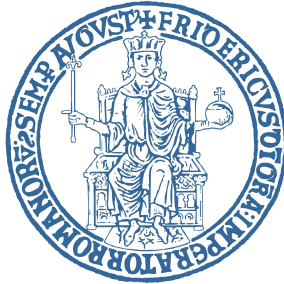


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI**  
**“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base**

**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea Triennale in Fisica*

**L’effetto Poynting-Robertson per testare gli oggetti  
compatti in astrofisica: il caso dei wormhole**

**Relatori:**

Prof. Salvatore Capozziello

*Salvatore Capozziello*

**Candidato:**

Ciro De Simone

Matr. N85001330

**Anno Accademico 2020/2021**

# Indice

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                                  | <b>1</b>  |
| <b>1 Oggetti compatti in Relatività Generale</b>                     | <b>3</b>  |
| 1.1 La soluzione di Schwarzschild . . . . .                          | 4         |
| 1.2 Le singolarità della metrica di Schwarzschild esterna . . . . .  | 8         |
| <b>2 Le soluzioni di wormhole</b>                                    | <b>14</b> |
| 2.1 I wormhole . . . . .                                             | 14        |
| 2.2 Il ponte di Einstein-Rosen . . . . .                             | 15        |
| 2.3 Il modello di Morris e Thorne . . . . .                          | 19        |
| <b>3 I test degli oggetti compatti: L'effetto Poynting-Robertson</b> | <b>25</b> |
| 3.1 I test degli oggetti compatti . . . . .                          | 25        |
| 3.2 L'effetto Poynting-Robertson . . . . .                           | 27        |
| <b>4 Applicazioni dell'effetto Poynting-Robertson</b>                | <b>32</b> |
| 4.1 Come discriminare i wormhole dai buchi neri . . . . .            | 32        |
| 4.2 Possibili rivelazioni osservative dei wormhole . . . . .         | 35        |
| <b>Conclusioni</b>                                                   | <b>38</b> |
| <b>Bibliografia</b>                                                  | <b>39</b> |

# Introduzione

La Teoria della Relatività Generale, pubblicata da Albert Einstein nel 1916, è indubbiamente uno dei più grandi traguardi della fisica moderna.

La teoria ha infatti aperto nuovi orizzonti sia sul piano teorico che sperimentale, fornendo uno strumento raffinato per l'indagine dell'universo.

Il grande successo della Relatività Generale non va attribuito soltanto alla risoluzione di alcuni dei problemi della meccanica newtoniana, la precessione del perielio di Mercurio per esempio, ma più in generale allo studio di tutti quei fenomeni che discendono direttamente da una descrizione di tipo metrico dell'interazione gravitazionale.

L'esempio più eclatante è il buco nero, previsione della Relatività Generale a lungo ritenuta una curiosità matematica, di cui dal 2017 si ha una diretta evidenza osservativa.

Quella del buco nero non è però l'unica sconcertante soluzione delle equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$$

dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Riemann,  $R$  è lo scalare di Ricci,  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico e  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia-impulso.

Queste equazioni ammettono diverse tipologie di soluzioni: soluzioni che presentano una singolarità (come i già citati buchi neri), soluzioni cosmologiche in cui si applicano le equazioni di Einstein all'intero Universo e soluzioni che non prevedono una singolarità bensì un cambio di topologia dello spaziotempo come i wormhole, cunicoli spaziotemporali che possono connettere distanti regioni dell'universo o regioni di universi differenti.

Questo lavoro di tesi si propone di studiare, nell'ambito della Relatività Generale, un test per la rivelazione dei wormhole basato sull'effetto Poynting-Robertson: verrà analizzato il modo naturale in cui i wormhole emergono come soluzioni della teoria, seguendo lo sviluppo storico dal modello di Einstein-Rosen fino ai modelli più moderni del tipo Morris-Thorne, per descrivere poi alcune tecniche innovative che possano permetterci, in un futuro non troppo lontano, di osservare un wormhole.

Il punto di partenza della nostra indagine saranno dunque gli oggetti compatti in Relatività Generale, oggetti con dimensioni caratteristiche paragonabili al loro raggio di Schwarzschild e quindi associati a campi gravitazionali particolarmente intensi.

Nel Capitolo 1 prenderemo in considerazione la soluzione di Schwarzschild nel vuoto alle equazioni di campo di Einstein, ovvero analizzeremo in che modo un oggetto a simmetria sferica come una nana bianca, una stella di neutroni o addirittura un buco nero, modifica lo spaziotempo in cui è immerso.

Questo tipo di analisi ci permetterà di trovare, nel Capitolo 2, un primo esempio di wormhole quale il ponte di Einstein-Rosen, direttamente connesso con la metrica di Schwarzschild, che può essere poi generalizzato in una classe più ampia di soluzioni noti come wormhole di Morris-Thorne.

Comprese le caratteristiche dei wormhole potremo rivolgere la nostra attenzione al nocciolo di questa tesi ovvero il metodo per testare l'esistenza di un wormhole.

Nel Capitolo 3 verrà dunque presentato l'effetto Poynting-Robertson, connesso all'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia, e ampiamente utilizzato in astrofisica per lo studio degli oggetti compatti.

L'effetto Poynting-Robertson sarà determinante nel Capitolo 4, dove costruiremo un particolare modello di wormhole e svilupperemo un metodo efficace per testare l'esistenza di questo tipo di oggetti, questo metodo è utile sia per identificare un wormhole che per distinguerlo da altri oggetti compatti come i buchi neri.

# Capitolo 1

## Oggetti compatti in Relatività Generale

In Relatività Generale definiamo *oggetto compatto* lo stato finale dell'evoluzione stellare. Le caratteristiche distintive di un oggetto compatto sono principalmente due: la dimensione particolarmente ridotta, paragonabile al proprio raggio di Schwarzschild  $R_S$ , e il modo in cui la stella evolve quando la pressione termica non è più sufficiente a sostenere il collasso gravitazionale.

Date le dimensioni caratteristiche di questi oggetti, essi sono associati a campi gravitazionali particolarmente intensi dunque è ineludibile una trattazione in termini della Relatività Generale.

Esistono diversi tipi di oggetti compatti: in primis possiamo pensare alle cosiddette nane bianche, stelle di massa simile alla massa del sole ma con raggio di migliaia di chilometri e densità dell'ordine di tonnellate per centimetro cubo. Le nane bianche rappresentano l'ultimo stadio evolutivo delle stelle di piccola massa (compresa tra 0.07 e 10 masse solari  $M_\odot$ ); quando cessano i processi interni di fusione nucleare, l'unica forza che si oppone al collasso gravitazionale è la forza di degenerazione degli elettroni.

Un'altra importante tipologia di oggetto compatto sono le stelle di neutroni, oggetti con massa compresa tra 1.4 e  $3M_\odot$  e raggio dell'ordine delle decine di chilometri. Esse emergono come residuo delle esplosioni di supernova, alcuni degli eventi più intensi ed energetici dell'intero universo.

Particolari tipi di stelle di neutroni sono le Magnetar, in cui il campo magnetico può essere fino a 100 miliardi di volte più intenso del campo magnetico terrestre, oppure le Pulsar, caratterizzate da un periodo di rivoluzione dell'ordine del millisecondo.

A scale di energia e gravità ancora maggiori, la nostra attenzione non può non soffermarsi sui buchi neri, una delle più interessanti predizioni della Relatività Generale, oggetti dotati di un campo gravitazionale talmente intenso che nulla, neanche la luce, può sfuggire e la cui esistenza è ormai comprovata da numerose misure e osservazioni.

Ciò che caratterizza un buco nero e lo differenzia dagli oggetti compatti analizzati precedentemente è l'esistenza di un orizzonte degli eventi e di una singolarità.

Questi due concetti saranno di fondamentale importanza per lo sviluppo successivo che ci porterà dal modello di buco nero a quello di wormhole.

Oggetti compatti come nane bianche, stelle di neutroni o buchi neri hanno campi gravitazionali molto intensi e densità estremamente elevata, irraggiungibile in alcun esperimento terrestre. Comprendiamo quindi l'importanza dello studio degli oggetti compatti, dal momento che essi permettono di testare in modo efficace la teoria di Einstein e contemporaneamente di studiare regimi di energia e densità irraggiungibili in laboratorio.

In questo capitolo verrà analizzato il modo in cui un oggetto compatto deforma lo spaziotempo intorno ad esso nel caso in cui l'oggetto compatto in questione sia statico e a simmetria sferica, ovvero studieremo la soluzione di Schwarzschild delle equazioni di campo di Einstein.

## 1.1 La soluzione di Schwarzschild

La risoluzione esatta delle equazioni di campo di Einstein è in generale molto complessa a causa dell'assenza di linearità, essendo inoltre equazioni differenziali del secondo ordine di tipo iperbolico-ellittico, non esiste una procedura generale di risoluzione.

È importante però sottolineare che il problema è molto semplificato nel caso in cui riconosciamo delle simmetrie del sistema che stiamo studiando.

In questa sezione ci proponiamo quindi di studiare un campo gravitazionale a simmetria sferica, precisamente il campo gravitazionale esterno ad una sorgente di forma sferica in quiete o in moto al più nella direzione radiale e non rotante [1].

Una soluzione a questo problema fu trovata dal matematico Karl Schwarzschild nel 1916 partendo dalla seguente forma generale della metrica, basata sulla sola ipotesi della simmetria sferica:

$$ds^2 = A(r, t)c^2 dt^2 - B(r, t)dr^2 - 2C(r, t)drdt - D(r, t)d\Omega^2 \quad (1.1)$$

dove  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  è l'elemento angolare mentre  $A, B, C, D$  sono funzioni della coordinata radiale  $r$  e del tempo  $t$ .

La simmetria sferica impone l'esistenza di un punto privilegiato, il centro della sfera, dunque utilizziamo le coordinate sferiche  $(t, r, \theta, \phi)$  e la metrica sarà invariante per rotazioni intorno all'origine del sistema di coordinate.

Osserviamo che questa scelta del sistema di coordinate è arbitraria sicché possiamo operare un opportuno cambio di coordinate che semplifichi l'espressione della metrica lasciandone inalterate le proprietà di simmetria.

Scegliamo una trasformazione tale che la metrica sia diagonale e riscriviamone i coefficienti in forma esponenziale tramite delle funzioni  $\nu(r, t)$  e  $\lambda(r, t)$  che contengano la dipendenza dalle variabili  $r$  e  $t$ :

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.2)$$

I coefficienti di tipo tempo e di tipo radiale della metrica possono essere calcolati a partire dalle equazioni di campo di Einstein nel vuoto:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

Dunque è necessario calcolare in primis i simboli di Christoffel di seconda specie  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  con cui costruire le componenti del tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  e risolvere poi l'equazione (1.3) per le diverse componenti.

Seguendo questo approccio si ottengono le seguenti tre equazioni associate rispettivamente alle componenti  $R_{01}$ ,  $R_{00}$  e  $R_{11}$  del tensore di Ricci:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + 2\frac{\nu'}{r} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' - 2\frac{\lambda'}{r} = 0 \quad (1.6)$$

dove il punto indica la derivata rispetto al tempo  $t$  mentre l'apice la derivata rispetto alla coordinata radiale  $r$ .

La prima di queste tre equazioni si configura come un vincolo per le rimanenti due; vediamo infatti che nelle equazioni (1.5) e (1.6) non solo è assente la derivata rispetto al tempo della funzione  $\lambda$  ma non compare neanche la derivata rispetto al tempo della funzione  $\nu$ . Questo è il contenuto del fondamentale Teorema di Birkhoff, esso asserisce che ogni soluzione delle equazioni di campo di Einstein dotata di simmetria sferica e valutata nel vuoto debba essere stazionaria; anche se la sorgente del campo gravitazionale si espande, collassa oppure pulsa in direzione radiale, il campo gravitazionale al suo esterno rimane statico.

Risolvendo le equazioni (1.4) - (1.6) otteniamo la forma della metrica di Schwarzschild nel vuoto [1]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.7)$$

avendo introdotto il cosiddetto raggio di Schwarzschild:

$$R_S = \frac{2G_N M}{c^2} \quad (1.8)$$

in cui  $G_N$  è la costante di gravitazione newtoniana mentre  $M$  è la massa dell'oggetto compatto. È evidente che ogni corpo dotato di massa ha un suo caratteristico raggio di Schwarzschild  $R_S$ .

Questo è un parametro di fondamentale importanza in Relatività Generale, dal momento che fornisce un ordine di grandezza dell'intensità del campo gravitazionale: un corpo che ha dimensione caratteristica prossima a quella del proprio raggio di Schwarzschild è associato ad un campo gravitazionale particolarmente intenso.

Il raggio di Schwarzschild  $R_S$  ci permette di evidenziare un'altra caratteristica notevole della metrica soprastante, che sarà poi ripresa nello studio dei wormhole, ovvero la presenza di un orizzonte degli eventi. Esso rappresenta una ipersuperficie di raggio  $R_S$  che può essere attraversata in una sola direzione e tale che nessun segnale possa essere scambiato tra osservatori posti ai due lati dell'orizzonte.

Le considerazioni fatte fino ad ora possono essere impiegate per illustrare alcune proprietà della soluzione di Schwarzschild interna che saranno utili sia per lo studio di oggetti compatti come stelle di neutroni e buchi neri sia per i wormhole.

La soluzione di Schwarzschild interna vale per un corpo a simmetria sferica e non rotante composto da un fluido perfetto incompressibile e con pressione superficiale nulla.

In questo caso l'equazione da risolvere è più complessa della (1.3), poiché è necessario tener conto anche della distribuzione di materia dell'oggetto che stiamo analizzando e nelle equazioni di Einstein compare il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$  associato alle sorgenti del campo gravitazionale.

È chiaro però che la soluzione interna deve raccordarsi alla soluzione (1.7) valida nel vuoto tramite delle opportune condizioni al contorno.

Un'ipotesi che imporre in analogia con quanto visto per la soluzione esterna è quella di simmetria sferica dell'oggetto compatto. Questo implica che la forma generale della metrica sia esattamente uguale alla (1.1), la soluzione interna trovata da Schwarzschild è inoltre statica quindi i coefficienti della metrica sono indipendenti dal tempo.



In Relatività Generale la materia è descritta in termini fluidodinamici assimilando la sorgente del campo gravitazionale ad un fluido relativistico.

Di notevole interesse è il caso in cui la materia sia descrivibile come un fluido perfetto, caratterizzato cioè, soltanto dalla densità di massa-energia  $\rho$  e dalla pressione  $p$ .

Il tensore energia-impulso, tensore simmetrico di rango 2, assumerà la seguente forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

dove  $u_\nu$  indica le componenti della quadrivelocità e  $g_{\mu\nu}$  il tensore metrico.

Questa espressione è relativisticamente covariante ed è adeguata per lo studio di numerosi tipi di fluidi considerati in Relatività Generale.

Un caso particolare della (1.9) si ha nello studio della materia incoerente (polvere) in cui non si hanno effetti di pressione:

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_\mu u_\nu \quad (1.10)$$

In generale la conservazione del quadrimpulso impone che la quadridivergenza del tensore energia-impulso sia nulla:

$$T_{\mu\nu;\mu} = 0 \quad (1.11)$$

Notiamo che, in termini di soluzione esterna, i diversi oggetti compatti sono stati trattati in modo pressoché equivalente. La soluzione interna di Schwarzschild ci permette però di evidenziare le differenze tra i diversi tipi di oggetti.

Alcuni di questi, come stelle di neutroni e buchi neri, devono essere necessariamente studiati nell'ambito della Relatività Generale poiché discendono da una descrizione di tipo metrico dell'interazione gravitazionale, mentre per le nane bianche è possibile (entro opportuni limiti) una trattazione di tipo classico.

In prima approssimazione, infatti, le nane bianche possono essere analizzate in termini non relativistici considerando solo la descrizione quantistica del gas di elettroni in termini di gas di Fermi, si ritrova così una relazione di inversa proporzionalità tra la massa e il volume della nana bianca e non è previsto alcun limite alla massa della stessa.

La situazione è concettualmente diversa nel caso in cui la nana bianca abbia densità molto elevata ( $\rho \approx 10^9 \text{ kg/m}^3$ ); in questo caso la pressione nelle regioni più interne è tale che gli elettroni si trovino a regimi relativistici.

Una trattazione completa nell'ambito della relatività ristretta mostra che esiste un valore limite di massa detto limite di Chandrasekhar valido per ogni nana bianca non rotante pari a  $1.4 M_\odot$ .

Il raggio di una nana bianca che ha massa prossima al valore limite è circa  $R = 4 \times 10^3 km$ . Possiamo confrontare questo valore con il raggio di Schwarzschild  $R_S$  che è dell'ordine del chilometro sicché risulta  $R \ll R_S$ . Questo significa che il campo gravitazionale esterno ad una nana bianca può essere ottenuto trascurando gli effetti della Relatività Generale, che è invece necessaria se vogliamo comprendere ciò che accade all'interno di essa.

Il modello utilizzato per descrivere una stella di neutroni è simile a quello delle nane bianche, di conseguenza si studia un gas quantistico composto principalmente da neutroni e in piccola percentuale da elettroni.

L'equazione trovata in questo modo, detta equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) differisce da quella per le nane bianche proprio perché tiene conto di effetti che si configurano nell'ambito della Relatività Ristretta e Generale.

Anche in questo caso si trova un valore limite, concettualmente analogo a quello delle nane bianche, detto limite di TOV, pari a circa  $2.9 M_\odot$ . Questo valore è strettamente legato alla scelta dell'equazione di stato utilizzata per descrivere la materia che compone la stella di neutroni.

A valori di massa maggiore rispetto al limite TOV, né la pressione di degenerazione degli elettroni né la pressione di degenerazione dei neutroni può sostenere il collasso gravitazionale e si ha dunque la formazione di un buco nero.

Studiamo questi oggetti analizzando dettagliatamente la metrica di Schwarzschild esterna.

## 1.2 Le singolarità della metrica di Schwarzschild esterna

La metrica di Schwarzschild nel vuoto è dotata di due singolarità, in corrispondenza di  $r = 0$  e  $r = R_S$ , in cui i coefficienti temporale e radiale perdono significato.

Abbiamo fino ad ora introdotto le singolarità come quei particolari punti in cui i coefficienti della metrica non sono ben definiti.

Questa definizione di singolarità gravitazionale è in realtà inaccurata, basti pensare che dipende dalla scelta, in principio arbitraria, di un particolare sistema di riferimento.

È di fondamentale importanza, dunque, distinguere tra le cosiddette singolarità di “coordinata”, dovute alla scelta del sistema di riferimento e quindi eliminabili e le singolarità fisiche, non eliminabili tramite un cambio di coordinate in quanto associate ad una reale singolarità gravitazionale.

Un esempio lampante è fornito proprio dalla metrica di Schwarzschild 1.7: il coefficiente dell'elemento angolare  $d\phi^2$  è infatti nullo per  $\theta = 0$ , ma questa non è una singolarità reale e può essere eliminata passando alle coordinate cartesiane.

Richiamiamo ora un interessante approccio per caratterizzare una singolarità reale introdotto da Albert Einstein. Definiremo una singolarità “reale” nella circostanza in cui siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- la metrica non può essere resa regolare tramite un cambio di coordinate;
- la singolarità deve essere accessibile, ovvero deve esistere una geodetica di tipo tempo che collega un punto regolare dello spaziotempo al punto singolare, in un intervallo di tempo proprio finito

Stiamo dunque definendo una singolarità gravitazionale a partire dallo studio delle geodetiche di tipo tempo della varietà spaziotemporale, ovvero dalle traiettorie seguite da masse di prova nello spaziotempo.

È possibile altresì osservare che anche la singolarità in  $r = R_S$  è una singolarità di coordinate dal momento che il determinante della metrica di Schwarzschild  $g = -r^4 \sin^2 \theta$ , legato al modo in cui trasformano i volumi dello spaziotempo, non è singolare in  $r = R_S$ , o analogamente, dalla possibilità di estendere le geodetiche oltre l’orizzonte degli eventi. Una condizione sufficiente ma non necessaria affinché un punto sia una singolarità reale è data dallo studio degli invarianti di curvatura, per costruzione indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento.

Un invariante di curvatura può essere lo scalare di Ricci  $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ , ma possiamo costruire anche invarianti di curvatura di ordine superiore a partire dal tensore di Riemann, come il cosiddetto scalare di Kretschmann  $K$ :

$$K = R^{\mu\nu\sigma\eta} R_{\mu\nu\sigma\eta} = \frac{48G_N^2 M^2}{c^4 r^6} \quad (1.12)$$

Questa quantità è singolare in  $r = 0$  mentre risulta ben definita, così come tutti gli altri possibili invarianti di curvatura, in corrispondenza di  $r = R_S$ .

La singolarità della metrica in  $r = R_S$  è dunque dovuta ad una scelta non ottimale del sistema di coordinate; diremo più accuratamente che le coordinate sferiche non ricoprono l’intera varietà spaziotemporale.

Possiamo però estendere la metrica passando dalle coordinate sferiche alle coordinate di Kruskal, che individuano la cosiddetta estensione massimale dello spaziotempo di Schwarzschild, ovvero quel sistema di coordinate in cui tutte le geodetiche della varietà spaziotemporale o convergono nella singolarità reale in  $r = 0$  oppure possono essere continue all’infinito.

Per ottenere le coordinate di Kruskal partiamo dunque dalla metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Introduciamo le cosiddette *coordinate di Eddington-Finkelstein* [2], queste descrivono le geodetiche radiali di tipo nullo, ovvero le traiettorie seguite da raggi luminosi nello spaziotempo di Schwarzschild entranti o uscenti dalla sorgente del campo gravitazionale nell'ipotesi in cui  $r > R_S$ :

$$U = t - r - R_S \ln \left( \frac{r}{R_S} - 1 \right) \quad (1.13)$$

$$V = t + r + R_S \ln \left( \frac{r}{R_S} - 1 \right) \quad (1.14)$$

Rispetto a queste nuove coordinate, la metrica si scrive come:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dU dV - r^2 d\Omega^2 \quad (1.15)$$

Notiamo che nella metrica compaiono solo i termini non diagonali in  $dU$  e  $dV$ .

La coordinata radiale  $r$  può essere espressa implicitamente tramite le nuove coordinate nel seguente modo:

$$r + R_S \ln \left( \frac{r}{R_S} - 1 \right) = \frac{V - U}{2} \quad (1.16)$$

Utilizzando questa espressione possiamo riscrivere la metrica (1.15) come:

$$ds^2 = \frac{R_S}{r} e^{-r/R_S} e^{(V-U)/2R_S} dU dV - r^2 d\Omega^2 \quad (1.17)$$

La metrica appena ottenuta differisce dalle precedenti, in quanto i coefficienti non cambiano segno in corrispondenza di  $r = R_S$ .

Le coordinate  $U$  e  $V$  non ci permettono però di analizzare la singolarità in  $r = R_S$ , poiché sono ben definite soltanto per  $r > R_S$  ovvero quando l'argomento del logaritmo in cui compaiono  $U$  e  $V$  è positivo.

È dunque necessario un ulteriore cambio di coordinate:

$$\tilde{U} = e^{-U/2R_S} \quad (1.18)$$

$$\tilde{V} = e^{V/2R_S} \quad (1.19)$$

Le nuove coordinate  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  sono definite positive e ci permettono di scrivere la metrica nella seguente forma:

$$ds^2 = -\frac{4R_S^3}{r}e^{-r/R_S}d\tilde{U}d\tilde{V} - r^2d\Omega^2 \quad (1.20)$$

In questo modo viene eliminata la singolarità in  $r = R_S$ , richiedendo che le coordinate  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  siano ben definite per ogni valore di  $r > 0$ .

Le coordinate di Kruskal possono essere finalmente ottenute imponendo questo ulteriore cambio di coordinate:

$$\tilde{U} = u - v \quad (1.21)$$

$$\tilde{V} = u + v \quad (1.22)$$

La metrica di Schwarzschild nelle coordinate di Kruskal assume dunque la seguente forma:

$$ds^2 = \frac{4R_S^3}{r}e^{-r/R_S}(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.23)$$

La singolarità in  $r = R_S$  è stata eliminata e rimane soltanto la singolarità in  $r = 0$ , che rappresenta una singolarità reale e dunque ineliminabile.

Le nuove coordinate  $(u, v)$  sono riconducibili alle coordinate  $(r, t)$  tramite le relazioni:

$$u^2 - v^2 = \tilde{U}\tilde{V} = e^{r/R_S} \left( \frac{r}{R_S} - 1 \right) \quad (1.24)$$

$$t = R_S \ln \left( \frac{\tilde{V}}{\tilde{U}} \right) = R_S \ln \left( \frac{u+v}{u-v} \right) \quad (1.25)$$

Notiamo quindi che la singolarità in  $r = 0$  della metrica di Schwarzschild in coordinate sferiche corrisponde alla condizione:

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (1.26)$$

Questa è chiaramente l'equazione di un'iperbole nel piano  $(u, v)$ , dunque la singolarità in  $r = 0$  corrisponde a due singolarità nelle coordinate di Kruskal individuate dai due rami di iperbole:

$$v = +\sqrt{1+u^2} \quad (1.27)$$

$$v = -\sqrt{1+u^2} \quad (1.28)$$

Rappresentiamo ora il diagramma di Kruskal della metrica di Schwarzschild, questo ci permette di evidenziare in modo più dettagliato la relazione tra le coordinate  $(r, t)$  e le coordinate  $(u, v)$ .

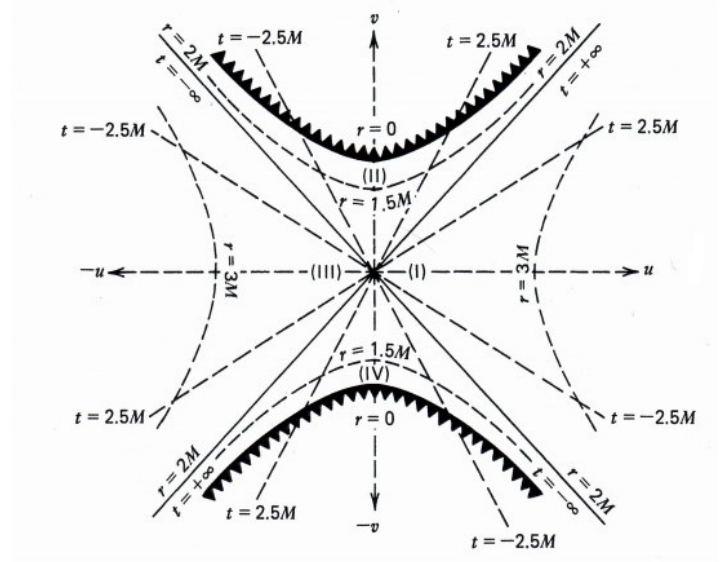


Figura 1.1: diagramma di Kruskal della metrica di Schwarzschild [2]

Nella Figura 1.1 il raggio di Schwarzschild è espresso come  $R_S = 2M$ , avendo posto  $c = 1$  e  $G_N = 1$ , convenzione che utilizzeremo in tutto il prosieguo della tesi.

Il diagramma mostra chiaramente i due rami di iperbole corrispondenti ad  $r = 0$ , mentre la regione  $r \geq R_S$  è individuata nelle nuove coordinate (1.24) da:

$$u^2 - v^2 \geq 1 \quad (1.29)$$

Analogamente la regione  $r < R_S$  è individuata da:

$$u^2 - v^2 < 1 \quad (1.30)$$

Le coordinate sferiche ricoprono dunque solo una porzione dello spaziotempo, mentre le coordinate di Kruskal forniscono un'estensione analitica della soluzione di Schwarzschild nel vuoto all'intero spaziotempo.

A partire da (1.24) e (1.25) si nota che il luogo geometrico dei punti per cui  $r$  è costante è individuato nel diagramma di Kruskal (Figura 1.1) da un'iperbole equilatera con asintoti dati dalle rette  $u = \pm v$ , mentre il luogo geometrico dei punti con  $t$  costante è rappresentato da una retta passante per il centro.

Prima di studiare in dettaglio le 4 regioni in cui possiamo scomporre il diagramma di Kruskal, osserviamo che le geodetiche di tipo luce in direzione radiale corrispondono alle bisettrici del piano  $(u,v)$ , infatti la condizione  $u = v$  implica automaticamente  $ds^2 = 0$  nella metrica (1.23). Questa proprietà è di fondamentale importanza dal momento che ci permette di evidenziare facilmente la struttura causale dello spaziotempo di Schwarzschild: curve la cui tangente forma un angolo minore di  $45^\circ$  con la direzione dell'asse  $v$  in ogni punto sono di tipo tempo mentre per angoli minori di  $45^\circ$  le curve sono di tipo spazio.

Studiamo ora le proprietà delle 4 regioni del diagramma di Kruskal separate dagli orizzonti degli eventi, tenendo conto che ogni punto del diagramma rappresenta una 2-sfera nell'angolo solido  $\Omega$ .

La regione I è equivalente allo spaziotempo descritto dalla metrica di Schwarzschild (1.7) per  $r > R_S$ , la traiettoria di un osservatore in caduta lungo la direzione radiale intersecherà quindi l'iperbole corrispondente all'orizzonte degli eventi  $r = R_S$  e proseguirà nello spaziotempo II.

Questa regione corrisponde al buco nero: un qualunque segnale inviato dalla regione II rimarrà all'interno di essa, anche un segnale luminoso, convergendo nella singolarità  $r = 0$ . Un osservatore che si trova nella regione II cadrà nella singolarità reale in un intervallo di tempo proprio finito.

Le regioni III e IV possono essere studiate in analogia con le prime due distinguendo una regione interna ed esterna. La regione III, esterna, è molto simile alla I, essendo ad essa collegata tramite la trasformazione  $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$  e descrive una regione di spaziotempo asintoticamente piatta. La regione IV, interna, corrisponde invece al cosiddetto "buco bianco", ha proprietà opposte rispetto alla regione II infatti un qualunque segnale che si propaga nella regione IV deve provenire dalla singolarità in  $r = 0$  e uscirà dalla regione IV in un intervallo di tempo proprio finito.

In base alle proprietà del diagramma di Kruskal è chiaro che nessun segnale che si muove ad una velocità al più pari a quella della luce può propagarsi dalla regione I alla III o viceversa. Neanche se il segnale fosse di tipo luminoso lungo la direzione radiale, questo corrisponderebbe infatti ad una retta che forma un angolo di  $45^\circ$  rispetto agli assi  $u$  e  $v$  del diagramma di Kruskal quindi terminerebbe necessariamente nella singolarità in  $r = 0$ .

È interessante anche sottolineare che un osservatore che attraversa l'orizzonte degli eventi del buco nero, e dunque si trova nella regione II, può ricevere i segnali luminosi provenienti dalla regione III e avere un'impressione dello spaziotempo III prima di cadere inevitabilmente nella singolarità gravitazionale.

## Capitolo 2

# Le soluzioni di wormhole

In questo capitolo vedremo in dettaglio l'emergere delle soluzioni di wormhole dalle equazioni di campo di Einstein.

Verranno inoltre presentate le proprietà fondamentali dei wormhole chiarendo il carattere innovativo di questo tipo di soluzione nonché le differenze rispetto ad altri tipi di oggetti come i buchi neri.

Ci concentreremo poi su due tipologie di wormhole: il ponte di Einstein-Rosen e il wormhole di Morris e Thorne.

### 2.1 I wormhole

Le equazioni di campo di Einstein descrivono la geometria dello spaziotempo in termini di curvatura e contenuto di materia. Sottolineiamo che queste equazioni fissano soltanto la geometria locale di una varietà spaziotemporale, non la sua topologia; quest'ultima è infatti una proprietà globale legata alla forma dello spaziotempo.

É chiaro che la geometria e la topologia di una varietà devono essere compatibili tra loro ma non sono connesse in modo univoco.

Le soluzioni di wormhole sfruttano proprio questa libertà nella scelta della topologia dello spaziotempo. I wormhole appartengono infatti alla categoria delle soluzioni delle equazioni di Einstein con topologia non banale.

Il modo più semplice di pensare ad un wormhole è in termini di un cunicolo, una scorciatoia che congiunge diverse regioni dello spaziotempo.

Questa definizione ci permette di distinguere due tipi di wormhole: *inter-universe* in cui vengono connesse due regioni appartenenti ad universi separati e *intra-universe* in cui vengono connesse due regioni di un medesimo universo.



È di fondamentale importanza notare che questi due tipi di wormhole differiscono in base alle loro proprietà globali; una qualunque misura locale, infatti, non permetterebbe di distinguere tra di essi.

Da un punto di vista topologico, inoltre, un wormhole può essere definito [3] come una regione dello spaziotempo con una frontiera topologicamente semplice, ma con una regione interna topologicamente non banale.

Le due caratteristiche distintive di un wormhole sono l'assenza di un orizzonte degli eventi e la traversabilità, ovvero la possibilità per una particella di attraversare un wormhole in entrambe le direzioni.

## 2.2 Il ponte di Einstein-Rosen

Il primo e più semplice esempio di wormhole è il cosiddetto ponte di Einstein-Rosen o wormhole di Schwarzschild, proposto nel 1935 da Albert Einstein e Nathan Rosen [4].

Il ponte di Einstein-Rosen è direttamente connesso al sistema di coordinate scelto per esprimere la metrica di Schwarzschild.

Prendiamo allora nuovamente in considerazione tale metrica (1.7):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Sappiamo che il coefficiente di tipo radiale della metrica di Schwarzschild è singolare in  $r = R_S = 2M$  dunque imponiamo la condizione  $r > 2M$  e introduciamo la seguente variabile:

$$u^2 = r - 2M \tag{2.1}$$

Il ponte di Einstein-Rosen sarà quindi descritto dalla metrica:

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 - 4(u^2 + 2M) du^2 - (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2 \tag{2.2}$$

dove  $u \in (-\infty, +\infty)$  dunque  $r$  è definita nell'intervallo  $(2M, +\infty)$ .

Notiamo che il cambiamento di coordinate (2.1) è legato al raggio di Schwarzschild  $R_S$ , e di conseguenza alla presenza di un orizzonte degli eventi.

Alla luce di quanto visto nel Capitolo 1 in merito alle coordinate di Kruskal, è chiaro che il cambio di coordinate (2.1) non è ottimale. Viene infatti esclusa completamente la regione interna  $r \in [0, 2M)$  in cui è presente la singolarità reale.

La metrica (2.2) descrive lo spaziotempo quadridimensionale in termini di due ipersuperfici, “fogli” identici corrispondenti a due regioni dello spaziotempo connesse da un “ponte” in  $u = 0$  e asintoticamente piatte per  $u = \pm\infty$ .

A partire dalla metrica (2.2), possiamo anche ricavare l’ampiezza della “gola” del ponte di Einstein-Rosen, ovvero l’apertura minima del wormhole.

Osserviamo, infatti, che per  $u$  costante la metrica restituisce una superficie sferica di area:

$$A(u) = 4\pi(u^2 + 2M)^2 \quad (2.3)$$

L’area assume valore minimo per  $u = 0$  in cui  $A = 4\pi(2M)^2$ , come si vede in Figura 2.1. È importante sottolineare che il ponte di Einstein-Rosen è il frutto di una particolare scelta del sistema di coordinate, che non descrive adeguatamente la regione interna all’orizzonte degli eventi di Schwarzschild. Questo implica che il ponte di Einstein-Rosen non sia traversabile. Un osservatore in prossimità di esso è equivalente ad un osservatore in prossimità di un buco nero di Schwarzschild.

Concentriamoci ora sulla topologia del ponte di Einstein-Rosen, provando a visualizzare la forma dello spaziotempo in presenza di un wormhole di questo tipo [2].

Possiamo rappresentare uno spaziotempo quadridimensionale tramite i cosiddetti diagrammi di embedding, sfruttando le proprietà di simmetria della metrica (2.2) o, analogamente, della metrica di Schwarzschild.

Osserviamo che la metrica è statica e stazionaria, dunque possiamo fissare la variabile temporale a  $t = 0$  e ricondurci alla sola parte spaziale tridimensionale della metrica.

La simmetria sferica implica poi che tutte le superfici che passano per  $r = 0$ , dividendo lo spazio simmetricamente in due regioni, abbiano la stessa geometria bidimensionale, dunque possiamo fissare  $\theta = \pi/2$ .

La metrica (2.2) è dunque ricondotta alla forma:

$$ds^2 = -4(u^2 + 2M)du^2 - (u^2 + 2M)^2 d\phi^2 \quad (2.4)$$

Questa metrica bidimensionale può essere visualizzata nello spazio euclideo tridimensionale. Introduciamo dunque le coordinate cilindriche  $(z, r, \phi)$  dello spazio euclideo in cui l’elemento di linea ha la seguente forma:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.5)$$

La scelta delle coordinate cilindriche è vantaggiosa, dal momento che vogliamo rappresentare una metrica bidimensionale che gode di simmetria assiale intorno alla direzione fissata da  $\theta = \pi/2$ , dunque per una qualunque rotazione di angolo  $\phi$ .

Una superficie a simmetria assiale è individuata in coordinate cilindriche da una funzione  $z(r)$  della sola variabile  $r$ . Questa può essere determinata riscrivendo l'elemento di linea in coordinate cilindriche (2.5) come:

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.6)$$

Possiamo confrontare il coefficiente di tipo radiale di questa espressione con la metrica di Schwarzschild (1.7) e ottenere:

$$1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad (2.7)$$

In maniera del tutto analoga, possiamo confrontare la (2.6) con la (2.2) dal momento che il cambio di coordinate (2.1) non fa altro che eludere la regione  $r < 2M$  e ricoprire due volte la regione  $r > 2M$ .

Integrando la (2.7) otteniamo l'equazione della superficie curva, immersa nello spazio euclideo tridimensionale, che rappresenta il ponte di Einstein-Rosen:

$$r = 2M + \frac{z^2}{8M} \quad (2.8)$$

Questa è l'equazione di un paraboloide di rivoluzione e restituisce la rappresentazione usuale di un wormhole.

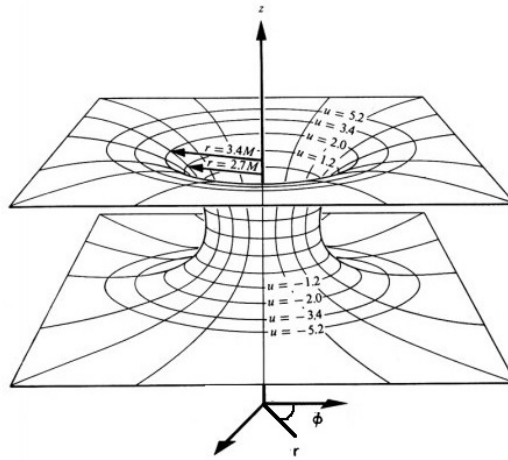


Figura 2.1: diagramma di embedding di un ponte di Einstein-Rosen [2]

Notiamo che  $z(r)$  ammette una espressione con il segno positivo e una con il segno negativo, corrispondenti rispettivamente all'universo superiore e inferiore.

Possiamo poi ricondurci alla metrica tridimensionale immaginando di sostituire, ad ogni cerchio di raggio  $r$ , una superficie sferica dello stesso raggio.

Data la libertà fornita dalle equazioni di Einstein riguardo la topologia dello spaziotempo, possiamo anche considerare un wormhole che congiunga due regioni asintoticamente piatte del medesimo universo.

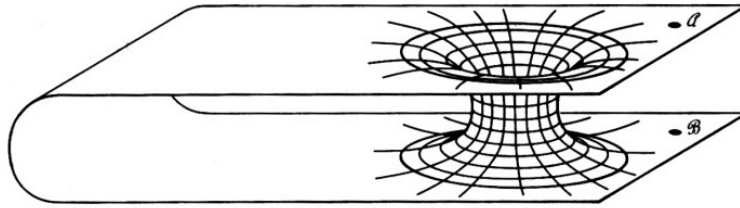


Figura 2.2: paraboloide di rivoluzione che descrive un wormhole intra-universo [2]

In questo caso, la varietà spaziotemporale non è semplicemente connessa quindi possono sorgere problemi di causalità, è infatti possibile congiungere i punti  $a$  e  $b$  tramite un percorso che attraversi il wormhole o un percorso di maggiore lunghezza intorno ad esso. È stato però dimostrato che, almeno per questo tipo di configurazioni, la causalità non è violata.

Il wormhole di Schwarzschild è un'interessante soluzione topologica delle equazioni di campo di Einstein. Questo tipo di wormhole non è però traversabile in virtù delle: intense forze di marea in prossimità della gola, della presenza di un orizzonte degli eventi e del carattere dinamico del ponte di Einstein-Rosen. Al passare del tempo, infatti, la gola del wormhole si espande fino a raggiungere un valore massimo, per poi richiudersi in un processo di espansione e contrazione estremamente rapido, che rende impossibile l'attraversamento anche ai segnali luminosi.

Spostiamo quindi la nostra attenzione su un altro tipo di wormhole, evidenziando le proprietà di traversabilità e stabilità.

## 2.3 Il modello di Morris e Thorne

Il modello di wormhole di Morris-Thorne fu pubblicato nel 1988 [5], e rappresenta la prima soluzione di wormhole a simmetria sferica, statico e non rotante che sia anche attraversabile.

Vediamo, innanzitutto, quali sono le proprietà che deve avere un wormhole affinché esso sia attraversabile:

- la metrica che descrive il wormhole sia soluzione delle equazioni di campo di Einstein;
- la soluzione sia caratterizzata da una “gola” che connetta due regioni asintoticamente piatte dello spaziotempo;
- sia assente l’orizzonte degli eventi, in modo che il wormhole sia attraversabile in entrambi i versi;
- le forze mareali siano poco significative;
- la soluzione sia stabile per piccole perturbazioni;
- sia possibile attraversare il wormhole in un intervallo di tempo proprio finito

La forma generale della metrica di Morris-Thorne, nelle coordinate  $(t, r, \theta, \phi)$  già usate per la metrica di Schwarzschild, è la seguente:

$$ds^2 = e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} - r^2 d\Omega^2 \quad (2.9)$$

Le funzioni  $\Phi_{\pm}(r)$  e  $b_{\pm}(r)$  sono due funzioni arbitrarie di  $r$ , il segno  $\pm$  si riferisce ai due universi collegati dal wormhole (Figura 2.3): il segno  $+$  per l’universo superiore e il segno  $-$  per l’universo inferiore.

La funzione  $b_{\pm}(r)$  è detta *funzione di forma* poiché determina la configurazione spaziale del wormhole, in particolare della gola del wormhole; mentre  $\Phi_{\pm}(r)$  è detta *funzione di redshift* infatti determina il redshift gravitazionale.

La coordinata  $r$  ha inoltre un preciso significato geometrico, dato che la lunghezza della circonferenza centrata nella gola del wormhole è  $2\pi r$ . Denominiamo  $r$  raggio areale, equivalente alla coordinata radiale del diagramma di embedding in Figura 2.1 e Figura 2.3.

La coordinata radiale  $r$  ha un valore minimo  $\tilde{r} = b_0$ , dato dalla condizione  $b(\tilde{r}) = b_0$ , mentre cresce fino a  $+\infty$  sia nell’universo superiore che inferiore.

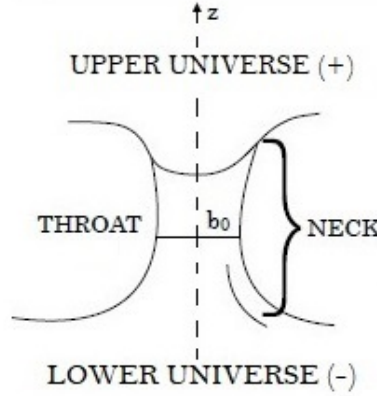


Figura 2.3: sezione trasversale del diagramma di embedding di un wormhole di Morris-Thorne [8]

La forma delle funzioni  $\Phi_{\pm}(r)$  e  $b_{\pm}(r)$  deve essere compatibile con le condizioni imposte precedentemente riguardo la traversabilità del wormhole.

In primis, l'assenza di un orizzonte degli eventi implica che la funzione  $\Phi_{\pm}(r)$ , che compare nel coefficiente temporale della metrica (2.9), abbia valore finito per  $r \in [b_0, +\infty)$ . La condizione che lo spaziotempo sia asintoticamente piatto implica poi che  $\Phi_{\pm}(r)$  non diverga per  $r \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{\pm}(r) = \Phi_{\pm} \quad (2.10)$$

Notiamo però che non ci sono vincoli per cui  $\Phi_+ = \Phi_-$ . In linea di principio, quindi, il tempo può scorrere in modo diverso nell'universo superiore e inferiore.

Se vogliamo che anche la geometria spaziale dello spaziotempo sia asintoticamente piatta, dobbiamo richiedere analogamente che la funzione  $b(r)$  abbia valore finito per  $r \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b_{\pm}(r) = b_{\pm} \quad (2.11)$$

Osserviamo che la metrica di Morris-Thorne presenta alcune somiglianze con la metrica di Schwarzschild, in particolar modo nel coefficiente di tipo radiale.

Possiamo infatti determinare la massa del wormhole imponendo che, a grande distanza dal wormhole, i coefficienti delle due metriche coincidano dunque  $b_{\pm} = 2M_{\pm}$ . Il termine  $M_{\pm}$  indica che la massa del wormhole può essere diversa per osservatori che si trovano alle estremità opposte del wormhole.

Nel prosieguo di questa tesi, adotteremo la proprietà di simmetria del wormhole sotto inversione delle regioni asintoticamente piatte di spaziotempo. La metrica di Morris-Thorne risulta semplificata essendo  $\Phi_+(r) = \Phi_-(r) = \Phi(r)$  e  $b_+(r) = b_-(r) = b(r)$ .

In analogia con quanto fatto per il ponte di Einstein-Rosen, possiamo costruire un diagramma di embedding anche per il wormhole di Morris-Thorne.

Confrontando il coefficiente radiale nella metrica (2.6) con la (2.9) troviamo:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.12)$$

Si nota che la funzione  $z(r)$  dipende da  $b(r)$ , che è chiaramente interpretabile in relazione alla forma del wormhole.

È importante sottolineare che l'espressione (2.12) non è ben definita in corrispondenza della gola in cui si ha  $\tilde{r} = b(\tilde{r})$ . Questo ci porta ad introdurre la cosiddetta *distanza radiale propria*, ovvero la distanza lungo la direzione radiale tra un punto e la gola del wormhole, secondo la metrica di Morris-Thorne [5]:

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}} \quad (2.13)$$

affinché questa funzione sia ben definita in tutto lo spaziotempo, principalmente in prossimità della gola del wormhole, dobbiamo richiedere che:

$$1 - \frac{b(r)}{r} \geq 0 \quad (2.14)$$

la condizione di asintotica piattezza implica poi che  $dz/dr \rightarrow 0$  per  $l \rightarrow \pm\infty$ . In termini di  $b(r)$  e  $\Phi(r)$  troviamo che per  $l \rightarrow \pm\infty$ :

$$b(r)/r \rightarrow 0 \quad e \quad \Phi(r) \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

Un'altra proprietà di fondamentale importanza per un wormhole traversabile, che può essere studiata tramite il diagramma di embedding, è la cosiddetta *flaring out condition*. Questa condizione garantisce che la gola del wormhole si slarghi all'aumentare di  $r > b_0$ , permettendo il collegamento tra le due regioni di spaziotempo asintoticamente piatte. In termini di diagramma di embedding, dobbiamo richiedere che in prossimità della gola del wormhole valga la seguente disuguaglianza:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (2.16)$$

Questa è la flaring out condition. Vedremo che questa relazione è significativa anche per caratterizzare la distribuzione e il tipo di materia che compone un wormhole.

A partire dalla metrica di Morris-Thorne, possiamo calcolare i simboli di Christoffel e quindi le componenti del tensore di Riemann  $R_{\mu\nu}$  e dello scalare di Ricci  $R$ .

Si ottengono 24 componenti non nulle del tensore di Riemann che ci permettono di costruire il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$

É utile esprimere le componenti di questo tensore nel sistema di riferimento di un osservatore statico, in cui il tensore metrico assume la forma della metrica di Minkowski.

Le nuove coordinate  $(\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$  sono direttamente connesse alle coordinate  $(t, r, \theta, \phi)$  tramite i coefficienti della metrica (2.9).

Le componenti non nulle del tensore di Einstein sono dunque:

$$G_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{b'}{r} \quad (2.17)$$

$$G_{\bar{r}\bar{r}} = -\frac{b}{r^3} + \frac{2(1 - b/r)\Phi'}{r} \quad (2.18)$$

$$G_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = G_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}\right) \quad (2.19)$$

A differenza di quanto visto per il ponte di Einstein-Rosen, che discende direttamente dalla metrica di Schwarzschild nel vuoto, il wormhole di Morris-Thorne richiede opportune considerazioni riguardo al tensore energia-impulso.

Richiamiamo in questo senso il teorema di Birkhoff, esso ci dice che l'unico tipo di wormhole accettabile in Relatività Generale che sia statico, non carico e a simmetria sferica nel vuoto sia il wormhole di Schwarzschild, non attraversabile.

Il modello di Morris-Thorne ha come interesse la condizione di traversabilità del wormhole, ma già richiede la simmetria sferica, la staticità e l'assenza di carica, dunque è necessario rilassare l'ipotesi di vuoto introducendo un contributo di materia.

Il tensore energia-impulso deve avere la stessa forma algebrica del tensore di Einstein, dal momento che sono valide le equazioni di campo di Einstein.

Le uniche componenti non nulle del tensore  $T_{\mu\nu}$  sono quindi:

$$T_{\bar{t}\bar{t}} = \rho(r) \quad (2.20)$$

$$T_{\bar{r}\bar{r}} = -\tau(r) \quad (2.21)$$

$$T_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = T_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = p(r) \quad (2.22)$$

dove  $\rho(r)$  è la densità di energia-materia totale,  $\tau(r)$  è la tensione radiale per unità di superficie mentre  $p(r)$  è la pressione nelle direzioni ortogonali a quella radiale.



Possiamo ora sostituire queste espressioni nelle equazioni di campo di Einstein:

$$G_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 8\pi T_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (2.23)$$

Tramite semplici passaggi algebrici otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\rho(r) = \frac{b'}{8\pi r^2} \quad (2.24)$$

$$\tau(r) = \frac{b/r - 2[r - b]\Phi'}{8\pi r^2} \quad (2.25)$$

$$p(r) = \frac{r}{2}[(\rho - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau \quad (2.26)$$

Queste costituiscono le cosiddette *equazioni di struttura* del wormhole, un sistema di 3 equazioni differenziali nelle 5 incognite  $b(r)$ ,  $\Phi(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\tau(r)$  e  $p(r)$ .

Fissate le funzioni  $b(r)$  e  $\Phi(r)$  in modo da soddisfare le condizioni di traversabilità del wormhole, le equazioni (2.24) - (2.26) ci permettono di determinare la forma del tensore energia-impulso.

Utilizzando le equazioni di struttura, possiamo fare alcune considerazioni riguardo alle condizioni al bordo che deve soddisfare il tensore energia-impulso.

Pensiamo, per esempio, al caso in cui la materia che compone il wormhole sia confinata in una regione di raggio  $\bar{R}$  intorno alla gola. Questo si traduce nell'annullarsi delle funzioni  $\rho(r)$ ,  $\tau(r)$  e  $p(r)$  al di fuori della sfera di raggio  $\bar{R}$  in cui vale la soluzione di Schwarzschild nel vuoto.

Le equazioni (2.24) - (2.26) ammettono che le funzioni  $\rho(r)$  e  $p(r)$  presentino delle discontinuità di salto, mentre la funzione  $\tau(r)$  deve raggiungere il valore nullo in modo continuo e derivabile dal momento che  $p(r)$  dipende dalla derivata di  $\tau(r)$ .

Per gli sviluppi successivi, è utile considerare anche una configurazione in cui esistono diversi tipi di materia, esotica e non, disposti secondo dei gusci sferici intorno alla gola. Anche in questo caso le equazioni di campo impongono che le funzioni  $b(r)$ ,  $\Phi(r)$  e  $\tau(r)$  debbano essere continue e derivabili nei diversi gusci, mentre  $\rho(r)$  e  $p(r)$  possano presentare delle discontinuità.

Le equazioni di struttura ci permettono anche di riscrivere la flaring out condition (2.16) in termini delle funzioni  $\tau(r)$  e  $\rho(r)$ , e quindi delle funzioni  $b(r)$  e  $\Phi(r)$ , introducendo la funzione adimensionale:

$$\zeta(r) = \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|} \quad (2.27)$$

Tenendo conto che in corrispondenza della gola  $r = b_0$  e  $b'(r)$  ha valore finito poiché  $\rho(r)$  ha valore finito (2.24), la flaring out condition è riscrivibile come:

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho_0|} > 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 > \rho_0 \quad (2.28)$$

dove  $\tau_0$  e  $\rho_0$  sono i valori di  $\tau(r)$  e  $\rho(r)$  in prossimità della gola.

La (2.28) implica che nella gola del wormhole la tensione radiale debba essere maggiore della densità totale di energia-materia. La materia che soddisfa questa condizione, diversa dalla materia ordinaria, è detta *materia esotica*.

In generale, diremo che nelle vicinanze della gola del wormhole il tensore energia-impulso viola la *null energy condition*:

$$T_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \geq 0 \quad (2.29)$$

dove  $x^\mu$  è un vettore di tipo nullo ovvero tale che  $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$ .

È importante sottolineare che la violazione della null energy condition in prossimità della gola del wormhole implica automaticamente la violazione di altre importanti condizioni sull'energia. Questo rende necessaria la presenza della materia esotica per garantire la stabilità e la traversabilità del wormhole.

Esistono comunque numerosi fenomeni di natura quantistica, come l'effetto Casimir, che esibiscono sperimentalmente la violazione di alcune condizioni sull'energia. Questi effetti possono avere un ruolo determinante sulla possibilità che si formi un wormhole, anche soltanto a livello microscopico.

Concludiamo questo capitolo evidenziando che tutte le considerazioni fatte riguardo la traversabilità del wormhole sono vincolate alla scelta della metrica di Morris-Thorne, quindi al caso di wormhole statico, non rotante e non carico. Nulla vieta, in principio, di considerare modelli più complessi in cui il wormhole possa essere dinamico, rotante, elettricamente carico o anche asimmetrico.

Infine, i wormhole sono stati studiati nel contesto della Relatività Generale, ma è possibile ritrovare soluzioni di wormhole anche in teorie estese della gravitazione. In questi casi la condizione di stabilità e attraversabilità è ottenuta sfruttando particolari condizioni topologiche senza richiedere la presenza di materia esotica.

## Capitolo 3

# I test degli oggetti compatti: L'effetto Poynting-Robertson

In astrofisica esistono numerosi metodi e tecniche finalizzate allo studio di oggetti compatti come nane bianche, stelle di neutroni e buchi neri.

In questo capitolo, l'attenzione è posta su un particolare metodo basato sul cosiddetto "effetto Poynting-Robertson", tipicamente utilizzato per modellare il moto orbitale di particelle di piccola massa intorno ad un'intensa sorgente di radiazione elettromagnetica. Partiamo dunque da una panoramica dei test che permettono lo studio degli oggetti compatti, e concentriamoci poi sull'effetto Poynting-Robertson, evidenziando le proprietà di questo fenomeno e le possibili applicazioni.

### 3.1 I test degli oggetti compatti

Analizziamo alcuni dei test più importanti per lo studio di un oggetto compatto quali l'emissione di radiazione elettromagnetica ad alta energia, il moto orbitale delle stelle intorno ad un oggetto compatto e l'emissione di onde gravitazionali.

#### **La radiazione elettromagnetica**

Uno strumento particolarmente utile per individuare un buco nero o una stella di neutroni è lo studio dell'emissione di raggi X e raggi gamma ad alte energie.

Nel caso dei buchi neri è necessaria la presenza di una stella secondaria o compagna, dal momento che la radiazione è prodotta quando l'oggetto compatto attrae materia (tipicamente gas) dalla stella. Il materiale gassoso si avvicina al buco nero, formando un disco rotante intorno a tale oggetto detto disco di accrescimento.

La materia che costituisce il disco di accrescimento raggiunge temperature molto elevate, a causa dell'energia gravitazionale rilasciata dalla materia che cade verso l'oggetto compatto. Viene quindi emessa radiazione ad alta energia nello spettro dei raggi X e gamma. Alcune stelle di neutroni emettono radiazione ad alta energia anche dalla loro superficie, come nel caso delle Magnetar e delle Pulsar. Ci sono anche casi in cui la materia che compone il disco di accrescimento forma uno strato sulla superficie della stella di neutroni talmente compresso da indurre processi di fusione termonucleare e, conseguentemente, intense emissioni di raggi X che possono durare da alcuni secondi a diversi minuti.

Una situazione simile accade per le nane bianche, precisamente per le nane bianche che appartengono ad un sistema binario, in cui può esserci l'emissione di raggi X a bassa energia e l'emissione di onde gravitazionali.

#### **Il moto orbitale intorno ad un oggetto compatto**

È possibile ricavare numerose informazioni su un oggetto compatto dallo studio del moto orbitale delle stelle intorno ad esso. Questa tecnica è ampiamente utilizzata per studiare le caratteristiche di buchi neri supermassicci e altri oggetti compatti come Sagittarius A\* al centro della Via Lattea.

Il test consiste nel tracciare, parzialmente o interamente, l'orbita seguita da una stella intorno ad un oggetto compatto, in questo modo si acquisiscono informazioni sul potenziale gravitazionale a cui essa è soggetta.

Questo metodo ci permette di determinare due caratteristiche fondamentali di un oggetto compatto: la sua massa e la distanza da esso. È di particolare utilità anche nello studio della distribuzione di massa intorno all'oggetto compatto, della sua cinematica e di effetti post-Newtoniani.

#### **Le onde gravitazionali**

La scoperta delle onde gravitazionali, deboli increspature dello spaziotempo che si propagano alla velocità della luce, è stato un traguardo di fondamentale importanza per la comprensione del cosmo, paragonabile alla scoperta delle onde elettromagnetiche.

Le onde gravitazionali ci permettono, infatti, di studiare in grande dettaglio i campi gravitazionali forti, fornendoci informazioni sulle caratteristiche delle loro sorgenti.

Gli eventi osservati fino ad oggi riguardano sistemi binari compatti, formati cioè, da buchi neri, stelle di neutroni o anche da un buco nero e una stella di neutroni.

Il tipo di onda gravitazionale emessa da ognuno di questi sistemi binari è intrinsecamente connesso alla natura degli oggetti che lo compongono, mentre l'evoluzione del sistema binario è approssimativamente sempre la stessa.

Gli oggetti compatti che compongono il sistema orbitano intorno al comune centro di massa, emettendo onde gravitazionali e perdendo progressivamente energia.

In intervalli di tempo estremamente lunghi, le orbite diventano sempre più strette portando infine alla collisione e all'emissione di onde gravitazionali che possono essere rivelate tramite le attuali tecnologie.

I test appena esposti, e molti altri basati per esempio sullo studio dei raggi cosmici e dei neutrini, sono alla base di un moderno sviluppo dell'astronomia detta "astronomia multi-messenger". Questi test forniscono infatti approcci diversi ma complementari per lo studio del cosmo e per verificare la validità della Relatività Generale.

## 3.2 L'effetto Poynting-Robertson

L'effetto Poynting-Robertson è quel processo per cui una particella che orbita intorno ad una stella o altra sorgente luminosa, perde momento angolare ed energia a causa dell'interazione con la radiazione elettromagnetica proveniente dalla stella.

Questo effetto è particolarmente significativo per particelle di piccola massa, tali però da non essere sollecitate in modo significativo dalla pressione di radiazione che agisce in verso opposto alla forza gravitazionale. Nel sistema solare, per esempio, l'effetto Poynting-Robertson è importante per particelle con diametro dell'ordine del micrometro o millimetro, infatti viene impiegato per studiare la dinamica degli anelli di Saturno che sono composti anche da particelle di questo tipo.

Il moto della materia intorno ad oggetti compatti massivi come stelle neutroni o buchi neri è tipicamente descritto in termini di moto geodetico, ovvero come il moto di masse di prova in una data varietà spaziotemporale.

Il miglioramento delle tecniche di osservazione ci permette però di testare anche effetti di tipo perturbativo come l'effetto Poynting-Robertson. Questo effetto può influenzare in modo significativo il moto della materia orbitante intorno all'oggetto compatto.

Il nostro interesse è posto, dunque, su particelle di piccola massa come particelle di polvere o di materia che compone un disco di accrescimento in moto intorno ad un'intensa sorgente di radiazione elettromagnetica.

Una particella di prova che orbita intorno ad una stella risentirà di diverse forze: la forza gravitazionale, la pressione di radiazione diretta in verso opposto all'attrazione gravitazionale e l'effetto Poynting-Robertson.

La più significativa è solitamente la forza gravitazionale dovuta alla stella, dominante se studiamo la dinamica della particella per brevi intervalli di tempo.

La pressione di radiazione e l'effetto Poynting-Robertson sono altri importanti contributi, non gravitazionali, di cui è necessario tener conto per comprendere l'evoluzione della dinamica della particella su lunghi intervalli di tempo.

Per descrivere, prima in termini qualitativi, l'effetto Poynting-Robertson consideriamo particelle dotate di simmetria sferica e in condizioni di equilibrio termico.

Scegliamo poi due sistemi di riferimento: il sistema di riferimento in cui la particella di prova è in quiete (Figura 3.1) e il sistema di riferimento in cui la particella di prova è in moto intorno ad una stella che è in quiete (Figura 3.2).

Nel sistema di riferimento in cui la particella è in quiete, l'energia totale della radiazione incidente e uscente per unità di tempo coincidono per l'ipotesi di equilibrio termico dunque l'energia totale della particella è conservata. Inoltre, la simmetria sferica della particella di polvere implica che la variazione di quantità di moto della particella dovuta all'emissione termica sia nulla, e che la quantità di moto totale della radiazione uscente abbia la stessa direzione della radiazione incidente.

In Figura 3.1, vediamo come la radiazione elettromagnetica incide sulla particella in una direzione leggermente diversa dalla verticale. Questo è dovuto al fenomeno dell'aberrazione della luce, e corrisponde ad una forza che si oppone al moto della particella di polvere. Notiamo che l'angolo di aberrazione è molto piccolo dato che la velocità della particella è diversi ordini di grandezza inferiore a quella della luce.

In questo sistema di riferimento, dunque, l'effetto Poynting-Robertson può essere spiegato in termini dell'aberrazione della luce, della conservazione dell'energia e dell'effetto Doppler, ovvero la variazione di frequenza della radiazione incidente dovuta allo stato di moto della sorgente della radiazione elettromagnetica.

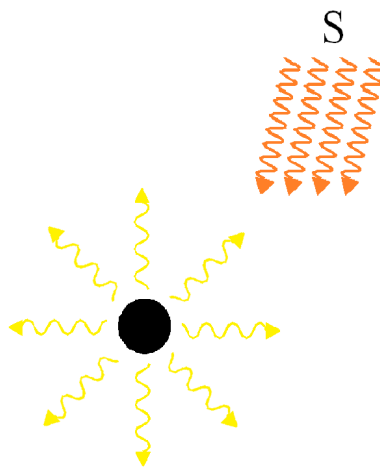


Figura 3.1: sistema di riferimento di quiete della particella

Studiamo ora lo stesso fenomeno nel sistema di riferimento in cui la stella è in quiete e la particella di polvere si muove con una certa velocità  $v$  rispetto ad essa.

In questo caso, la particella assorbe la radiazione elettromagnetica incidente nella direzione radiale dunque il momento angolare orbitale della particella è inalterato. Osserviamo però che la radiazione riemessa dalla particella, essendo questa in moto, non è isotropa come accade nel riferimento di quiete della particella.

È necessario, dunque, considerare nuovamente l'effetto Doppler, in relazione però alla variazione di frequenza della radiazione emessa dovuta allo stato di moto della particella di prova.

In particolare, la radiazione emessa nella direzione di moto ha frequenza maggiore (spostamento verso il blu) rispetto alla radiazione emessa nella direzione opposta a quella di moto (spostamento verso il rosso).

Questo implica che la forza a cui è soggetta la particella, a causa dell'emissione di radiazione nella direzione di moto, è maggiore della forza dovuta all'emissione di radiazione in direzione opposta. E' evidente che la forza complessiva si oppone al moto della particella.

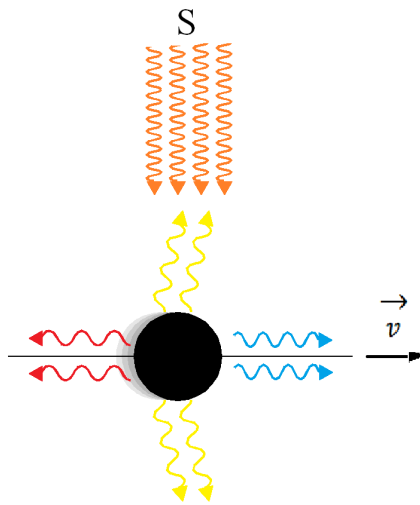


Figura 3.2: sistema di riferimento di quiete della stella in cui la particella si muove con velocità  $\vec{v}$

L'effetto Poynting-Robertson può essere descritto, dunque, tramite una forza efficace che agisce sulla particella in direzione opposta a quella di moto, determinandone una diminuzione di momento angolare ed energia.

La traiettoria della particella diventa una spirale convergente verso la stella, con progressivo aumento della velocità al diminuire della distanza.

La trattazione matematica dell'effetto Poynting-Robertson è in generale piuttosto complessa ma può essere notevolmente semplificata imponendo le seguenti ipotesi:

- la particella di prova sia dotata di simmetria sferica e non ruoti;
- la radiazione incidente possa essere descritta tramite un fascio omogeneo di fotoni in moto lungo direzioni parallele;
- la particella assorba completamente la radiazione incidente su di essa (corpo nero)

In queste ipotesi, l'equazione del moto della particella può essere determinata adoperando il seguente metodo euristico [6].

L'energia che viene assorbita da una particella che si muova con velocità  $\vec{v}$  in un'orbita circolare intorno alla stella è scrivibile, nel sistema di riferimento in cui la particella è in quiete, come:

$$E = R \left( 1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{S}}{c} \right) A \quad (3.1)$$

dove  $R$  è il flusso della radiazione incidente, ovvero energia incidente per unità di tempo e unità di superficie, qualora la particella fosse in quiete.  $A$  è la superficie di assorbimento della particella e  $\hat{S}$  è il versore che individua la direzione del fascio di fotoni incidente.

Il fattore tra parentesi è invece dovuto all'effetto Doppler e quindi allo stato di moto della particella di prova.

Tramite la formula (3.1), possiamo individuare un primo contributo alla forza che agisce sulla particella, nel sistema di riferimento in cui essa è in quiete, che specificheremo come contributo di pressione  $F_P$  dipendente direttamente da  $E$ :

$$\vec{F}_P = \frac{E}{c} \hat{S} \quad (3.2)$$

Questa forza agisce nella direzione di  $\hat{S}$  ed è associata alla pressione della radiazione elettromagnetica incidente.

Studiamo ora lo stesso fenomeno nel sistema di riferimento in cui la particella è in moto. In questo caso la particella riemette completamente la radiazione assorbita in modo anisotropo quindi ci sarà una diminuzione di energia della particella pari ad  $E$ . A questa perdita di energia corrisponde una diminuzione della quantità di moto nel tempo, che possiamo scrivere tramite una forza  $F_D$  in verso opposto alla direzione di moto della particella:

$$\vec{F}_D = -\frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (3.3)$$



La forza complessiva che agisce sulla particella può essere ottenuta combinando opportunamente questi due contributi.

Trascurando termini di ordine superiori al primo in  $v/c$  si trova:

$$\vec{F} = \frac{RA}{c} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{S}}{c} \right) \hat{S} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (3.4)$$

La caratteristica principale di questa equazione è la dipendenza dalla velocità  $v$ , quanto maggiore è la velocità della particella di prova tanto maggiore sarà la sollecitazione a cui essa è soggetta.

Una trattazione esauriente dal punto di vista matematico dell'effetto Poynting-Robertson richiede un approccio di tipo relativistico. In questo modo avremmo equazioni covarianti, definite indipendentemente dal sistema di riferimento scelto.

Nonostante una trattazione di questo tipo esuli dagli intenti di questa tesi, è utile riportare il risultato che si ottiene relativisticamente [7], al primo ordine in  $v/c$ , nel riferimento di quiete della stella e rilassando l'ipotesi di corpo nero:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \beta \frac{G_N M}{r^2} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}}{c} \right) \vec{e} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (3.5)$$

dove  $\vec{v}$  e  $\vec{e}$  rappresentano il vettore posizione e il vettore velocità della particella rispetto alla stella,  $r$  è la distanza tra particella e stella mentre  $\beta$  è un parametro dato da:

$$\beta = \frac{R^2 L}{4G_N M m c} Q \quad (3.6)$$

dipendente dalla massa  $M$  e dalla luminosità  $L$  della stella, ovvero dall'energia elettromagnetica emessa per unità di tempo, dal raggio  $R$  e dalla massa  $m$  della particella di prova e dal fattore  $Q$ , legato alle proprietà di assorbimento e scattering della particella nonché alle proprietà della radiazione incidente.

Confrontando la (3.5) con la (3.4) trovata euristicamente scopriamo, come prevedibile, che la differenza sostanziale risiede proprio nel coefficiente  $Q$ .

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per sviluppare un metodo di rivelazione di un wormhole. Questo test verrà presentato nella parte conclusiva di questa tesi, ed è interamente basato sull'effetto Poynting-Robertson.

## Capitolo 4

# Applicazioni dell'effetto Poynting-Robertson

In questo ultimo capitolo, l'obiettivo è presentare un'applicazione dell'effetto Poynting-Robertson allo studio e alla rivelazione di un wormhole.

I wormhole sono oggetti ad oggi speculativi, non c'è alcuna evidenza osservativa o sperimentale a sostegno della loro esistenza. La possibilità di osservare un wormhole è ulteriormente complicata dal fatto che localmente un wormhole è molto simile ad un buco nero, dunque per identificare un wormhole è necessario adottare un nuovo metodo in grado di sfruttare le loro peculiari caratteristiche.

L'effetto Poynting-Robertson offre proprio questa possibilità, un metodo efficace per identificare un wormhole e distinguerlo da un buco nero.

I risultati ottenuti con questo approccio possono essere confrontati con i dati osservativi e potrebbero condurci, nei prossimi anni, alla prima rivelazione di un wormhole.

### 4.1 Come discriminare i wormhole dai buchi neri

Buchi neri e wormhole potrebbero sembrare oggetti astrofisici completamente diversi tra loro, l'orizzonte degli eventi che caratterizza un buco nero è assente nei wormhole, così come la singolarità gravitazionale. Notiamo, però, che esiste un'ampia classe di oggetti compatti che riescono a riprodurre accuratamente le proprietà osservative di un buco nero, tra questi è di particolare importanza il caso dei wormhole.

Il nostro interesse è dunque posto su uno specifico tipo di wormhole, costruito sul modello di Morris-Thorne. Scegliamo la distribuzione di materia esotica in modo che la metrica del wormhole sia direttamente connessa a quella di Schwarzschild nel vuoto.

Riprendiamo dunque la metrica di Morris-Thorne (2.9):

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega^2$$

Abbiamo visto come la richiesta di traversabilità per un wormhole di questo tipo implichi la presenza di materia esotica. Nonostante ciò, possiamo studiare particolari configurazioni che rendano minima la presenza di questo tipo di materia.

La quantità di materia esotica che compone un wormhole è espressa dalla funzione adimensionale  $\zeta$  (2.27), già introdotta nel Capitolo 2.

La condizione di massimo confinamento si ottiene concentrando la materia esotica in una sottile regione intorno alla gola del wormhole fino ad una distanza  $r^*$ , seguita poi da una zona composta da materia ordinaria.

In termini di  $\zeta$  otteniamo:

$$\zeta > 0 \quad \text{se} \quad b_0 \leq r < r^* \quad (4.1)$$

$$\zeta \leq 0 \quad \text{se} \quad r \geq r^* \quad (4.2)$$

Il tipo di wormhole che ci proponiamo di studiare (Figura 4.1) ha una struttura leggermente più complessa di questa. Alla regione in cui è presente solo materia ordinaria che si estende da  $r^*$  fino ad una distanza pari al raggio di Schwarzschild  $R_S$  dal centro del wormhole, segue uno strato superficiale di transizione di spessore  $\epsilon$  che collega la zona di materia ordinaria al vuoto in cui è valida la soluzione di Schwarzschild (1.7) vista nel Capitolo 1.

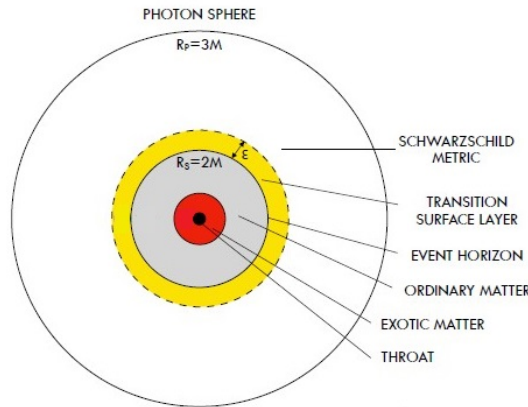


Figura 4.1: rappresentazione del dominio spaziale del wormhole [8]

Per ottenere un wormhole di questo tipo scegliamo opportunamente le funzioni  $b$  e  $\Phi$  nella regione  $b_0 \leq r \leq r^*$  [5]:

$$b(r) = (b_0 r)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

$$\Phi = \text{const} \quad (4.4)$$

Compatibili con la presenza di materia esotica con densità di energia-materia positiva.

A partire dalla distanza  $r^*$  avremo una regione di materia ordinaria per  $r^* < r \leq R_S$ , seguita da uno strato di transizione di spessore  $\epsilon$  in cui la tensione radiale  $\tau$  va a zero con continuità. In questo modo possiamo ricondurci alla soluzione di Schwarzschild nel vuoto esternamente al wormhole.

Sottolineiamo che la regione di transizione deve trovarsi necessariamente a distanza maggiore di  $R_S$ , altrimenti avremmo la formazione di un orizzonte degli eventi. Inoltre, il campo gravitazionale in prossimità della regione di transizione, essendo prossima ad  $R_S$ , è estremamente intenso.

Sostituendo le espressioni soprantanti delle funzioni  $b(r)$  e  $\Phi(r)$  nelle equazioni (2.24) - (2.26), otteniamo la seguente equazione di stato per la materia esotica nella regione  $b_0 \leq r \leq r^*$ :

$$\tau/2 = 2p = \rho \quad (4.5)$$

A cui corrisponde un valore di  $\zeta$  pari a:

$$\zeta(r) = \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|} = 1 \quad \text{per } b_0 \leq r \leq r^* \quad (4.6)$$

Nella regione  $r^* < r \leq R_S$  imponiamo invece le seguenti espressioni di  $b(r)$  e  $\Phi(r)$  per la materia ordinaria:

$$b(r) = ar \quad (4.7)$$

$$\Phi = \text{const} \quad (4.8)$$

Dove  $a$  è un parametro adimensionale. L'equazione di stato corrispondente è data da:

$$\tau = \rho \quad p = 0 \quad (4.9)$$

Notiamo che in questa regione vale  $\zeta = 0$ , siamo dunque al limite della condizione per avere materia ordinaria. In questo modo  $\zeta$ , e quindi la flaring out condition, è determinata solo dal contenuto di materia esotica.

Lo strato di transizione  $R_S < r \leq R_S + \epsilon$  è invece composto da materia ordinaria, quindi con  $\zeta < 0$ , e con densità  $\rho$  costante.

In definitiva, la distribuzione di materia del wormhole può essere espressa come:

$$\zeta = 1 \quad \text{per } b_0 \leq r \leq r^* \quad (4.10)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{per } r^* < r \leq R_S \quad (4.11)$$

$$\rho = \text{const} \quad \text{per } R_S < r \leq R_S + \epsilon \quad (4.12)$$

$$\rho = \tau = p = 0 \quad \text{per } r > R_S + \epsilon \quad (4.13)$$

Il wormhole così costruito è pressoché indistinguibile da un buco nero, sia per l'emissione di raggi X che di onde gravitazionali.

## 4.2 Possibili rivelazioni osservative dei wormhole

Applichiamo ora l'effetto Poynting-Robertson al caso in cui una particella di prova orbiti intorno ad un wormhole statico e sfericamente simmetrico del tipo appena costruito.

Il metodo per rivelare un wormhole e distinguerlo da un buco nero è strettamente connesso alla presenza di una regione di transizione, che separi la materia ordinaria dal vuoto in cui vale la soluzione di Schwarzschild (Figura 4.1). Questa regione induce delle variazioni nella metrica del wormhole che non sono presenti qualora l'oggetto che stiamo studiando sia un buco nero, in quel caso la metrica è soltanto quella di Schwarzschild.

Le variazioni della metrica possono essere rivelate studiando la radiazione elettromagnetica emessa da due superfici: il disco di accrescimento e l'ipersuperficie critica [8].

### Il disco di accrescimento

Il disco di accrescimento si trova all'esterno dell'oggetto compatto, è in moto rotatorio intorno ad esso con una certa velocità angolare, ed è la sorgente della radiazione elettromagnetica che incide sulla particella di prova. Il disco di accrescimento produce anche un intenso campo magnetico che può determinare, in virtù di effetti quantistici, la formazione della materia esotica necessaria per la stabilità e la traversabilità del wormhole.

Il disco di accrescimento si estende a partire da  $r = 6M$ , che corrisponde al raggio dell'orbita minima stabile che una particella di prova può seguire intorno ad un oggetto massivo descritto dalla metrica di Schwarzschild, fino ad un valore variabile dell'ordine di decine di  $M$ . È importante sottolineare che il contributo principale deriva dalla porzione di disco di accrescimento più prossima all'oggetto compatto, quindi l'estensione completa del disco di accrescimento non è molto rilevante nella nostra analisi.

### L'ipersuperficie critica

Questa ipersuperficie corrisponde ad una regione in cui vi è equilibrio tra la forza gravitazionale e la forza dovuta alla radiazione elettromagnetica.

Per rivelare delle variazioni della metrica consideriamo una ipersuperficie critica in corrispondenza della regione di transizione  $R_S < r \leq R_S + \epsilon$ .

In presenza di un wormhole avremmo un'ipersuperficie critica diversa, dunque con proprietà di emissione diverse, da quella di un buco nero data la differenza tra le metriche. Sottolineiamo poi che l'ipersuperficie critica di un wormhole dipende dalla forma delle funzioni  $b(r)$  e  $\Phi(r)$ , esistono anche particolari tipologie di wormhole che non ammettono l'esistenza di una ipersuperficie critica.

L'effetto Poynting-Robertson ha un ruolo cruciale in questa analisi, poiché ci assicura che tale tipo di ipersuperficie esista e sia stabile.

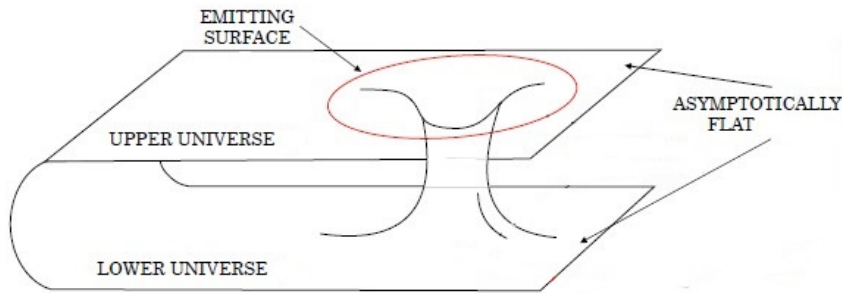


Figura 4.2: Rappresentazione del wormhole e del disco di accrescimento [8]

Le proprietà dell'ipersuperficie critica possono essere determinate a partire dallo studio del sistema dinamico composto da una massa di prova che orbita intorno al wormhole di Morris-Thorne costruito nel paragrafo precedente.

La particella di prova sarà soggetta alla forza gravitazionale dovuta al wormhole, all'interazione con la radiazione elettromagnetica emessa dal disco di accrescimento e quindi all'effetto Poynting-Robertson.

Le stesse particelle che compongono il disco di accrescimento possono essere trattate come masse di prova soggette all'azione del campo gravitazionale e della radiazione elettromagnetica.

In Figura 4.1 e Figura 4.2 è possibile inquadrare precisamente la situazione fisica in esame, evidenziando sia la presenza della regione di transizione in cui si trova l'ipersuperficie critica che la presenza del disco di accrescimento.

Il nostro interesse è rivolto al caso in cui il disco di accrescimento sia presente soltanto in una delle regioni di spaziotempo connesse dal wormhole (Figura 4.2). Se fosse presente in entrambe, infatti, potremmo immediatamente identificare la presenza di un wormhole dall'emissione di raggi X.

Affinché un wormhole imiti in modo adeguato un buco nero deve poi valere la condizione  $R_S + \epsilon < R_P = 3M$ , dove  $R_P$  corrisponde al raggio della sfera fotonica nella metrica di Schwarzschild (Figura 4.1). Questo impone dei vincoli su  $\epsilon$  e quindi sull'estensione della regione di transizione.

Un wormhole può essere individuato studiando le proprietà di emissione di radiazione elettromagnetica della ipersuperficie critica nella metrica di Schwarzschild di buco nero e del disco di accrescimento.

Osserviamo, infatti, che lo studio della radiazione emessa da una ipersuperficie critica nella metrica di Schwarzschild è uno degli indicatori principali della presenza di un buco nero.

Se i dati osservativi sono in buon accordo con le previsioni di questo modello, allora l'oggetto che stiamo analizzando è un buco nero, qualora invece i dati osservativi se ne distacchino in modo significativo potremmo essere in presenza di un wormhole.

Il modello sviluppato in questo ultimo paragrafo può essere utile anche per studiare altre proprietà di wormhole e buchi neri, come il campo gravitazionale in prossimità dell'ipersuperficie critica o l'interazione tra gravità e materia in una regione in cui il campo gravitazionale è estremamente intenso.

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stata presentata una tecnica, già usata in astrofisica per testare gli oggetti compatti, al caso dei wormhole.

Abbiamo inizialmente contestualizzato i wormhole nella categoria degli oggetti compatti, evidenziando le proprietà che deve avere un wormhole affinché sia stabile e attraversabile nonché la necessità di introdurre la materia esotica.

Delineato il modello di wormhole di Morris-Thorne, è stato presentato l'effetto Poynting-Robertson nell'ambito dei test degli oggetti compatti. Abbiamo visto, in particolare, l'importanza di questo effetto nello studio della dinamica di particelle di piccola massa in moto orbitale intorno ad un'intensa sorgente di radiazione elettromagnetica.

L'effetto Poynting-Robertson è stato poi applicato allo sviluppo di un test, finalizzato alla rivelazione di un wormhole di Morris-Thorne a simmetria sferica e stazionario, in cui è stata scelta in modo opportuno la distribuzione di materia ordinaria ed esotica.

Studiando il profilo di emissione di radiazione elettromagnetica del disco di accrescimento e dell'ipersuperficie critica intorno all'oggetto compatto, è possibile distinguere la metrica di Schwarzschild dalla metrica di wormhole, e, più in generale, identificare un wormhole.

Il metodo di rivelazione presentato nell'ultimo capitolo può essere migliorato, possiamo considerare modelli più complessi di wormhole ammettendo la possibilità che questo sia in rotazione o privo di simmetria sferica, oppure possiamo studiare soluzioni di wormhole in altri contesti come quello delle teorie estese della gravitazione [9].

È chiaro, quindi, che mentre i wormhole rimangono ad oggi degli oggetti puramente teorici esistenti soltanto nel contesto delle teorie della gravitazione, la loro esistenza nel cosmo è un interrogativo ancora aperto e lo studio di questi oggetti rappresenta una delle frontiere più interessanti della fisica moderna.



# Bibliografia

- [1] S.Capozziello, M.Funaro. *Introduzione alla Relatività Generale: con applicazioni all'Astrofisica Relativistica e alla Cosmologia*, Liguori, (2006), Napoli
- [2] K.S.Thorne, C.W.Misner, J.A.Wheeler, *Gravitation*, Freeman, (2000)
- [3] M.Visser, *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*, American Institute of Physics Press, (1995)
- [4] A.Einstein, N.Rosen. *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*, Phys. Rev, **48**, 73-77, (1935)
- [5] M.Morris, K.S.Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, American Journal of Physics, **56**(5), (1998)
- [6] J.A. Burns, P.L. Lamy, S.Soter, *Radiation forces on small particles in the Solar System*, Icarus, **40**, 1-48, (1979)
- [7] J. Klacka, J.Petrzala, P.Pàstor, L.Kómar. *The Poynting-Robertson effect: A critical perspective*, Icarus, **232**, 249-262, (2012)
- [8] V.De Falco, E.Battista, S.Capozziello, M. De Laurentis. *General relativistic Poynting-Robertson effect to diagnose wormholes existence: static and spherically symmetric case*, Phys.Rev D, **101**(19), 104037, (2020)
- [9] V.De Falco, E.Battista, S.Capozziello, M. De Laurentis. *Reconstructing wormhole solutions in curvature based Extended Theories of Gravity*, Eur. Phys. J. C, **81**(2), 157, 2021