UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Il Collasso Gravitazionale in Relatività Generale

Relatore: Salvatore Capozziello
Prof. Salvatore Capozziello
Dott. Daniele Vernieri

Candidato:
Carlo Orientale Caputo
Matr. $N85001348$

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è risolvere le equazioni di campo di Einstein all'esterno e all'interno di una stella. La soluzione esterna sarà trovata imponendo che la distribuzione di materia abbia simmetria sferica.

Per il calcolo della soluzione interna, la stella sarà trattata come un un fluido perfetto in equilibrio idrostatico, e partendo dalle equazioni di Einstein sarà determinato un sistema di equazioni differenziali per i parametri fisici che la caratterizzano. Verrà quindi trovata una soluzione analitica nel caso di una stella incompressibile, mentre il sistema sarà risolto numericamente nel caso di una stella di neutroni.

Infine, verrà risolta l'equazione di campo all'interno di una stella instabile, ovvero quando sia soggetta a contrazione (collasso gravitazionale) o espansione.

Capitolo 1

Richiami di Relatività Generale

È necessario in via preliminare richiamare i concetti e gli strumenti fondamentali della Relatività Generale, che verranno usati ampiamente nel seguito.

1.1 Il principio di equivalenza

La Relatività Generale è una teoria metrica della gravità, ovvero considera i campi gravitazionali come modificazioni della metrica dello spazio-tempo.

Il principio fisico alla base della teoria è il **principio di equivalenza** che nella sua forma "debole" asserisce che la massa gravitazionale di un corpo e la massa inerziale sono uguali. Questo principio trae origine dall'osservazione che tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa, a parità di condizioni iniziali, si muovono in un campo gravitazionale allo stesso modo.

Questa proprietà dei campi gravitazionali permette di stabilire un'analogia tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi in un sistema di riferimento non inerziale (proprio perchè la forza gravitazionale, similmente alle forze inerziali che agiscono in sistemi di riferimento accelerati, è proporzionale alla massa inerziale dei corpi).

Tuttavia, i campi di forze inerziali hanno un comportamento diverso all'infinito rispetto ai campi gravitazionali reali. Questi ultimi ad una distanza infinita dai copri che generano il campo tendono a zero, lo stesso non accade per i campi di forze inerziali. Ad esempio: le forze centrifughe, che nascono in un sistema di riferimento rotante tendono all'infinito quando ci si allontana dall'asse di rotazione, mentre le forze inerziali in un riferimento con accelerazione costante tendono a un valore finito all'infinito.

Dunque è chiaro che con una scelta adeguata del sistema di riferimento sia possibile eliminare il campo gravitazionale solo in una regione dello spazio sufficientemente piccola da poter considerare il campo uniforme. Per esempio, se un corpo di massa m $(m = m_g = m_i)$ è soggetto a un campo gravitazionale statico e uniforme $\vec{g}$, la sua equazione del moto in un sistema di riferimento inerziale è:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\vec{g}. \tag{1.1}$$

Mediante la trasformazione di coordinate: $\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{a}t^2, t' = t$ con $\vec{a} = \vec{g}$, passiamo ad un sistema accelerato in cui vale $m\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = 0$. La cancellazione della forza di gravità $\vec{F}_g = m\vec{g}$ è possibile proprio grazie all'equivalenza tra m_g e m_i.

Grazie a questa analogia tra campi gravitazionali e sistemi di riferimento non inerziali è possibile costruire una teoria metrica della gravità[1], infatti mentre in un sistema di riferimento inerziale, di coordinate cartesiane (ct, x, y, z), l'intervallo infinitesimo tra due eventi ds è determinato da $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, se si passa ad un sistema di riferimento non inerziale nelle coordinate (x^0, x^1, x^2, x^3) il quadrato dell'intervallo sarà una generica forma quadratica simmetrica delle coordinate: $ds^2 = g_{ik}dx^idx^k$ e l'informazione sui campi di forze inerziali sarà contenuta all'interno del tensore metrico g_{ik}. Dunque per il principio di equivalenza, la stessa cosa si può dire per i campi gravitazionali, ovvero non sono altro che modificazioni della metrica dello spazio-tempo, completamente determinati dalle grandezze g_{ik}. Questo significa che le proprietà geometriche dello spazio-tempo (cioè la sua metrica) sono determinate da fenomeni fisici, e non sono proprietà invariabili dello spazio e del tempo.

In termini matematici lo spazio-tempo in Relatività Generale è concepito come una **varietà differenziabile** quadridimensionale[2], cioè come uno spazio topologico ricoperto da sistemi locali di coordinate (le carte) che associano ad ogni suo punto (evento) una quaterna $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tale che nella regione di sovrapposizione tra due di queste carte l'applicazione che permetta di passare dall'una all'altra sia differenziabile. Tale varietà è dotata di una struttura riemanniana, dunque la distanza tra due eventi infinitamente vicini in una data carta dotata di coordinate x^μ è: $ds^2 = g_{ik}(x)dx^idx^k$.

Il principio di equivalenza dunque afferma che nell'intorno di un qualunque evento esiste una carta inerziale, ovvero una carta in cui ds^2 assume la forma minkowskiana: $ds^2 = \eta_{ik}dx^idx^k$ dove $\eta_{ik} = diag(+1, -1, -1, -1)$ nelle coordinate cartesiane. Inoltre poichè per quanto detto prima solo localmente è possibile annullare il campo gravitazionale, ovvero si può ridurre il tensore g_{ik} al tensore η_{ik}, la varietà differenziabile presa in considerazione è curva.

[1] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

[2] V. Barone, "Relatività, principi e applicazioni," Bollati Boringhieri, 2004

1.2 Il principio di covarianza generale

Un altro fondamentale principio su cui si basa la Relatività Generale è il principio di **covarianza generale** il cui contenuto è il seguente: le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate. Per garantire il rispetto di tale principio è necessario che le leggi della fisica si scrivano attraverso equazioni tensoriali.

1.2.1 Tensori e leggi di trasformazione

Una grandezza fisica tensoriale è tale se ha certe ben definite proprietà di trasformazione al cambiare del sistema di coordinate[3]. A seguito di un cambio di coordinate $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ possiamo avere due leggi di trasformazione:

legge *controvariante*, attraverso la matrice $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$, che è la legge di trasformazione dei differenziali delle coordinate:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}dx^j. \tag{1.2}$$

Legge *covariante*, attraverso la matrice $\partial x^j/\partial\bar{x}^i$, che è la legge di trasformazione delle componenti del differenziale di una funzione:

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{1.3}$$

È semplice dunque ricavare quali debbano essere le leggi di trasformazione per vettori, covettori e più in generale per dei tensori definiti sulla nostra varietà differenziabile (vedi A.1). Volendo che tali grandezze siano indipendenti dal sistema di coordinate scelto per rappresentarli, le loro componenti si trasformeranno con legge opposta rispetto alla legge di trasformazione della base in cui sono scritti.

A seguito del cambio di coordinate $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ le componenti di un vettore **v** e di un covettore **w** si trasformano come segue:

$$\bar{v}^i = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}v^j, \tag{1.4}$$

$$\bar{w}_j = w_i\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^j}. \tag{1.5}$$

Più in generale un tensore è un'applicazione multilineare che a k covettori e s vettori associa un reale: $T : \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s} \to R$, e a seguito

[3]John M. Lee - Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2012

di un cambio di coordinate $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ le sue componenti si trasformano come segue:

$$\bar{T}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_s} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{a_k}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}} T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_s} \,. \tag{1.6}$$

1.2.2 Derivata covariante e simboli di Christoffel

Il calcolo tensoriale su una varietà riemanniana generica è differente da quello nello spazio di Minkowski, poichè dato un tensore, le sue derivate non costituiscono, in generale, un tensore; così anche il differenziale dA^i di un vettore A^i non è a sua volta un vettore. Il motivo è che esso è la differenza di due vettori $A^i(x)$ e $A^i(x + dx)$ calcolati in due punti diversi della varietà, ovvero riferiti a due basi locali diverse, e le leggi di trasformazione dei vettori su una varietà curva dipendono dalla posizione. Per poter costruire un differenziale vettoriale bisogna trasportare parallelamente il secondo vettore nello stesso punto del primo per poi farne la differenza. Lo strumento che definisce la variazione subita dal vettore durante il trasporto, e che quindi ci permette di connettere spazi tangenti riferiti a diversi punti sulla varietà è per l'appunto la **connessione** o derivata covariante.

La derivata covariante (vedi A.2) del vettore $A^i(x)$ lungo la direzione definita dal vettore v^i è data dalla seguente formula (la virgola indicherà la derivazione ordinaria, mentre il punto e virgola quella covariante):

$$A^i{}_{;j} v^j = (A^i{}_{,j} + \Gamma^i_{jl} A^l) v^j, \tag{1.7}$$

dove le 4^3 funzioni Γ^i_{jl} sono detti simboli di Christoffel e sono definiti dalla A.9.

Dunque è possibile definire il differenziale covariante di un vettore A^i nel seguente modo :

$$DA^i = (A^i{}_{,j} + \Gamma^i_{jl} A^l) dx^j = A^i{}_{;j} dx^j. \tag{1.8}$$

È possibile identificare la quantità legata alla variazione del vettore durante il trasporto parallelo, che sarà indicata con δA^i, infatti:

$$DA^i = A^i(x + dx) - (A^i(x) + \delta A^i) = dA^i - \delta A^i, \tag{1.9}$$

e poichè $dA^i = A^i{}_{,j} dx^j$ troviamo che:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{jl} A^l dx^j. \tag{1.10}$$

Per generalizzare la formula della derivata covariante a tensori generici iniziamo calcolando la δB_a di un generico covettore B_a. Poichè il prodotto scalare con un vettore arbitrario non viene alterato durante il trasporto parallelo, essendo uno scalare invariante, abbiamo che:

$$\delta(A^i B_i) = A^i \delta B_i + B_i \delta A^i = 0, \tag{1.11}$$

e usando l'equazione (1.10) otteniamo che $A^i\delta B_i = -B_i\delta A^i = B_i\Gamma^i_{jl}A^j dx^l$, e quindi:

$$\delta B_j = \Gamma^i_{jl}B_i dx^l. \tag{1.12}$$

Dunque per il differenziale covariante di un covettore otteniamo:

$$DB_i = dB_i - \delta B_i = (B_{i,l} - \Gamma^j_{il}B_j)dx^l. \tag{1.13}$$

È immediata la generalizzazione della formula per tensori generici.

Infine esprimiamo i simboli di Christoffel in funzione dei coefficienti del tensore metrico. Questo è possibile proprio in virtù del principio di equivalenza, infatti potendo scegliere sempre una carta inerziale sulla quale il tensore g_{ij} si riduce al tensore di Minkowski $\eta_{ij} = diag(1, -1, -1, -1)$, abbiamo che su tale carta vale che:

$$g_{ij;l} = 0\,, \tag{1.14}$$

e dunque sarà nullo sempre. Questa relazione può essere scritta come segue:

$$g_{ij,k} = \Gamma^l_{ki}g_{lj} + \Gamma^l_{kj}g_{li}\,. \tag{1.15}$$

Permutando ciclicamentre gli indici e combinando le equazioni così ottenute, troviamo la relazione cercata[4]:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mj,k} + g_{mk,j} + g_{jk,m}). \tag{1.16}$$

1.3 Equazioni del moto

Il moto di una particella libera in relatività ristretta è determinato dal principio di minima azione:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \tag{1.17}$$

con $ds = \sqrt{\eta_{ij}dx^i dx^j}$, con η_{ij} tensore di Minkowsi. La corrispondente equazione del moto è l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0. \tag{1.18}$$

In base al principio di equivalenza, la stessa equazione del moto deve valere in un sistema localmente inerziale. Mentre nel caso di una generica carta bisognerà sostituire la metrica Minkowskiana η_{ij} con $g_{ij}(x)$. L'azione di una particella libera sarà allora[4]:

$$S = -mc \int \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}, \tag{1.19}$$

[4] V. Barone, "Relatività, principi e applicazioni," Bollati Boringhieri, 2004

e l'equazione del moto corrispondente sarà l'equazione delle geodetiche per la metrica g_{ij}, che troviamo generalizzando opportunamente l'equazione (1.18) usando il differenziale covariante:

$$\frac{Du^i}{ds} = 0, \tag{1.20}$$

dove $u^i = dx^i/ds$ è la quadri-velocità della particella. Esplicitando l'equazione (1.20) otteniamo:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{1.21}$$

Dunque il moto di una particella in un campo gravitazionale è determinato dalle grandezze Γ^i_{kl}. La derivata d^2x^i/ds^2 è la quadri-accelerazione della particella. Ne segue che possiamo ritenere le grandezze Γ^i_{kl} come una sorta di quadri-forza, mentre Il tensore g_{ij} assume qui il ruolo dei potenziali del campo gravitazionale, essendo le sue derivate legate alle Γ^i_{kl}[5].

1.4 Equazioni del campo gravitazionale

I due tensori necessari per ricavare le equazioni del campo gravitazionale sono: il tensore di Riemann (vedi A.3) e il tensore Energia-Impulso (vedi A.4). Le equazioni di campo si ricavano dal principio di minima azione[6]:

$$\delta(S_m + S_g) = 0, \tag{1.22}$$

dove S_g e S_m rappresentano rispettivamente l'azione del campo gravitazionale e della materia. Entrambe sono espresse nella forma:

$$\int \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x,$$

dove $\mathcal{L}$ è la densità di lagrangiana e $\sqrt{-g}d^4x$ l'elemento di volume invariante.

Volendo equazioni di campo del secondo ordine, la lagrangiana del campo gravitazionale deve almeno contenere i quadrati delle derivate prime di g_{ij}. Ma le derivate prime contengono i simboli di Christoffel che non sono invarianti. Dovendo dunque scegliere espressioni che contengono derivate di ordine superiore, la scelta più ovvia è lo scalare di curvatura R, in cui compaiono il tensore g_{ik} con le sue derivate prime e seconde.

Calcolandone la variazione si può dimostrare che:

$$\delta\int R\sqrt{-g}d^4x = \int \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]d^4x. \tag{1.23}$$

[5] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

[6] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

La variazione dell'azione materiale può sempre essere scritta in funzione del tensore energia-impulso come segue:

$$\delta S_m = \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x. \tag{1.24}$$

E dunque dall'equazione (1.22) ricaviamo:

$$\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \chi T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4 x = 0. \tag{1.25}$$

Dove la costante di accoppiamento χ è ricavata richiedendo che nel limite Newtoniano di campo debole le equazioni si riducano a:

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \tag{1.26}$$

dove ψ è il potenziale gravitazionale newtoniano, e si trova che:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{1.27}$$

dove $G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{Nm}^2 \mathrm{kg}^{-2}$ è la costante di gravitazione universale.

Usando le equazioni (1.25) e (1.27) otteniamo l'equazione di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1.28}$$

Definiamo il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ come:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{1.29}$$

Per trovare le equazioni di campo nel vuoto, in assenza di sorgenti, basta porre il tensore $T_{\mu\nu} = 0$, e dunque si ottiene

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{1.30}$$

Ma questa condizione vale se e solo se

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{1.31}$$

poichè in tal caso anche $R = 0$ e in definitiva $G_{\mu\nu} = 0$.

Infine un altro modo per poter scrivere l'equazione di campo è la seguente:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{1.32}$$

Infatti prendendo la traccia di ambo i membri della 1.28 si ottiene

$$R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -R = \frac{8\pi G}{c^4} T, \tag{1.33}$$

inserendo questa espressione di R nel'equazione (1.28) otteniamo proprio l'equazione (1.32).

Capitolo 2

Soluzione esterna di Schwarzschild

Risolviamo l'equazione di campo di Einstein per una distribuzione di materia a simmetria sferica (dunque anche il campo di velocità può solo essere radiale), iniziando con la soluzione nel vuoto, ovvero all'esterno della sorgente del campo gravitazionale.

Come mostrato nel capitolo precedente basterà risolvere l'equazione $R_{ij} = 0$. La soluzione fu trovata per la prima volta da Karl Schwarzschild nel 1916.

2.1 Ansatz per una metrica a simmetria sferica

Per ottenere una metrica con la simmetria richiesta, invece delle coordinate cartesiane $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, usiamo delle coordinate sferiche per la parte spaziale: (ct, r, θ, ψ), legate alle cartesiane dalle seguenti formule:

$$x^1 = r \sin\theta \cos\psi, \quad x^2 = r \sin\theta \sin\psi, \quad x^3 = r \cos\theta.$$

Dunque la parte spaziale della metrica sarà:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\psi^2.$$

Inoltre un requisito fondamentale che ogni soluzione che rappresenti un campo gravitazionale reale deve avere è la piattezza asintotica. Ciò significa che lontano dalla sorgente il campo gravitazionale deve annullarsi, ovvero che la metrica torni ad essere quella di Minkowski:

$$ds^2 = c^2 t^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\psi^2. \tag{2.1}$$

Dunque l'ansatz più semplice a cui possiamo pensare per la nostra metrica è il seguente:

$$ds^2 = A(r,t) c^2 dt^2 - B(r,t) dr^2 - C(r,t) dr dt - D(r,t)^2 d\Omega^2, \tag{2.2}$$

dove $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2$. Ma poichè la scelta del riferimento è arbitraria in relatività generale, possiamo eseguire sulle coordinate qualsiasi trasformazione che non alteri la simmetria centrale di ds^2 e usare nuove coordinate $r^{'} = F(r,t)$ $t^{'} = G(r,t)$ in maniera tale che il coefficiente di $drdt$ si annulli e il coefficiente di $d\Omega^2$ sia $-r^2$. In particolare quest'ultima condizione significa che il raggio r è determinato in modo tale che la lunghezza della circonferenza di centro nell'origine delle coordinate sia uguale a $2\pi r$.

Poichè se $A = 0$ perdiamo la nozione di tempo e se $B = 0$ ci riduciamo a un punto materiale, per comodità riscriviamo questi due coefficienti in forma esponenziale, così oltre a non potersi annullare, quando gli esponenti andranno a zero verrà recuperata la metrica (2.1). Otteniamo quindi la seguente espressione per la metrica[1]:

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2d\Omega^2. \tag{2.3}$$

Dove $\nu(r,t), \lambda(r,t)$ sono funzioni di r e t che andranno determinate una volta inserita questa espressione della metrica nelle equazioni di campo di Einstein.

2.2 Il calcolo dei simboli di Christoffel

Per poter calcolare le componenti del tensore di Ricci e scrivere così le equazioni di campo di Einstein, bisogna preliminarmente calcolare i simboli di Christoffel. Per farlo basterà scrivere le equazioni delle geodetiche (1.21).

Tali equazioni discendono dal principio di minima azione (1.17), che possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}ds = 0. \tag{2.4}$$

Dunque, le equazioni delle geodetiche, sono proprio le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana:

$$L = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{2.5}$$

Per riconoscere più facilmente i simboli di Christoffel rinominiamo le coordinate:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \psi,$$

mentre le componenti del tensore metrico sono:

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta.$$

[1] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

Dunque:

$$L = e^{\nu}(\dot{x}^0)^2 - e^{\lambda}(\dot{x}^1)^2 - r^2(\dot{x}^2)^2 - r^2\sin^2\theta(\dot{x}^3)^2, \tag{2.6}$$

e una volta scritte le 4 equazioni:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{2.7}$$

siamo in grado di riconoscere i simboli di Christoffel non nulli, che sono:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{\nu_t}{2c}\,, \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{\nu_r}{2}\,, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{e^{\lambda-\nu}}{2c}\lambda_t\,,\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}\nu_r}{2}\,, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_r}{2}\,, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\lambda_t}{2c}\,, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda},\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}\,, \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Il calcolo delle componenti del tensore di Ricci

Una volta noti i simboli di Christoffel possiamo calcolare le componenti del tensore di Ricci. Le equazioni interessanti saranno quelle date dai 3 coefficienti: R_{00}, R_{11} e R_{01}, mentre le altre o sono identicamente nulle o sono dipendenti da queste 3.

Data la formula del tensore di Ricci (A.19) e usando la seguente formula per i simboli di Christoffel con due indici ripetuti:

$$\Gamma^i_{ia} = \frac{\partial}{\partial x^a} ln(\sqrt{-g}), \tag{2.9}$$

la formula per il tensore di Ricci diventa:

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} ln(\sqrt{-g}) + \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l} ln(\sqrt{-g}) - \Gamma^l_{ip}\Gamma^p_{lj}\,. \tag{2.10}$$

Per la metrica (2.3) si ha: $\sqrt{-g} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin\theta$.

Dopo alcuni calcoli ricaviamo:

$$R_{01} = \frac{1}{cr}\lambda_t\,, \tag{2.11}$$

la prima equazione di campo dunque è:

$$R_{01} = \frac{1}{cr}\lambda_t = 0. \tag{2.12}$$

Ne deduciamo che λ non dipende dal tempo. Nel calcolo delle altre componenti del tensore di ricci se ne terrà conto, eliminando le derivate di λ rispetto al tempo.

Otteniamo così:

$$R_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r + \frac{2}{r}\nu_r). \tag{2.13}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r - \frac{2}{r}\lambda_r). \tag{2.14}$$

Le due equazioni di campo $R_{00} = 0$ e $R_{11} = 0$ possono essere scritte rispettivamente come segue:

$$\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r + \frac{2}{r}\nu_r = 0, \tag{2.15}$$

$$\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r - \frac{2}{r}\lambda_r = 0, \tag{2.16}$$

che sottratte membro a membro danno:

$$\lambda_r + \nu_r = 0, \tag{2.17}$$

e dunque:

$$\lambda + \nu = f(t). \tag{2.18}$$

Segue che $e^{\nu} = e^{-\lambda}e^{f(t)}$ e la metrica assume la seguente forma:

$$ds^2 = e^{-\lambda}e^{f(t)}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2d\Omega^2. \tag{2.19}$$

Ponendo $t' = \int e^{\frac{f(t)}{2}}dt$, allora $dt'^2 = e^{f(t)}dt^2$ e la metrica diventa[2]:

$$ds^2 = e^{-\lambda}c^2dt'^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2d\Omega^2. \tag{2.20}$$

Dunque per mezzo di una trasformazione della coordinata temporale possiamo sempre porre la $f(t)$ uguale a 0 ottenendo:

$$\lambda = -\nu. \tag{2.21}$$

Questa equazione ci porta ad una conclusione sorprendente: con la sola ipotesi di simmetria sferica della distribuzione di massa (che quindi può anche avere un campo di velocità radiale: può pulsare, collassare o espandersi in maniera simmetrica), si ottiene una metrica i cui coefficienti sono indipendenti dal tempo; dunque lo spazio tempo esterno è statico. Questo risultato ottenuto da G.D. Birkhoff, è conosciuto come teorema di Birkhoff.

[2] N. Straumann, "General Relativity," Springer, 2013

Usando l'equazione (2.21) nell'equazione (2.16) otteniamo (da ora in poi per comodità l'apice ' indicherà la derivazione rispetto a r):

$$\nu'' + \nu'^2 + \frac{2}{r}\nu' = \frac{1}{r}(re^{\nu})'' = 0, \tag{2.22}$$

che integrata ci fornisce:

$$(re^{\nu})' = cost. \tag{2.23}$$

da cui ricaviamo

$$re^{\nu} = Ar + B,$$

e infine

$$e^{\nu} = A + \frac{B}{r}\,. \tag{2.24}$$

Richiedendo la piattezza asintotica otteniamo la costante A

$$\text{per} \quad r \to \infty \quad e^{\nu} \to 1,$$

quindi:

$$A = 1.$$

La costante B si può esprimere facilmente in funzione della massa del corpo usando il limite per campi deboli. Si può provare che in questo limite la componente g_{00} del tensore metrico è data da:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}\,,$$

con M la massa del corpo che genera il campo.

Dunque richiedendo che

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}\,,$$

ricaviamo il valore della costante B, che ha le dimensioni di una lunghezza e che rinominiamo R_s

$$B \equiv R_s = \frac{2GM}{c^2}\,.$$

Dunque abbiamo che:

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{R_s}{r}\,, \tag{2.25}$$

e infine troviamo la metrica spazio-temporale nella forma[3]:

[3]W. G. Boskoff, S. Capozziello, "A Mathematical Journey to Relativity," Springer, 2020

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\Omega^2. \tag{2.26}$$

Questa metrica determina completamente il campo gravitazionale nel vuoto creato da una distribuzione di massa a simmetria centrale, R_s è detto raggio di Schwarzschild del corpo di massa M. Osserviamo come tale metrica dipenda solamente dalla massa totale del corpo.

Per $r = R_s$ la soluzione (2.26) diventa singolare (singolarità eliminabile attraverso un'opportuna scelta di coordinate).

Poichè le componenti $g_{0i} = 0$ con $i = 1, 2, 3$, la metrica spaziale è determinata da[4]:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} + r^2(\sin^2\theta d\psi^2 + d\theta^2). \tag{2.27}$$

La distanza tra due punti giacenti su uno stesso raggio è data dall'integrale:

$$\int_{r1}^{r2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} > r_2 - r_1\,. \tag{2.28}$$

Si vede inoltre che $g_{00} \leq 1$ e quindi poichè il tempo proprio è legato al tempo coordinato dalla seguente relazione:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}dt\,,$$

si ha che

$$d\tau \leq dt\,. \tag{2.29}$$

Il segno di uguale si ha solo all'infinito, in tal modo a distanze finite dalle masse si verifica un rallentamento del tempo rispetto al tempo che si misura all'infinito.

[4]L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

Capitolo 3

Equilibrio idrostatico sferico

3.1 Modello stellare

In questo capitolo scriveremo le equazioni di campo all'interno di una distribuzione di massa a simmetria sferica. Per farlo abbiamo bisogno di una descrizione della materia che costituisce la stella per scrivere il relativo tensore energia-impulso. Una prima idealizzazione consiste nel considerare la stella un fluido perfetto in equilibrio idrostatico fra l'attrazione gravitazionale (generata dal fluido stesso) e il gradiente di pressione.

l'equazione classica di equilibrio che deve essere rispettata affinchè la stella sia in uno stato stazionario è la seguente:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\psi}{dr}\,, \tag{3.1}$$

e poichè $\psi = -\frac{GM}{r}$ l'equazione (3.1) diventa:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}\,, \tag{3.2}$$

che esprime l'uguaglianza tra il gradiente di pressione e la forza di attrazione gravitazionale (da parte della massa contenuta in una sfera di raggio r) che agiscono su un volume unitario di fluido posto a distanza r dal centro della stella[1]. Successivamente osserveremo come una trattazione relativistica di una stella in equilibrio idrostatico, nel limite di campo debole, recuperi tale risultato.

I parametri che descrivono la struttura stellare saranno quindi quelli di un fluido perfetto, assumendo inoltre che il problema abbia simmetria sferica tali parametri avranno solo una dipendenza funzionale da r:

[1] Y. B. Zel'dovich, I. D. Novikov, "Stars and Relativity," Dover publications, 1996

- $\epsilon(r)$ = densità di massa-energia,
- $p(r)$ = pressione,
- $n(r)$ = densità di barioni,
- $u^k(r)$ = quadri-velocità del fluido,
- $T^{ik} = (\epsilon + p)u^i u^k - pg^{ik}$ = tensore energia impulso del fluido (vedi A.38).

Poichè siamo nelle ipotesi di simmetria sferica e in condizioni stazionarie (essendo la stella in equilibrio), la metrica dello spazio tempo si può scrivere nella forma:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2, \tag{3.3}$$

con coordinate spazio-temporali date da:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi. \tag{3.4}$$

Mentre le componenti del tensore metrico sono:

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta. \tag{3.5}$$

Per un elemento di fluido a riposo rispetto a queste coordinate, le componenti spaziali della quadri-velocità ($u^\mu = dx^\mu/ds$) sono:

$$u^k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

Inoltre poichè vale che

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \tag{3.7}$$

usando le equazioni (3.7) e (3.6) otteniamo:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = e^{-\frac{\nu}{2}}. \tag{3.8}$$

Il vettore quadri-velocità è quindi:

$$u^k = (e^{-\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0). \tag{3.9}$$

Dall'equazione (A.38) possiamo facilmente calcolare le componenti del tensore energia-impulso usando le equazioni (3.5) e (3.9), che assume la seguente forma diagonale:

$$T^{ik} = diag\left(\epsilon e^{-\nu}, pe^{-\lambda}, \frac{p}{r^2}, \frac{p}{r^2\sin^2\theta}\right). \tag{3.10}$$

Mentre le componenti miste sono:

$$T^i_k = g_{kl}T^{li} = diag(\epsilon, -p, -p, -p). \tag{3.11}$$

3.2 L'equazione di conservazione dell'energia

Dunque l'insieme di funzioni che determinano la struttura di una stella relativistica a simmetria sferica, trattata come un fluido perfetto in equilibrio idrostatico, sono:

$$\nu(r), \quad \lambda(r,) \quad \epsilon(r), \quad p(r), \quad n(r), \tag{3.12}$$

determinate dalle equazioni di campo di Einstein, con appropriate condizioni al bordo, e dalle equazioni di stato, che legano la pressione e la densità della massa-energia alla densità dei barioni:

$$p = p(n), \quad \epsilon = \epsilon(n). \tag{3.13}$$

Avendo 5 funzioni da dover determinare, abbiamo bisogno di 5 equazioni più le condizioni al contorno per fissarle univocamente. Dunque oltre le due equazioni di stato (3.13), bisognerà trovarne altre 3 usando le equazioni di campo (1.28) e quelle di conservazione dell'energia (A.31). Nonostante queste ultime siano contenute nelle equazioni di campo, risulterà più semplice iniziare proprio dalle equazioni (A.31), e poi trovare le restanti equazioni usando quelle di campo. Il tensore $T^i_{k;i}$ è dato dalla seguente formula:

$$T^i_{k;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}T^i_k) - \frac{1}{2}g_{pn,k}T^{pn}. \tag{3.14}$$

Per $k = 0, 2, 3$ si ottengono banali identità, mentre per $k = 1$ si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}T^i_1) - \frac{1}{2}g_{pn,1}T^{pn} = 0. \tag{3.15}$$

Dall'equazione (3.5) abbiamo che $\sqrt{-g} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}r^2\sin\theta$, e dunque si ricava (l'apice ' indica la derivazione rispetto a r):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}T^i_1) &= \frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{-g}T^1_1) = -\frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(pr^2\sin\theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}) = \\ &= -\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}pr^2\sin\theta + 2pr\sin\theta + r^2\sin\theta\frac{dp}{dr}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}p(\nu'+\lambda') - \frac{2p}{r} - \frac{dp}{dr},\end{aligned} \tag{3.16}$$

sempre dalle 3.5 e 3.10 si ha:

$$-\frac{1}{2}g_{pl,1}T^{pl} = -\frac{1}{2}\left(\epsilon\nu' - p\lambda' - \frac{2p}{r} - \frac{2p}{r}\right), \tag{3.17}$$

e dunque usando le equazioni (3.16), (3.17) all'interno dell'equazione (3.15), questa diventa:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(\epsilon + p)\frac{d\nu}{dr} = 0, \tag{3.18}$$

che nel limite delle basse energie

$$g_{00} = e^{\nu} \simeq 1 + \nu \simeq 1 + \frac{2\psi}{c^2} \to \nu \simeq \frac{2\psi}{c^2}, \quad \epsilon \simeq \rho c^2 \gg p, \tag{3.19}$$

diventa proprio l'equazione (3.2). L'equazione (3.18) appena trovata è una sua generalizzazione relativistica. Il gradiente di pressione dunque, facendo rimanere l'elemento di fluido a un valore fissato di r, impedisce che lo stesso segua la geodetica dello spazio tempo, che lo avrebbe portato a cadere al centro della stella[2].

3.3 Equazioni di campo

Le altre equazioni di cui abbiamo bisogno per determinare i parametri della stella le ricaviamo scrivendo le equazioni di campo di Einstein per la componente G_{00} e la G_{11} del tensore di Einstein, la cui formula è data dall'equazione (1.29).

Poichè la metrica (3.3) è analoga all'ansatz usato per il calcolo della metrica esterna (in questo caso abbiamo imposto a priori che i coefficienti della metrica non dipendessero dal tempo, stando studiando un caso statico), i coefficienti del tensore di Ricci: R_{00} e R_{11} sono dati rispettivamente dalle equazioni (2.13) e (2.14), dove infatti per calcolarli si era già usato il fatto che λ non dipendesse dal tempo.

Dovendo calcolare anche lo scalare di Ricci per determinare il tensore di Einstein, bisogna calcolare le altre componeneti diagonali del tensore di Ricci: R_{22} e R_{33}, e usando l'equazione (2.10) troviamo:

$$R_{22} = 1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda_r - \frac{r}{2}e^{-\lambda}(\lambda_r + \nu_r). \tag{3.20}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}\,. \tag{3.21}$$

Per comodità chiamiamo:

$$\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r = l\,, \tag{3.22}$$

allora usando le equazioni (3.5), (2.13), (2.14), (3.20), (3.21), troviamo lo scalare di Ricci:

$$R = R^i_i = g^{ij}R_{ij} = e^{-\lambda}l + 2e^{-\lambda}\left(\frac{\nu_r}{r} - \frac{\lambda_r}{r}\right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}\,. \tag{3.23}$$

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation," W. H. Freeman and Company, 1973

Quindi per le due componenti del tensore di Einstein abbiamo (l'apice indica la derivazione rispetto a r):

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(l + \frac{2\nu_r}{r}\right) - \frac{e^\nu}{2}\left[e^{-\lambda}l + 2e^{-\lambda}\left(\frac{\nu_r}{r} - \frac{\lambda_r}{r}\right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}\right] =$$
$$= \frac{e^\nu}{r^2}(1 + re^{-\lambda}\lambda_r - e^{-\lambda}) = \frac{e^\nu}{r^2}[1 - (re^{-\lambda})']. \tag{3.24}$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = -\frac{1}{2}\left(l - \frac{2\lambda_r}{r}\right) + \frac{e^\lambda}{2}\left[e^{-\lambda}l + 2e^{-\lambda}\left(\frac{\nu_r}{r} - \frac{\lambda_r}{r}\right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}\right] =$$
$$= \frac{\nu_r}{r} - \frac{e^\lambda}{r^2} + \frac{1}{r^2}\,. \tag{3.25}$$

Partiamo dall'equazione:

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}, \tag{3.26}$$

dove

$$T_{00} = g_{00}T^0_0 = \epsilon e^\nu. \tag{3.27}$$

Dunque usando la 3.24 otteniamo:

$$\frac{e^\nu}{r^2}[1 - (re^{-\lambda})'] = \frac{8\pi G}{c^4}\epsilon e^\nu,$$

da cui

$$\frac{d}{dr}[re^{-\lambda}] = 1 - \epsilon\frac{8\pi G}{c^4}r^2,$$

integrando tale equazione si ha

$$re^{-\lambda} = r - \frac{8\pi G}{c^4}\int \epsilon r^2 dr,$$

segue che:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G}{c^2 r}\int \frac{4\pi\epsilon}{c^2}r^2 dr. \tag{3.28}$$

Definiamo le quantità:

$$dM(r) = \frac{4\pi\epsilon}{c^2}r^2 dr, \quad M(r) = \int \frac{4\pi\epsilon}{c^2}r^2 dr, \tag{3.29}$$

allora l'equazione (3.28) diventa:

$$e^{-\lambda}_{(\mathrm{int})} = 1 - \frac{2G}{c^2 r}M(r). \tag{3.30}$$

Tale espressione per il coefficiente g_{00} della metrica è valida nella regione interna della distribuzione di massa a simmetria sferica, e dunque deve raccordarsi con la soluzione esterna di Schwarzschild sulla superficie della stella:

$$e^{-\lambda}_{(\text{ext})} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} M, \tag{3.31}$$

dove ora la massa che compare è la massa totale del corpo. Raccordando le due soluzioni sulla superficie della sfera di raggio R otteniamo che:

$$M = M(R) = \frac{1}{c^2} \int_0^R 4\pi \epsilon r^2 dr. \tag{3.32}$$

Dunque la quantità $M(R)$ è una generalizzazione della massa Newtoniana.

Osserviamo subito che questa formula contiene anche il contributo di energia gravitazionale delle particelle che compongono il corpo, che essendo negativo riduce il valore della massa-energia che si avrebbe invece in un riferimento localmente geodetico, nel quale l'attrazione gravitazionale è nulla[3]. Infatti nell'integrale (3.32), la densità di energia è integrata in $dV = 4\pi r^2 dr$, che non è il volume proprio. Quest'ultimo lo si può calcolare facilmente riconoscendo che il tensore metrico spaziale tridimensionale della metrica spazio-temporale (3.3) è proprio (essendo le $g_{0i} = 0$, con $i = 1, 2, 3$):

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.33}$$

Il volume proprio è dato da $\sqrt{-g} d^3x$, e dopo aver integrato sull'angolo solido otteniamo il volume proprio di un guscio sferico di spessore dr: $dV_p = 4\pi r^2 e^{\frac{\lambda}{2}} dr$, che differisce dal volume di integrazione dell'integrale (3.32) per un fattore $e^{\frac{\lambda}{2}} > 1$. La differenza dunque è proprio da ricercare nell'energia gravitazionale del sistema[4].

Dunque partendo dalla formula per $M(r)$:

$$M = M(r) = \frac{1}{c^2} \int_0^r 4\pi \epsilon r^2 dr, \tag{3.34}$$

esplicitiamo questi differenti contributi dati da: la massa-energia a riposo delle particelle che compongono la stella $M_0(r)$, l'energia interna non gravitazionale $U(r)$ e l'energia gravitazionale $W(r)$:

$$M(r) = M_0(r) + U(r) + W(r). \tag{3.35}$$

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation," W. H. Freeman and Company, 1973

[4] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, J. A. Wheeler, "Gravitation theory and Gravitational Collapse," The University of Chicago press, 1965

Per identificare questi 3 termini separiamo la densità totale di energia ϵ in due contributi, uno dovuto alla massa a riposo: $\mu_0 n$, dove μ_0 è la massa a riposo media della specie barionica che costituisce la stella; e un secondo contributo dato da: $\epsilon - \mu_0 n$, che rappresenta la densità di massa-energia non gravitazionale. la massa a riposo e l'energia interna si ottengono integrando le rispettive densità sul volume proprio:

$$M_0(r) = \int_0^r \mu_0 n dV_p = \int_0^r 4\pi r^2 e^{\frac{\lambda}{2}} \mu_0 n dr, \tag{3.36}$$

$$U(r) = \int_0^r (\epsilon - \mu_0 n) dV_p = \int_0^r 4\pi r^2 e^{\frac{\lambda}{2}} (\epsilon - \mu_0 n) dr. \tag{3.37}$$

Sottraendo questi due contributi dalla massa totale (3.34), otteniamo proprio l'energia di legame gravitazionale:

$$W(r) = \int_0^r \epsilon(dV - dV_p) = \int_0^r = 4\pi r^2 \epsilon(1 - e^{\frac{\lambda}{2}}) dr. \tag{3.38}$$

Nel limite in cui $\frac{2G}{c^2 r} M(r) \ll 1$, sviluppando al primo ordine l'equazione (3.28) otteniamo:

$$e^{\lambda} \simeq 1 + \frac{2GM}{c^2 r}, \quad e^{\frac{\lambda}{2}} \simeq 1 + \frac{GM}{c^2 r}.$$

Quindi inserendolo nell'equazione (3.38) si ottiene:

$$W(r) = -\int_0^r \frac{GM}{r} \left(\frac{4\pi\epsilon}{c^2} r^2 dr \right), \tag{3.39}$$

infine usando la definizione di $dM(r)$, l'equazione (3.39) si scrive:

$$W(r) = -G \int_0^{M(r)} \frac{M dM(r)}{r}, \tag{3.40}$$

che è proprio l'energia di legame gravitazionale classica. Infatti, data una distribuzione di massa $M(r)$ contenuta in una sfera di raggio r, il lavoro necessario per trasportare una massa supplementare $dM(r)$ è pari all'energia potenziale di questa massa (distribuita in uno strato sferico di raggio r e spessore dr) nel campo generato dalla massa $M(r)$, cioè[5]:

$$-\frac{GM(r)dM(r)}{r},$$

pertanto l'energia gravitazionale totale della della sfera di raggio R è:

$$W(R) = -G \int_0^{M(R)} \frac{M(r) dM(r)}{r}. \tag{3.41}$$

[5]L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

Scriviamo ora la seconda equazione di campo:

$$G_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11}, \tag{3.42}$$

dove

$$T_{11} = g_{11} T_1^1 = pe^{\lambda}. \tag{3.43}$$

Dunque usando l'equazione (3.25) otteniamo:

$$\frac{\nu_r}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} pe^{\lambda} \, . \tag{3.44}$$

Risolvendo per ν_r si trova:

$$\nu_r = e^{\lambda} \left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \, . \tag{3.45}$$

Dalla prima equazione di campo conosciamo $e^{-\lambda}$ in funzione di $M(r)$, e quindi dall'equazione (3.28) abbiamo che:

$$e^{\lambda} = \left(-\frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} , \tag{3.46}$$

sostituendo quest'ultima equazione nell'equazione (3.45) si ottiene:

$$\nu_r = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \, , \tag{3.47}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{\frac{8\pi G}{c^4} pr^3 + \frac{2GM}{c^2}}{r \left(r - \frac{2GM}{c^2} \right)} \, . \tag{3.48}$$

Per imporre le condizioni al bordo su ν bisogna richiedere che sulla superficie della sfera si raccordi con la soluzione esterna di Schwarzschild (2.26), e dunque poichè vale che:

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}, \qquad \text{per} \quad r > R, \tag{3.49}$$

avendo già posto in precedenza che $M(r = R) = M$, dove con M si indica la massa totale del corpo presente nella metrica esterna di Schwarzschild, la condizione al bordo per ν è automaticamente rispettata. Infatti integrando l'equazione (3.48), ricordando che all'esterno della stella per $r > R$ si ha che $p = 0$, si ottiene:

$$\nu(r) = \ln \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) , \tag{3.50}$$

che coincide con l'equazione (3.49) per $r = R$.

Nel limite classico, ovvero per campi deboli, si ha che:

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\psi}{c^2}\,, \tag{3.51}$$

dove ψ è il potenziale gravitazionale classico: $\psi = -\frac{GM}{r}$, e dunque in tale limite:

$$e^{\nu} \simeq 1 + \nu \simeq 1 + \frac{2\psi}{c^2}\,,$$

quindi

$$\nu \simeq \frac{2\psi}{c^2}\,. \tag{3.52}$$

Nel limite classico l'equazione (3.48) diventa:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{GM}{r^2}\,, \tag{3.53}$$

che è proprio l'espressione della forza gravitazionale, poichè:

$$-\vec{\nabla}\psi = -\frac{d\psi}{dr}\hat{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \tag{3.54}$$

Utilizzando l'equazione (3.48) all'interno dell'equazione di equilibrio idrostatico (3.18), otteniamo l'equazione di Oppenheimer-Volkoff (OV) dell'equilibrio idrostatico[6] (poniamo $\epsilon(r) = \rho(r)c^2$):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1}. \tag{3.55}$$

Questa equazione differisce per quei tre termini correttivi tra parentesi dall'equazione (3.2), ed essendo ognuno dei termini correttivi > 1, l'espressione relativistica per il gradiente della pressione è maggiore rispetto a quella Newtoniana. Dunque procedendo sempre più in profondità nella stella la pressione aumenta più velocemente rispetto a quanto previsto dalla teoria Newtoniana. Inoltre questo aumento in pressione è, in un certo senso, "autorigenerante", poichè i termini correttivi dipendono essi stessi dalla pressione, e dunque più aumenta la pressione più aumenta il gradiente di pressione, e più velocemente avviene la successiva crescita della stessa. Quindi, per corpi in equilibrio idrostatico, la Relatività Generale prevede forze gravitazionali più intense di quelle previste dalla teoria Newtoniana.

[6]C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation," W. H. Freeman and Company, 1973

3.4 Equazioni di struttura stellare

Le equazioni che determinano la struttura stellare, ovvero i 5 parametri scritti in (3.12), con le rispettive condizioni al bordo sono: le due equazioni di stato per p e ϵ, e le 3 equazioni ottenute dall'equazione di conservazione dell'energia e dalle equazioni di campo di Einstein. Il problema è ben posto poichè le altre equazioni di campo non sono indipendenti dalle 3 equazioni scritte sopra.

Riportiamo dunque tutte insieme le equazioni di struttura:

- **Elemento di linea**

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\nu}c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2G}{c^2r}M(r)} - r^2d\Omega^2, \quad r<R. \\ &= \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}} - r^2d\Omega^2, \quad r>R. \end{aligned} \tag{3.56}$$

- **Equazione per la massa**

$$M(r) = \frac{1}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \epsilon dr, \qquad \text{con} \quad \begin{aligned} &M(r=0)=0, \\ &M(r=R)=M. \end{aligned} \tag{3.57}$$

- **Equazione di OV dell'equilibrio idrostatico**

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}\left(1+\frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right)\left(1-\frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1}, \\ \text{con} \quad p(r=0)=p_c=\text{pressione centrale}, \\ \text{e} \quad p(r\geq R)=0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

- **Equazione per ν**

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{\frac{8\pi G}{c^4}pr^3 + \frac{2GM}{c^2}}{r\left(r-\frac{2GM}{c^2}\right)}, \qquad \text{con} \quad \nu(r=R) = \ln\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right). \tag{3.59}$$

- **Equazioni di stato**

$$\begin{aligned} p &= p(n). \\ \epsilon &= \epsilon(n). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Il problema della determinazione dei parametri di struttura della stella è univocamente determinato partendo da queste 5 equazioni accoppiate una volta specificate le relative condizioni al bordo. Dunque una volta fissate le equazioni di stato (3.60), la soluzione al problema dipende da un parametro, ovvero la p_c (o equivalentemente la ρ_c), che una volta specificato determina la soluzione univocamente.

Nei prossimi capitoli tali equazioni saranno risolte analiticamente per un modello idealizzato di stella, in cui si considererà la densità costante, e in seguito verranno risolte numericamente nel caso di stelle di neutroni.

Capitolo 4

Soluzione interna di Schwarzschild

4.1 Soluzione per un fluido incompressibile

Applichiamo quanto ricavato nel capitolo precedente per un fluido incompressibile, per il quale si ha:

$$\epsilon = \rho c^2, \quad \rho = costante. \tag{4.1}$$

Per questo caso ideale saremo in grado di trovare una soluzione analitica al problema della determinazione dei parametri di struttura della stella.

Possiamo integrare l'equazione (3.29):

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho\frac{r^3}{3}\,, \tag{4.2}$$

e sostituendola nell'equazione (3.30) si ottiene:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - 4\pi\rho\frac{2Gr^2}{3c^2} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}\,, \qquad \text{dove} \quad r_0^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\,. \tag{4.3}$$

Per calcolare $e^{\nu(r)}$ procediamo nel seguente modo:

Integriamo l'equazione di equilibrio idrostatico (3.18):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\rho c^2 + p)\frac{d\nu}{dr}\,,$$

dunque

$$\int \frac{dp}{\rho c^2 + p} = \int -\frac{1}{2}d\nu \rightarrow \ln(\rho c^2 + p) = -\frac{\nu}{2} + cost.\,,$$

segue che:

$$\rho c^2 + p = e^{-\frac{\nu}{2}}cost. = \frac{c^4}{8\pi G}De^{-\frac{\nu}{2}}, \tag{4.4}$$

dove D è una costante.

Questo risultato parziale può essere utilizzato nella seguente equazione, ottenuta sommando le due equazioni di campo di Einstein:

$$G_0^0 - G_1^1 = \frac{8\pi G}{c^4}(T_0^0 - T_1^1), \tag{4.5}$$

dunque usando le equazioni (3.24) e (3.25) otteniamo che:

$$G^0_{\ 0} = g^{00}G_{00} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda'). \tag{4.6}$$

$$G^1_{\ 1} = g^{11}G_{11} = -e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2}\,. \tag{4.7}$$

Ricordando che $T^i_{\ k} = diag(\epsilon, -p, -p, -p)$, l'equazione (4.5) diventa:

$$e^{-\lambda}(\lambda' + \nu') = \frac{8\pi G}{c^4}(\rho c^2 + p)r. \tag{4.8}$$

Usando sia l'espressione per $e^{-\lambda}$ data dall'equazione (4.3), sia l'equazione (4.4) all'interno dell'equazione (4.8) si ottiene:

$$\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)(\lambda' + \nu') = De^{-\frac{\nu}{2}}r \longrightarrow e^{\frac{\nu}{2}}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)(\lambda' + \nu') = Dr,$$

ovvero

$$\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{e^{\frac{\nu}{2}}\nu'}{2}2 + \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)e^{\frac{\nu}{2}}\lambda'.$$

Usando i seguenti risultati:

$$\frac{d}{dr}(e^{\frac{\nu}{2}}) = \frac{e^{\frac{\nu}{2}}\nu'}{2}\,,$$

$$\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\lambda' = e^{-\lambda}\lambda' = -\frac{d}{dr}(e^{-\lambda}) = -\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = \frac{2r}{r_0^2}\,,$$

possiamo ottenere una semplice equazione differenziale per $e^{\frac{\nu}{2}}$:

$$\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{d}{dr}(e^{\frac{\nu}{2}}) + \frac{r}{r_0^2}e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{D}{2}r. \tag{4.9}$$

Per semplicità poniamo $e^{\frac{\nu}{2}} \equiv y$:

$$y' + \frac{r/r_0^2}{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}y = \frac{D}{2}\frac{r}{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}\,, \tag{4.10}$$

tale equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, può essere risolta moltiplicando entrambi i membri dell'equazione (4.9) per il fattore integrante $e^{A(r)}$, dove $A(r)$ è una primitiva del coefficiente della y:

$$A(r) = -\frac{1}{2}\int \frac{-\frac{2r}{r_0^2}}{1-\frac{r^2}{r_0^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \tag{4.11}$$

l'equazione diventa:

$$\left[y\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = \frac{D}{2}r\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

che integrata ci restituisce la seguente soluzione:

$$e^{\frac{\nu}{2}} = A - B\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.12}$$

dove $A = \frac{D}{2}r_0^2$. Rimangono solo da ricavare le due costanti di integrazione D e B. A questo scopo scriviamo l'equazione (4.4) al bordo ($r = R$), dove $p = 0$:

$$D = \frac{8\pi G\rho}{c^2}e^{\frac{\nu(R)}{2}}, \tag{4.13}$$

e dunque

$$A = \frac{3}{2}e^{\frac{\nu(R)}{2}}. \tag{4.14}$$

Ora possiamo scrivere A in funzione di B:

$$e^{\frac{\nu(R)}{2}} = \frac{2A}{3} = A - B\left[1-\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

e quindi

$$A = 3B\left[1-\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.15}$$

che sostituita nell'equazione (4.12) ci restituisce:

$$e^{\frac{\nu}{2}}_{int} = B\left\{3\left[1-\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{4.16}$$

Infine per determinare B basta imporre la continuità al bordo ($r = R$) fra la soluzione interna appena trovata e quella esterna di Schwarzschild (2.26):

$$e^{\nu}_{\rm ext} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} = 1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 , \tag{4.17}$$

mentre

$$e^{\nu(R)}_{\rm int} = 4B^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right] , \tag{4.18}$$

e dunque dovendo coincidere per $r = R$ otteniamo

$$B = \frac{1}{2} . \tag{4.19}$$

La soluzione finale dunque è:

$$e^{\frac{\nu}{2}}_{int} = \left\{\frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{4.20}$$

Concludiamo quindi che la metrica interna ad una distribuzione di massa a simmetria sferica con densità costante è:

$$ds^2 = \left\{\frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} - r^2 d\Omega^2, \tag{4.21}$$

dove R è il valore della coordinata r sulla superficie del corpo e $r_0^2 = (3c^2)/(8\pi G\rho)$.

Infine, avendo determinato la costante di integrazione D possiamo usarla nell'equazione (4.4) per ottenere $p(r)$:

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{3\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \tag{4.22}$$

Richiedendo che la pressione non diverga, e dunque imponendo che il denominatore dell'equazione (4.22) sia positivo anche in $r = 0$ otteniamo:

$$\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right] > \frac{1}{9} \longrightarrow \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 < \frac{8}{9} ,$$

ma poichè

$$\frac{R^2}{r_0^2} = 2\frac{R^2}{R^3}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{G}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 R} = \frac{R_s}{R}\,,$$

allora richiedere che la pressione non diverga nell'origine porta alla seguente disuguaglianza per il raggio della distribuzione di massa:

$$R > \frac{9}{8} R_s\,. \tag{4.23}$$

Nessuna stella con densità costante può avere un raggio che non rispetti questa disuguaglianza. Un tale limite è un fenomeno puramente relativistico che non esiste nella teoria Newtoniana[1].

4.2 Massa propria ed energia di legame

Utilizzando i risultati dal paragrafo precedente, e in particolare nota la metrica interna (4.21), è possibile calcolare la massa propria e l'energia di legame gravitazionale di un fluido incompressibile a simmetria sferica. Tali grandezze, come visto nel capitolo precedente, sono definite rispettivamente dalle seguenti equazioni:

$$M_p = 4\pi \int_0^R \rho e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 dr = \rho V_p. \tag{4.24}$$

$$W = (M - M_p)c^2. \tag{4.25}$$

Dall'equazione (4.21) è semplice calcolare il volume proprio V_p, definito dal seguente integrale:

$$V_p = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^R dr e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 = 4\pi \int_0^R \frac{r^2}{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} dr, \tag{4.26}$$

che è immediato risolvere con il cambio di variabili $\sin x = \frac{r}{r_0}$:

$$V_p = 4\pi r_0^3 \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cos x dx = 4\pi r_0^3 \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)} \sin^2 x dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} V_p &= 4\pi r_0^3 \left[\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx \right] = \\ &= 2\pi r_0^3 \left\{ \sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right) - \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)\right] cos \left[\sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

[1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation," W. H. Freeman and Company, 1973

ovvero

$$V_p = 2\pi r_0^3 \left\{ \sin^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right) - \left(\frac{R}{r_0}\right)\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{4.28}$$

Nel limite $\frac{R}{r_0} \ll 1$, che coincide con il limite $R \gg R_s$, possiamo effettura i seguenti sviluppi in serie:

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

$$x(1 - x^2)^{1/2} = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + \dots$$

L'equazione (4.28) diventa:

$$V_p = \frac{4\pi}{3}R^3\left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right] > V = \frac{4\pi}{3}R^3, \tag{4.29}$$

e come avevamo già osservato, responsabile del difetto della massa totale rispetto a quella propria è l'energia gravitazionale (sapendo che r_0 è dato dalla seconda equazione in (4.3))

$$W = (M - M_p)c^2 = \rho(V - V_p)c^2 = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5, \tag{4.30}$$

che può essere riscritta come ulteriore espressione dell'equivalenza massa-energia

$$c^2 \Delta M = |W|. \tag{4.31}$$

Capitolo 5

Stelle di Neutroni

Una prima idealizzazione delle stelle di neutroni consiste nel trattarle come un nucleo composto di soli neutroni liberi, trattati come un gas di Fermi degenere, con densità $\rho \geq 10^{14} g/cm^3$ (essendo questi i valori tipici della densità nucleare). In realtà una tale struttura è necessariamente contaminata dalla presenza di protoni ed elettroni, ma immaginiamo che la maggior parte si siano combinati per cattura elettronica così da poter essere trascurati in prima approssimazione. In condizioni estreme, le densità dei neutroni, protoni ed elettroni sono nel rapporto 8:1:1.

In questo capitolo useremo le equazioni di struttura stellare per ricavare i parametri caratteristici di un tale corpo in funzione della sua densità centrale ρ_c. In questo caso le equazioni di stato per un gas di Fermi degenere in regime relativistico non ci permetteranno di integrare analiticamente le equazioni di struttura, pertanto verranno integrate numericamente.

5.1 Equazioni di stato

I neutroni sono fermioni a spin $1/2$ e per il principio di simmetrizzazione la funzione d'onda descrivente un gas di neutroni deve essere antisimmetrica rispetto a qualsiasi permutazione delle particelle del sistema e dunque in ogni stato quantistico può trovarsi contemporaneamente non più di una particella. La statistica basata su questo principio è detta statistica di Fermi-Dirac. Si ricava che il valore medio del numero di occupazione dello stato ad energia ϵ è:

$$\overline{n(\epsilon)} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}\,, \tag{5.1}$$

dove $\beta = 1/KT$ dove $K = 1.38 \times 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$ e μ è il potenziale chimico, legato all'energia necessaria per aggiungere una particella al sistema.

In questo caso il gas di neutroni è supposto degenere, dunque $T = 0$, e la funzione di distribuzione diventa una funzione a gradino

$$\overline{n(\epsilon)} = \Theta(\mu(T=0) - \epsilon) = \Theta(\epsilon_F - \epsilon). \tag{5.2}$$

Dove con $\Theta(x)$ si è indicato la funzione gradino di Heaviside. Quindi tutti gli stati con energia fino a ϵ_F, detta energia di Fermi, sono riempiti. Poichè inoltre i neutroni sono considerati liberi è semplice dimostrare che la densità degli stati nello spazio degli impulsi, che nel nostro caso degenere coincide con il numero di fermioni, con un impulso compreso tra P e $P + dP$ è dato da:

$$N(P)dP = 2\frac{4\pi P^2 dP}{h^3}\,. \tag{5.3}$$

Possiamo dunque ricavare le equazioni di stato di tale gas di Fermi degenere relativistico[1].

La densità di neutroni n, sapendo che vale l'equazione (5.3), è semplicemente:

$$n = \int_0^{P_F} N(P)dP = \frac{8\pi P_F^3}{3h^3}\,. \tag{5.4}$$

Dove P_F è l'impulso di Fermi, che nel caso relativistico considerato è legato all'energia di Fermi dalla relazione:

$$E_F^2 = m^2c^4 + P_F^2c^2, \tag{5.5}$$

con $h = 6.626 \times 10^{-34}$Js la costante di Planck.

Usando le equazioni (5.2), (5.3) e (5.5), possiamo calcolare l'energia totale del gas di neutroni attraverso il seguente integrale nello spazio degli impulsi (dove V è il volume in cui è contenuto il gas)

$$E = \frac{8Vc}{\pi h^3}\int_0^{P_F} P^2\sqrt{m^2c^2 + P^2}dP. \tag{5.6}$$

La cui soluzione è

$$E = \frac{cV}{\pi h^3}\left[P_F(2P_F^2 + m^2c^2)\sqrt{P_F^2 + m^2c^2} - (mc)^4 \ln\left(\frac{P_F}{mc} + \sqrt{1 + \frac{P_F^2}{m^2c^2}}\right)\right]. \tag{5.7}$$

Esprimiamo la densità di energia $\epsilon = \frac{E}{V}$ mediante il seguente parametro adimensionale

$$y = \frac{E_F}{mc^2} = \sqrt{1 + \frac{P_F^2}{m^2c^2}} \geq 1, \tag{5.8}$$

[1]L. Landau, E. Lifsits, " Fisica statistica," Editori Riunti, 2010

si ottiene:

$$\epsilon(y) = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}\left[\sqrt{y^2-1}y(6y^2-3) - 3\ln(y+\sqrt{y^2-1})\right] = kg(y), \qquad (5.9)$$

dove

$$k = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} = 6.8 \times 10^{35} \mathrm{erg/cm}^3.$$

È utile per i calcoli che seguiranno esprimere le funzione $\epsilon(y)$ nel seguente modo, sommando e sottraendo la quantià $k8y(y^2-1)^{3/2}$

$$\epsilon(y) = k8y(y^2-1)^{3/2} + kg(y) - k8y(y^2-1)^{3/2} = k[8y(y^2-1)^{3/2} - f(y)], \quad (5.10)$$

dove si verifica immediatamente che

$$f(y) = \left[\sqrt{y^2-1}y(2y^2-5) + 3\ln(y+\sqrt{y^2-1})\right], \qquad (5.11)$$

e che vale la seguente relazione

$$\frac{df}{dy} = 8(y^2-1)^{3/2}. \qquad (5.12)$$

Riscritta come nell'equazione (5.10) la $\epsilon(y)$ ci permette di calcolare agevolmente la pressione p. Vale infatti che

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V}. \qquad (5.13)$$

Tenendo conto che la dipendenza dal volume in y è contenuta in P_F, poichè dall'equazione (5.4) sappiamo che

$$P_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \qquad (5.14)$$

allora

$$\frac{dP_F}{dV} = -\frac{1}{3V}P_F,$$

quindi derivando l'equazione (5.8) otteniamo

$$\frac{dy}{dV} = -\frac{y^2-1}{3Vy}. \qquad (5.15)$$

Usando le equazioni (5.15), (5.12) e (5.10), calcoliamo la pressione:

$$p = -\frac{d}{dV}[V\epsilon(y)] = -kg(y) - Vk\frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dV} = -kg(y) + k[8y(y^2-1)^{3/2}],$$

ma dalla 5.10 abbiamo che

$$g(y) = 8y(y^2-1)^{3/2} - f(y),$$

dunque

$$p = kf(y). \qquad (5.16)$$

5.2 Integrazione numerica delle equazioni

Utilizziamo ora le equazioni di struttura stellare per trovare i parametri che caratterizzano la stella di Neutroni in funzione della sua densità centrale.

Introduciamo le variabili adimensionali

$$
\begin{aligned}
r = \alpha s, \quad \alpha &= \frac{c^2}{\sqrt{4\pi G k}} = 11.9\mathrm{km}, \\
M(r) &= \frac{4\pi k}{c^2}\alpha^3 m(s) = 8.1 M_{\odot} m(s).
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Dove $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33}$ g è la massa del Sole.

Scriviamo l'equazione differenziale per la massa del sistema, ovvero la prima equazione in (3.29). Dall'equazione (5.17) abbiamo che

$$
\frac{dM}{dr} = \frac{dM}{\alpha ds} = \frac{4\pi k}{c^2}\alpha^2 \frac{dm}{ds} \, ,
$$

e conoscendo la densità di energia dall'equazione (5.9), l'equazione differenziale in (5.17) assume la forma compatta

$$
\frac{dm}{ds} = s^2 g(y), \quad m(0) = 0. \tag{5.18}
$$

La seconda equazione differenziale che ci serve è per $y(s)$, e la ricaviamo usando l'equazione di OV per l'equilibrio idrostatico (3.55), e ricordando che la pressione è data dall'equazione (5.16) abbiamo che

$$
k\frac{df}{dy}\frac{dy}{ds}\frac{1}{\alpha} = -\frac{m}{\alpha s^2} k(f(y) + g(y)) \left(1 + \frac{s^3 f(y)}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{s}\right)^{-1} ,
$$

semplificando otteniamo

$$
\frac{dy}{ds} = -\frac{y[m(s) + s^3 f(y)]}{s^2\left[1 - \frac{2m(s)}{s}\right]}, \quad y(0) = y_0 > 1. \tag{5.19}
$$

Risolto dunque il sistema di equazioni differenziali accoppiate formato dalle equazioni (5.18) e (5.19), una volta fissato il valore iniziale y_0 o equivalentemente la densità centrale ρ_c (essendo l'energia di Fermi legata alla densità), avremo determinato univocamente tutti i parametri di struttura stellare (poichè i restanti due potenziali $\lambda(r)$ e $\nu(r)$ possono esprimersi facilmente mediante le funzioni $m(s)$ e $y(s)$). Le equazioni vanno integrate numericamente da $s = 0$ a $s = s_0$ dove si verifica la condizione $y(s_0) = 1$ che caratterizza la superficie esterna, in quanto sulla superficie della stella di neutroni, come si vede dall'equazione (5.16), se $y = 1$ allora $p = 0$[2].

Ricaviamo prima i restanti due potenziali. Dall'equazione (3.30) usando l'equazione (5.17) si ha

$$e^{-\lambda}_{int} = 1 - \frac{2m(s)}{s}\,. \tag{5.20}$$

Mentre integrando analiticamente l'equazione di equilibrio idrostatico (3.18) si ha

$$e^{\nu}_{int} = [1 - 2m(s_0)/s_0]/y^2(s). \tag{5.21}$$

Con la costante scelta per garantire il raccordo con la soluzione di Schwarzschild esterna.

Infine note le funzioni $y(s)$ e $m(s)$ possiamo calcolare la massa propria dall'equazione (3.36) (con $\rho = mn = 8k(y^2 - 1)^3/c^2$) e il raggio proprio della stella:

$$\bar{M}_p = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^R \rho e^{\lambda/2} r^2 dr = \frac{4\pi k\alpha^3}{c^2}\int_0^{s_0} \frac{8(y^2-1)^{3/2}s^2}{\sqrt{1-2m(s)/s}} ds = 8.1 M_{\odot}\bar{m}. \tag{5.22}$$

$$\bar{R} = \int_0^R e^{\lambda/2} dr = \alpha \int_0^{s_0} (1 - 2m(s)/s)^{-1/2} ds = 11.9 km \bar{s}_0. \tag{5.23}$$

Come già osservato prima, le soluzioni di questo problema di equilibrio sono una famiglia uniparametrica, con parametro y_0 o in maniera equivalente la densità neutronica centrale data da:

$$\rho_c = \frac{8k}{c^2}(y_0^2 - 1)^{3/2} = 6 \times 10^{15} g/cm^3 (y_0^2 - 1)^{3/2}. \tag{5.24}$$

Integriamo numericamente le due equazioni per dei casi indicativi della densità centrale e calcoliamo per ogni condizione iniziale la massa propria e il raggio proprio usando le equazioni (5.22) e (5.23).

Per integrare numericamente il sistema di equazioni differenziali ordinarie accoppiate (5.18) e (5.19) si è usato il metodo di Eulero, implementato in un programma scritto in Python, sempre nel programma si è calcolata la massa propria e il raggio proprio della stella di data densità centrale. In appendice viene riportato il codice commentato.

Nella tabella 5.1 riportiamo alcuni casi indicativi per cui si è risolto il sistema, per ogni condizione iniziale, data da ρ_c o equivalentemente y_0, vengono riportati i valori delle seguenti grandezze:

[2] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, "On Massive Neutron Cores," Phys. Rev. **57**, 374 (1939)

- s_0: valore per cui $y(s_0) = 1$,
- $M_{gr}/M_{\odot} = 8.1m(s_0)$: massa gravitazionale del corpo in masse solari,
- $\bar{M}_p/M_{\odot} = 8.1\bar{m}(s_0)$: massa propria del corpo in masse solari,
- $\bar{R} = 11.9\text{km}\bar{s}_0$: Raggio proprio del corpo in km.

$\rho_c(g/cm^3)$	y_0	s_0	$M_{gr}/M_{\odot}$	$\bar{M}_p/M_{\odot}$	$\bar{R}(km)$
6.06×10^{12}	1.0050	2.86	0.0867	0.0868	34
9.50×10^{13}	1.0310	1.74	0.3087	0.3115	21
7.57×10^{14}	1.1187	1.12	0.6189	0.6353	14
2.56×10^{15}	1.2517	0.82	0.7317	0.7581	11
$*4 \times 10^{15}$	1.3278	0.72	0.7337	0.7691	9.6
4.50×10^{15}	1.3511	0.69	0.7304	0.7561	9.3
5×10^{15}	1.3731	0.67	0.7257	0.7508	9.1
6.06×10^{15}	1.4165	0.64	0.7151	0.7378	8.8
7×10^{15}	1.4519	0.61	0.7043	0.7251	8.6

Tabella 5.1: l'asterisco indica il punto in cui si realizza il massimo della massa lungo la sequenza.

Tali casi mostrano come la sequenza degli equilibri ottenuta abbia un massimo della massa osservabile per valori della densità centrale dell'ordine di $4 \times 10^{15}\text{g/cm}^3$, il che significa che non possono esistere sfere neutroniche stabili di massa maggiore. Tale valore limite risulta pari a $M_{max} = 0,76M_{\odot}$ per un raggio di $R = 9.6km$, è infatti il massimo della curva $M = M(R)$, costruita sempre facendo variare il parametro ρ_c. Osserviamo ancora una volta come la massa gravitazionale del corpo sia minore di quella propria, difetto dovuto proprio all'energia gravitazionale della stessa.

Una stella neutronica di massa superiore a M_{max} tenderà a comprimersi indefinitamente. Nel prossimo capitolo verrà studiato tale problema e in particolare sarà ricavata la metrica dello spazio tempo per un corpo sferico instabile.

Capitolo 6

Collasso Gravitazionale

6.1 Il collasso gravitazionale uniforme

6.1.1 Soluzione interna

Nel capitolo precedente si è mostrato che le equazioni di campo di Einstein per una stella fredda di neutroni a simmetria sferica non ammettono una soluzione statica se la massa è maggiore di $\sim 0.7 M_{\odot}$. Analizziamo dunque il comportamento di una soluzione non statica delle equazioni di campo di Einstein.

Tale studio sarà svolto secondo la schematizzazione di Oppenheimer e Snyder[1], assumendo che la distribuzione di materia abbia simmetria sferica, pressione trascurabile $(p = 0)$ e densità uniforme ρ (l'inclusione della pressione nel modello renderebbero il problema del collasso trattabile solo numericamente).

Ripetendo il ragionamento del primo capitolo, la simmetria sferica ci induce a scegliere delle coordinate spaziali sferiche:

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \psi,$$

e la metrica

$$ds^2 = a^2(r,t)dt^2 + 2b(r,t)a(r,t)drdt - d^2(r,t)dr^2 - V(r,t)d\Omega^2,$$

a seguito del cambio di coordinate

$$A(r,t)cdt' = adt + bdr, \quad U(r,t) = d^2 + b^2,$$

diventa:

$$ds^2 = A^2(r,t)c^2dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2), \tag{6.1}$$

[1] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, "On Continued gravitational contraction," Phys. Rev. **56**, 455 (1939)

avendo eliminato il termine trasverso $drdt$. Introduciamo ora coordinate comoventi, cioè che seguono ogni elemento di fluido nel suo moto, ciò significa che se il moto è caratterizzato dalle coordinate $r = r_1$, $\theta = \theta_1$, $\psi = \psi_1$, la quadrivelocità sarà: $u^k = 0$, $u^0 = 1$ (con $k = 1, 2, 3$). Ma poichè $p = 0$, in queste coordinate le linee di tempo, aventi per vettore tangente u^i $(i = 0, 1, 2, 3)$, sono le geodetiche dello spazio-tempo, poichè ogni elemento di fluido è in caduta libera. Dunque la quadrivelocità soddisfa le equazioni delle geodetiche:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{6.2}$$

Usando la formula che lega i simboli di Christoffel alla metrica (1.16) otteniamo

$$g_{00,i} = 0. \tag{6.3}$$

Dunque il coefficiente g_{00} è una costante, che con una trasformazione della coordinata temporale può sempre essere reso uguale all'unità. In definitiva la metrica può essere scritta nella seguente forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U(r,t) dr^2 - V(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \tag{6.4}$$

Troviamo le funzioni $U(r,t)$ e $V(r,t)$ scrivendo le equazioni di campo. Per farlo bisognerà, come sempre, scrivere le espressioni rilevanti del tensore di Ricci. Calcoliamo dunque i simboli di Christoffel dal principio variazionale

$$\delta \int L ds = 0,$$

dove

$$L = (\dot{x}_0)^2 - U(r,t)(\dot{r})^2 - V(r,t)[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\psi}^2].$$

Una volta scritte le equazioni di Eulero Lagrange troviamo che i simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c} U_t, \quad \Gamma^0_{22} = \frac{1}{2c} V_t, \quad \Gamma^0_{33} = \frac{1}{2c} V_t \sin^2\theta, \\
&\Gamma^1_{11} = \frac{U_r}{2U}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{V_r}{2U}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{V_r}{2U} \sin^2\theta, \quad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2c}\frac{U_t}{U}, \\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{V_r}{2V}, \\
&\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta, \quad \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{2c}\frac{V_t}{V}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Usando l'equazione (2.10) si ricava:

$$R^3_{\ 3} = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{V_{tt}}{V} + \frac{1}{2}\frac{U_t V_t}{UV}\right] + \frac{1}{2U}\left[\frac{V_{rr}}{V} - \frac{1}{2}\frac{U_r V_r}{UV}\right] - \frac{1}{V}. \tag{6.6}$$

$$R_{01} = \frac{1}{2c}\frac{U_t V_r}{UV} - \frac{1}{c}\frac{V_{tr}}{V} + \frac{1}{2c}\frac{V_t V_r}{V^2}\,. \tag{6.7}$$

$$R_{00} = -\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\frac{U_{tt}}{U} - \frac{1}{4}\left(\frac{U_t}{U}\right)^2 + \frac{V_{tt}}{V} - \frac{1}{2}\left(\frac{V_t}{V}\right)^2\right]. \tag{6.8}$$

$$R_{11} = \frac{1}{2c^2}U_{tt} - \frac{1}{4c^2}\frac{U_t^2}{U} + \frac{1}{2c^2}\frac{U_t V_t}{V} + \frac{U_r V_r}{2UV} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_r}{V}\right)^2 - \frac{V_{rr}}{V}\,. \tag{6.9}$$

Volendo scrivere le equazioni di campo all'interno della materia abbiamo bisogno del tensore energia-impulso. In questo caso abbiamo che $u^k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, $u^0 = 1$, $p = 0$, $\epsilon = \rho c^2$. Dunque usando la formula (A.38) si ha

$$\begin{aligned} &T^{ik} = 0, \qquad \text{per} \quad i \neq 0, k \neq 0, \\ &T^{00} = \rho c^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Calcoliamo

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0,$$

per $\alpha = 0$ (essendo l'unica non banalmente soddisfatta):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{-g}T^\nu_0 - \Gamma^\mu_{0\nu}T^\nu_\mu = 0,$$

dalle equazioni (6.5) e la (6.10) si deduce che l'ultimo termine è zero, dunque la precedente equazione diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V\sqrt{U}) = 0. \tag{6.11}$$

Adesso scriviamo le equazioni di campo.

La prima che possiamo considerare è

$$R_{01} = 0. \tag{6.12}$$

Per risolverla cerchiamo una soluzione per separazione delle variabili ponendo

$$U(r,t) = R^2(t)F(r), \tag{6.13}$$

$$V(r,t) = S^2(t)G(r) = S^2(t)r^2. \tag{6.14}$$

Osserviamo come sarà proprio questa posizione a vincolarci a configurazioni di densità uniforme.

Dall'equazione (6.12) si ha(il punto indica la derivazione rispetto al tempo)

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{S}}{S}. \tag{6.15}$$

Da tale equazione segue che $R(t)$ e $S(t)$ differiscono al più per una costante moltiplicativa che può essere assorbita nell'unità. La metrica (6.4) diviene, quindi:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)[F(r)dr^2 + r^2d\Omega^2], \tag{6.16}$$

dove possiamo pensare che r e $F(r)$ siano adimensionali e $R(t)$ abbia le dimensioni di una lunghezza. Allora l'equazione (6.11) si riscrive

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho R^3) = 0,$$

quindi

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3. \tag{6.17}$$

dove ρ_0 e R_0 sono i loro valori iniziali.

Dunque le funzioni incognite di questo problema sono: $\rho(t)$, $R(t)$, $F(r)$ e per esse dovremo ricercare altre 2 equazioni in aggiunta alla (6.17), che ci saranno date proprio dalle equazioni di Einstein.

Poichè l'espressione del tensore energia impulso (6.10) è molto semplice, conviene scrivere le equazioni di campo nella forma (1.32). Infatti nota la metrica (6.16) e sapendo che

$$T_{\mu\nu} = diag(\rho c^2, 0, 0, 0), \quad T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho c^2,$$

allora

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T = \frac{1}{2}\rho c^2 diag(1, R^2F, R^2r^2, R^2r^2\sin^2\theta), \tag{6.18}$$

quindi

$$R_{33} = \chi\frac{1}{2}\rho c^2R^2r^2\sin^2\theta \to R^3_{\ 3} = g^{33}R_{33} = -\frac{1}{2}\chi\rho c^2,$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\chi\rho c^2R^2F(r),$$

con $\chi = (8\pi G)/c^4$, allora:

$$R_{11} = -R^2F(r)R^3_{\ 3}. \tag{6.19}$$

Usando allora le equazioni (6.6) e (6.9), e ricordando che

$$U(r,t) = R^2(t)F(r), \quad V(r,t) = R^2(t)r^2,$$

si ottengono i seguenti risultati parziali:

$$R_{11} = \frac{1}{c^2}F(r)[R\ddot{R} + 2\dot{R}^2] + \frac{dF/dr}{rF(r)}, \tag{6.20}$$

$$-R^2F(r)R^3_3 = \frac{1}{c^2}F(r)[R\ddot{R} + 2\dot{R}^2] + \frac{dF/fr}{2rF(r)} + \frac{1}{r^2}[F(r) - 1]. \qquad (6.21)$$

Inserendoli nell'equazione (6.19) questa diventa una semplice equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti non costanti per $F(r)$:

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{F(r)}\right) - \frac{2}{F(r)} = -2, \qquad (6.22)$$

ovvero, posto $y = 1/F(r)$, la precedente equazione si riscrive nel seguente modo

$$y' - \frac{2}{r}y = -\frac{2}{r}\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $1/r^2$ e integrando otteniamo la soluzione:

$$F(r) = \frac{1}{1 - kr^2}\,, \qquad (6.23)$$

dove k è la costante di integrazione a cui possono essere dati i valori 0,± 1 senza perdita di generalità. Poichè per $k = 0$ ritroviamo l'elemento di linea euclideo in coordinate sferiche, allora $k \neq 0$ ha il significato di una deviazione dalla geometria euclidea, legato dunque alla curvatura spaziale. Infatti in questa metrica le circonferenze hanno lunghezza

$$C = R(t)\int r d\theta = 2\pi R(t)r,$$

mentre la distanza tra centro e circonferenza è

$$R(t)\int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}\,,$$

che si riduce a $C/2\pi$ solo nel caso in cui $k = 0$.

La metrica (6.16), usando l'equazione (6.23) diventa:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2\right]. \qquad (6.24)$$

Tale equazione contiene una sola funzione incognita: il fattore di scala $R(t)$. Per determinarlo iniziamo riscrivendo l'equazione (6.8) in funzione di $R(t)$ e $F(r)$:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right). \qquad (6.25)$$

Scrivendo l'equazione di campo per R_{00}

$$R_{00} = \chi\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) = \frac{4\pi G}{c^2}\rho, \qquad (6.26)$$

e usando l'equazione (6.25), otteniamo un'equazione differenziale per $R(t)$:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho R = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R^2(t)}\,, \tag{6.27}$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata l'equazione (6.17). Per determinare un integrale primo di quest'equazione moltiplichiamo ambo i membri per $\dot{R}$, così da ottenere al primo membro $d(\dot{R}^2)/dr$ e integrando usando le condizioni iniziali: $R(0) = R_0$, e $\dot{R}(0) = 0$, otteniamo

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^2 \left[\frac{R_0}{R} - 1\right]. \tag{6.28}$$

Questa equazione può anche essere ottenuta usando le altre equazioni di Einstein che perciò sono compatibili.

Ponendo:

$$x(t) = \frac{R(t)}{R_0}\,, \qquad T = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}}\,,$$

l'equazione 6.28 diventa

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right), \quad x(0) = 1. \tag{6.29}$$

Questa equazione può essere risolta in forma parametrica, e la soluzione è la cicloide di equazioni parametriche (con parametro $\psi \in [0, \pi]$):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1 + \cos\psi), \\ t &= \frac{1}{2}T(\psi + \sin\psi). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Dunque la sfera di fluido collassa sulla singolarità, quando $x = 0$, poichè per $R = 0$ tutte le distanze spaziali si annullano.

Poichè $x(\psi = \pi) = 0$, il collasso avviene in un tempo:

$$T_{coll} = t(\psi = \pi) = \frac{\pi}{2}T = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}\,. \tag{6.31}$$

6.1.2 Soluzione esterna

Fin ora abbiamo descritto il collasso, e quindi trovato la metrica dello spazio-tempo, all'interno del fluido in moto; passiamo ora alla descrizione del collasso all'esterno del corpo. Per il teorema di Birkhoff, la metrica esterna di una distribuzione di massa a simmetria sferica è sempre stazionaria ed è proprio quella di Schwarzschild (2.26). Tuttavia, è semplice provare che per un osservatore all'infinito il collasso è permanente, nel senso che la superficie esterna della sfera collassante si avvicina solo in modo asintotico alla sfera di raggio coordinato $R_s = 2GM/c^2$. Per l'osservatore in caduta libera invece si raggiunge la vera singolarità, il centro della sfera, in un tempo finito; con questa scelta possiamo confrontare il risultato sul tempo di collasso con quello ottenuto nell'equazione (6.31).

Iniziamo provando che per l'osservatore all'infinito il raggiungimento della sfera di Schwarzschild è asintotico[2]. Per ogni metrica che non dipende dalla coordinata x^0, durante il moto libero di una particella, la seguente quantità è una costante del moto:

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = costante. \tag{6.32}$$

Dunque per una particella in moto radiale in un campo di Schwarzschild, che parte dal raggio coordinato $r = r_0$ a $t = 0$ con $v = 0$ (possiamo immaginare una particella sulla superficie della massa che genera il campo durante una fase di collasso gravitazionale), il suo moto è descritto da:

$$\frac{\sqrt{1 - R_s/r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{1 - R_s/r_0} = costante, \tag{6.33}$$

e dunque ricavando v

$$v = -c \left(\frac{R_s}{r} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - r/r_0}{1 - R_s/r_0} \right)^{1/2}. \tag{6.34}$$

In un moto radiale nella metrica di Schwarzschild, v è dato da

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{e^{\lambda/2} dr}{e^{\nu/2} dt} = \frac{1}{1 - R_s/r} \frac{dr}{dt}. \tag{6.35}$$

Usando le equazioni (6.34) e (6.35) otteniamo l'equazione oraria:

$$t(r) = \int_{r0}^{r} \frac{dr}{v(r)(1 - R_s/r)} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r_0}} \int_{r}^{r0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \sqrt{\frac{R_s}{r} - \frac{R_s}{r_0}}}, \tag{6.36}$$

che diverge per $r \to R_s$ essendo l'integrando un infinito di ordine 1 in R_s. Possiamo anche ricavare la legge asintotica del collasso, poichè nell'ultima fase di caduta, in cui $r \geq R_s$ dall'equazione (6.34) abbiamo che $v \simeq c$, la legge oraria è ottenuta integrando:

$$\frac{dr}{dt} \simeq -c \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \simeq -\frac{c}{r}(r - R_s) \simeq -\frac{c}{R_s}(r - R_s), \tag{6.37}$$

[2] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

e il risultato dell'integrazione è:

$$r - R_s = \alpha_0 e^{-\frac{ct}{R_s}}, \tag{6.38}$$

dove α_0 è una costante. Questa equazione ci dice che lo stadio finale di avvicinamento di un corpo in collasso al raggio di Schwarzschild, per un osservatore all'infinito, avviene secondo una legge esponenziale con un tempo caratteristico pari a R_s/c.

Descriviamo invece il collasso esterno dal punto di vista di un osservatore solidale con il fluido. Dalla trattazione appena fatta possiamo già osservare che sebbene la velocità del processo di compressione osservato dal di fuori tenda asintoticamente a zero, la velocità v delle particelle cadenti, misurata nel loro tempo proprio, al contrario, cresce tendendo alla velocità della luce, quando $r \to R_s$ (vedi (6.34)). Ricaviamo allora il tempo di caduta, e quindi di collasso, nel sistema di riferimento proprio.

Troviamo l'equazione differenziale per $r(\tau)$ sapendo che il moto radiale di caduta libera di un elemento di fluido sulla superficie esterna della sfera collassante è descritto da:

$$1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00}(u^0)^2 + g_{11}\left(\frac{dr}{cd\tau}\right)^2, \tag{6.39}$$

e poichè la metrica esterna di Schwarzschild non dipende dalla coordinata x^0 vale che

$$u_0 = g_{00} u^0 = \frac{\sqrt{1 - R_s/r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{1 - R_s/r_0} = costante, \tag{6.40}$$

dove r_0 è il valore del raggio coordinato della superficie esterna all'inizio del collasso. Ricavando u^0 dall'equazione (6.40) e sostituendolo nell'equazione (6.39) otteniamo:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{R_s c^2}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right), \tag{6.41}$$

che è proprio l'equazione del moto della superficie esterna della sfera collassante in termini del tempo proprio dell'osservatore con essa solidale. Dunque il τ presente in tale equazione è identico alla coordinata temporale della metrica (6.24) e infatti l'equazione (6.41) è formalmente identica alla (6.28) e dunque la soluzione è ancora la cicloide scritta nell'equazione (6.30). Analogamente il tempo di collasso sarà dato da:

$$T_{coll} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{R_s c^2}}, \tag{6.42}$$

e confrontandolo con l'equazione (6.31),ricavata dalla trattazione interna, otteniamo la ovvia relazione di auto-consistenza

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_0^3. \tag{6.43}$$

Dunque per un sistema di riferimento solidale con la superficie del fluido in contrazione, il centro viene raggiunto in un intervallo di tempo proprio finito. Tuttavia, non si può osservare tutto il processo di compressione del corpo oltre la sfera di Scwarzschild da un sistema di riferimento esterno. Inoltre per tale osservatore il processo di compressione verso il raggio di Scwarzschild è accompagnato da autoisolamento del corpo[3]. Il tempo di propagazione dei segnali emessi dal corpo tende all'infinito. Infatti, per segnali luminosi ($ds^2 = 0$) che si propagano lungo la coordinata radiale nel sistema di Scwarzschild si ha $cdt = dr/(1 - R_s/r)$), e il tempo di propagazione dal punto r a un certo punto $\bar{r} > r$ è dato dall'integrale:

$$c\Delta t = \int_r^{\bar{r}} \frac{dr}{1 - R_s/r} = \bar{r} - r + R_s \ln \frac{\bar{r} - R_s}{r - R_s}\,, \tag{6.44}$$

che diverge per $r \to R_s$. Inoltre la frequenza di un segnale emesso dal corpo subisce una diminuzione per l'osservatore all'infinito sia a causa dello spostamento verso il rosso gravitazionale sia a causa dell'effetto Doppler dovuto al moto della sorgente che cade nel centro insieme alla superficie della sfera, quest'ultimo effetto, quando il raggio della sfera è $\sim R_s$ (e quindi la velocità di caduta è $v \sim c$), diminuisce la frequenza del fattore:

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,$$

considerando anche il redshift gravitazionale, per il quale:

$$w(\infty) = w(r)\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}\,, \tag{6.45}$$

la frequenza osservata dall'osservatore all'infinito per un segnale emesso in $r \sim R_s$ è (usando l'equazione (6.33)):

$$w(\infty) = w(r)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_0}}}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = costante\left(1 - \frac{R_s}{r}\right), \tag{6.46}$$

che si annulla per $r \to R_s$. Così per un osservatore all'infinito il collasso gravitazionale genera la comparsa di un corpo "congelato", che non emette nello spazio circostante nessun segnale ed interagisce con il mondo esterno soltanto con il suo campo gravitazionale statico. Un sistema materiale del genere viene chiamato buco nero.

[3] L. Landau, E. Lifsits, “Teoria dei campi,” Editori Riuniti, 2010

6.2 Soluzione di Tolman

Rilassiamo le ipotesi del paragrafo precedente e descriviamo un'evoluzione attraverso configurazioni non necessariamente uniformi ed in presenza di una pressione non nulla. Avremo bisogno di una metrica più complessa della (6.4), sempre nell'ipotesi di simmetria sferica possiamo scrivere:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - R^2(r,t)d\Omega^2. \tag{6.47}$$

Anche in questo caso scegliamo delle coordinate comobili, ma in presenza di un gradiente di pressione le particelle non sono più libere e dunque le linee di tempo in queste coordinate non sono geodetiche dello spazio-tempo, dunque non vale più l'equazione (6.3). Poichè il sistema è in moto solidale con la materia, a ciascuna particella della materia corrisponde un determinato valore di r; la funzione $R(r,t)$, per questo valore di r, determina la legge del moto della particella, che per ipotesi potrà essere animata solo da moto radiale, e la derivata R_t è la sua velocità radiale. Usiamo le equazioni di Einstein per determinare i coefficienti della metrica.

Detta $u^i = dx^i/ds$ la quadrivelocità, vale che

$$g_{ij}u^iu^j = 1,$$

ma con la scelta fatta per le coordinate si ha

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = e^{-\nu/2}.$$

Il tensore energia impulso è

$$T^{ij} = diag(\epsilon e^{-\nu}, pe^{-\lambda}, p/R^2, p/(R^2\sin\theta)). \tag{6.48}$$

La cui legge di conservazione

$$T^j{}_{i;j} = 0$$

per $j = 1$ è

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2}(\epsilon + p)\frac{\partial \nu}{\partial r} = 0, \tag{6.49}$$

che è identica all'equazione (3.18) a parte per le derivate parziali che sostituiscono le ordinarie.

L'altra equazione di conservazione che risulta non banalmente soddisfatta si ha per $i = 0$, che esprime la conservazione dell'energia, data da:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -(\epsilon + p)\left(\frac{\lambda_t}{2} + 2\frac{R_t}{R}\right). \tag{6.50}$$

È interessante notare la seguente derivazione alternativa di tale equazione. Detta n la densità barionica, dall'equazione $p = -(\partial E/\partial V)$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon}{n}\right) + p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \tag{6.51}$$

La richiesta che il numero di barioni nell'elemento di volume proprio $dV_p = e^{\lambda/2}R^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ sia conservato, si traduce nella seguente equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}(ne^{\lambda/2}R^2) = 0. \tag{6.52}$$

Combinando le due precedenti equazioni si ottiene proprio l'equazione (6.50).

Procediamo ora al calcolo delle equazioni di Einstein. Come sempre troviamo i simboli di Christoffel non nulli per la metrica (6.47) scrivendo le equazioni delle geodetiche per la lagrangiana:

$$L = e^{\nu(r,t)}(\dot{x}^0)^2 - e^{\lambda(r,t)}(\dot{r})^2 - R^2(r,t)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2). \tag{6.53}$$

Dal calcolo si trova:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\nu_t, \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu_r, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}e^{\lambda-\nu}\lambda_t, \quad \Gamma^0_{22} = \frac{1}{c}e^{-\nu}RR_t,\\
&\Gamma^0_{33} = \frac{1}{c}e^{-\nu}RR_t\sin^2\theta, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu_r, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2c}\lambda_t, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda_r,\\
&\Gamma^1_{22} = -RR_re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -RR_re^{-\lambda}\sin^2\theta, \quad \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{1}{c}\frac{R_t}{R},\\
&\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{R_r}{R}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{c}\frac{R_t}{R},\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{R_r}{R}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

E dunque usando l'equazione (2.10) calcoliamo le componenti del tensore di Ricci, sapendo che nella metrica considerata vale:

$$\sqrt{-g} = e^{(\nu+\lambda)/2}R^2\sin\theta,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
R^3_{\ 3} = &-\frac{1}{c}\frac{e^{-(\nu+\lambda)/2}}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}(RR_te^{(\lambda-\nu)/2}) +\\
&+ \frac{e^{-(\nu+\lambda)/2}}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}(RR_re^{-(\nu-\lambda)/2}) - \frac{1}{R^2},
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$R_{01} = \frac{1}{c}\left(\lambda_t \frac{R_r}{R} + \nu_r \frac{R_t}{R} - 2\frac{R_{tr}}{R}\right), \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned} R_{00} = &\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r + 2\nu_r\frac{R_r}{R}\right) + \\ &- \frac{1}{2c^2}\left(\lambda_{tt}^2 + 4\frac{R_{tt}}{R} - \frac{1}{2}\nu_t\lambda_t - 2\nu_t\frac{R_t}{R} + \frac{1}{2}\lambda_t^2\right), \end{aligned} \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned} R_{11} = &-\frac{1}{2}\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + 4\frac{R_{rr}}{R} - \frac{1}{2}\nu_r\lambda_r - 2\lambda_r\frac{R_r}{R}\right) + \\ &+ \frac{e^{\lambda-\nu}}{2c^2}\left(\lambda_{tt}^2 - \frac{1}{2}\nu_t\lambda_t + \frac{1}{2}\lambda_t^2 + 2\lambda_t\frac{R_t}{R}\right). \end{aligned} \tag{6.58}$$

E da queste si ricava lo scalare di Ricci $\bar{R}$:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R_0^0 + R_1^1 + 2R_3^3 = \\ &= -\frac{2}{R^2} + e^{-\lambda}\left[\nu_{rr} + 4\frac{R_{rr}}{R} + \frac{1}{2}\nu_r(\nu_r - \lambda_r) + 2\frac{R_r}{R}(\nu_r - \lambda_r) + 2\left(\frac{R_r}{R}\right)^2\right] + \\ &+ \frac{e^{-\nu}}{c^2}\left[-\lambda_{tt} - 4\frac{R_{tt}}{R} + 2\frac{R_t}{R}(\nu_t - \lambda_t) + \frac{1}{2}\nu_t(\nu_t - \lambda_t) - 2\left(\frac{R_t}{R}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{6.59}$$

E dunque possiamo calcolare le componenti $\{00\}$ e $\{11\}$ del tensore di Einstein:

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= R^0{}_0 - \frac{1}{2}\bar{R} = \\ &= \frac{1}{R^2} + e^{-\lambda}\left[-2\frac{R_{rr}}{R} + \lambda_r\frac{R_r}{R} - \left(\frac{R_r}{R}\right)^2\right] + \frac{1}{c^2}e^{-\nu}\left[\lambda_t\frac{R_t}{R} + \left(\frac{R_t}{R}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned} G^1{}_1 &= R^1{}_1 - \frac{1}{2}\bar{R} = \\ &= \frac{1}{R^2} - e^{-\lambda}\left[\nu_r\frac{R_r}{R} + \left(\frac{R_r}{R}\right)^2\right] + \frac{e^{-\lambda}}{c^2}\left[2\frac{R_{tt}}{R} - \nu_t\frac{R_t}{R} + \left(\frac{R_t}{R}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{6.61}$$

L'equazione di Einstein:

$$R_{01} = 0, \tag{6.62}$$

ammette un semplice integrale primo nel caso in cui si consideri nulla la pressione[4]. Dalla 6.49 abbiamo che la condizione $p = 0$ implica $\nu_r = 0$, (in particolare

[4]R. T. Tolman,"Effect of inhomogeneity on cosmological models," PNAS, **20**, 169 (1934)

$\nu = \nu(t)$, e sarà sempre possibile annullarla con una ridefinizione della coordinata temporale. Senza pressione infatti ritroviamo la possibilità di poter porre $g_{00} = e^{\nu} = 1$) e dunque l'equazione di Einstein (6.62) diventa:

$$2\frac{R_{tr}}{R_r} = \lambda_t, \tag{6.63}$$

che integrata fornisce

$$e^{\lambda} = \frac{R_r^2}{1+f(r)}, \qquad \text{con} \quad 1+f(r) > 0. \tag{6.64}$$

Nel caso generale l'equazione fornisce per λ_t la seguente espressione:

$$\lambda_t = 2\frac{R_r t}{R_r} - \nu_r \frac{R_t}{R_r}\,. \tag{6.65}$$

Dall'equazione (6.60) si ricava che

$$G^0_{\ 0} R^2 R_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[R\left(1 - e^{-\lambda}R_r^2 + \frac{e^{-\nu}}{c^2}R_t^2\right)\right]. \tag{6.66}$$

Definiamo anche in questo caso la funzione

$$M(r,t) = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^{R(r,t)} \epsilon R^2 dR = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^r \epsilon R^2 R_r dr, \tag{6.67}$$

che definisce proprio la massa totale contenuta entro il raggio coordinato r e varia nel tempo a causa delle forze di pressione. Infatti derivando l'equazione (6.67) rispetto al tempo e ricavando ϵ_t dall'equazione (6.50), la $\nu(r)$ dall'equazione (6.49), e l'espressione di λ_t dall'equazione (6.65), si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}M(r,t) = -\frac{4\pi}{c^2} p R^2 R_t\,. \tag{6.68}$$

Usando l'equazione (6.66) possiamo integrare facilmente l'equazione di Einstein $G^0_{\ 0} = T^0_{\ 0}(8\pi G)/c^4$ e ottenere:

$$1 - e^{-\lambda}R_r^2 + \frac{e^{-\nu}}{c^2}R_t^2 = \frac{2GM(r,t)}{c^2 R}\,. \tag{6.69}$$

In assenza di pressione, utilizzando le equazioni (6.64) e (6.68) otteniamo:

$$\frac{1}{c^2}R_t^2 = f(r) + \frac{2GM(r)}{c^2 R}, \quad (\nu_r = 0). \tag{6.70}$$

Da questa equazione si può osservare come $f(r)$ definisca l'energia residua all'infinito della materia posta al raggio coordinato r. L'equazione ammette le seguenti soluzioni a seconda del segno di $f(r)$:

1. $f(r) > 0$
$$R = \frac{GM(r)}{c^2 f(r)}(\cosh\eta - 1), \tag{6.71}$$
$$t_0(r) - t = \frac{GM(r)}{c^3 f^{3/2}(r)}(\sinh\eta - \eta); \tag{6.72}$$

2. $f(r) < 0$
$$R = \frac{GM(r)}{c^2 f(r)}(1 - \cos\eta), \tag{6.73}$$
$$t_0(r) - t = \frac{GM(r)}{c^3 f^{3/2}(r)}(\eta - \sin\eta); \tag{6.74}$$

3. $f(r) = 0$
$$R(r,t) = \left(\frac{9}{2}GM(r)\right)^{1/3} [t_0(r) - t]^{2/3}. \tag{6.75}$$

A seconda dei valori assunti dal parametro η, tali formule descrivono sia la compressione che l'espansione della sfera. Nel caso 2, un'espansione iniziale è sempre seguita da una fase di collasso. Le soluzioni dall'equazione (6.71) all'equazione (6.75) sono scritte in modo tale che la compressione ha luogo quando t crescendo tende a t_0. All'istante $t = t_0(r)$ corrisponde il fatto che la materia con la coordinata radiale data da r raggiunga il centro (dunque si deve avere $t_0' > 0$).

Capitolo 7

Conclusioni

Inizialmente abbiamo risolto le equazioni di Einstein all'esterno di una distribuzione di materia a simmetria sferica trovando, nelle coordinate (ct, r, θ, ψ), la soluzione di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\Omega^2. \tag{7.1}$$

La sola richiesta che la materia abbia tale simmetria ci ha permesso di ottenere una metrica esterna i cui coefficienti sono indipendenti dal tempo (teorema di Birkhoff). Dunque anche se la materia possiede un campo di velocità radiale non nullo: si contrae, espande oppure pulsa, lo spazio-tempo che genera all'esterno è statico.

Successivamente le equazioni di campo sono state scritte all'interno di una struttura fluida a simmetria sferica in equilibrio idrostatico e sono state risolte analiticamente nel caso di un fluido incompressibile ($\rho = costante$) trovando, nelle coordinate comoventi (ct, r, θ, ψ), la metrica:

$$ds^2 = \left\{ \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} - r^2 d\Omega^2, \tag{7.2}$$

e per la pressione del fluido:

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{3\left[1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{7.3}$$

Dalla richiesta che la pressione non divergesse nell'origine, è stata trovata la diseguaglianza alla quale deve obbedire il raggio di una tale struttura fluida:

$$R > \frac{9}{8}R_s. \tag{7.4}$$

Le equazioni di campo sono state poi risolte numericamente nel caso di una stella di neutroni usando come equazioni di stato quelle di un gas di Fermi degenere relativistico. Le soluzioni sono state trovate in funzione della densità centrale (ρ_c) ed è stato osservato che la massa della stella presenta un massimo pari a $M_{max} = 0.7M_{\odot}$ per un raggio di $R = 9.6km$, per valori della $\rho_c \approx 4 \times 10^{15}\mathrm{g/cm}^3$.

Infine le equazioni di campo sono state risolte all'interno di una stella instabile a simmetria sferica in due casi diversi, usando sempre coordinate comoventi. Nel primo caso assumendo che la stella avesse $p = 0$ e densità uniforme, è stata trovata la seguente metrica interna:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right], \tag{7.5}$$

dove la costante k è legata alla curvatura spaziale, mentre$R(t)$ è la cicloide di equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_0}{2}(1+\cos\psi), \\ t &= \frac{1}{2}T(\psi + \sin\psi), \end{aligned} \tag{7.6}$$

con $T = \sqrt{3/(8\pi G\rho_0)}$. Dunque la sfera di fluido collassa sulla singolarità, quando $R = 0$, in un tempo finito:

$$T_{\text{coll}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \tag{7.7}$$

Per un osservatore all'infinito invece la contrazione tende asintoticamente alla sfera di Schwarzschild della stella. La frequenza dei segnali emessi dal corpo, quando $r \sim R_s$, tende a zero; dunque per questo osservatore il collasso gravitazionale genera un corpo che interagisce con l'esterno solo attraverso il suo campo gravitazionale. Scegliendo invece un osservatore esterno solidale alla superficie della stella in collasso, si trova un tempo proprio di collasso finito e coerente con quanto ottenuto nella trattazione interna.

Nel secondo caso abbiamo scritto le equazioni di Einstein per una stella instabile in presenza di una pressione non nulla e senza alcun vincolo sulla densità. Le equazioni sono state risolte nel caso in cui $p = 0$. La metrica ottenuta, nelle coordinate (ct, r, θ, ψ) è la seguente:

$$ds^2 = c^2dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - R^2(r,t)d\Omega^2, \tag{7.8}$$

dove

$$e^{\lambda} = \frac{R_r^2}{1 + f(r)}, \qquad \text{con} \quad 1 + f(r) > 0 \tag{7.9}$$

$f(r)$ è legata all'energia residua all'infinito della materia a raggio coordinato r. la forma di $R(r,t)$ è legata al segno di $f(r)$ dalle seguenti equazioni:

1. $f(r) > 0$

$$R = \frac{GM(r)}{c^2 f(r)}(\cosh \eta - 1), \tag{7.10}$$

$$t_0(r) - t = \frac{GM(r)}{c^3 f^{3/2}(r)}(\sinh \eta - \eta); \tag{7.11}$$

2. $f(r) < 0$

$$R = \frac{GM(r)}{c^2 f(r)}(1 - \cos \eta), \tag{7.12}$$

$$t_0(r) - t = \frac{GM(r)}{c^3 f^{3/2}(r)}(\eta - \sin \eta); \tag{7.13}$$

3. $f(r) = 0$

$$R(r,t) = \left(\frac{9}{2} GM(r)\right)^{1/3} [t_0(r) - t]^{2/3}. \tag{7.14}$$

La compressione ha luogo quando t crescendo tende a t_0. All'istante $t = t_0(r)$ corrisponde il fatto che la materia con la coordinata radiale data da r raggiunga il centro.

Appendice A

Tensori della Relatività Generale

A.1 Tensori e leggi di trasformazione

Per ricavare le leggi di trasformazione delle componenti di un vettore e di un covettore sulla varietà occorre chiarire la natura della base su cui sono scritte tali componenti e richiedere che a seguito di un cambio di coordinate il tensore rimanga invariato[1].

In un intorno di un punto p della varietà **M** esiste una carta con coordinate (x^i), e la base dei vettori tangenti in p alla varietà (T_pM) è proprio data dalle derivate direzionali lungo le direzioni coordinate $\{\partial/\partial x^i\}$. In questa carta, un generico vettore nel punto p si può esprimere: $\mathbf{v} = v^i(\partial/\partial x^i)$.

Note le formule di trasformazione della base, richiedendo che a seguito di un cambio di coordinate: $\bar{x}^\mu(x^i)$ il vettore rimanga invariato, otteniamo la legge con cui variano le sue componenti. Detto $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}^i(\partial/\partial\bar{x}^i)$ il vettore scritto nelle coordinate $\bar{x}^\mu$, abbiamo

$$\bar{v}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \bar{v}^i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \,,$$

e dunque:

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j. \tag{A.1}$$

Analogo discorso vale per i covettori, che non sono altro che funzionali lineari sullo spazio dei vettori tangenti: $T_pM \to R$.

Sia $\{\partial/\partial x^i\}$ la base dei vettori tangenti in p; una base per i covettori è data dai funzionali $\{b_i\}$ che agiscono sui vettori di base nel seguente modo:

$$b^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta^i_{\ j}.$$

[1] J. M. Lee, "Introduction to Smooth Manifolds," Springer, 2012

Dunque poichè il differenziale di una funzione $f : \mathbf{M} \to R$ sulla varietà è proprio un covettore, definito come segue:

Detto $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un vettore di T_pM

$$df(v) = vf = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i, \tag{A.2}$$

allora rispetto alla base $\{b_i\}$ si scriverà:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} b^i.$$

Usando la definizione di differenziale proprio su x^j si ha che:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} b^i = \delta^j_i b^i = b^j. \tag{A.3}$$

Dunque la base dei covettori in p (T^*_pM) è proprio data dai differenziali delle coordinate $\{dx^i\}$ e procedendo come sopra ricaviamo la legge di trasformazione delle componenti di un covettore. Detto $w = w_j dx^j$ convettore nelle coordinate $\{x^j\}$ e $\bar{w} = \bar{w}_i d\bar{x}^i$ nelle coordinate $\{\bar{x}^i\}$:

$$\bar{w}_j d\bar{x}^j = \bar{w}_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} dx^i = w_i dx^i,$$

e dunque:

$$\bar{w}_j = w_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\,. \tag{A.4}$$

A.2 Derivata covariante

Una connessione (derivata covariante) sul fibrato tangente $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$ della varietà è un'applicazione che a due campi vettoriali $V(M)$ associa un campo vettoriale[2] (una volta definita per campi vettoriali è semplice estenderne la definizione a tensori generici):

$$\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M), \tag{A.5}$$

indicata anche come: $(X, Y) \to \nabla_X Y$, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ e $X_1, X_2 \in V(M)$,

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y. \tag{A.6}$$

[2] J. M. Lee, " Introduction to Riemannian Manifolds," Springer, 2018

2. $\forall a_1, a_2 \in R$ e $Y_1, Y_2 \in V(M)$,

$$\nabla_X(a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2. \tag{A.7}$$

3. $\forall f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y. \tag{A.8}$$

Dove con $Xf = X^i(\partial f/\partial x^i)$ si intende la derivata direzionale della funzione lungo la direzione di X.

Per calcolare la derivata covariante bisogna solo definire i simboli di Christoffel nel seguente modo: detto (E_i) una base locale per il fibrato tangente TM in un aperto $U \subseteq M$, i simboli di Christoffel sono proprio i coefficienti del campo vettoriale $\nabla_{E_i} E_j$ nella suddetta base:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k. \tag{A.9}$$

Nel nostro caso i, j, k variano tra 1 e 4. Queste 4^3 funzioni: $\Gamma^k_{ij} : U \to R$ sono chiamati coefficienti della connessione. È semplice mostrare che la connessione in U è completamente definita dai suoi coefficienti.

Siano $X, Y \in V(U)$ campi vettoriali, che scritti in termini del riferimento locale sono: $X = X^i E_i$ e $Y = Y^j E_j$. Usando le proprietà della connessione otteniamo

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^j E_j) = X(Y^j)E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j = X(Y^j)E_j + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} E_k,$$

e quindi:

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E_k\,. \tag{A.10}$$

A.3 Tensore di Riemann

Il tensore di Riemann è l'oggetto con cui è possibile quantificare la curvatura dello spazio-tempo. È uno strumento fondamentale per la derivazione delle equazioni di campo, infatti essendo legato alle derivate seconde dei coefficienti della metrica, in un certo senso contiene informazioni sulla dinamica dello spazio-tempo.

Il discriminante fondamentale tra una varietà piatta e una vairetà curva è dato dal trasporto parallelo di un vettore lungo un cammino chiuso. In uno spazio piatto il vettore tornerebbe su se stesso invariato, mentre in uno curvo in generale non accade. La curvatura della varietà, e dunque il tensore di Riemann, quantifica tale variazione subita dal vettore.

Ricaviamo la formula generale che determina la variazione di un vettore nel suo trasporto parallelo lungo una curva infinitesima chiusa. Tale variazione è proprio:

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k, \tag{A.11}$$

dove δA_k è dato dall'equazione (1.12) e l'integrale è preso su tutta la curva data. Dunque

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l. \tag{A.12}$$

Possiamo trasformare questo integrale di linea in uno di superficie usando il teorema di Stokes, che in 4 dimensioni coincide con la seguente sostituzione:

$$dx^l \to df^{lk} \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{A.13}$$

dove $df^{lk} = dx^l dx'^k - dx^k dx'^l$ è il tensore antisimmetrico di rango 2 che definisce l'elemento infinitesimo di superficie, delimitato dai vettori dx^i e dx'^i (in particolare le sue componenti sono uguali alla proiezione dell'area dell'elemento infinitesimo di superficie sui piani coordinati). Con tale sostituzione l'integrale diventa:

$$\oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l = \int df^{il} \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^j_{kl} A_j) = \frac{1}{2} \int df^{il} [\frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^j_{kl} A_j) - \frac{\partial}{\partial x^l}(\Gamma^j_{ki} A_j)]\,. \tag{A.14}$$

Dove si è usata l'antisimmetria del tensore df^{ij}. Considerando una curva infinitesima, anche la superficie da questa racchiusa sarà infinitesima: Δf^{il}. Dunque considerando che a meno di termini del secondo ordine le componenti A^i del vettore all'interno del contorno infinitesimo sono definite univocamente dai loro valori sul contorno e sono proprio legate a questi da $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, abbiamo che la derivata del vettore è proprio data da:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n. \tag{A.15}$$

Dunque la variazione del vettore sarà[3]:

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{il} [\frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^j_{kl} A_j) - \frac{\partial}{\partial x^l}(\Gamma^j_{ki} A_j)] = \\ &= \frac{1}{2} \Delta f^{il} (\Gamma^n_{kl,i} A_n + \Gamma^j_{kl} \Gamma^n_{ji} A_n - \Gamma^n_{ki,l} A_n - \Gamma^j_{ki} \Gamma^n_{jl} A_n). \end{aligned} \tag{A.16}$$

Definiamo il tensore di Riemann nel seguente modo:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^n_{\ kil} A_n \Delta f^{il}, \tag{A.17}$$

[3] L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

dove R^n_{kil} è un tensore del quarto ordine dato da:

$$R^n_{kil} = \Gamma^n_{kl,i} - \Gamma^n_{ki,l} + \Gamma^j_{kl}\Gamma^n_{ji} - \Gamma^j_{ki}\Gamma^n_{jl}\,. \tag{A.18}$$

Contraendo il tensore di Riemann si ottiene il tensore di Ricci:

$$R_{ki} = R^b_{kbi} = \Gamma^b_{ki,b} - \Gamma^b_{kb,i} + \Gamma^l_{ki}\Gamma^b_{lb} - \Gamma^l_{kb}\Gamma^b_{li}. \tag{A.19}$$

Notare che il modo in cui abbiamo fatto la contrazione è unica, infatti si vede che valgono le seguenti proprietà:

$$R_{abcd} = -R_{bacd}\,, \tag{A.20}$$
$$R_{abcd} = -R_{abdc}\,, \tag{A.21}$$
$$R_{abcd} = R_{cdab}\,. \tag{A.22}$$

Dunque poichè R_{iklm} contratto negli indici ik o lm darebbe un tensore nullo (poichè sono nulle le componenti con quei due indici uguali), e per l'antisimmetria, a meno di un segno la contrazione di un'altra coppia di indici darà sempre il tensore di Ricci.

Con un ulteriore contrazione degli indice è possibile definire lo scalare di Ricci come:

$$R = g^{ik}R_{ik} = R^k_k. \tag{A.23}$$

A.4 Tensore Energia-Impulso

La forma dell'azione di un sistema materiale, nello spazio quadridimensionale è la seguente[4]:

$$S = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x = 0, \tag{A.24}$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio rispetto alle coordinate spaziali e collocato tra due valori dati rispetto alla coordinata temporale x^0. La densità di lagrangiana dipende da $\mathcal{L}(g_{ij}, g_{ij,l})$. Le equazioni del moto si ottengono dal principio di minima azione, facendo variare S e la variazione viene fatta ponendo $\delta g_{ij} = 0$ sulla frontiera di integrazione.

Per comodità poniamo:

$$g_{ij} \equiv q, \quad g_{ij,l} \equiv q_{,l}\,,$$

[4]L. Landau, E. Lifsits, "Teoria dei campi," Editori Riuniti, 2010

e calcoliamo la variazione dell'azione:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i} \right) d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q_{,i}}\delta q_i \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q_{,i}} \right] d^4x = 0.\end{aligned} \tag{A.25}$$

Per il teorema di Gauss l'integrale di una divergenza esteso al volume quadridimensionale può essere trasformato in un integrale esteso all'ipersuperficie chiusa che limita tale volume, ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} d^4x \to dS_i,$$

e poichè $\delta g_{ij} = 0$ sulla frontiera, la variazione diventa:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\partial q_{,i}} \right) \delta q d^4x = 0. \tag{A.26}$$

Dunque è sempre possibile definire il tensore energia impulso come segue:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ij} = \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g_{ij,l}}. \tag{A.27}$$

Dall'equazione (A.26) otteniamo le equazioni di campo se le δg_{ij} vengono scelte fra loro indipendenti. Se invece generiamo tale variazione dal differenziale di Lie della metrica rispetto al campo vettoriale ξ^i, ovvero:

$$\delta g_{ij} = dg_{ij} = du L_\xi g_{ij} = du(\xi_{i;j} + \xi_{j;i}), \tag{A.28}$$

non tutte le 10 δg_{ij} saranno indipendenti, essendo le ξ^i al più 4, e adesso la richiesta di annullamento dell'integrale in (A.26) ha come conseguenza un'importante legge di conservazione:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{ij}(\xi_{i;j} + \xi_{j;i}) d^4x = \int \sqrt{-g}T^{ij}\xi_{i;j} d^4x = \\ &= \int (T^{ij}\xi_i)_{;j}\sqrt{-g}d^4x - \int T^{ij}_{;j}\xi_i\sqrt{-g}d^4x = 0,\end{aligned} \tag{A.29}$$

dove nel secondo passaggio è stata usata la simmetria di T^{ij}. Poichè la divergenza di un campo vettoriale si scrive come:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}A^i), \tag{A.30}$$

usando ancora Gauss, poichè sulla frontiera le $\xi_i = 0$, l'integrale della pura divergenza va a zero. Mentre invece dalla richiesta di annullamento del secondo integrale che compare nella seconda riga dell'equazione (A.29) otteniamo:

$$T^{ij}_{\ ;j} = 0. \tag{A.31}$$

Chiariamo il significato di tale tensore e che espressione assume per corpi macroscopici su una carta inerziale (estenderemo successivamente la definizione su una generica carta). Iniziamo considerando un'importante conseguenza del teorema di Gauss: l'annullamento della divergenza quadridimensionale di un tensore è equivalente all'affermazione che l'integrale $\int T^{ij} dS_j$ su un'ipersuperficie di tipo spazio (che racchiude tutto lo spazio tridimensionale), si conserva. Dunque tale integrale può essere identificato con il quadrimpulso del sistema:

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ij} dS_j. \tag{A.32}$$

Scegliendo come sistema di riferimento quello in cui $dS_j = (d^3x, 0, 0, 0)$, allora abbiamo

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} d^3x. \tag{A.33}$$

Poichè le componenti spaziali di P^i formano il vettore impulso tridimensionale del sistema, e la componente temporale rappresenta la sua energia diviso c, Il vettore con componenti:

$$\frac{1}{c}T^{10}, \quad \frac{1}{c}T^{20}, \quad \frac{1}{c}T^{30},$$

si può considerare una densità di impulso, e la grandezza

$$W = T^{00},$$

una densità di energia.

Per precisare il senso delle altre componenti di questo tensore basta scrivere le equazioni (A.31) separando le derivate spaziali dalle temporale (da ora in poi $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ terranno conto delle componenti spaziali):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{A.34}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha}0}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0. \tag{A.35}$$

Integriamole in un volume V dello spazio, dall'equazione (A.34) otteniamo:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = 0,$$

e trasformando il secondo integrale usando Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV = -c\int T^{0\alpha}df_{\alpha}, \tag{A.36}$$

con df_{α} vettore normale alla superficie che delimita il volume V. Poichè il primo membro contiene la velocità di variazione dell'energia contenuta nel volume V, al secondo membro abbiamo la quantità di energia che attraversa la superficie delimitante questo volume. Il vettore $\vec{S}$ di componenti:

$$cT^{01}, \quad cT^{02}, \quad cT^{03},$$

è la densità di questo flusso, cioè la quantità di energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Dall'equazione (A.35) otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c}T^{\alpha 0}dV = -\int T^{\alpha\beta}df_{\beta}. \tag{A.37}$$

A primo membro abbiamo la variazione nell'unità di tempo dell'impulso del sistema nel volume V, dunque a secondo membro abbiamo la quantità di impulso uscente nell'unità di tempo da questo volume (ovvero la forza agente sull'elemento di superficie). le componenti $T^{\alpha\beta}$ costituiscono il tensore tridimensionale della densità di flusso d'impulso detto tensore degli sforzi (rinominiamolo $\sigma_{\alpha\beta}$). Osserviamo come la densità di flusso d'energia sia un vettore mentre la densità di flusso di impulso un tensore. La componente $\sigma_{\alpha\beta}$ rappresenta la α-esima componente dell'impulso, passante nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie perpendicolare all'asse x^{β}, e quindi $\sigma^{\alpha\beta}df_{\beta}$ è la α-esima componente della forza agente sull'elemento di superficie d$\vec{f}$.

Per riassumere:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Caratterizziamo ora il tensore energia-impulso per un fluido perfetto.

Prendiamo un sistema di riferimento in cui il fluido perfetto è in quiete. La pressione esercitata da un elemento dato del corpo è uguale in tutte le direzioni ed è ovunque perpendicolare all'elemento di superficie su cui si esercita. Dunque possiamo scrivere: $\sigma^{\alpha\beta}df_{\beta} = pdf_{\alpha}$, da cui si deduce che $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$. Nel dato sistema di riferimento, le componenti $T^{\alpha 0}$ sono nulle mentre la componenete T^{00}

è uguale alla densità di energia del corpo (ϵ). In questo modo T^{ij} nel sistema di riferimento considerato assume la seguente forma:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Valendo nella carte inerziale le trasformazioni di Lorentz, possiamo trovare l'espressione generale del tensore energia-impulso per un fluido perfetto in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale in cui il fluido possieda una certa quadrivelocità u^i (ovviamente quando $u^i = (1, 0, 0, 0)$ la forma deve ridursi a quella scritta sopra), la formula è la seguente:

$$T^{ik} = (p + \epsilon)u^i u^k - pg^{ik}. \tag{A.38}$$

La forma del tensore su una carta generica sarà sempre la stessa, ma sta volta g^{ik} non sarà il tensore di Minkowski.

Appendice B

Codice Python

Di seguito viene riportato il codice commentato scritto in Python che implementa il metodo di Eulero utilizzato per la risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali accoppiate (5.18) e (5.19).

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#definisco il sistema di equazioni differenziali:
#ovvero una funzione che prende in ingresso un valore
#di s e il corrispondente valore di m(s) e y(s) e
#calcola la derivata in s di y(s) e m(s)

def fstruttura(s,x):
    f=x[1]*m.sqrt(x[1]*x[1]-1)*(2*x[1]*x[1]-5)+\
    3*m.log(x[1]+m.sqrt(x[1]*x[1]-1))
    g=8*x[1]*(x[1]*x[1]-1)**(3/2)-f
    l=-(x[1]*(x[0]+(s**3)*f))/((s**2)-2*x[0]*s)
    xdot=np.array([(s**2)*g,l])
    return xdot

#implemento l'algoritmo di Eulero per la risoluzione
#numerica di un generico sistema di equazioni differenziali

def Eulero(si,sf,ds,f,x0):
    s=np.arange(si,sf,ds)
    ns=s.size
```

```
    nx=x0.size
    x=np.zeros((nx,ns))
    x[:,0]=x0
    for i in range(ns-1):
        x[:,i+1]=x[:,i]+f(s[i],x[:,i])*ds
    return x

#imposto i valori iniziali, il dominio in cui voglio
#cercare la soluzione e il numero di punti che voglio trovare
#e integro il sistema. Nel caso seguente il valore iniziale
#impostato vale y0=1.3511.

f=lambda s,x: fstruttura(s,x)
x0=np.array([0.000,1.3511])
si=0.01
sf=0.70
ds=0.01
s=np.arange(si,sf,ds)
punti=int((sf-si)/ds)
x=Eulero(si,sf,ds,f,x0)


#calcolo il raggio proprio del sistema:

s0=0
for i in range(punti):
    s0=s0+ds/(m.sqrt(1-(2*x[0,i])/s[i]))
print(11.9*s0)

#calcolo la massa propria del sistema:

m0=0
for i in range(punti):
    w=8*(((x[1,i]**2)-1)**(3/2))*s[i]*s[i]*ds
    q=(m.sqrt(1-(2*x[0,i])/s[i]))
    m0=m0+w/q

print(8.1*m0)
```

Bibliografia

[1] L. Landau, E. Lifsits, “Teoria dei campi,” Editori Riuniti, 2010

[2] V. Barone, “Relatività, principi e applicazioni,” Bollati Boringhieri, 2004

[3] J. M. Lee, “Introduction to Smooth Manifolds,” Springer, 2012

[4] J. M. Lee, “ Introduction to Riemannian Manifolds,” Springer, 2018

[5] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, “Geometria contemporanea volume 1,” Editori Riuniti, 2011

[6] N. Straumann, “General Relativity,” Springer, 2013

[7] W. G. Boskoff, S. Capozziello, “A Mathematical Journey to Relativity,” Springer, 2020

[8] Y. B. Zel’dovich, I. D. Novikov, “Stars and Relativity,” Dover publications, 1996

[9] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, J. A. Wheeler, “Gravitation theory and Gravitational Collapse,” The University of Chicago press, 1965

[10] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, “Gravitation,” W. H. Freeman and Company, 1973

[11] L. Landau, E. Lifsits, “ Fisica statistica,” Editori Riunti, 2010

[12] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” Phys. Rev. **57**, 374 (1939)

[13] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, “On Continued gravitational contraction,” Phys. Rev. **56**, 455 (1939)

[14] R. T. Tolman,“Effect of inhomogeneity on cosmological models,” PNAS, **20**, 169 (1934)