il momento coniugato della particella sia una grandezza reale.

Per quanto riguarda invece la posizione, cui è associato l'operatore \hat{x} , secondo la Meccanica

Quantistica si può solo stabilire la probabilità che una misura fornisca un valore compreso tra un a e un b .

In formula:

$$P(a, b) = \int_a^b \psi^* \psi dx = \int_a^b dx = b - a \quad (2.5)$$

Dunque:

$$\hat{x}\psi = x\psi \neq a\psi \quad (2.6)$$

La posizione allora non è una grandezza reale poiché in questo caso non è possibile fare alcuna predizione certa. Inoltre, una misura diretta porterebbe la funzione d'onda (autostato di \hat{p}) a collassare in un autostato di \hat{x} rendendo imprecisa la misura del momento.

Dati due sistemi I e II, supponiamo che prima dell'istante iniziale preso a riferimento i rispettivi stati interagissero tra loro e che dopo un certo intervallo di tempo cessa invece ogni tipo d'interazione. Il sistema composto da I + II si può quindi dire *entangled*. Prendiamo a questo punto in considerazione la grandezza fisica A relativa al sistema I e indichiamo con $u_n(x)$ le autofunzioni relative agli autovalori a_n del corrispondente operatore \hat{A} per $n = 0, \dots, \infty$. Definiamo Ψ la funzione d'onda del sistema somma.

Dopo l'interazione risulta:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_2)u_n(x_1) \quad (2.7)$$

dove i pedici 1 e 2 sono riferiti rispettivamente al sistema I e II.

Supposto che una misura di A assuma il valore a_k , allora:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2)u_k(x_1) \quad (2.8)$$

Analogamente, se B è un'altra grandezza (sempre riferita al sistema I) e $v_m(x)$ le autofunzioni

relative agli autovalori b_m del corrispondente operatore \hat{B} per $m = 0, \dots, \infty$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_2) v_m(x_1) \quad (2.9)$$

detto b_j è il valore misurato di B :

$$\Psi(x_1, x_2) = \varphi_j(x_2) v_j(x_1) \quad (2.10)$$

Le funzioni φ_j e ψ_k appartengono dunque alla stessa realtà.⁷

Immaginiamo ora che φ_j e ψ_k siano autofunzioni di due operatori che non commutano tra loro, come per esempio il momento e la posizione. Se i sistemi in questione sono due particelle, la funzione d'onda complessiva sarà:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \quad (2.11)$$

dove x_0 è una costante.

Detto P_1 il momento della prima particella, la sua autofunzione, corrispondente all'autovalore p , risulta:

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} p x_1} \quad (2.12)$$

mentre l'autofunzione del momento P_2 della seconda particella, associata all'autovalore $-p$, è:

$$\psi_p(x_2) = e^{\frac{i}{\hbar}(x_0 - x_2)p} \quad (2.13)$$

⁷ Si osservi che, poiché dall'istante in cui si comincia la misura i due sistemi non interagiscono più tra loro, le misure effettuate sul primo sistema non influenzano in alcun modo il secondo.

Per quanto riguarda invece la posizione, considerando che:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp = 2\pi\hbar\delta(x_1 - x_2 + x_0) \quad (2.14)$$

detta X_1 la posizione della prima particella, la sua autofunzione relativa all'autovalore x è:

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \quad (2.15)$$

mentre l'autofunzione di X_2 , di autovalore $x + x_0$, è:

$$\varphi_x(x_2) = 2\pi\hbar\delta(x - x_2 + x_0) \quad (2.16)$$

In conclusione, misurando o il momento o la posizione del primo sistema, si può determinare con certezza o il valore di P o quello di X senza perturbare il secondo.

Conseguenza diretta del Principio di Realtà è che entrambe le quantità sono reali e appartengono alla stessa realtà, pertanto l'affermazione b) di cui sopra (si veda il paragrafo 2.1) non può che essere falsa; ciò implica che la Meccanica Quantistica non può essere una teoria completa.

2.2.1 La versione di Bohm

Proponiamo anche la versione (concettualmente più semplice) dell'esperimento formulata da David Bohm [10].

Supponiamo di avere una sorgente in grado di emettere a comando una coppia di particelle di spin $\frac{1}{2}$ che viaggiano in direzioni opposte (**Fig. 2.1**).

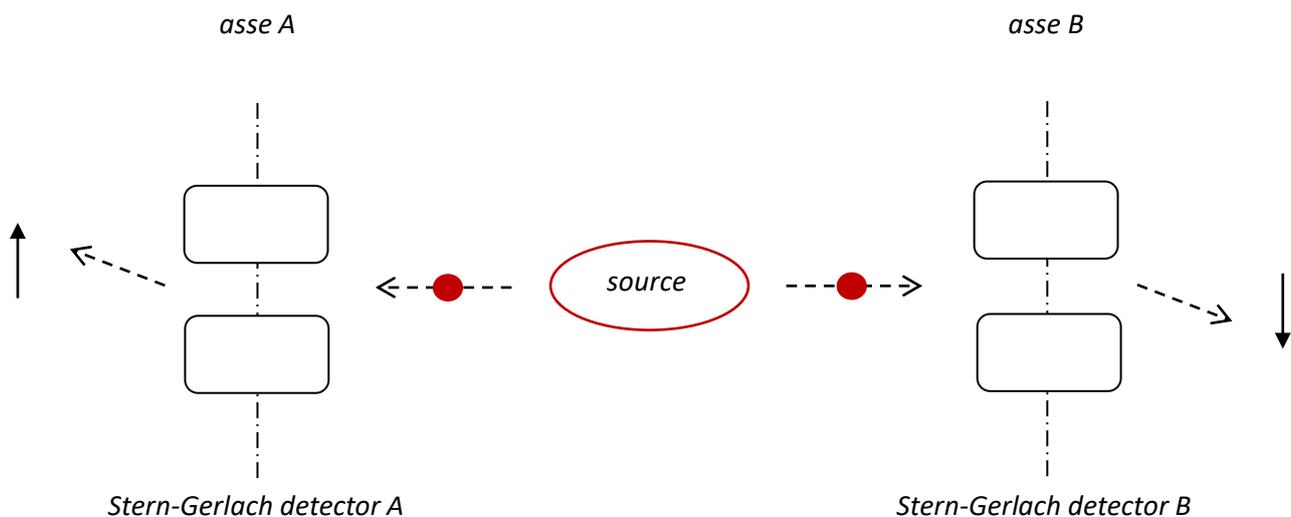


Fig. 2.3: Apparato sperimentale di Stern-Gerlach per misure di spin di uno stato *entangled*⁸ [11].

Ciascuna particella passa attraverso un *detector* che ne misura lo spin lungo un dato asse. I due *detector*, *A* e *B*, possono essere ruotati così da poter effettuare la misura lungo qualsiasi asse; scegliamo, in particolare, gli assi *x* e *z*. Distinguiamo allora due fasi:

1. Entrambi i *detector* sono disposti in modo da misurare lo spin lungo l'asse *z*.

Supponiamo che in corrispondenza di *A* e *B* ci siano due osservatori di nome rispettivamente Alice e Bob. Dopo diverse misurazioni si giunge al seguente risultato:

- sia Alice che Bob vedono il 50% delle volte la particella con *spin up*, e l'altro 50% la particella con *spin down*
- quando Alice vede la particella di sinistra con *spin up*, Bob vede quella di destra con *spin down* e viceversa

Questo significa che una volta misurata la componente *z* della particella sulla sinistra automaticamente si conosce anche quella della particella sulla destra.

Prendiamo ad esempio il caso che, dopo una misura, la particella *A* sulla sinistra abbia *spin up*;

⁸ Un magnete di Stern-Gerlach deflette la particella che lo attraversa nella direzione *up* o *down*.

di conseguenza la particella B sulla destra deve avere *spin down*. Inoltre, poiché per il Principio di Località la misura di A non può aver influenzato lo spin dell'altra particella, allora B doveva avere *spin down* anche prima di misurare A .

Dunque, lo stato di spin delle particelle già prima ancora di entrare nei *detector* dev'essere:

$$\psi_1 = \alpha_z^A \beta_z^B \quad (2.17)$$

dove α_z e β_z rappresentano rispettivamente gli stati di *spin up* e *down* lungo l'asse z .

$$\alpha_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Analogamente, se la particella A ha *spin down* allora lo spin delle due particelle sarà:

$$\psi_2 = \beta_z^A \alpha_z^B \quad (2.19)$$

Stando a quanto detto, le particelle si trovano complessivamente il 50% delle volte nello stato ψ_1 e il restante 50% nello stato ψ_2 .

1. Entrambi i *detector* sono poi disposti in modo da misurare lo spin lungo l'asse x .

Anche in questo caso Alice e Bob non vedono mai le particelle entrambe con *spin up* o *down*.

Tuttavia, detti α_x e β_x gli stati di *spin up* e *spin down* lungo l'asse x ,

$$\alpha_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

se lo stato iniziale è ψ_1 , la probabilità di trovare entrambe le particelle con *spin up* è:

$$|\langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_1 \rangle|^2 = |\langle \alpha_x^A | \alpha_z^A \rangle \langle \alpha_x^B | \beta_z^B \rangle|^2 = \frac{1}{4} \quad (2.21)$$

Stessa cosa se lo stato iniziale delle particelle è ψ_2 .

$$|\langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_2 \rangle|^2 = |\langle \alpha_x^A | \beta_z^A \rangle \langle \alpha_x^B | \alpha_z^B \rangle|^2 = \frac{1}{4} \quad (2.22)$$

Se, ancora, le particelle sono metà delle volte nello stato ψ_1 e l'altra metà nello stato ψ_2 , la probabilità complessiva $P(up\ up)_x$ è:

$$\frac{1}{2} |\langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{4} \quad (2.23)$$

Così facendo si arriva però ad una contraddizione con l'evidenza sperimentale. È chiaro che nessun esperimento dovrebbe riportare entrambi i risultati ottenuti in 1. e 2.

Tuttavia, se supponiamo che le due particelle, prima di arrivare ai rispettivi *detector*, siano nello stato di spin:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_z^A \beta_z^B - \beta_z^A \alpha_z^B) \quad (2.24)$$

allora risulta:

$$P(up\ down)_z = |\langle \alpha_z^A \beta_z^B | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle \alpha_z^A \beta_z^B | \psi_1 \rangle - \langle \alpha_z^A \beta_z^B | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

$$P(down\ up)_z = |\langle \beta_z^A \alpha_z^B | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle \beta_z^A \alpha_z^B | \psi_1 \rangle - \langle \beta_z^A \alpha_z^B | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.26)$$

E queste due probabilità sono coerenti con quanto osservato sperimentalmente nel caso 1.

Inoltre:

$$P(up\ up)_x = |\langle \alpha_x^A \alpha_z^B | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_1 \rangle - \langle \alpha_x^A \alpha_x^B | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle \alpha_x^A | \alpha_z^A \rangle \langle \alpha_x^B | \beta_z^B \rangle + \langle \alpha_x^A | \beta_z^A \rangle \langle \alpha_x^B | \alpha_z^B \rangle|^2 = 0 \quad (2.27)$$

che è lo stesso risultato del caso 2.

Se i risultati delle osservazioni dei casi 1. e 2. fossero entrambi veri, ciò significa che, prima che una qualsiasi misura venga effettuata, B non può trovarsi né nello stato β_z^B né nello stato α_z^B altrimenti questo sarebbe in contraddizione con quanto osservato nel caso 2.

Supponiamo di misurare lo spin di A lungo l'asse z e immaginiamo che questo sia up ; a questo punto sappiamo che lo spin di B dev'essere $down$, ma abbiamo anche detto che prima della misurazione B non può avere né $spin\ up$ né $spin\ down$. Quindi, non potendo essere B inizialmente nello stato di $spin\ down$, allora vuol dire che è collassato nello stato $down$ dopo la misura di A , anche qualora fosse spazialmente molto lontano da questo.

Perciò, si deduce che la descrizione quanto-meccanica della natura fisica è in qualche modo incompleta.⁹

2.3 Il problema della causalità

Dall'analisi dell'esperimento del paragrafo precedente, in particolare nella versione di Bohm, possiamo trarre due importanti conclusioni:

- 1) Quando si viene a formare uno stato *entangled* di due particelle;
 - o queste hanno in sé degli stati predeterminati con spin opposti lungo tutti gli assi
 - oppure ognuna conosce in qualche modo l'asse lungo il quale è stata misurata l'altra e si pone nello stato opposto lungo lo stesso asse

Poiché la seconda opzione viola il Principio di Località, non può che essere vera la prima. Evidentemente la conoscenza di tali stati dipende da *variabili nascoste* che non sono legate alla funzione d'onda.

⁹ Si faccia riferimento a quanto è già stato chiarito in precedenza nel par. 2.1.

- 2) Nei sistemi *entangled* non c'è una vera e propria relazione di causa-effetto ma soltanto una correlazione di tipo statistico [12].

Rivolgiamo per il momento la nostra attenzione al secondo punto. Accenneremo poi alla teoria a variabili nascoste nel capitolo successivo.

Condizione necessaria affinché sussista il *Principio di Causalità*, inteso come principio di causa-effetto nella sequenza temporale degli eventi, indipendentemente dal sistema di riferimento considerato, vale a dire affinché la causa preceda sempre il suo effetto, è che la velocità della luce non possa essere superata. Dal momento che la relatività stabilisce tale velocità come la massima possibile, di conseguenza la causalità è automaticamente verificata. Perciò in nessun sistema di riferimento è possibile, ad esempio, osservare causa ed effetto in ordine invertito.

Tuttavia, il fenomeno dell'*entanglement* non può essere concepito nell'ambito di una visione deterministica. Nell'esperimento di Bohm, infatti, abbiamo visto che se per esempio Alice effettua una misura, essa influenza istantaneamente lo stato del sistema *entangled* complessivo (e quindi anche quello di Bob¹⁰). Questo perché Alice e Bob costituiscono lo stesso sistema quantistico *non localizzato* e quindi incompatibile con le leggi della relatività.

È lecito dunque supporre che per i sistemi *entangled* ci sia invece la possibilità che i segnali si propaghino ad una velocità maggiore di quella della luce, o in altri termini l'esistenza di segnali superluminali. In realtà teoremi quali ad esempio il *teorema di non comunicazione* assicurano che anche nel caso di uno stato *entangled* non è possibile per un osservatore che effettua una misura su un sottosistema dello stato totale comunicare informazioni ad un altro osservatore in modo istantaneo.

Chiaramente lo studio e l'analisi dell'informazione e la crittografia quantistica richiede una trattazione più approfondita, ma questo esula dal nostro scopo. Ci limitiamo però ad osservare, tornando all'esempio di sopra con Bob e Alice, che non c'è quindi un modo per trasferire istantaneamente l'informazione a Bob. Questo significa che Bob non può sapere se Alice ha effettivamente effettuato la misura, e quindi non è possibile pensare che il risultato ottenuto da Alice sia la causa di quello ottenuto da Bob. Così, si giunge inevitabilmente ad una violazione della causalità.

¹⁰ Si suppone che Alice e Bob siano abbastanza lontani al momento della misura.

Capitolo 3

Alcune applicazioni dell'EPR

3.1 Cenni sulle teorie a variabili nascoste

Dalla convinzione che la Meccanica Quantistica fosse una teoria incompleta, scaturì l'altrettanto forte convinzione, da parte di Einstein, Podolsky e Rosen, che per completarla era necessario introdurre delle variabili aggiuntive.

Il problema è che una teoria che integri l'interpretazione ortodossa di Copenaghen con altre variabili (apparentemente nascoste) dovrebbe avere caratteristiche non locali.

Infatti, nel 1964 il fisico John Bell dimostrò che affinché tali variabili avessero una natura locale, era necessario che fossero soddisfatte alcune relazioni di disuguaglianza (note come *disuguaglianze di Bell*) non previste dalla Meccanica Quantistica standard [13]. Ma successive verifiche sperimentali (tra le quali si ricorda particolarmente quella di Aspect) mostrarono come le disuguaglianze di Bell venissero violate con un grado di certezza abbastanza soddisfacente.

Dunque, non è possibile costruire una teoria a **variabili nascoste** di natura locale. Da questo punto di vista, una delle teorie non locali meglio formulate è sicuramente quella di Bohm.

3.1.1 La teoria dell'onda pilota

L'idea che sta alla base della teoria di Bohm [14], detta anche *teoria dell'onda pilota*¹¹, è che ad ogni particella sia associata un'onda in grado di guidarla durante tutto il suo percorso, così da poter individuare una vera e propria traiettoria. Si suppone, infatti, che la particella occupi sempre una precisa posizione dello spazio e che l'onda corrispondente funga esattamente da pilota, nel senso che guida la particella verso quelle regioni dello spazio dove la sua funzione è più intensa. Questo avviene grazie all'azione di un potenziale quantico che esprime proprio

¹¹ L'ipotesi di un'onda pilota venne in realtà proposta per la prima volta nel 1927 dal fisico De Broglie. Soltanto anni dopo, nel 1952, è stata poi ripresa e riformulata da Bohm nella sua interpretazione. Proprio per questo motivo viene anche detta *teoria di De Broglie-Bohm*.

l'azione dell'onda sul corpuscolo. Pertanto, nota la forza quantomeccanica esercitata dal potenziale quantico e la posizione iniziale della particella, se si conoscono la posizione e la funzione d'onda in un preciso istante, allora è possibile calcolarne anche la velocità in modo da poter determinare la sua posizione un'istante appena successivo. Così facendo, almeno in linea teorica, è possibile riuscire a ricostruire la sua intera traiettoria.

In pratica però, dal momento che le posizioni iniziali (*variabili nascoste*) non sono note, non è possibile ripercorrere precisamente la traiettoria della particella: in linea con l'interpretazione standard della Meccanica Quantistica, è possibile valutare soltanto qual è la probabilità che, in un qualsiasi istante di tempo successivo, la particella si collochi da qualche parte nello spazio. Tuttavia, questa volta non si può dire che il nostro sistema si trova in una sovrapposizione di stati poiché, sebbene non si possa determinare (a meno che non si conoscano le posizioni iniziali), esso comunque possiede una posizione bene precisa.

Ad ogni modo questa Teoria si rivela essere coerente con tutte le predizioni della Meccanica Quantistica. L'*esperimento della doppia fenditura* di cui abbiamo già parlato in precedenza¹², per esempio, può essere spiegato perfettamente nell'ottica di Bohm. Stando alla teoria dell'onda pilota infatti, la spiegazione dell'esperimento è semplicemente questa: le particelle che viaggiano dalla sorgente fino allo schermo di osservazione si propagano sia come onde che come corpuscoli (ciascun corpuscolo associato ad un'onda guida); però, mentre le onde passano attraverso entrambe le fenditure, le particelle passano solo attraverso una delle due, e questo è il motivo per cui si osserva una figura d'interferenza tipica delle onde nonostante ogni singola particella viene rilevata sullo schermo d'osservazione come un corpuscolo.

In pratica, il fenomeno in questione è analogo a quello di una goccia d'olio sulla superficie di un fluido vibrante. Recenti esperimenti mostrano, infatti, che in questo caso la goccia rimbalza sulla superficie del fluido senza fermarsi e che il fluido stesso fa strada al rimbalzo creando delle ondulazioni [15]. Pertanto, l'interazione della goccia con l'onda funge esattamente da guida (onda pilota).



Fig. 3.1: Goccia d'olio che rimbalza sulla superficie di un fluido formando delle onde.

¹² Cap. 1, par. 1.1-1.1.3.

Quando poi la goccia si trova davanti ad una doppia fenditura, essa chiaramente passa o in una o nell'altra fessura; però la sua onda, che invece le attraversa entrambe, crea delle frange di interferenza. In questo senso, la goccia si comporta proprio come una particella, e l'onda del fluido come la sua onda pilota.

Dunque, alla fine possiamo concludere che l'interpretazione di Bohm è perfettamente *deterministica*, che pertanto non abbiamo più il *collasso della funzione d'onda* e che inoltre risolve anche il *problema della causalità* perché se fosse nota la posizione iniziale della particella, si potrebbe descrivere la sua traiettoria precisa. Però resta il fatto che questa Teoria è anche *non locale*. La non località è dovuta proprio all'azione del potenziale quantico: il potenziale totale che si esercita su ciascuna particella dipende infatti dalle posizioni di tutte le particelle del sistema.

D'altra parte, come abbiamo detto, non è possibile realizzare una teoria a variabili nascoste locale. È possibile però costruire una teoria che non sia a variabili nascoste ma che abbia le stesse caratteristiche di questa di Bohm?

3.2 L'interpretazione *Many Worlds*

Nel 1957, pochi anni dopo l'elaborazione della teoria dell'onda pilota da parte di Bohm, lo scienziato Hugh Everett propone un'altra interpretazione della Meccanica Quantistica. Motivato dall'idea di una teoria quantistica della gravitazione, ovvero di una Meccanica Quantistica dell'intero universo, avanza una nuova visione della funzione d'onda [16].

Egli cerca di estendere il concetto di stato (che secondo l'interpretazione standard è relativo solo al sistema in questione, e non ad eventuali osservatori esterni) ad un ramo dell'intero universo (inteso ad esempio come sistema + uno o due degli osservatori), dandogli così un valore globale. In questo modo gli osservatori non sono più oggetti esterni al sistema, bensì diventano parte integrante di esso; vale a dire che il sistema quantistico da considerare va esteso a tutto il ramo dell'universo (assumendo così un significato universale) poichè stavolta anche gli osservatori sono "compresi" al suo interno.

Dunque, la funzione d'onda complessiva dell'intero universo (inteso nel suo complesso, formato da tutti i suoi possibili rami) si presenta come una serie potenzialmente infinita di stati, ciascuno corrispondente ad una realtà; come se l'universo fosse a sua volta composto da una molteplicità di sottouniversi "ramificati", ciascuno dei quali corrisponde ad un termine dello sviluppo.

Per essere precisi:

posto A un generico osservatore (o un insieme di essi) e B la restante parte del nostro universo, se, indicate con a le coordinate di A e con b quelle di B , $\phi_n(a)$ è un insieme completo di stati per A , allora la funzione d'onda dell'universo $\psi(a, b, t)$ a un qualche istante t si può scrivere come:

$$\psi(a, b, t) = \sum_n \phi_n(a) \chi_n(b, t) \quad (3.1)$$

dove la norma di χ_n :

$$\int db |\chi_n(b, t)|^2 \quad (3.2)$$

rappresenta il peso di ϕ_n nello sviluppo. Ciascun termine $\phi_n \chi_n$ identifica un ramo dell'universo totale [17].

In un certo senso ogni singolo ramo, costituito dal sistema osservato ed il suo osservatore (o i suoi osservatori), descrive pertanto un sottosistema *entangled* di un sistema isolato complessivo (l'intero universo). In altre parole, tra i processi del sistema osservato e quelli del rispettivo osservatore interviene una sorta di correlazione, per cui un'osservatore che per esempio esamina l'evoluzione del sistema non è più indipendente da essa.

Tale evoluzione poi, non può che avvenire così come è stato presupposto dalla stessa interpretazione di Copenaghen in linea con i dati sperimentali. A questo proposito Everett postulò che:

tutti i sistemi isolati evolvono secondo l'equazione di Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} |\psi \rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi \rangle \quad (3.3)$$

Sebbene possa sembrare banale, da questo postulato in realtà discendono due importanti corollari:

Corollario 1: l'intero universo evolve secondo l'equazione di Schrödinger, poiché esso è per definizione un sistema isolato.

Corollario 2: non può esserci un collasso della funzione d'onda, poiché altrimenti il postulato di Everett di cui sopra sarebbe violato.

Per spiegare il secondo corollario consideriamo il seguente esempio [18].

Supponiamo di dover eseguire una misura di spin per un sistema costituito da particelle di spin $\frac{1}{2}$. Indichiamo con $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ le proiezioni dello spin lungo l'asse z. immaginiamo di essere "contenti" se la misura riporta *spin up* e "tristi" se la misura riporta *spin down*. Denotiamo pertanto con $|\ddot{u}\rangle$ e con $|\ddot{n}\rangle$ gli stati in cui abbiamo misurato rispettivamente *spin up* e *down* e indichiamo con $|\ddot{-}\rangle$ lo stato prima della misura. Supponiamo inoltre che la misura sia descritta da un operatore di evoluzione temporale U :

$$U = e^{-iH\tau/\hbar} \quad (3.4)$$

Applicando la (3.4) al sistema totale formato da noi + il sistema di particelle in questione risulta:

$$U|\uparrow\rangle \otimes |\ddot{-}\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\ddot{u}\rangle ; U|\downarrow\rangle \otimes |\ddot{-}\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\ddot{n}\rangle \quad (3.5)$$

Dunque, se lo stato iniziale del sistema è dato dalla sovrapposizione:

$$\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \quad (3.6)$$

il postulato di Everett implica che lo stato risultante dopo la misura è:

$$U (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \otimes | \ddot{} \rangle = \alpha |\uparrow\rangle \otimes | \ddot{} \rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes | \ddot{} \rangle \quad (3.7)$$

Quindi alla fine il risultato è una combinazione lineare di noi “contenti” per aver trovato lo *spin up* e di noi “tristi” per aver trovato lo *spin down*, non uno dei due fattori soltanto con una certa probabilità.

Perciò non c’è alcun collasso; bisogna semplicemente accettare il fatto che, al di fuori della nostra dimensione temporale, esiste una pluralità di mondi paralleli a quello che normalmente vediamo in ogni istante che non possono interagire con il nostro mondo e non possono interagire tra loro. Esistono cioè universi distinti (detti anche *dimensioni parallele*) all’interno di un unico **multiverso**.



Fig. 3.2: Dimensioni parallele di un singolo ramo dell’universo.

Possiamo dunque affermare con certezza che questa cosiddetta *Many Worlds Interpretation* è una teoria *reversibile* e *deterministica* [19] che consente di risolvere il problema della misurazione abolendo il *postulato del collasso* grazie all’estensione delle leggi quantistiche all’osservatore e all’intero universo. Da questo punto di vista risulta perfettamente conforme a quella di Bohm, pur non essendo una teoria a variabili nascoste.

Conclusioni e prospettive

In un certo senso l'interpretazione *Many Worlds* di Everett sembra proporre una descrizione piuttosto stravagante del mondo fisico; anzi, per la verità quasi metafisica. Alcune obiezioni nascono proprio dal fatto che, oltre a non sembrar fornire un quadro unitario per la *questione della causalità*, essa non prevede alcun risultato sperimentale a sua conferma. D'altra parte, se la nostra coscienza è limitata ad un solo universo alla volta, com'è possibile allora confermare o rifiutare l'esistenza di tutti gli altri [20]?

Per cercare di ovviare al problema è stata anche postulata una sorta di variante di questa Teoria, nota come *interpretazione a Molte Menti*, in cui anziché supporre l'esistenza di una pluralità di mondi si ammette un solo mondo ma con una pluralità di menti. Ogni mente percepisce a sua volta un solo esito del processo di misura per il quale sono invece possibili tanti esiti diversi. Certamente questa versione appare meno cruda e molto meno singolare di quella di Everett [21], tuttavia resta il fatto che non è verificabile sul piano sperimentale, e in più sembra ancora aperto il problema della causalità.

Ma si può davvero parlare di una vera e propria *violazione della causalità*?

Piuttosto si tratta di una violazione apparente, poiché in realtà possono verificarsi tutti i possibili esiti di una misura, non solo quello effettivamente misurato.

A questo proposito, osserviamo che, sebbene la *MWI* sia una teoria deterministica per l'intero universo fisico, non lo è per un singolo mondo. Questo spiega anche perché, ciò nonostante, il nostro "mondo" sembra essere indeterministico agli occhi di noi osservatori. Analogamente, essa consente una spiegazione locale dell'universo benché un solo mondo sia invece caratterizzato dalla non località. Dunque, visto sotto questo aspetto, l'*entanglement* non sembra poi un fenomeno tanto paradossale come invece credevano gli scienziati dell'EPR. Stando alla teoria di Everett, il paradosso sussiste soltanto qualora ci si limita ad un solo mondo ma, dal momento che le leggi della fisica governano l'intero universo incorporando tutti i mondi, sulla scala dell'universo non c'è paradosso.

Quindi possiamo concludere che la *MWI* pare un'ottima applicazione dell'EPR poiché finalmente favorisce una chiarificazione sul concetto di *entanglement* pur rifiutando l'irreversibile e non deterministico collasso della funzione d'onda.

Un ostacolo è rappresentato dal fatto che, come si è detto, non esistono sufficienti prove sperimentali al riguardo. Però, è anche vero che non ci sono neanche prove sperimentali a favore del collasso, e contro la *MWI* (non a caso si tratta di interpretazioni più che teorie vere e proprie, anche se fino ad ora abbiamo usato parlare indifferentemente di “teoria” e “interpretazione”).

Perché si osservi il collasso, si dovrebbe verificare un’interferenza fra mondi diversi, cioè mondi in cui almeno un oggetto macroscopico è in stati macroscopicamente distinguibili. Quindi sarebbe necessario un esperimento di interferenza con un corpo macroscopico, il che sembra impossibile da effettuare con la tecnologia di cui oggi disponiamo. Negli ultimi tempi sono stati elaborati esperimenti di interferenza con oggetti via via sempre più grandi (arrivando anche a considerare molecole di fullerene C70 [22]), ma ancora non grandi abbastanza da poter essere ritenuti macroscopici. A dire il vero, per verificare un eventuale collasso della funzione d’onda dell’universo in uno stato quantistico a mondo singolo, sono state avanzate anche proposte più ingegnose, secondo cui il collasso avrebbe degli effetti osservabili aggiuntivi come, ad esempio, una piccola non conservazione dell’energia. Però, ancora una volta, gli effetti non sono stati trovati in nessuno degli esperimenti messi in atto.

Ad ogni modo, al di là di quanto sia criticabile o meno, di sicuro la *Many Worlds Interpretation* rappresenta comunque il frutto di un esperimento mentale che per la prima volta nella storia ha davvero messo in crisi l’intera teoria della Meccanica Quantistica.

Appendice

I postulati della meccanica quantistica

Seguono una serie di asseriti di base rappresentativi della formulazione assiomatica della meccanica quantistica [23]:

Postulato 1 (descrizione del vettore di stato di un sistema): *ad ogni sistema fisico è associato un opportuno spazio di Hilbert H ; il suo stato è individuato da un vettore $|\psi\rangle$ di H (generalmente di norma unitaria) che contiene tutte le possibili informazioni sul sistema.*

L'evoluzione temporale di tale stato è data dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.1})$$

dove \hat{H} è un operatore autoaggiunto ($\hat{H}^\dagger = \hat{H}$) detto operatore Hamiltoniano.

Postulato 2 (misura delle grandezze fisiche e decomposizione spettrale): *ogni grandezza fisica A misurabile è descritta da un operatore \hat{A} lineare e autoaggiunto che agisce su H ; tale operatore è un'osservabile il cui spettro (discreto $\sigma_d(\hat{A})$ o continuo $\sigma_c(\hat{A})$) costituisce il campo dei possibili valori della grandezza. Inoltre:*

a. *La probabilità che un'osservazione di \hat{A} al tempo t fornisca il valore $a_n \in \sigma_d$ è data da:*

$$P(A = a_n | t) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2 \quad (\text{A.2})$$

dove $|u_n\rangle$ è l'autovettore normalizzato di \hat{A} corrispondente all'autovalore a_n .

b. La probabilità che un'osservazione di \hat{A} al tempo t fornisca un valore compreso nell'intervallo $(a, a + da) \subset \sigma_c$ è data da:

$$dP(\alpha \leq A \leq a + da|t) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 da \quad (\text{A.3})$$

dove $|v_\alpha\rangle$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore α dell'osservabile A associata ad \hat{A} ¹³.

Postulato 3 (postulato di von Neumann o del collasso della funzione d'onda): se la misura della grandezza A sul sistema nello stato $|\psi\rangle$ al tempo t_0 dà come risultato a_n , allora lo stato del sistema immediatamente dopo la misura (al tempo $t_0 + \tau$) è dato dalla proiezione normalizzata di $|\psi\rangle$ nell'autospazio relativo all'autovalore a_n .

Postulato 4: lo spazio di Hilbert associato ad un sistema di N particelle è lo spazio $L^2(\mathbb{R}^{3N})$.

Alle posizioni x_1, \dots, x_N sono associati gli operatori $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ tali che:

$$\hat{x}_i f(x_1, \dots, x_N) = x_i f(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{A.4})$$

e ai momenti coniugati p_1, \dots, p_N sono associati gli operatori $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ per cui:

$$\hat{p}_i f(x_1, \dots, x_N) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{A.5})$$

Postulato 5: per un sistema di N particelle, gli operatori corrispondenti alle osservabili sono funzioni degli operatori fondamentali $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N, \dots, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$.

¹³ In questo caso per semplicità abbiamo fatto riferimento a spettri non degeneri.

Postulato 6: per un sistema di N particelle, l'operatore Hamiltoniano \hat{H} della (A.1) ha la forma:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \hat{U}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{A.6})$$

e corrisponde all'energia totale del sistema.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Zeilinger, *Experiment and the foundations of quantum physics*, Reviews of Modern Physics, vol. 71, (1999), p. S288.
- [2] P. Kok, *A First Introduction to Quantum Physics*, Springer, (2018), Cham.
- [3] G.F. Dell'Antonio, *Aspetti matematici della meccanica quantistica. Vol.1: Struttura matematica e concettuale*, Bibliopolis, (2011), Napoli.
- [4] L.D. Landau, E.M. Lifšits, *Fisica teorica 3. Meccanica quantistica: teoria non relativistica*, Editori Riuniti, (1976), Roma.
- [5] S. Arroyo Camejo, *Il bizzarro mondo dei quanti*, Springer, (2008), Milano.
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics. Vol.1*, Wiley, (2005), New York.
- [7] A. Einstein, *Quanten-Mechanik und Wirklichkeit*, Dialectica, vol. 2, (1948), p. 321-322.
- [8] L. Accardi, *Urne e camaleonti: dialogo sulla realtà, le leggi del caso e l'interpretazione della teoria quantistica*, Il saggiatore, (1997), Milano.
- [9] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical Review, vol. 47, (1935), p. 778-780.
- [10] J. Greensite, *An Introduction to Quantum Theory*, Institute of Physics Publishing, (2017), Bristol.
- [11] J. S. Bell, *Bertlmann's socks and the nature of reality*, Journal de Physique Colloques, vol. 42, (1981), p. 42.
- [12] D. Bohm, *Quantum theory*, Dover, (1989), Mineola.
- [13] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics, vol. 1, (1964), p. 195-199.
- [14] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Physical Review, vol. 85, (1952), p. 166.
- [15] Y. Couder, E. Fort, *Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale*, Physical Review Letters, vol. 97, (2006), p. 1.

- [16] H. Everett, *The many-worlds interpretation of quantum mechanics: a fundamental exposition by Hugh Everett, III, with papers by J. A. Wheeler ... [et al.]; edited by Bryce DeWitt and Neill Graham*, Princeton University Press, (1973), Princeton.
- [17] J. S. Bell, *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*, Adelphi, (2010), Milano.
- [18] M. Tegmark, *The interpretation of quantum mechanics: many worlds or many words?*, Fortschritte der Physik, vol. 46, (1998), p. 855-856.
- [19] V. Allori, A. Basso, D. Durr, N. Zanghi, *Do Wave Functions Jump? Perspectives of the Work of GianCarlo Ghirardi*, Springer, (2020), Berlino.
- [20] P. C. W. Davies, J. R. Brown, *Il fantasma nell'atomo: enigmi e problemi della fisica quantistica*, Città nuova, (1992), Roma.
- [21] D. Fiscaletti, *I gatti di Schrödinger: meccanica quantistica e visione del mondo*, Muzzio, (2007), Roma.
- [22] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt, A. Zeilinger, *Matter-Wave Interferometer for Large Molecules*, Physical Review Letters, vol. 88, (2002), p. 1.
- [23] P. Caldirola, R. Cirelli, G.M. Prosperi, *Introduzione alla fisica teorica*, UTET, (1982), Torino.

Il *paragrafo 1.2* di questo testo è stato rielaborato facendo uso di dispense di ateneo, oltre che riferimento alla fonte sopra citata. Inoltre, alcuni siti web non citati talvolta hanno fornito qualche spunto.

Ringraziamenti

Desidero rivolgere la mia sincera gratitudine a tutti coloro che mi hanno aiutata e supportata per il presente lavoro di tesi. Ringrazio innanzitutto il prof. Capozziello per i suoi notevoli suggerimenti, nonché l'attenzione e la fiducia mostrata nei miei confronti. Ringrazio tutti gli amici che mi sono stati vicini, malgrado la distanza giustamente imposta per cause di forza maggiore; in particolare, la mia migliore amica Daniela per il costante appoggio morale e l'encomiabile affetto, e Giuseppe, per il suo sostegno e i suoi preziosi consigli.

Sono immensamente grata alla mia famiglia per la protezione e l'amore profertomi; ringrazio mio padre Gennaro e mia madre Clementina, sicuri capisaldi della mia vita, e il caro amato Gianluca, forza e speranza del mio futuro.