UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea triennale in Fisica

Il Teorema di Noether e le sue applicazioni ai sistemi fisici

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Francesco Bajardi

Candidato:
Federico Ferrara
Matricola: N85001357

Salvatore Capozziello

Francesco Bajardi

Anno Accademico 2020-2021

Indice

Introduzione

Il teorema di Noether è un teorema di fondamentale importanza in gran parte delle teorie fisiche moderne. È stato formulato nel 1915 e pubblicato pochi anni dopo, nel 1918, da Emmy Noether e subito riscontrò successo all'interno della comunità scientifica. La grande innovazione alla base di questo teorema sta nel ruolo che assumono le simmetrie di un sistema fisico all'interno delle leggi stesse del sistema. In generale una simmetria. In generale le simmetrie dei sistemi fisici avevano sempre suscitato interesse nei fisici, tuttavia solo con il lavoro di Emmy Noether si riuscì a trovare una stretta correlazione tra le leggi di conservazione, ricavate in molteplici modi in fisica, con le simmetrie della natura. Se un esperimento fornisce gli stessi risultati a decenni di distanza il motivo è da ricercare nell'omogeneità del tempo e, a partire da essa, si può ricavare la legge di conservazione dell'energia. Lo stesso si applica alla simmetria rispetto alle traslazioni spaziali: se un esperimento fornisce gli stessi risultati in due posti diversi, indipendente dalla traslazione subita, allora si potrà trovare un'altra grandezza conservata, ossia la quantità di moto. Un altro esempio particolarmente importante è la conservazione del momento angolare, dovuta all'isotropia dello spazio. Questo teorema al giorno d'oggi ha dimostrato la sua validità in svariati ambiti della fisica, permettendo di ricavare svariate leggi di conservazione e semplificando notevolmente i problemi fisici. Con l'evolversi della fisica si sono riuscite a trovare applicazioni del teorema anche all'infuori del semplice ricavare leggi di conservazione, come vedremo più avanti.
Einstein fu tra i primi a trovare brillante il risultato di Emmy Noether, e assieme a lui anche Hilbert capì la rilevanza del teorema, tanto da dire che avrebbe aperto le porte ad una "nuova fisica". Non a caso si sente molto l'influenza del teorema di Noether all'interno della relatività generale, soprattutto considerando il ruolo che ha nella determinazione delle equazioni di campo. Ancora oggi, dopo più di 100 anni dalla formulazione, risulta essere uno strumento importantissimo e un ottimo strumento di verifica per molte teorie fisiche.

Capitolo 1

Simmetrie e leggi di conservazione in fisica

In tutte le teorie della fisica moderna uno dei ruoli più importanti è svolto dalle simmetrie del sistema che danno origine a delle leggi di conservazione. Queste leggi hanno particolare importanza poiché permettono di ritrovare, a partire dalle simmetrie del sistema, costanti del moto in grado di semplificare i problemi o che possano dare origine a nuove leggi fisiche.

1.1 Simmetrie di un sistema fisico

Dal punto di vista matematico una simmetria è un gruppo di trasformazioni ad un parametro che lascia invariate le proprietà di un'equazione differenziale o di un sistema di equazioni differenziali. Queste trasformazioni dovranno ovviamente essere dei diffeomorfismi, in quanto sono essenziali, all'interno del nostro formalismo, la differenziabilità e l'invertibilità delle funzioni incognite nelle equazioni differenziali. Inoltre queste trasformazioni sono delle trasformazioni ad un parametro, dipendenti, dunque, da un numero reale ϵ.
Come prima cosa definiamo un sistema di coordinate $q^i(t)$ dipendenti da un solo parametro t. Possiamo definire una trasformazione $f(\omega)$ tale che

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(q^i, t, \omega) \\ \bar{t} = \bar{t}(q^i, t, \omega). \end{cases} \tag{1.1}$$

Quello che richiediamo ora è che queste trasformazioni costituiscano un gruppo. In quanto tali, dovranno rispettare le seguenti proprietà:

- Esse devono essere invertibili
- La composizione di due diffeomorfismi del gruppo deve restituire un diffeomorfismo del gruppo, ossia

$$\bar{\bar{q}}^i = \bar{\bar{q}}^i(\bar{q}^i, \bar{t}, \bar{\epsilon}) = \bar{\bar{q}}^i(q^i, t, \bar{\bar{\epsilon}}), \tag{1.2}$$

per un certo $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}(\epsilon, \bar{\epsilon})$.

- Devono contenere l'identità per $\epsilon = 0$, ossia

$$\bar{q}^i(q^i, t, 0) = q^i, \qquad \bar{t} = \bar{t}(q^i, t, 0) = t. \tag{1.3}$$

In questo modo le trasformazioni hanno la struttura di un gruppo che prende il nome di "Gruppo di diffeomorfismi ad un parametro". Ovviamente è possibile, una volta fatto ciò, costruire gruppi di diffeomorfismi a più parametri, che dovranno rispettare le stesse regole. Ad ogni trasformazione del tipo (1.1) è possibile associare un vettore, detto generatore della trasformazione. Il vettore è definito attraverso le derivate della trasformazione rispetto al parametro della stessa. Potrà dunque essere scritto in forma differenziale come

$$\boldsymbol{X} = \xi(q^i, t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(q^i, t)\frac{\partial}{\partial q^i}, \tag{1.4}$$

dove

$$\xi = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \epsilon}, \qquad \eta = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial \epsilon}.$$

Un importante ruolo delle simmetrie, come è già stato accennato, sta nella riduzione dell'ordine di un sistema di equazioni differenziali. Questo aspetto dei gruppi di diffeomorfismi venne osservato inizialmente da Sophus Lie. Ciò è dovuto alla proprietà delle simmetrie di fornire equazioni differenziali di ordini inferiori, le quali, sostituite all'interno del sistema originale, ne permettono una semplificazione. Si supponga allora di avere un'equazione differenziale del tipo

$$H(t, q, q', \ldots, q^{(n)}) = 0,$$

dove con l'apice è stata indicata l'operazione di derivazione rispetto a t. Si applichi a questo punto una trasformazione f tale per cui la soluzione q(t) di H viene trasformata in $\bar{q}(\bar{t})$. Se $\bar{q}(\bar{t})$ è ancora una soluzione di $\bar{H}$, ossia il sistema H sotto la trasformazione f, allora si dice che la trasformazione è una simmetria dell'equazione differenziale. In generale questo risultato vale anche per sistemi di equazioni differenziali. Trasformazioni come le (1.1) ovviamente giocano un ruolo fondamentale in fisica, nella quale un sistema di equazioni differenziali può essere ottenuto a partire dalla lagrangiana del sistema. Le equazioni in questione, dette equazioni di Eulero-Lagrange, sono equazioni del secondo ordine, ricavabili applicando un principio variazionale all'integrale dell'azione

$$S = \int dtL. \tag{1.5}$$

Spesso integrare direttamente queste equazioni risulta particolarmente ostico, motivo per cui si cercano sempre metodi per semplificare il sistema. Quello che si può fare è appunto utilizzare integrali primi, ossia funzioni che siano costanti nel tempo e che consentano di diminuire il numero di variabili da calcolare attraverso degli integrali più semplici. Un particolare tipo di simmetrie di Lie è costituito dalle simmetrie di Noether. Queste simmetrie sono quelle alle quali è possibile ricollegare gli integrali primi del moto. Infatti, attraverso esse è possibile ricavare leggi di conservazione che permettano, dunque, di diminuire l'ordine del sistema di equazioni di Eulero-Lagrange. Le simmetrie di Noether non sono allora altro che simmetrie specifiche per i problemi dinamici derivanti dal formalismo lagrangiano. Esse tengono invariate l'azione e hanno un'origine profonda, da ricollegare alle proprietà dei sistemi fisici. Come già detto ciò che serve per la riduzione dell'ordine delle equazioni di Eulero-Lagrange è l'invarianza sotto un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro. Supponiamo allora di avere un sistema di equazioni[1]

$$F(q, \dot{q}), \tag{1.6}$$

dove il punto rappresenta la derivata rispetto al tempo. Un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro

$$q(\epsilon) \tag{1.7}$$

lascia invariato il sistema (1.6) se

$$\left.\frac{dF}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial q}\left.\frac{dq(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.8}$$

a partire da questa equazione si osserva che l'invarianza del sistema rispetto alla trasformazione si ha solo se la derivata di F lungo il generatore infinitesimo è nulla. Questo tipo di operazione prende il nome di derivata di Lie ed è alla base delle simmetrie matematiche e fisiche. Dunque, se indichiamo con F le equazioni di Eulero-Lagrange, dipendenti dalle coordinate lagrangiane e dalle rispettive velocità, e con $\boldsymbol{X}$ il generatore di una trasformazione delle variabili $\{q, t\}$ il sistema è invariante sotto questa trasformazione se la derivata di Lie di F lungo $\boldsymbol{X}$ è nulla, cioè se

$$\mathcal{L}_X F = 0. \tag{1.9}$$

Attraverso queste nozioni è possibile andare a definire il teorema di Noether, il quale permette di calcolare le quantità conservate a partire dal generatore infinitesimo della trasformazione. Vari esempi di leggi di conservazione, tuttavia, possono essere ottenuti anche senza dover applicare direttamente il teorema di Noether. Il formalismo lagrangiano, attraverso la funzione lagrangiana, è un ottimo strumento per verificare le conseguenze delle simmetrie del sistema.

1.2 Esempi di leggi di conservazione

1.2.1 Integrali primi

Innanzitutto si definisca cos'è un integrale primo. Un integrale primo del moto è una funzione delle coordinate lagrangiane e delle rispettive velocità $(q, \dot{q})$ che resta costante nel tempo. Esso permette di ridurre l'ordine del sistema di equazioni differenziali associato al sistema in questione. Questo è possibile poiché gli integrali primi forniscono delle equazioni differenziali del primo ordine che possono andare a sostituire le equazioni di Eulero-Lagrange, le quali sono invece equazioni del secondo ordine. In questo modo le equazioni del moto possono essere ricavate attraverso sistemi di equazioni differenziali più semplici dei sistemi ottenibili solo attraverso il formalismo lagrangiano. Illustreremo vari esempi di integrali primi e ci concentreremo principalmente su quelli che sono riconducibili a simmetrie del sistema. In generale, in un sistema fisico descritto da una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, è possibile notare che i momenti coniugati associati alle coordinate cicliche (ossia le coordinate che non appaiono all'interno della lagrangiana) sono costanti del moto, in quanto $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ e, di conseguenza, se $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

si ricava l'indipendenza dal tempo dei momenti coniugati. Il numero totale di parametri iniziali necessari per il problema di Cauchy associato è $2s$ (s variabili lagrangiane e s velocità lagrangiane), dunque, il numero totale di integrali primi sarà $2s - 1$, in quanto è sempre possibile ricondurre il tutto ad un problema ad una sola variabile in funzione del tempo e delle $2s-1$ costanti del moto. Si consideri allora un sistema lagrangiano, descritto da 2N parametri, ossia le N coordinate lagrangiane q_i e le N velocità $\dot{q}_i$ e si osservi come le simmetrie permettano di ricavare alcuni integrali primi del moto.[2]

1.2.2 Energia

Il primo esempio è l'integrale primo che è possibile ottenere dall'omogeneità del tempo. In virtù di questa omogeneità, la Lagrangiana risulta indipendente dal tempo, quindi essa sarà del tipo $L(q, \dot{q})$ e di conseguenza sarà possibile scrivere

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i, \tag{1.10}$$

dove è stato eliminato $\frac{\partial L}{\partial t}$. Andando ora ad utilizzare le equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right), \tag{1.11}$$

pertanto è possibile concludere che

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L\right) = 0. \tag{1.12}$$

Abbiamo quindi verificato che la grandezza

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L \tag{1.13}$$

è costante nel tempo. Questa grandezza E non è altro che l'energia. Infatti, ricordando che la funzione lagrangiana è definita come la differenza tra il termine cinetico e il termine potenziale dell'energia,

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{1.14}$$

e applicando il teorema di Eulero per le funzioni omogenee

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i = 2T, \tag{1.15}$$

la funzione E trovata è proprio

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \tag{1.16}$$

ossia l'energia della meccanica newtoniana. Si noti pertanto che l'indipendenza della lagrangiana dal tempo si traduce con la conservazione dell'energia. Questa legge di conservazione è valida sia per sistemi isolati, sia per sistemi immersi in un campo esterno costante (dunque indipendente dal tempo).

1.2.3 Quantità di moto

Si consideri adesso l'integrale primo che dovuto alla proprietà di omogeneità dello spazio. In virtù di questa proprietà, la Lagrangiana dovrà essere indipendente da una qualsiasi traslazione spaziale del sistema. Si supponga allora di avere una traslazione spaziale infinitesima dei raggi vettori del sistema tale che $\boldsymbol{r_i}' = \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{\epsilon}$. La variazione della lagrangiana sarà dunque

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \delta \boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{\epsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}}. \tag{1.17}$$

Supponendo ora l'invarianza della lagrangiana, che si può esprimere attraverso la condizione $\delta L = 0$, e utilizzando l'arbitrarietà di $\boldsymbol{\epsilon}$, ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = 0. \tag{1.18}$$

Questa condizione, una volta inserita all'interno delle equazioni di Eulero-Lagrange, afferma che

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}} \right) = 0. \tag{1.19}$$

Da questa relazione è facile osservare che la quantità conservata in questo caso è

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}}. \tag{1.20}$$

Utilizzando di nuovo la (1.14), ricaviamo che

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v_i}, \tag{1.21}$$

dove con $\boldsymbol{v_i}$ sono stati indicati i vettori velocità, ossia gli $\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$[1]. Possiamo quindi facilmente riconoscere la quantità di moto. La quantità di moto totale, data dalla somma delle quantità di moto dei vari corpi del sistema, è un integrale del moto collegato all'omogeneità dello spazio. Si osservi che questa legge di conservazione è valida nel momento in cui $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r_i}} = 0$ ossia quando

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F_i} = 0, \tag{1.22}$$

cioè per i sistemi isolati.

1.2.4 Momento angolare

Come ultima legge di conservazione studiamo quella collegata alla proprietà di isotropia dello spazio, ossia l'invarianza delle leggi fisiche per rotazioni. In virtù di questa proprietà la lagrangiana dovrà rimanere invariata a seguito di una rotazione infinitesima. Si supponga allora di avere una rotazione infinitesima definita da un vettore di rotazione $\delta\boldsymbol{\phi}$, con modulo pari all'angolo di rotazione $\delta\phi$ e come direzione quella dell'asse di rotazione. Si avrà una variazione del raggio vettore, a seguito di questa rotazione, pari a

$$|\delta \boldsymbol{r}| = \boldsymbol{r} \sin\theta \cdot \delta\phi \tag{1.23}$$

con direzione perpendicolare al piano passante per $\boldsymbol{r}$ e $\delta\boldsymbol{\phi}$. Risulta allora evidente che

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{r}. \tag{1.24}$$

Ovviamente, come ci si aspetta, oltre alle direzioni dei raggi vettori varieranno anche le direzioni delle velocità dei vari punti del sistema. La legge sarà allora

$$\delta \boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{v}. \tag{1.25}$$

A questo punto studiamo in che modo varia la lagrangiana a seguito di una rotazione infinitesima. Con un procedimento analogo a quello della quantità di moto porremo

[1] In realtà la forma di $\boldsymbol{P}$ ottenuta nella (1.21) vale solo se l'energia cinetica ha la forma newtoniana $T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2$.

questa variazione uguale a 0, in quanto la lagrangiana dovrà rimanere invariata. Avremo dunque:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \delta \boldsymbol{r_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}} \delta \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \right) = 0. \tag{1.26}$$

Ricordando adesso che $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} = \boldsymbol{p_i}$ e che $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}}$, è possibile riscrivere questa condizione come

$$\sum_{i=1}^{N} (\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \delta \boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{r_i} + p_i \cdot \delta \boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{v_i}) = 0. \tag{1.27}$$

Utilizzando adesso le proprietà del prodotto misto e portando $\delta \boldsymbol{\phi}$ fuori dalla somma, abbiamo:

$$\delta \boldsymbol{\phi} \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r_i} \wedge \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{v_i} \wedge \boldsymbol{p_i}) = \delta \boldsymbol{\phi} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \wedge \boldsymbol{p_i} \right) = 0. \tag{1.28}$$

Adesso, essendo $\delta\phi$ arbitraria, risulta evidente che la quantità conservata in questo caso sia

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r_i} \wedge \boldsymbol{p_i} \tag{1.29}$$

che non è altro che il momento angolare del sistema.
Abbiamo dunque trovato ben 7 integrali primi del moto associati a delle simmetrie del sistema: l'energia, le 3 componenti della quantità di moto e le 3 componenti del momento angolare. È importante osservare che, proprio come la lagrangiana, ognuno di questi integrali primi è additivo. Cioè, se il sistema è composto da più sottosistemi, l'integrale primo del sistema sarà dato dalla somma degli integrali primi dei vari sottosistemi.

Capitolo 2

Il teorema di Noether

Come si è visto le simmetrie giocano un ruolo essenziale in fisica. Esse infatti permettono di semplificare i problemi da un punto di vista matematico, con la riduzione dell'ordine del sistema di equazioni differenziali. Andando più avanti si potrà vedere che esse permettono anche di selezionare determinate teorie fisiche. Alla base di tutto ciò c'è il teorema di Noether che associa ad ogni simmetria del sistema una grandezza conservata. Ovviamente il teorema si estende a innumerevoli ambiti della fisica, e ha la sua rilevanza sia nella meccanica sia nelle varie teorie di campo, quali ad esempio la relatività generale. Tratteremo entrambi i casi in questo capitolo, partendo prima dalla meccanica relativistica per poi estendere il discorso alle teorie di campo.

2.1 Meccanica relativistica

Innanzitutto bisogna enunciare il teorema di Noether in meccanica relativistica. Tenuta a mente la definizione di simmetria come gruppo di diffeomorfismi ad un parametro vediamo come, a partire da esse, sia possibile ottenere delle leggi di conservazione. Seguiremo per le seguenti dimostrazioni la trattazione presentata in[3].

Teorema di Noether: *Dato un sistema di coordinate lagrangiane, le rispettive velocità e il tempo* $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ *e dato un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro* $f(\omega)$*, tali da avere una trasformazione del tipo*

$$\begin{cases} t' = t + \omega \delta t \\ \boldsymbol{q}'(t') = \boldsymbol{q}(t) + \omega \delta' \boldsymbol{q}(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Se l'azione è invariante rispetto ad f *allora la quantità*

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \boldsymbol{q} + L \cdot \delta t \tag{2.2}$$

è una costante del moto.

Dimostrazione: Come prima cosa si ipotizzi una generica trasformazione delle coordinate come la (2.1), dove $\delta'\boldsymbol{q}(t)$ indica la variazione totale di $\boldsymbol{q}(t)$, la quale tiene conto anche della variazione δt. Si consideri anche la variazione della sola $\boldsymbol{q}$ che è data da

$$\boldsymbol{q}'(t) = \boldsymbol{q}(t) + \delta\boldsymbol{q}(t). \tag{2.3}$$

Al primo ordine in δt otteniamo

$$\boldsymbol{q}'(t) = \boldsymbol{q}'(t + \delta t) \simeq \boldsymbol{q}'(t) + \dot{\boldsymbol{q}}'\delta t \simeq \boldsymbol{q}'(t) + \dot{\boldsymbol{q}}\delta t, \tag{2.4}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\dot{\boldsymbol{q}}'\delta t$ e $\dot{\boldsymbol{q}}\delta t$ differiscono per un infinitesimo del secondo ordine. Alla luce di queste relazioni otteniamo

$$\delta'\boldsymbol{q}(t) \simeq \delta\boldsymbol{q}(t) + \dot{\boldsymbol{q}}\delta t. \tag{2.5}$$

Più in generale la relazione tra la variazione totale di una grandezza dipendente dal tempo e la sua variazione in forma è

$$\delta' \simeq \delta + \delta t\frac{d}{dt}. \tag{2.6}$$

Si supponga ora, come da ipotesi, che questa trasformazione sia una simmetria del sistema, e che di conseguenza l'azione risulti invariata. Ciò significa che

$$\delta' S = 0. \tag{2.7}$$

A partire dall'invarianza dell'azione scriviamo

$$\delta' S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta'\boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta'\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \delta t \right) + \int L\delta dt = 0, \tag{2.8}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\delta t = \delta' t$. A questo punto, a partire dalla (2.6), si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta'\boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta'\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \delta t = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot (\delta\boldsymbol{q} + \dot{\boldsymbol{q}}\delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot (\delta\dot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{q}}\delta t) + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \delta t =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \cdot \delta t = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{dL}{dt} \cdot \delta t, \tag{2.9}$$

in questo modo la variazione $\delta' S$ si riduce a

$$\delta' S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{dL}{dt}\delta t \right) dt + \int L\delta dt. \tag{2.10}$$

Dato che l'operatore δ e la derivata commutano tra di loro (poiché δ rappresenta una variazione a t fissato), è possibile anche scambiare l'ordine con cui agiscono e quindi

$$\delta\dot{\boldsymbol{q}} = \delta\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{d\delta\boldsymbol{q}}{dt}. \tag{2.11}$$

A partire da ciò i primi due termini dell'integrando della (2.10) diventano

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\frac{d\delta\boldsymbol{q}}{dt}=\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{q}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\boldsymbol{q}\right). \tag{2.12}$$

Facendo lo stesso con δdt, visto che

$$\delta dt = dt' - dt = d\delta t = \frac{d\delta t}{dt}\cdot dt \tag{2.13}$$

si possono sostituire anche gli altri termini della (2.10)

$$\int \frac{dL}{dt}\delta t dt + \int L\delta dt = \int \frac{dL}{dt}\delta t dt + \int L\frac{d\delta t}{dt}dt = \int \frac{d}{dt}\left(L\delta t\right)dt \tag{2.14}$$

in modo da riscrivere la variazione $\delta' S$ come

$$\delta' S = \int \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{q}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+L\delta t\right)\right]dt. \tag{2.15}$$

Dato che la variazione, arbitraria, dell'azione deve risultare nulla, dovrà essere nullo l'integrando. Avremo dunque

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{q}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+L\delta t\right)=0. \tag{2.16}$$

Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange il primo termine si annulla e quello che rimane è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+L\delta t\right). \tag{2.17}$$

A partire dalla (2.17) possiamo concludere che la quantità

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\delta\boldsymbol{q}+L\delta t \tag{2.18}$$

è una quantità conservata.
Osservazione: A partire dalla (2.1) si può osservare che la quantità conservata dipenderà da $\delta\boldsymbol{q}$ e δt, ossia dai generatori infinitesimi della trasformazione. Spesso le variazioni $\delta\boldsymbol{q}$ e δt dipendono da n parametri infinitesimi ω^a. Partendo da questa ipotesi riscriviamo le variazioni come

$$\delta t = \sum_a \omega^a \bar{\delta}_a t, \qquad \delta\boldsymbol{q} = \sum_a \omega^a \bar{\delta}_a \boldsymbol{q}. \tag{2.19}$$

In questo caso, la legge di conservazione va riscritta come

$$\sum_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\bar{\delta}_a\boldsymbol{q}+L\bar{\delta}_a t\right)\omega^a. \tag{2.20}$$

Data l'indipendenza delle ω^a questa legge porta a

$$I_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\cdot\bar{\delta}_a\boldsymbol{q}+L\bar{\delta}_a t, \tag{2.21}$$

dove le I_a sono costanti del moto.
In definitiva il teorema di Noether lega le quantità conservate alle simmetrie del sistema. Infatti, dato un gruppo di simmetria a n parametri, il teorema di Noether è in grado di assicurare l'esistenza, e di dare una forma esplicita, di n grandezze conservate. Le trasformazioni viste nel primo capitolo sono tutti esempi di simmetrie del sistema e più avanti vedremo come esse possano anche essere ricavate attraverso il teorema di Noether.

2.2 Teoria dei campi

Prima di trattare il teorema di Noether nell'ambito della teoria dei campi è meglio, innanzitutto, introdurre alcune nozioni riguardanti questo tipo di teorie. Il primo intento è ricercare la forma della lagrangiana per un generico campo ϕ. Un buon metodo per trovare la lagrangiana è partire dal caso di n punti su una corda vibrante unidimensionale e poi estendere il caso al continuo in uno spazio tridimensionale. Procedendo in questo modo si ricava una lagrangiana

$$L = \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{2.22}$$

dove $\mathcal{L}$ è la densità di lagrangiana del campo ϕ, la cui forma dipende dal particolare campo che viene preso in considerazione. Ad esempio, per un campo scalare, la forma della densità di lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \tag{2.23}$$

dove il primo è un termine cinetico e il secondo è un termine di potenziale. D'ora in avanti utilizzeremo la convenzione per la quale gli indici greci indicano le componenti spazio-temporali e possono variare tra 0,1,2,3, mentre gli indici latini verranno utilizzati per indicare unicamente le componenti spaziali, e dunque potranno variare tra 1,2,3.
Le equazioni della dinamica del campo saranno ovviamente le equazioni di Eulero-Lagrange in 4 dimensioni

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \tag{2.24}$$

L'azione potrà essere ottenuta a partire dalla lagrangiana come

$$S = \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu\right), \tag{2.25}$$

dove il motivo per cui si è integrato in d^4x è dovuto all'integrazione di L in dt. Per quanto riguarda il passaggio al formalismo hamiltoniano tutto ciò che bisognerà fare sarà applicare le definizioni della meccanica hamiltoniana alla teoria dei campi. Avremo, dunque, un campo coniugato $\pi_l(t)$ ottenuto come

$$\pi_l(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_l}. \tag{2.26}$$

L'hamiltoniana sarà allora ottenuta come trasformata di Legendre della lagrangiana e sarà

$$H = \sum_l \pi_l \dot{\phi}_l - L. \tag{2.27}$$

Ovviamente, come con la lagrangiana, è possibile costruire una densità di Hamiltoniana tale che

$$H = \int dx \mathcal{H}\left(\pi, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{2.28}$$

e $\mathcal{H}$ sarà tale che

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \tag{2.29}$$

dove π non è altro che il campo coniugato nel limite continuo, utilizzando lo stesso procedimento utilizzato per i campi. Per poter avere delle grandezze relativisticamente invarianti, ciò che bisogna fare è supporre che l'azione sia un invariante di Lorentz. Essendo l'elemento di volume d^4x invariante dovrà quindi esserlo anche la densità di lagrangiana. Supporremo, inoltre, di trovarci nello spazio-tempo minkowskiano 3+1-dimensionale. L'azione rappresenta dunque un funzionale in questo spazio-tempo e la sua invarianza può essere espressa come

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0, \tag{2.30}$$

dove con $\frac{\delta S}{\delta \phi}$ indichiamo la derivata funzionale. Date queste definizioni è possibile introdurre il teorema di Noether applicato alla teoria dei campi.
Il teorema di Noether per la teoria dei campi è leggermente diverso dal caso delle particelle. La prima cosa che dimostreremo sarà l'esistenza di delle quadricorrenti conservate a seguito di una trasformazione sotto un gruppo di diffeomorfismi. A partire da queste correnti potremo poi definire le grandezze conservate, dette cariche di Noether. Il teorema di Noether, in questa nuova forma, fornirà un risultato particolarmente elegante che potrà essere riscritto sotto forma di un'equazione di continuità. Si consideri allora una trasformazione canonica delle coordinate, rappresentata da un gruppo di diffeomorfismi a n parametri. Le trasformazioni saranno simili a quelle ottenute in meccanica classica, ma in questo caso si dovranno prendere in considerazione la trasformazione delle coordinate x^μ e dei rispettivi campi $\phi(x)$. Consideriamo allora una trasformazione canonica infinitesima del tipo

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \omega \delta x^\mu \\ \phi'(x') = \phi(x) + \omega \delta' \phi(x). \end{cases} \quad . \tag{2.31}$$

Anche in questo caso è stata scritta la variazione totale del campo $\delta'\phi$. Come nella (2.6), si può considerare la relazione che lega la variazione totale alla sola variazione del campo. In questo caso otteniamo

$$\delta' = \delta + \delta x^\mu \partial_\mu. \tag{2.32}$$

Si prenda poi in considerazione una trasformazione infinitesima ad n parametri che scriveremo come

$$\delta x^\mu = \sum_a \omega^a \bar{\delta}_a x^\mu, \qquad \delta\phi_l = \sum_a \omega^a \bar{\delta}_a \phi_l, \tag{2.33}$$

dove le variazioni $\bar{\delta}_a x^\mu$ e $\bar{\delta}_a \phi$ sono quantità finite.
Supponiamo adesso l'invarianza dell'azione rispetto a questo gruppo di trasformazioni

$$\delta' S = 0 \tag{2.34}$$

che è possibile riscrivere come

$$\delta' S = \int d^4x \delta' \mathcal{L} + \int \delta d^4x \mathcal{L} = 0. \tag{2.35}$$

La variazione della densità di lagrangiana $\mathcal{L}$ è

$$\delta' \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu. \tag{2.36}$$

Ricordando che l'operatore δ commuta con l'operatore di derivazione parziale, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi. \tag{2.37}$$

Questa relazione, sostituita all'interno della (2.36), fornisce

$$\delta' \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu. \tag{2.38}$$

Calcoliamo ora la variazione del volume quadridimensionale d^4x a seguito della trasformazione delle coordinate. Questa può essere ottenuta tramite lo jacobiano della trasformazione di coordinate nel seguente modo

$$d^4x' = |J(x)|\, d^4x \tag{2.39}$$

con

$$J(x) = det \left\{ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\}. \tag{2.40}$$

Avendo in questo caso una trasformazione del tipo $x'^\mu + \delta x^\mu$, $J(x)$ vale

$$J(x) = det(g^\mu{}_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu). \tag{2.41}$$

Per calcolare il determinante si usa la formula

$$detJ = e^{Tr\ ln\ J}. \tag{2.42}$$

Dato che stiamo trattando trasformazioni infinitesime, possiamo espandere in serie di Taylor i termini in modo da ottenere

$$Tr\ ln(g^{\mu}{}_{\nu} + \partial_\nu \delta x^\mu) = Tr(\partial_\nu \delta x^\mu) = \partial_\mu \delta x^\mu \tag{2.43}$$

e di conseguenza lo jacobiano

$$J(x) = det(g^{\mu}{}_{\nu} + \partial_\nu \delta x^\mu) = e^{\partial_\mu \delta x^\mu} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \tag{2.44}$$

sicché

$$d^4x' = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x. \tag{2.45}$$

La variazione del volume sarà, in definitiva

$$\delta d^4x = d^4x' - d^4x = (\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x. \tag{2.46}$$

A questo punto possiamo riscrivere la variazione dell'azione come

$$\delta' S = \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu \right] =$$

$$\int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right]. \tag{2.47}$$

La condizione di invarianza fornisce

$$\int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right] = 0. \tag{2.48}$$

Tenendo ora conto dell'arbitrarietà di δx^μ e $\delta\phi$, questa condizione implica

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0. \tag{2.49}$$

Utilizzando le equazioni del moto si può annullare il primo termine e la condizione si riduce a

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0. \tag{2.50}$$

Andando a riscrivere le variazioni in termini degli n parametri ω^a si ha

$$\sum_a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta}_a \phi + \mathcal{L} \bar{\delta}_a x^\mu \right) \omega^a = 0. \tag{2.51}$$

Infine, essendo le ω^a indipendenti, otteniamo n equazioni del tipo

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0. \tag{2.52}$$

Le j^μ_a sono dette correnti di Noether

$$j^\mu_a = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta}_a \phi + \mathcal{L} \bar{\delta}_a x^\mu \right). \tag{2.53}$$

Le equazioni ottenute a seguito del teorema di Noether sono n equazioni di continuità che assicurano la conservazione delle correnti di Noether. Ad ogni gruppo di simmetria ad n parametri sono dunque collegate n correnti associate che rappresentano delle leggi di conservazione. Queste correnti, che nel nostro caso sono grandezze quadridimensionali, avranno quadridivergenza nulla.
Si considerino ora le quantità

$$Q_a = \int_\sigma d\sigma_\mu j^\mu_a \tag{2.54}$$

dove σ è un'ipersuperficie di tipo spazio. Essendo nulla la quadridivergenza delle j^μ_a, per il teorema di Gauss le cariche Q_a saranno costanti e quindi si avrà

$$\frac{\delta Q_a}{\delta \sigma} = 0. \tag{2.55}$$

Se si sceglie un'ipersuperficie del tipo $d\sigma_\mu = (d^3\boldsymbol{x}, 0, 0, 0)$ le cariche diventano

$$Q_a = \int d^3\boldsymbol{x} j^0_a(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.56}$$

dove l'integrazione viene effettuata nello spazio euclideo tridimensionale. In questo caso la conservazione delle cariche di Noether può essere riscritta come

$$\frac{dQ_a}{dt} = 0. \tag{2.57}$$

Da questa relazione notiamo che le Q_a sono delle costanti del moto. Il tutto può essere riassunto attraverso un'elegante equazione di continuità che coinvolge tanto le cariche di Noether quanto le correnti associate

$$\frac{\partial Q_a}{\partial t} + \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_a = 0. \tag{2.58}$$

Riassumiamo i risultati ottenuti. Abbiamo compreso che le simmetrie in fisica giocano un ruolo fondamentale, dando origine a delle leggi di conservazione. Le costanti del moto originate da queste simmetrie sono ricavabili attraverso il teorema di Noether, sia nel caso delle particelle che nel caso dei campi. Inoltre le equazioni che abbiamo ottenuto contengono sia la lagrangiana (che contiene tutte le informazioni riguardanti la dinamica del sistema) che i generatori infinitesimali della trasformazione. Le applicazioni del teorema di Noether vanno oltre la semplice ricerca di simmetrie e lo vedremo meglio nei prossimi capitoli. Per chi fosse interessato ad una trattazione più matematica del teorema di Noether, a partire dalla geometria differenziale, può seguire l'approccio del[4].

2.3 Applicazioni del teorema di Noether

Verifichiamo adesso alcuni risultati che si possono ottenere attraverso l'utilizzo del teorema di Noether. Noteremo che la forma delle costanti del moto ottenute attraverso l'utilizzo del teorema coincideranno proprio con le costanti del moto ottenute nel primo capitolo attraverso delle considerazioni riguardanti l'invarianza della lagrangiana.

2.3.1 Meccanica relativistica

Traslazioni spaziali

Iniziamo con lo studiare una traslazione spaziale infinitesima. Si ricordi che per una trasformazione di questo tipo è assicurata l'invarianza dell'azione. A partire da

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.59}$$

con $\boldsymbol{\epsilon}$ vettore costante infinitesimo, applicando il teorema di Noether otteniamo che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\right) = 0, \tag{2.60}$$

dove L è la lagrangiana relativistica

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + L_{int}, \tag{2.61}$$

con L_{int} che rappresenta il termine di interazione della lagrangiana. Sicché, tenuta in considerazione l'arbitrarietà di $\boldsymbol{\epsilon}$, la costante del moto legata alla simmetria (2.60) è

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.62}$$

ossia proprio il momento relativistico $m\gamma\boldsymbol{v}$.

Traslazioni temporali

Proprio come nel caso delle traslazioni spaziali è possibile trattare analogamente le traslazioni temporali. Ovviamente anche queste portano ad un'invarianza dell'azione, come abbiamo già potuto osservare. Scriviamo allora la trasformazione

$$t' = t + \epsilon \tag{2.63}$$

con ϵ costante. La variazione $\delta t = \epsilon$ porterà ad una variazione delle coordinate. Riprendendo la (2.7)

$$\delta\boldsymbol{x}(t) = \delta\boldsymbol{x}'(t') - \epsilon\boldsymbol{v} = \epsilon\boldsymbol{v}. \tag{2.64}$$

Applicando il teorema di Noether ricaviamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \epsilon \boldsymbol{v} + L \cdot \epsilon\right) = \frac{d}{dt}(-\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + L) = 0, \tag{2.65}$$

dove si è tenuto conto dell'arbitrarietà di ϵ. La grandezza ottenuta non è altro che l'energia totale del sistema. La grandezza conservata sarà allora

$$E = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.66}$$

Rotazioni

Abbiamo visto come anche l'invarianza per rotazioni possa portare ad una quantità conservata. Tentiamo adesso di dimostrarlo attraverso il teorema di Noether utilizzando una trasformazione dipendente da un parametro $\boldsymbol{\omega}$ che rappresenti una rotazione infinitesima attorno ad un asse fisso. Innanzitutto la trasformazione sarà

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}(t) \tag{2.67}$$

e la variazione infinitesima sarà data da $\delta \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}(t)$. Ricavando la grandezza conservata a partire dal teorema di Noether otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x})\right] = \frac{d}{dt}\left[\left(\boldsymbol{x} \wedge \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}\right] = \frac{d}{dt}[(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}] = 0. \tag{2.68}$$

Tenendo come al solito conto dell'arbitrarietà delle ω, otteniamo come quantità conservata proprio il momento angolare già ricavato in precedenza

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p}. \tag{2.69}$$

2.3.2 Teoria dei campi

Trattiamo adesso un esempio di grandezze conservate per Noether in teoria dei campi. Ricordiamo che in questo caso il teorema di Noether conferma l'esistenza di correnti conservate, che rispettano l'equazione di continuità $\partial_\mu j^\mu_a = 0$. Supponiamo allora una traslazione spazio-temporale infinitesima

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \tag{2.70}$$

dove la variazione infinitesima dipenderà dalle costanti ϵ^μ

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu = \delta^\mu{}_\nu \epsilon^\nu, \tag{2.71}$$

e dove $\delta^\mu{}_\nu$ è il delta di Kronecker quadridimensionale. Scriviamo la variazione come $\delta x^\mu = \epsilon^\nu \bar{\delta}_\nu x^\mu$, ossia in termini di quattro variabili con indici lorentziani. Possiamo allora scrivere

$$\bar{\delta}_\nu x^\mu = \delta^\mu{}_\nu. \tag{2.72}$$

Presa poi in considerazione la variazione in forma del campo, dataci dalla (2.32) e tenuto conto del fatto che un campo è ovviamente invariante per traslazioni spazio-temporali, ne deduciamo che $\delta'\phi(x) = 0$, e dunque la variazione sarà

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \delta'\phi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \phi = -\epsilon^\nu \partial_\nu \phi. \tag{2.73}$$

Sicché, riscrivendo la variazione in termini dei 4 parametri $\bar{\delta}_\nu$ come

$$\delta\phi = \epsilon^\nu \bar{\delta}_\nu \phi, \tag{2.74}$$

otteniamo in conclusione

$$\bar{\delta}_\nu \phi = -\partial_\nu \phi. \tag{2.75}$$

Supposto ora che l'azione sia invariante per la trasformazione (2.70), è possibile associare a questa simmetria una quadricorrente conservata. Questa corrente si potrà ottenere attraverso il teorema di Noether e sarà

$$j^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta}_\nu \phi + \mathcal{L} \bar{\delta}_\nu x^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi + \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu. \tag{2.76}$$

Osserviamo che questa corrente è una corrente tensoriale definita da due indici lorentziani. Questo ci porta a riscrivere la corrente come un tensore a due componenti

$$\Theta^{\mu\nu} = -j^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} \delta^{\mu\nu}. \tag{2.77}$$

Da ciò otteniamo la conservazione del tensore Θ, che prende il nome di tensore canonico energia-impulso. L'equazione di continuità è

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{2.78}$$

Questa equazione ha un significato molto profondo, in quanto esprime la conservazione del quadrimomento. Le cariche di Noether saranno

$$P^\nu = \int_\sigma d\sigma_\mu \Theta^{\mu\nu}, \tag{2.79}$$

dove σ è un'ipersuperficie di tipo spazio. Possiamo ridefinire σ così che l'elemento di integrazione risulti

$$d\sigma_\mu = (d^3\boldsymbol{x}, 0, 0, 0). \tag{2.80}$$

Inserendo questo risultato nell'integrale (2.79) si ottiene

$$P^\nu = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{0\nu} \tag{2.81}$$

e la carica può essere scritta in componenti come

$$P^0 = \int d^3\boldsymbol{x}\ \Theta^{00} = \int d^3\boldsymbol{x} (\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}) \quad P^i = \int d^3\boldsymbol{x}\ \Theta^{0i} = \int d^3\boldsymbol{x}\ \pi\ \partial^i \phi. \tag{2.82}$$

P^0 è il generatore della traslazione temporale mentre P^i sono i generatori della traslazione spaziale. Da ciò ne evinciamo P^ν è il quadrimomento. Riguardo le altre componenti di Θ avremo

- $\Theta^{0\nu}$ rappresentano le componenti del quadrimpulso.
- $\Theta^{i\nu}$ rappresentano la densità di flusso del quadrimomento nelle direzioni x^i.

Il tensore impulso-energia così definito ci permette di estendere il concetto di conservazione dell'energia o dell'impulso, ottenuti sempre tramite simmetrie di Noether, alla teoria dei campi. Abbiamo allora ottenuto un importante strumento per poter semplificare un gran numero di problemi, in quanto, per ciò che si è potuto notare, le leggi di conservazione ottenute permettono di ridurre l'ordine di un sistema di equazioni differenziali. Un'altra osservazione da fare, inoltre, è anche l'incredibile utilità che questo teorema ha nell'ambito della fisica teorica. Infatti esso spesso tende a sottolineare l'importanza di alcuni principi primi, i quali permettono di dare un significato più profondo a varie leggi di conservazione. Un esempio è la legge di conservazione della carica, la quale discende direttamente dall'invarianza di gauge tipica del campo elettromagnetico. Oltre a questo, il teorema di Noether permette anche di ricavare una serie di equazioni importanti, dovute molto spesso ai principi primi della natura. Come abbiamo già osservato le equazioni di campo possono essere ottenute a partire dal teorema di Noether e dal ruolo che particolari grandezze (nel nostro caso il tensore energia-impulso) hanno nell'ambito della specifica teoria. Non a caso nella fisica moderna questo teorema ha assunto un ruolo di estrema importanza. Nei prossimi capitoli vedremo anche il ruolo che ha il teorema di Noether nel poter comprendere e selezionare varie teorie fisiche, riuscendo a delimitare e guidare, da un punto di vista matematico, la ricerca.

Capitolo 3

Il teorema di Noether come verifica delle teorie della gravitazione

Come abbiamo già detto il teorema di Noether ha un ruolo fondamentale in fisica, conferendoci una serie di equazioni ottenute a partire da simmetrie dello spazio e del tempo. Attraverso queste simmetrie è possibile definire, nell'ambito delle teorie di campo, qual è la lagrangiana del campo o quali sono le equazioni che descrivono la dinamica dello stesso. Abbiamo visto alla fine dello scorso capitolo che è possibile ricavare, a partire dall'invarianza rispetto a traslazioni spazio-temporali, una quantità conservata di particolare importanza: il tensore impulso-energia. Questo tensore è fondamentale nello sviluppo della teoria della Relatività Generale, nella quale instauriamo una relazione tra esso e il tensore di Einstein nelle equazioni di campo. Per descrivere l'origine delle equazioni di campo dobbiamo innanzitutto descrivere il ruolo del tensore impulso-energia nell'ambito della Relatività Generale.

3.1 Relatività Generale

Einstein, dopo aver sviluppato la teoria della Relatività Ristretta, cercò un modo per costruire una teoria fisica che fosse indipendente dal sistema di riferimento preso in considerazione. Questa teoria aveva bisogno di un formalismo matematico che non tenesse conto del particolare tipo di spazio-tempo scelto, in modo tale da permettere la descrizione della natura attraverso leggi assolute. Il formalismo che Einstein scelse di utilizzare è un formalismo covariante, descritto attraverso l'algebra dei tensori. La geometria adottata da Einstein è la geometria riemanniana, la quale permette di trattare allo stesso modo sia sistemi di riferimento inerziali che non. Questa idea venne ad Einstein grazie ad un'intuizione riguardante il principio di equivalenza. Einstein estese questo principio (il quale asseriva l'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale) fornendo una descrizione che coinvolgesse direttamente lo spazio-tempo nel quale agisce un campo gravitazionale. Per il principio di equivalenza Einsteiniano è impossibile distinguere un sistema accelerato e un campo gravitazionale (questo è dovuto all'universalità del campo gravitazionale che agisce su tutti i corpi dotati di massa e non fa distinzione tra i corpi analogamente a ciò che succede con altre interazioni). Più nello specifico Einstein asserisce che in un campo gravitazionale qualsiasi è sempre possibile scegliere un riferimento locale, ossia un intorno di un punto, nel quale sia possibile vanificare gli effetti del campo gravitazionale. Per poter spiegare ciò Einstein utilizzò la matematica a sua disposizione descrivendo lo spazio-tempo attraverso una varietà riemanniana 4-dimensionale sulla quale è possibile definire un'applicazione che ci permette di passare al fibrato tangente della varietà stessa. Nel piano tangente ad un punto possiamo andare a vanificare gli effetti di un campo gravitazionale, recuperando la fisica della Relatività Ristretta.

3.1.1 Formalismo covariante

A partire da un semplice principio, Einstein riuscì a ottenere una teoria che descrivesse il campo gravitazionale attraverso gli effetti che esso aveva sulla metrica dello spazio tempo. Il campo è semplicemente descritto a partire dal tensore metrico della varietà presa in considerazione. Un altro risultato strabiliante di questa teoria è che le equazioni del moto di un corpo in un campo gravitazionale seguono l'equazione delle geodetiche

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{3.1}$$

Quest'equazione, che sembra molto distante dalle equazioni della meccanica classica, è semplicemente ottenuta a partire dal principio di Relatività applicato alle equazioni del moto. È stata solo applicata una trasformazione che permette di vanificare gli effetti dovuti alla non-inerzialità del sistema. Questo conferma l'ipotesi della possibilità di annullare gli effetti dovuti al campo gravitazionale attraverso un cambiamento di coordinate. La conseguenza di questa trasformazione è che i corpi, immersi in un campo gravitazionale, seguono l'equazione delle geodetiche. Una geodetica non è altro che la curva di minor distanza tra due punti di una varietà. Questa curva sarà sempre una retta in uno spazio euclideo, tuttavia in uno spazio-tempo riemanniano questo non è sempre vero. A partire da questo otteniamo un risultato importantissimo: il moto dei corpi dipende solo dalla geometria dello spazio-tempo preso in considerazione. Inoltre si verifica che le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, dette simboli di Christoffel (o connessioni affini), sono direttamente collegati alle derivate prime della metrica, fornendoci quindi una relazione tra il moto dei corpi e le caratteristiche dello spazio-tempo. A questo punto il nostro intento è trovare delle equazioni che possano descrivere la dinamica del campo. Queste equazioni possono essere trovate a partire da un principio variazionale, come abbiamo già visto in precedenza. Si potrebbe tentare di ricavare una lagrangiana a partire dai simboli di Christoffel, tuttavia essi non sono quantità tensoriali, dunque non assicurano l'invarianza delle equazioni cercate, le quali devono essere invarianti per la teoria. A partire dai simboli di Christoffel si può, tuttavia, ottenere una grandezza che rispetti le proprietà richieste, ossia il tensore di curvatura. Questo tensore descrive la curvatura dello spazio-tempo e dunque è un ottimo candidato per le equazioni di campo, le quali dovranno descrivere proprio la curvatura indotta dal campo gravitazionale. Allora la densità di lagrangiana potrà essere descritta attraverso R che indica lo scalare di curvatura, una grandezza scalare ottenuta a partire dal tensore di curvatura di Riemann. Riportiamo di seguito la forma di alcune grandezze e la loro dipendenza dalla metrica g

- Simboli di Christoffel: $\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau}(g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda})$.
- Tensore di Riemann: $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}$.
- Tensore di Ricci: $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\nu}$.
- Scalare di curvatura (o di Ricci): $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.
- Tensore di Einstein: $G_{\mu\rho} = R_{\mu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\rho} R$.

Dove la virgola indica l'operazione di derivazione standard nello spazio-tempo quadridimensionale. Queste sono le grandezze fondamentali di cui abbiamo bisogno per sviluppare la nostra teoria. Esse hanno diverse proprietà, tuttavia tra le più utili abbiamo la simmetria del tensore di Ricci e del tensore di Einstein, la simmetria dei simboli di Christoffel rispetto agli indici inferiori e la quadridivergenza nulla del tensore di Einstein. L'ultima affermazione significa che

$$\left(R_{\mu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\rho} R\right)_{;\mu} = 0, \tag{3.2}$$

dove il punto e virgola indica la derivata covariante, che tiene conto della geometria dello spazio-tempo e del cammino infinitesimale che deve percorrere un vettore per avere una variazione infinitesimale sulla varietà.

3.1.2 Equazioni di campo

La densità di lagrangiana adatta per una teoria di questo tipo deve contenere le derivate seconde della metrica, in modo tale da conferirci equazioni, ossia le equazioni di Eulero-Lagrange, del secondo ordine. A partire da queste equazioni possiamo conseguentemente ricavare la dinamica del campo, descritta dalle equazioni di Einstein. Cercando di rispettare sempre la covarianza della nostra teoria, dovremo utilizzare un volume invariante, che può essere ricavato analogamente al (2.39). Posto $d^4x = d\Omega$ il principio variazionale potrà scriversi

$$\delta \int \sqrt{-g} R d\Omega = 0. \tag{3.3}$$

Scriviamo le relazioni

$$\delta g = g g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

e

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{3.5}$$

Inserendo queste relazioni all'interno del principio variazionale, nota la forma di R, otteniamo

$$\int \Big[\Big(\delta\sqrt{-g}\Big)R + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\Big]d\Omega =$$

$$= \int \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right]d\Omega + \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d\Omega = 0. \tag{3.6}$$

Calcolando il secondo integrale nel sistema inerziale locale, ossia sul piano tangente, otteniamo l'annullamento dei simboli di Christoffel, in modo da dover trattare il tensore di Ricci solo in termini delle derivate delle connessioni affini. Otterremo allora

$$R_{\mu\nu}(0) = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta R_{\mu\nu}(0) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu}(0)\delta R_{\mu\nu}(0) = g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} =$$

$$= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}]. \tag{3.7}$$

Possiamo allora scrivere

$$g^{\mu\nu}(0)\delta R_{\mu\nu}(0) = \frac{\partial W^{\rho}}{\partial x^{\rho}}, \tag{3.8}$$

dove

$$W^{\rho} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \tag{3.9}$$

In questo modo il secondo integrale è scritto in termini di una pura divergenza. Di conseguenza, in un'ipotesi di universo privo di pozzi e sorgenti, il secondo integrale della (3.6) si annulla per il teorema di Gauss. Per quanto riguarda il primo integrale

$$\int \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}]d\Omega, \tag{3.10}$$

il termine tra parentesi quadre non è altro che il tensore di Einstein e, ricordando l'arbitrarietà delle $\delta g^{\mu\nu}$, ciò che otteniamo è

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{3.11}$$

Per quanto riguarda le sorgenti del campo, si possono fare delle considerazioni riguardanti la materia, andandola a trattare come un fluido di polvere ed utilizzando l'equazione di Eulero. Questo approccio ci porta ad una scelta per la sorgente del campo, che è proprio il tensore impulso-energia, che tuttavia sarà applicabile al caso specifico del fluido di materia. Questo è ovviamente in accordo con la Relatività Ristretta, data la dimostrazione di Einstein dell'uguaglianza tra massa e energia. Tuttavia un altro tipo di procedimento può essere ottenuto a partire proprio dal teorema di Noether. L'intento è cercare una quantità invariante a partire da un generico generatore infinitesimale. Successivamente ricerchiamo una simmetria che il sistema deve rispettare, in modo da ottenere correzioni sia riguardo la lagrangiana che riguardo la trasformazione infinitesima. Per verificare se il sistema rispetta qualche simmetria quello che si deve fare è

- Scrivere la forma generale del generatore infinitesimale.
- Verificare tramite i coefficienti del generatore l'esistenza della simmetria, attraverso un sistema di equazioni alle derivate parziali.
- Scrivere la lagrangiana in termini delle coordinate lagrangiane e delle velocità associate.
- Ricavare le componenti del generatore della trasformazione attraverso un sistema di equazioni differenziali.
- Una volta note le componenti del generatore possiamo ricavare l'integrale primo associato a tale simmetria.
- Attraverso il generatore possiamo poi andare a riscrivere il sistema lagrangiano associato e, a partire da questo, possiamo ridurre il sistema di equazioni differenziali. Una volta noti i 2N-1 integrali, possiamo ottenere la completa integrabilità del sistema lagrangiano.

Seguendo tale procedimento riprendiamo il principio variazionale iniziale

$$\delta \int \mathcal{L}\sqrt{-g}d\Omega = 0. \tag{3.12}$$

Questo tipo di integrale può essere ricondotto sempre, attraverso il principio di Hamilton, ad un integrale del tipo

$$\int \sqrt{-g}Q^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}d\Omega = 0. \tag{3.13}$$

Il tensore $Q^{\alpha\beta}$ può essere ottenuto come

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}Q^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial(g_{\alpha\beta,\mu})}(\sqrt{-g}\mathcal{L}). \tag{3.14}$$

La trasformazione $\delta g_{\alpha\beta}$ può essere scritta in termini di 4 parametri ξ_α, che sono le componenti del generatore della trasformazione del campo. A partire da esso possiamo ottenere, al posto del principio variazionale, la condizione

$$\int \sqrt{-g}(Q^{\alpha\beta}\xi_\alpha)_{;\beta}d\Omega - \int \sqrt{-g}Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\xi_\alpha d\Omega = 0. \tag{3.15}$$

Mentre il primo integrale è l'integrale di una pura divergenza, e in quanto tale si annulla, il secondo ci dà la condizione

$$Q^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \tag{3.16}$$

che ci assicura che il tensore $Q^{\alpha\beta}$ può essere scritto alla destra delle equazioni di campo. Osserviamo che il tensore impulso-energia è un candidato per il generatore del campo gravitazionale, in quanto esso, proprio come il tensore di Einstein, è un tensore simmetrico di rango 2. Le equazioni di campo in definitiva sono

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{3.17}$$

dove la costante di proporzionalità si ottiene a partire da osservazioni sul valore delle equazioni di campo nel caso di un campo debole. Una trattazione più estesa riguardo il tensore energia-impulso può essere trovata in[5].

3.2 Teorie $f(R, \mathcal{G})$

Nonostante la teoria della Relatività Generale permetta una descrizione del campo gravitazionale in accordo con i dati sperimentali e rappresenti un'ottima generalizzazione della gravitazione newtoniana, ci sono ancora molti problemi che questa teoria non riesce a spiegare. Molti di questi problemi sorgono nello studio della cosmologia, la quale presenta difficoltà nell'interpretazione di alcune quantità fisiche come l'energia oscura o la materia oscura, delle quali manca una conoscenza delle componenti fondamentali. Questo richiederebbe una descrizione della Relatività Generale attraverso un modello quantistico, che tuttavia fino ad ora non è ancora stato trovato. Nella fisica moderna la natura è descritta principalmente in termini delle 4 interazioni fondamentali, le quali vengono studiate nella Relatività Generale e nella Teoria Quantistica dei Campi (QFT). La difficoltà nel descrivere la Relatività Generale attraverso un modello quantistico rappresenta un problema, in quanto non permette l'unificazione delle varie forze. C'è anche da dire che questa unificazione, data la bassa intensità dell'interazione gravitazionale, richiederebbe scale di energia molto elevate, le quali non si possono osservare attraverso gli esperimenti. Inoltre la Relatività Generale si contrappone alla QFT a causa dello scenario delle due teorie. La teoria einsteiniana studia l'interazione gravitazionale attraverso una deformazione dello spazio-tempo. All'interno di questo formalismo il campo è descritto da un punto di vista dinamico, con i generatori di quest'ultimo che sono in grado di incurvare lo spazio-tempo. D'altro canto nella QFT lo spazio-tempo è statico e non in accordo con l'ambiente della Relatività Generale. Inoltre la curvatura dello spazio-tempo richiede la conoscenza delle masse che provocano tale deformazione, mentre nel caso del mondo microscopico, descritto attraverso la meccanica quantistica, si perde la nozione di traiettoria, facendo sì che non si possa più definire la curvatura a causa dell'ignoranza, da parte dello sperimentatore, riguardo la posizione delle sorgenti del campo. Ma allora può esistere una teoria del tutto? La risposta è che sicuramente, andando indietro nel tempo, si può raggiungere un istante, poco dopo il Big Bang, dove gli effetti della gravità andavano visti a piccole scale. Riuscire a quantizzare la gravità è sicuramente una delle sfide più importanti per la fisica moderna. A livello cosmologico il divario tra le due teorie si fa sentire quando, ad esempio, si prova a dare una descrizione riguardo l'evaporazione dei buchi neri, o lo studio della materia barionica nel nostro universo. D'altro canto teorie estese della relatività generale sono necessarie per poter descrivere alcuni paradossi a livello cosmologico, come il valore teorico della costante cosmologica, molto distante da quello osservato sperimentalmente. Oltre a questi problemi c'è anche da considerare che molti dei risultati della Relatività Generale per ora sono stati ottenuti solo attraverso approssimazioni di campo debole, rappresentando un possibile limite della teoria. A partire da questo si è tentato di costruire una serie di teorie all'interno delle quali le lagrangiane non dipendano solo dallo scalare di curvatura ma anche da altre grandezze. Tuttavia ci si può chiedere se abbia senso tentare di utilizzare lo stesso formalismo matematico della Relatività Generale per definire teorie alternative a quest'ultima. In generale non c'è nulla che ci vieti di tentare di estendere la gravità utilizzando sempre il formalismo metrico. In realtà le ipotesi di Einstein, ossia il principio di equivalenza, il principio di relatività e il principio di covarianza generale, non ci obbligano ad adottare teorie come quella einsteiniana[6]. Infatti Hilbert e Einstein costruirono una teoria, basata su questi principi, che fosse il più semplice possibile. Ciò venne fatto facendo determinate scelte per le grandezze alla base della teoria, quali la metrica g, la quale fornisce la struttura causale dello spazio-tempo, e le connessioni di Levi-Civita, le quali definiscono il moto dei corpi nel fibrato tangente. Nulla ci obbliga ad usare le stesse grandezze usate nella Relatività Generale, non a caso esistono teorie che ipotizzano uno spazio con torsione, nel quale il moto dei corpi non è più dato dalle connessioni di Levi-Civita. La scelta stessa dello scalare di curvatura R per la lagrangiana è assolutamente arbitraria. Infatti è possibile scegliere anche altre grandezze per le equazioni di campo, rischiando tuttavia di perdere le equazioni del secondo ordine. Ecco che allora risulta effettivamente possibile la costruzione di altre teorie all'infuori della Relatività Generale. Non solo: alcune teorie hanno fornito risultati sorprendenti, riuscendo ad avvicinarsi di più ai risultati sperimentali e risolvendo diversi problemi, soprattutto su scale cosmologiche. In queste teorie si tenta di utilizzare funzioni, da determinare, che dipendano da grandezze che presentano derivate di ordini superiori. Le prime teorie sono teorie non lineari, che dunque abbandonano l'ipotesi di $\mathcal{L} = R$ e ipotizzano lagrangiane con potenze di grado superiore di R. Queste teorie, dette teorie $f(R)$ sono in grado di fornire molti risultati che rafforzano l'ipotesi che la Relatività Generale sia, come la gravitazione newtoniana, solo un'approssimazione di un'effettiva teoria della gravitazione. Altre teorie della gravitazione tengono conto, ad esempio, del tensore di torsione $T^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ che si ottiene a partire dall'abbandono delle connessioni di Levi-Civita a favore di connessioni più generali, le quali prevedono la possibilità di torsione dello spazio-tempo. Altre teorie sono invece costruite a partire dall'invariante di Gauss-Bonnet $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$, definito come una funzione dello scalare di curvatura, del tensore di Ricci e del tensore di Riemann. Questo termine, particolarmente vantaggioso, non è altro che un termine di bordo derivante dalla curvatura dello spazio-tempo e che, una volta integrato su tutta la varietà, risulta essere un invariante topologico. Il vantaggio di un termine del genere è dovuto all'esemplificazione dei problemi dinamici che si possono affrontare in teorie della gravitazione. Inoltre, essendo un invariante, ci permette di recuperare teorie del tipo f(R) nei casi in cui la lagrangiana dovesse avere un andamento lineare in $\mathcal{G}$. Prendiamo in considerazione, allora, un tipo specifico di teorie, ossia le teorie $f(R, \mathcal{G})$, quelle teorie dipendenti dallo scalare di curvatura e dall'invariante di Gauss-Bonnet[7]. La scelta di queste teorie è dovuta al fatto che vengono inclusi, all'interno di f, tutti i termini relativi alla curvatura dello spazio-tempo; inoltre G, di cui già abbiamo esposto i benefici, appare quando si tentano di rinormalizzare le teorie quantistiche di campo. Non conosciamo, tuttavia, la dipendenza di f da queste grandezze e per via di ciò risulta difficile ricavare la lagrangiana e, di conseguenza, le equazioni del campo. Per poter ricavare la forma di f, quello che possiamo fare è utilizzare il teorema di Noether in modo simile a come abbiamo fatto per le equazioni di Einstein. In questo caso l'azione sarà

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \mathcal{G}), \tag{3.18}$$

dove $\kappa = 8\pi G_N$. Per il resto della trattazione assumeremo che $c = 1$. La metrica sulla quale intendiamo lavorare è una metrica cosmologica Friedman-Robertson-Walker (FRW) che sarà della forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{3.19}$$

dove il termine $a(t)$ prende il nome di fattore di scala. Tale separazione è dovuta al principio cosmologico e permette di riscrivere l'integrale (3.18) in termini della componente temporale dt. Introduciamo poi anche due moltiplicatori di Lagrange λ_1 e λ_2 che pongono dei vincoli sulla metrica, a partire dai valori di R e $\mathcal{G}$ in termini della metrica FRW

$$\bar{R} = 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \qquad \bar{\mathcal{G}} = 24\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3}. \tag{3.20}$$

L'azione così ottenuta sarà

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int dt \sqrt{-g}[f(R, \mathcal{G}) - \lambda_1(R - \bar{R}) - \lambda_2(\mathcal{G} - \bar{\mathcal{G}})]. \tag{3.21}$$

I moltiplicatori di Lagrange si ottengono facendo variare l'azione rispetto a R e $\mathcal{G}$ e hanno la forma

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial R} = f_R \qquad \lambda_2 = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}} = f_{\mathcal{G}}. \tag{3.22}$$

A questo punto bisogna calcolare $\sqrt{-g}$. Esso nella metrica FRW vale a^3, e a partire da ciò è possibile riscrivere l'azione

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int dt\Big[a^3 f - a^3 f_R R + 6 f_R\Big(\dot{a}^2 a + \ddot{a}a^2\big) - a^3 f_{\mathcal{G}}\mathcal{G} + 24 f_{\mathcal{G}}\dot{a}^2\ddot{a}]. \tag{3.23}$$

È possibile eliminare le derivate seconde di a utilizzando l'integrazione per parti e ottenendo, di conseguenza, le derivate prime di R e $\mathcal{G}$ rispetto a t. La lagrangiana che otteniamo in definitiva è

$$L = a^3(f - \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - Rf_R) - 6af_R\dot{a}^2 - 6a^2 f_{R\mathcal{G}}\dot{a}\dot{\mathcal{G}} - 6a^2 f_{RR}\dot{a}\dot{R} - 8f_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\dot{a}^3\dot{\mathcal{G}} - 8f_{R\mathcal{G}}\dot{a}^3\dot{R}. \tag{3.24}$$

Adesso quello che dobbiamo fare è seguire un procedimento analogo a quello utilizzato per le equazioni di Einstein. Innanzitutto osserviamo che lo spazio delle configurazioni ora è $\mathcal{Q} = \{a, R, \mathcal{G}\}$ mentre il fibrato tangente è $T\mathcal{Q} = \{a, \dot{a}, R, \dot{R}, \mathcal{G}, \dot{\mathcal{G}}\}$ e a partire da questo possiamo ottenere la forma del generatore di una trasformazione generica

$$\boldsymbol{X} = \xi(t, a, R, \mathcal{G})\partial_t + \eta_a(t, a, R, \mathcal{G})\partial_a + \eta_R(t, a, R, \mathcal{G})\partial_R + \eta_{\mathcal{G}}(t, a, R, \mathcal{G})\partial_{\mathcal{G}}, \tag{3.25}$$

dove $\xi = \frac{\partial F}{\partial t}, \eta_a = \frac{\partial F}{\partial a}, \eta_R = \frac{\partial F}{\partial R}$ e $\eta_{\mathcal{G}} = \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}}$ e F rappresenta la trasformazione del tempo e delle variabili a, R e $\mathcal{G}$. Riscriviamo il teorema di Noether in una forma più adatta ai nostri scopi:
Teorema: Se esiste una funzione $g(t, q^i)$ tale che

$$\left[\boldsymbol{X} + \frac{d\eta^i}{dt} - \dot{q}^i\frac{d\xi}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right]L + L\frac{d\xi(t, q^i)}{dt} = \frac{dg(t, q^i)}{dt}, \tag{3.26}$$

allora le equazioni di Eulero-Lagrange sono invarianti per gruppi di diffeomorfismi ad un parametro, con $\boldsymbol{X}$ come generatore di Noether.
Allora, nell'applicare il teorema di Noether, si possono ottenere le forme delle componenti del generatore della trasformazione cosicché si possa ricavare la forma di $\boldsymbol{X}$ e della lagrangiana a partire dalla forma di f. Innanzitutto è necessario ottenere un sistema di equazioni differenziali con variabili ξ e le η_i. Il sistema risultante è un sistema di 27 equazioni differenziali alle derivate parziali per poter trovare la forma del vettore generatore. Per quanto riguarda la funzione $g(t, q^i)$ supporremo che essa sia costante a meno che non venga specificato esplicitamente il contrario. D'ora in poi le quantità c_i che appariranno sono costanti di integrazione. Le teorie $f(R, \mathcal{G})$ si dividono in diversi tipi, a seconda dei valori delle derivate di f. La distinzione maggiore tra queste varie teorie le vede divise in due classi, quelle per le quali $f_{R\mathcal{G}}$ si annulla e quelle per le quali non si annulla. Iniziamo da queste ultime:

- Se $f_{R\mathcal{G}} \neq 0$ abbiamo una distinzione per
  - Se $f_{RR} \neq 0$ possiamo avere

* $c_1 \neq c_2$ allora

$$f(R,\mathcal{G}) = R^{\frac{c_1+3c_2}{2c_1}} \tilde{f}\left(\frac{\mathcal{G}}{R^2}\right) + \frac{c_4}{3(c_2-c_1)}\mathcal{G}, \tag{3.27}$$

dove $\tilde{f}$ è una generica funzione di $\mathcal{G}/R^2$. In questo caso il generatore della simmetria è (scritto in forma differenziale):

$$\boldsymbol{X} = (c_1 t + c_3)\partial_t + c_2 a \partial_a - 2c_1 R \partial_R - 4c_1 \mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}. \tag{3.28}$$

* $c_1 = c_2$ allora

$$f(R,\mathcal{G}) = R^2 \tilde{f}\left(\frac{\mathcal{G}}{R^2}\right) - \frac{c_4 \mathcal{G} \ln R}{2c_1} \tag{3.29}$$

e la simmetria è

$$\boldsymbol{X} = (c_1 t + c_3)\partial_t + c_1 a \partial_a - 2c_1 R \partial_R - 4c_1 \mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}, \tag{3.30}$$

uguale quindi al caso per $c_1 \neq c_2$.

– Se $f_{RR} = 0$, la funzione sarà per forza della forma $f(R,\mathcal{G}) = f_1(\mathcal{G}) + + R f_2(\mathcal{G})$ e anche in questo caso possiamo avere vari casi

* Se $c_1 = 0$ possiamo avere una sola simmetria data da

$$\boldsymbol{X} = c_3 \partial_t \tag{3.31}$$

il cui integrale primo associato è l'hamiltoniana.

* Se $c_1 \neq 0$ abbiamo ancora altri due casi

· Se $c_1 \neq c_2$ allora

$$f(R,\mathcal{G}) = \frac{c_4}{3(c_2-c_1)}\mathcal{G} + c_5 \mathcal{G}^{\frac{c_1+3c_2}{4c_1}} + c_6 R \mathcal{G}^{\frac{3c_2-c_1}{4c_1}} \tag{3.32}$$

e la simmetria è la (3.28).

· Se $c_1 = c_2$ la funzione sarà

$$f(R,\mathcal{G}) = -\frac{c_4 \mathcal{G} \ln \mathcal{G}}{4c_1} + c_5 \mathcal{G} + c_6 \sqrt{\mathcal{G}} R \tag{3.33}$$

e la simmetria è la (3.30).

- Se invece $f_{R\mathcal{G}} = 0$ abbiamo un'altra classe di teorie per le quali $f(R,\mathcal{G}) = f_1(R) + f_2(\mathcal{G})$. Anche in questo caso bisognerà fare varie distinzioni. Iniziamo da

– Se $f_1''(R) \neq 0$ abbiamo un'ulteriore suddivisione in

* Teorie per le quali $f_2''(\mathcal{G})$, allora in questo caso

- · Se $c_1 \neq c_2$ e $c_2 \neq -\frac{c_1}{3}$ la teoria ha come funzione

$$f(R,\mathcal{G}) = \frac{c_4\mathcal{G}}{3c_2 - 3c_1} + c_5 R^{\frac{c_1+3c_2}{2c_1}} + c_6\mathcal{G}^{\frac{c_1+3c_2}{4c_1}} \tag{3.34}$$

e la simmetria è sempre la (3.28).

- · Se $c_1 = c_2$ la teoria ha come funzione

$$f(R,\mathcal{G}) = \frac{-c_4\mathcal{G}\ln\mathcal{G}}{4c_1} + c_5R^2 + c_6\mathcal{G} \tag{3.35}$$

e la simmetria è ovviamente la (3.30).

- · Abbiamo poi una teoria per $c_2 = -\frac{c_1}{3}$ per la quale

$$f(R,\mathcal{G}) = -\frac{c_4}{4c_1}\mathcal{G} + \frac{c_5}{2c_1}\ln\left(\frac{\sqrt{\mathcal{G}}}{R}\right) + c_6. \tag{3.36}$$

In questo caso la simmetria è

$$\boldsymbol{X} = (c_1t + c_3)\partial_t - \frac{c_1}{3}a\partial_a - 2c_1R\partial_R - 4c_1\mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}. \tag{3.37}$$

∗ Se invece $f_2''(\mathcal{G}) = 0$ allora f deve essere scritto come $f(R,\mathcal{G}) = f_1(R) + c_1\mathcal{G} + c_2$ e il sistema si riduce a 3 equazioni. Tuttavia esso non è risolvibile per $f_1(R)$ arbitrario.

– Se $f_1''(R) = 0$ allora possiamo scrivere $f_1(R) = c_5R + c_6$ e possiamo fare le distinzioni per

∗ Teorie dipendenti dallo scalare di Ricci in cui $c_5 \neq 0$ come la Relatività Generale, nel qual caso otteniamo

- · Se $f_2''(\mathcal{G}) \neq 0$ abbiamo come sempre due casi

1. Se $c_1 \neq 0$ la funzione è

$$f(R,\mathcal{G}) = c_5R - \frac{c_4}{2c_1}\mathcal{G} + c_7\sqrt{\mathcal{G}} \tag{3.38}$$

che ammette come simmetria

$$\boldsymbol{X} = (c_1t + c_3)\partial_t + \frac{c_1}{3}a\partial_a - 4c_1\mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}. \tag{3.39}$$

2. Se invece $c_1 = 0$ la teoria ci fornisce $f(R,\mathcal{G}) = c_5R + c_6 + f_2(\mathcal{G})$ e l'unica simmetria che ammette è $\boldsymbol{X} = c_3\partial_t$ con l'hamiltoniana che è l'unica costante del moto.

- · Se invece $f_2''(\mathcal{G}) = 0 \Rightarrow f_2(\mathcal{G}) = c_7\mathcal{G}$ abbiamo due casi che sono

1. Il caso in cui $c_6 \neq 0$ e la teoria ha la forma

$$f(R,\mathcal{G}) = c_5R + c_6 + c_7\mathcal{G} \tag{3.40}$$

e la simmetria è

$$\boldsymbol{X} = \left[\frac{a}{3}\left(c_3 \sin\left(\frac{t}{c_0}\right) + c_2 \cos\left(\frac{t}{c_0}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(c_4 \sin\left(\frac{t}{2c_0}\right) + c_8 \cos\left(\frac{t}{2c_0}\right)\right)\right]\partial_a +$$

$$+\left[c_1 - c_0\left(c_2 \sin\left(\frac{t}{c_0}\right) + c_3 \cos\left(\frac{t}{c_0}\right)\right)\right]\partial_t \tag{3.41}$$

con $c_0 = \sqrt{\frac{2c_5}{3c_6}}$ e ridefinisce le costanti di integrazione. Un'importante osservazione è che queste condizioni portano la funzione g, definita precedentemente ad essere non costante ed assume la forma

$$g(a,t) = 2\sqrt{c_5 c_6}\left[\sqrt{6}a^{\frac{3}{2}}\left(c_8 \sin\left(\frac{t}{2c_0}\right) - c_4 \cos\left(\frac{t}{2c_0}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{3}}a^3\left(c_2 \sin\left(\frac{t}{2c_0}\right) - c_3 \cos\left(\frac{t}{2c_0}\right)\right)\right] + g_0. \tag{3.42}$$

2. Se invece $c_6 = 0$ la teoria non è altro che la teoria di Einstein-Hilbert più un termine invariante, ossia l'invariante di Gauss-Bonnet. In questo caso la funzione diventa $f(R,\mathcal{G}) = c_5 R + c_7\mathcal{G}$. Il termine di Gauss-Bonnet non porta alcun contributo alla dinamica dello spazio-tempo quadridimensionale e il vettore di Noether assume la forma

$$\boldsymbol{X} = (t(c_1 t + c_2) + c_3)\partial_t + \left(\frac{1}{3}a(2c_1 t + c_2) + \frac{c_4 t + c_8}{\sqrt{a}}\right)\partial_a \tag{3.43}$$

e anche in questo caso la funzione g non è costante ma vale

$$g(a) = -8a^{\frac{3}{2}}c_4 c_5 - \frac{8}{3}a^3 c_1 c_5 + g_0. \tag{3.44}$$

* Teorie che invece non contengono lo scalare di Ricci, ossia $c_5 = 0$. In questo caso $f(R,\mathcal{G}) = c_6 + f_2(\mathcal{G})$. In questo caso ci soffermeremo solo su teorie con $f_2''(\mathcal{G}) \neq 0$, in quanto, essendo $\mathcal{G}$ un invariante topologico, esso non contribuirebbe all'azione se apparissero solo termini lineari in $\mathcal{G}$ in $f(R,\mathcal{G})$. Consideriamo quindi

  · Se $c_1 \neq c_2$ allora

$$f(R,\mathcal{G}) = c_7\mathcal{G}^{\frac{c_1+3c_2}{4c_1}} + \frac{c_4}{3(c_2 - c_1)}\mathcal{G} \tag{3.45}$$

  e la simmetria associata è

$$\boldsymbol{X} = (tc_1 + c_3)\partial_t + c_2 a\partial_a - 4c_1\mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}. \tag{3.46}$$

· Infine se $c_2 = c_1$ la teoria ha la forma

$$f(R,\mathcal{G}) = c_7\mathcal{G} - \frac{c_4}{4c_1}\mathcal{G}\ln\mathcal{G} \tag{3.47}$$

e il generatore è

$$\boldsymbol{X} = (tc_1 + c_3)\partial_t + c_1 a\partial_a - 4c_1\mathcal{G}\ln\mathcal{G}. \tag{3.48}$$

Abbiamo quindi visto che, a partire dal teorema di Noether, è possibile trovare delle simmetrie a partire dalla funzione $f(R,\mathcal{G})$ presa in questione. Si osservi che ovviamente il tutto comporta la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali che porta ad una descrizione attraverso i generatori delle simmetrie, i quali hanno forme diverse per quasi ogni teoria. E' interessante notare come in alcuni casi la simmetria porta semplicemente alla conservazione dell'energia. In generale risulta anche molto utile trovare le forme dei vari integrali primi a partire dalle simmetrie del sistema. Il motivo è che sostanzialmente per risolvere specifici sistemi dinamici è essenziale il ruolo delle simmetrie nell'abbassare l'ordine del sistema di equazioni. Allora quello che ci proponiamo di fare è calcolare, a partire dalle simmetrie, gli invarianti necessari per i sistemi dinamici. Questi invarianti saranno ovviamente di ordine zero e dipenderanno dal tipo di teoria presa in considerazione. I vari vettori di Noether ottenuti sono tutti molto simili tra di loro, indipendentemente dalla particolare teoria $f(R,\mathcal{G})$ presa in considerazione. Consideriamo allora innanzitutto il sistema lagrangiano

$$\frac{dt}{c_1 t} = \frac{da}{c_2 a} = -\frac{dR}{2c_1 R} = -\frac{d\mathcal{G}}{4c_1\mathcal{G}}, \tag{3.49}$$

il quale, una volta risolto rispetto a $a(t)$, $R(t)$ e $\mathcal{G}(t)$, fornisce le forme delle varie grandezze da cui dipende la lagrangiana. Le equazioni, risolvibili banalmente per separazione di variabili, danno

$$a(t) = a_0 t^{\frac{c_2}{c_1}}, \quad R(t) = \frac{r_0}{t^2}, \quad \mathcal{G}(t) = \frac{g_0}{t^4}, \tag{3.50}$$

dove a_0, r_0 e g_0 sono costanti. A partire da queste grandezze è possibile ottenere la lagrangiana e, di conseguenza, le equazioni di Eulero-Lagrange. Calcoleremo, dunque, sia la forma di $\tilde{f}(\frac{\mathcal{G}}{R^2})$ che la forma delle varie costanti di integrazione c_i. Vediamo alcune applicazioni di questo metodo alla metrica di Friedman-Robertson-Walker, in modo da ricavare alcuni modelli cosmologici.
Supponiamo allora di avere la funzione (3.27) Sostituita all'interno della lagrangiana iniziale ci permette di ottenere, a partire dalle equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili dello spazio delle configurazioni. Le equazioni ci permettono di ricavare anche le forme di R e $\mathcal{G}$ che ci danno proprio le espressioni ottenute attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Avremo in questo caso situazioni del tipo $a(t) = a_0 t^p$ se $c_2 = \frac{c_1(3p-1)}{3}$ e le soluzioni di de-Sitter $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ per $\tilde{f}(\frac{1}{6})$.
Sulla stessa riga possiamo calcolare anche il fattore di scala per la funzione (3.29)

nel qual caso la soluzione di de-Sitter è ottenuta per $c_4 = 0$, mentre le soluzioni del tipo $a(t) = a_0 t^p$ sono ottenute solo per specifici valori di $\tilde{f}$.
Per quanto riguarda i modelli descritti dalla funzione (3.32) abbiamo soluzioni in termini di potenze solo se abbiamo $c_2 = \frac{c_1(3p-1)}{3}$ e le soluzioni di de-Sitter per $c_6 = -\frac{c_5}{\sqrt{6}}$.
Per i modelli con funzione (3.33) abbiamo soluzioni di de-Sitter per $c_4 = 0$ e le soluzioni come potenze per

$$c_6 = \frac{c_4\sqrt{(p-1)p^3}(p+3)}{3\sqrt{6}c_1(p-1)p}. \tag{3.51}$$

Per i modelli con funzione (3.34) abbiamo soluzioni come potenze per $c_2 = c_1\frac{(3p-1)}{3}$ e le soluzioni di de-Sitter per $c_6 = -6^{(3c_2+c_1)/4c_1}c_5$.
Per i modelli con funzione (3.35) le soluzioni di tipo de-Sitter sono ottenute solo per $c_4 = 0$ mentre le soluzioni in potenze si ottengono per

$$c_4 = \frac{18c_5(2p-1)c_1}{p(p+3)}. \tag{3.52}$$

Per modelli con funzione (3.36) abbiamo soluzioni di de-Sitter se $c_6 = c_5\frac{\ln 6}{4c_1}$ e soluzioni in potenze per

$$c_6 = -\frac{c_5\left((4p^2-6p+2)\ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(p-1)p^3}}{p-2p^2}\right)+3p+1\right)}{4c_1(2p^2-3p+1)}. \tag{3.53}$$

Per il modello con funzione (3.38) abbiamo soluzioni di de-Sitter per $c_7 = -\sqrt{6}c_5$ e soluzioni in potenze per $c_7 = \sqrt{6}c_5\frac{p^3(p-1)}{p(p+1)}$.
Per il modello con funzione (3.45) abbiamo solo soluzioni come potenze per $c_2 = -\frac{c_1}{3}$ o $c_2 = c_1\frac{(3p-1)}{3}$
Infine il modello con funzione (3.47) ammette solo soluzioni con $p = -3$ e $p = \frac{4}{3}$
Abbiamo dunque trovato un'ulteriore applicazione del teorema di Noether. Esso non solo consente di abbassare l'ordine di un sistema di equazioni differenziali, ma permette anche di selezionare teorie fisiche a partire dalle simmetrie del sistema.

Capitolo 4

Applicazione del teorema di Noether alla cosmologia quantistica

Un'altra utile applicazione del teorema di Noether è quella di provvedere un sottoinsieme della soluzione generale dell'equazione di Wheeler-DeWitt nell'ambito della cosmologia quantistica. Anche in questo caso si osserva il grandissimo potenziale applicativo di questo teorema. Innanzitutto introduciamo alcuni concetti di cosmologia quantistica, partendo dalla formulazione hamiltoniana della relatività generale per poi costruire il concetto di superspazio e l'equazione di Wheeler-DeWitt.

4.1 Cosmologia Quantistica

4.1.1 Formulazione hamiltoniana della relatività generale

Innanzitutto bisogna ridefinire l'azione di Hilbert-Einstein per la formulazione lagrangiana della relatività generale. Essa può essere scritta come

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G_N}\int_V d^4x\sqrt{-g}[R(g)-2\Lambda] + \frac{1}{8\pi G_N}\int_{\partial V} d^3x\sqrt{h}K, \tag{4.1}$$

dove Λ è la costante cosmologica, K è la traccia del tensore di curvatura estrinseca $h^{ij}K_{ij}$ dell'ipersuperficie tridimensionale compatta ∂V immersa in una varietà V quadridimensionale e h è il determinante della metrica indotta sulla varietà tridimensionale. Il secondo termine viene introdotto per eliminare le derivate seconde della metrica dovute alle derivate delle connessioni affini. Il nostro intento è costruire un formalismo hamiltoniano della relatività generale che sia covariante. Per fare ciò è necessario eseguire una decomposizione della metrica in una varietà 3+1 dimensionale, data dal prodotto tra una varietà temporale e una spaziale, le cui coordinate descrivono la dinamica del sistema. Costruiamo allora uno spazio-tempo definito da una varietà $R \times M^3$ dove M^3 è una varietà compatta. Si può costruire una griglia di coordinate X^α con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ su questa varietà. Il nostro compito è quello di "fogliettare" lo spazio-tempo, suddividendolo in superfici di genere spazio in M^3 a tempi diversi. Eseguiamo una trasformazione di coordinate

$$X^\alpha = X^\alpha(x^0, x^i) \tag{4.2}$$

dove sono state separate le varie coordinate. Infatti abbiamo costruito ipersuperfici in tre dimensioni date dalle coordinate x^i a diversi valori di x^0. Questo fogliettamento porta alla costruzione di una base vettoriale data dai versori tangenti X_i^α, situati sull'ipersuperficie spaziale e da un versore normale queste ipersuperfici n^α. I versori dovranno rispettare le condizioni

$$g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0 \qquad g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1. \tag{4.3}$$

Definiamo il vettore di deformazione

$$N^\alpha \equiv N n^\alpha = \partial_0 X^\alpha(x^0, x^i), \tag{4.4}$$

che connette due punti con le stesse coordinate a due istanti di tempo x^0 e $x^0 + dx^0$ diversi. Esso dovrà ovviamente tenere conto sia della variazione sulla superficie che dello spostamento locale. Può allora essere riscritto come

$$N^\alpha \equiv N n^\alpha + N^i X_i^\alpha. \tag{4.5}$$

Le funzioni N e N^j si chiamano rispettivamente funzione di lapse e di shift. Per la metrica dovremo ovviamente fare una suddivisione tra la metrica di M^3 e la metrica totale della varietà. Innanzitutto descriviamo la metrica sull'ipersuperficie come

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}\Big(X^\alpha(x^s; x^0)\Big) X_i^\mu X_j^\nu. \tag{4.6}$$

Questa metrica permette di descrivere la geometria intrinseca della superficie tridimensionale e può anche essere riscritta attraverso le g_{ij} e le n_i come

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j. \tag{4.7}$$

E dunque, se il versore normale alla superficie è di tipo tempo, si ottiene

$$h_{ij} = g_{ij}. \tag{4.8}$$

A questo punto quello che si può fare è sfruttare le relazioni definite prima per i versori, le definizioni di h_{ij}, N e N^j per riscrivere la metrica spazio-temporale in forma differenziale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \tag{4.9}$$

in termini delle variabili spazio-temporali

$$ds^2 = -(N^2 - N^j N_j)dt^2 + 2N^i dx_i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \tag{4.10}$$

Questa forma della metrica è detta forma ADM (Arnowitt-Deser-Misner) ed ha segnatura (-,+,+,+). Attraverso questa metrica è possibile riscrivere l'azione di Hilbert-Einstein come

$$S(N, N^j, h_{ij}) = \int N dt d^3x \mathcal{L}. \tag{4.11}$$

In questo caso $\mathcal{L}$ è la densità di lagrangiana ed è data da

$$\mathcal{L}(N, N_i, h_{ij}) = \frac{\sqrt{h}N(K_{ij}K^{ij} - K^2 +^{(3)} R)}{16\pi G_N} + t.s. \tag{4.12}$$

dove

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N}(N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij}) \tag{4.13}$$

rappresenta la curvatura estrinseca del singolo foglio, $^{(3)}R$ è la curvatura intrinseca del singolo foglio e invariante per diffeomorfismi e $t.s.$ sono i termini di superficie che possono essere scritti esplicitamente come

$$t.s. = -2\frac{[\partial_0(\sqrt{h}K) + \partial_i(\sqrt{h}h^{ij}N_{,j} - \sqrt{h}KN^i)]}{16\pi G_N}. \tag{4.14}$$

Inoltre il punto rappresenta la derivata parziale sul singolo foglio mentre | rappresenta la derivata covariante sempre sul singolo foglio. In questo caso la densità di lagrangiana è costituita da un termine cinetico che è dato dalla curvatura estrinseca e un termine di potenziale dato dalla curvatura intrinseca. Le equazioni del moto sono invarianti per l'aggiunta di una 4-divergenza alla densità di lagrangiana. A partire dalla densità di lagrangiana si possono definire i momenti coniugati dati da

$$\pi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0, \tag{4.15}$$

$$\pi^i \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}_i} = 0, \tag{4.16}$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N}(h^{ij}K - K^{ij}. \tag{4.17}$$

I primi due momenti sono anche detti vincoli primari del sistema. Per quanto riguarda la densità di Hamiltoniana essa può essere ottenuta come

$$\mathcal{H} = \pi_{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}. \tag{4.18}$$

Tenendo conto di queste considerazioni, l'azione può anche essere scritta come

$$S(\pi^{ij}, h_{ij}, N, N^i) = \int dt d^3x (\pi_{ij}\dot{h}_{ij} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i), \tag{4.19}$$

con

$$\mathcal{H}_0 \equiv \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N}(K_{ij}K^{ij} - K^2 -^{(3)} R) =$$

$$= \frac{16\pi G_N}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{il}hkl)\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{h}\frac{^{(3)}R}{16\pi G_N} \equiv$$

$$\equiv 16\pi G_N G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{h}\frac{^{(3)}R}{16\pi G_N} \tag{4.20}$$

e

$$\mathcal{H}_i \equiv 2\frac{\pi^{j}_{i|j}}{16\pi G_N}. \tag{4.21}$$

Attraverso i vincoli primari, che devono sempre valere, si ottiene anche $\dot{\pi} = \dot{\pi}_i = 0$ e quindi

$$\dot{\pi} = -\{H, \pi\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0, \tag{4.22}$$

$$\dot{\pi}_i = -\{H, \pi_i\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0. \tag{4.23}$$

A partire da questi vincoli otteniamo i vincoli secondari o "dinamici"

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = 0. \tag{4.24}$$

Questi vincoli sono l'analogo hamiltoniano delle prime due equazioni di Einstein nel vuoto $G_{00} = G_{i0} = 0$. Le altre equazioni possono essere ottenute attraverso gli altri momenti, riscrivendo le equazioni canoniche

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}, \tag{4.25}$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ij}}. \tag{4.26}$$

.

4.1.2 Quantizzazione canonica ed equazione di Wheeler-DeWitt

Il primo passo per la quantizzazione canonica è trasformare le nostre variabili hamiltoniane in operatori che rispettino le regole di commutazione di Heisenberg. Avremo dunque

$$[\hat{h}_{ij}(\boldsymbol{x}), \hat{\pi}^{kl}(\boldsymbol{x}')] = i\delta_{ij}{}^{kl}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), \tag{4.27}$$

$$[\hat{h}_{ij}, \hat{h}_{kl}] = 0, \tag{4.28}$$

$$\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl} = 0, \tag{4.29}$$

dove $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in M^3$ e

$$\delta_{ij}{}^{kl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_i{}^k\delta_j{}^l + \delta_i{}^l\delta_j{}^k). \tag{4.30}$$

A partire da ciò si ricava una descrizione operatoriale anche di $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_i$, i quali agiranno su di uno stato $|\Psi\rangle$. I vincoli dinamici diventano allora

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \,|\Psi\rangle = 0 \qquad \hat{\mathcal{H}}_i \,|\Psi\rangle = 0. \tag{4.31}$$

Questi vincoli consentono di scegliere quali stati fisici sono permessi. Per la rappresentazione operatoriale si utilizza la cosiddetta rappresentazione metrica con

$$\hat{h}_{ij} = h_{ij}, \tag{4.32}$$

$$\hat{\pi} = -i\frac{\delta}{\delta N}, \tag{4.33}$$

$$\hat{\pi}^i = -i\frac{\delta}{\delta N_i}, \tag{4.34}$$

$$\hat{\pi}^{ij} = -i\frac{\delta}{\delta h_{ij}}. \tag{4.35}$$

Attraverso questa procedura abbiamo ottenuto un funzionale $|\Psi\rangle$ nello spazio delle configurazioni metriche h_{ij} che descrive lo stato del campo gravitazionale come un vettore in questo spazio. Questa procedura ci ha portato ad un funzionale che non dipende esplicitamente dal tempo. Questo, che potrebbe sembrare un problema, dato che ci fornirebbe universi stazionari, è in realtà da intendersi in modo diverso. Il tempo non diventa altro che un termine che ci serve ad etichettare i gradi di libertà, senza tuttavia avere un effettivo significato fisico ed è da intendersi come già incluso nel tensore metrico h_{ij} in quanto il fogliettamento ci dà già un informazione sullo specifico istante di tempo nel quale viene studiata una determinata ipersuperficie tridimensionale. Questo inoltre porta il sistema a 6 gradi di libertà (dovuti alla simmetria della metrica) che possono essere ridotti a 2 in quanto

- 3 variabili possono essere eliminate attraverso una trasformazione di gauge.
- un'altra variabile è costituita dal tempo.

C'è tuttavia da dire che l'assenza del tempo in questo formalismo porta ad alcuni problemi dovuti al ruolo fondamentale che ha il tempo nella covarianza generale della teoria einsteiniana. Il fogliettamento porta ad una separazione di variabili spaziali e temporali che ha come conseguenza il non poter verificare l'equivalenza di due teorie su fogliettamenti diversi. Un altro problema è l'impossibilità di definire l'energia dell'universo. Essa può essere definita unicamente per universi asintoticamente piatti. Il motivo di questo problema sta nel fatto che l'energia è una grandezza invariante strettamente legata all'invarianza dello spazio-tempo per traslazioni temporali. Anche definendo l'operatore hamiltoniano come quell'operatore che permette il passaggio da un foglio ad un altro è impossibile definire un autostato fondamentale di questo operatore a causa dell'impossibilità nel trovare un fogliettamento su cui

costruire un'hamiltoniana indipendente dal tempo.
Le equazioni dei vincoli nella rappresentazione metrica si possono scrivere come

$$\left[16\pi G_N\nabla^2+\frac{\sqrt{h}^{(3)}R}{16\pi G_N}\right]\Psi[h_{ij}]=0, \tag{4.36}$$

dove il laplaciano è dato da

$$\nabla^2\equiv G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\frac{\delta}{\delta h_{kl}}+\gamma_{ij}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \tag{4.37}$$

per $\mathcal{H}_0$. Per quanto riguarda il coefficiente γ_{ij} esso dipende dalla scelta dell'ordinamento dei fattori.
Questa equazione è detta equazione di Wheeler-DeWitt e la sua soluzione $\Psi[h_{ij}]$ è detta funzionale d'onda dell'universo il quale ci fornisce informazioni riguardanti lo stato nel quale si trova l'universo. Il funzionale d'onda può variare tra tutte le possibili configurazioni dello spazio-tempo, descritto da tutti i tipi di 3-metriche h_{ij}.
Lo spazio di tutte le configurazioni dell'universo è detto superspazio e si indica come $S=\mathcal{G}=Riem(M^3)$. Si osservi che il superspazio dovrebbe essere dato da tutte le possibili metriche di M^3, tuttavia queste sono invarianti per diffeomorfismi, il che porta a riscrivere il superspazio come $S=\frac{\mathcal{G}}{Diff(M^3)}$. È possibile poi, a partire dal superspazio, costruire i minisuperspazi, restrizioni del superspazio con simmetrie fissate a priori. Un esempio è un minisuperspazio ottenuto scegliendo metrica e campi materiali isotropi e omogenei. La conseguenza è una funzione di lapse $N(t)$ omogenea e funzioni di shift N^i nulle. La metrica diventa allora

$$ds^2=-N^2(t)dt^2+h_{ij}(\boldsymbol{x},t)dx^idx^j. \tag{4.38}$$

L'azione può invece essere riscritta come

$$\mathcal{S}=\frac{m_P^2}{16\pi}\int dtd^3xN\sqrt{h}\Big[K_{ij}K^{ij}-K^2+^{(3)}R-2\Lambda\Big]. \tag{4.39}$$

4.2 Approccio di Noether in cosmologia

Come abbiamo detto il teorema di Noether permette di ricavare soluzioni per l'equazione di Wheeler-DeWitt[8]. Questo può essere fatto attraverso una ricerca delle quantità conservate che consentano di semplificare il sistema dinamico datoci da quest'equazione.
Ricordiamo che i momenti coniugati sono costanti del moto se vale $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}}=0$. Di conseguenza, se il minisuperspazio che prendiamo in considerazione presenta m simmetrie allora potremo avere

$$\pi_1\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}_1}=\Sigma_1,$$

$$\pi_2\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}_1}=\Sigma_2, \tag{4.40}$$

$$...$$

Ricordando la procedura di quantizzazione canonica otteniamo

$$-i\partial_1 |\Psi\rangle = \Sigma |\Psi\rangle ,$$

$$-i\partial_1 |\Psi\rangle = \Sigma |\Psi\rangle , \tag{4.41}$$

$$...$$

Queste relazioni non sono altro che traslazioni lungo l'asse Q^j date dalle simmetrie corrispondenti. Ad ognuna di queste traslazioni associamo l'invarianza dell'azione e la conservazione delle variabili Σ_j. Queste simmetrie ci portano ad un andamento oscillatorio attorno all'equilibrio per la funzione d'onda, dandoci una forma del tipo

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{m} e^{i\Sigma_j Q^j} |\chi(Q^l)\rangle , \tag{4.42}$$

dove m è il numero di simmetrie del sistema, l le direzioni senza simmetrie e n la dimensione del minisuperspazio. Questo porta alla conclusione che tramite delle simmetrie di Noether possiamo scegliere funzionali d'onda, soluzioni dell'equazione di Wheeler-DeWitt, con comportamento oscillatorio. L'oscillazione del funzionale ovviamente dipenderà dalla forma delle grandezze conservate rispetto alle varie simmetrie. C'è inoltre da dire che, se esiste un sottoinsieme di soluzioni dell'equazione di Wheeler-DeWitt con comportamento oscillatorio allora sono presenti delle simmetrie nel minisuperspazio e, di conseguenza, delle quantità conservate. Un criterio molto importante in cosmologia quantistica, detto criterio di Hartle, afferma che:

Un universo osservabile classico è soluzione della dinamica se si trovano correlazioni tra le varie grandezze fisiche. Questo avviene se il funzionale d'onda dell'universo è particolarmente piccato attorno ad una certa regione dello spazio delle configurazioni.

Questo criterio permette di recuperare l'aspetto probabilistico tipico della meccanica quantistica. Infatti in questo caso l'approccio quantistico si applica ad un solo sistema e non ad un ensemble. C'è anche da notare che un funzionale piccato come previsto dal criterio di Hartle si può ottenere se si considera un funzionale oscillatorio, come quello ottenuto col teorema di Noether. Dunque c'è una stretta correlazione tra il teorema di Noether e il criterio di Hartle. Tenteremo adesso di applicare il teorema di Noether ad alcune teorie in particolare, osserveremo la forma dei funzionali e quanto esse siano in accordo con il criterio di Hartle. L'approccio verrà eseguito attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che permette di modificare la dinamica, scegliendo le forme dei potenziali efficaci. Inoltre mostreremo come l'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange consenta di trovare le simmetrie di Noether all'interno di un minisuperspazio.

4.2.1 Cosmologia Scalar-Tensoriale

Una teoria scalar-tensoriale è una teoria nella quale includiamo sia un potenziale scalare che un potenziale tensoriale. Anche nel caso della gravità si può costruire una teoria di questo tipo. La generica azione per teorie gravitazionali di questo tipo è

$$\mathcal{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[F(\phi)R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu - V(\phi)\right], \tag{4.43}$$

dove $F(\phi)$ è l'accoppiamento tra i campi e $V(\phi)$ il potenziale del campo scalare. La lagrangiana per un minisuperspazio di tipo FRW è

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2F(\phi) + 6a^2\dot{a}F'(\phi) - 6kaF(\phi) + a^3\left[\frac{\dot{\phi}}{2} - V(\phi)\right], \tag{4.44}$$

dove k è la curvatura spaziale. Lo spazio delle configurazioni di questo spazio è $\mathcal{Q} = a, \phi$ e dunque abbiamo un minisuperspazio bidimensionale. La lagrangiana è definita sul fibrato tangente, scriviamo dunque il generatore infinitesimale come

$$\boldsymbol{X} = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \tag{4.45}$$

con α e β dipendenti da a e ϕ mentre $\dot{\alpha} = (\frac{\partial\alpha}{\partial a})\dot{a} + (\frac{\partial\alpha}{\partial\phi})\dot{\phi}$ e $\dot{\beta} = (\frac{\partial\beta}{\partial a})\dot{a} + (\frac{\partial\beta}{\partial\phi})\dot{\phi}$. A partire da questo è possibile ottenere un sistema di equazioni parziali attraverso il quale si determina $F(\phi)$ e $V(\phi)$

$$aF(\phi)\left[\alpha + 2a\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right] + aF'(\phi)\left[\beta + a\frac{\partial\beta}{\partial a}\right] = 0, \tag{4.46}$$

$$3\alpha + 12F'(\phi)\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} + 2a\frac{\partial\beta}{\partial\phi} = 0, \tag{4.47}$$

$$\alpha\beta F''(\phi) + \left[2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial\phi}\right]F'(\phi) + 2\frac{\partial a}{\partial\phi}F(\phi) + \frac{a^2}{6}\frac{\partial\beta}{\partial a} = 0, \tag{4.48}$$

$$[3\alpha V(\phi) + a\beta V'(\phi)]a^2 + 6k[\alpha F(\phi) + a\beta F'(\phi)] = 0. \tag{4.49}$$

Da queste equazioni otteniamo, per spazi a curvatura nulla ($k = 0$), i valori di α, β, $F(\phi)$ e $V(\phi)$

$$\alpha = -\frac{2}{3}p(s)\beta_0a^{s+1}\phi^{m(s)-1}, \tag{4.50}$$

$$\beta = \beta_0a^s\phi^{m(s)}, \tag{4.51}$$

$$F(\phi) = D(s)\phi^2, \tag{4.52}$$

$$V(\phi) = \lambda\phi^{2p(s)}, \tag{4.53}$$

dove

$$D(s) = \frac{(2s+3)^2}{48(s+1)(s+2)}, \tag{4.54}$$

$$p(s) = \frac{3(s+1)}{2s+3}, \tag{4.55}$$

$$m(s) = \frac{2s^2+6s+3}{2s+3}, \tag{4.56}$$

con s e λ parametri liberi. Possiamo eseguire un cambiamento di coordinate così ottenendo

$$w = \sigma_0 a^3 \phi^{2p(s)}, \qquad z = \frac{3}{\beta_0 \chi(s)} a^{-s} \phi^{1-m(s)}, \tag{4.57}$$

con σ_0 che è una costante di integrazione e

$$\chi(s) = -\frac{6s}{2s+3}. \tag{4.58}$$

In queste condizioni la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = \gamma(s) w^{\frac{s}{3}} \dot{z}\dot{w} - \lambda w, \tag{4.59}$$

con

$$\gamma(s) = \frac{2s+3}{12\sigma_0^2(s+2)(s+1)}. \tag{4.60}$$

I momenti coniugati saranno

$$\pi_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \gamma(s) w^{\frac{s}{3}} \dot{w}, \qquad \pi_w = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} = \gamma(s) w^{\frac{s}{3}} \dot{z}. \tag{4.61}$$

L'hamiltoniana sarà, invece,

$$\mathcal{H}_0 \frac{\pi_z \pi_w}{\gamma(s) w^{\frac{s}{3}}} + \lambda w. \tag{4.62}$$

Osserviamo che z è una coordinata ciclica, di conseguenza abbiamo una simmetria di Noether data da

$$\pi_z = \Sigma_0. \tag{4.63}$$

Attraverso la quantizzazione l'equazione di Wheeler-DeWitt $\hat{H} |\Psi\rangle = 0$ diventa

$$[(i\partial_z)(i\partial_w) + \bar{\lambda} w^{1+\frac{s}{3}}] |\Psi\rangle = 0, \tag{4.64}$$

con $\bar{\lambda} = \gamma(s)\lambda$. La simmetria diventa, invece

$$-i\partial_z |\Psi\rangle = \Sigma_0 |\Psi\rangle \tag{4.65}$$

e l'ordine del sistema si riduce di uno. Risolvendo l'equazione attraverso una semplice integrazione otteniamo

$$|\Psi\rangle = |\Omega(w)\rangle |\chi(z)\rangle \propto e^{\Sigma_0 z} e^{-i\bar{\lambda} w^{2+s/3}}, \tag{4.66}$$

che è una funzione oscillante in accordo con il criterio di Hartle. Nel limite semi-classico otteniamo due integrali del moto, ossia Σ_0 e l'hamiltoniana. Possiamo inoltre ottenere le traiettorie classiche nello spazio delle configurazioni $\bar{\mathcal{Q}} \equiv \{w, z\}$

$$w(t) = [k_1 t + k_2]^{\frac{3}{s+3}}, \tag{4.67}$$

$$z(t) = [k_1 t + k_2]^{\frac{s+6}{s+3}} + z_0, \tag{4.68}$$

e ritornando allo spazio $\mathcal{Q} \equiv \{a, \phi\}$ riotteniamo il comportamento cosmologico classico

$$a(t) = a_0(t - t_0)^{l(s)}, \tag{4.69}$$

$$\phi(t) = \phi_0(t - t_0)^{q(s)}, \tag{4.70}$$

con

$$l(s) = \frac{2s^2 + 9s + 6}{s(s+3)} \qquad q(s) = -\frac{2s+3}{s} \tag{4.71}$$

e dunque il criterio di Hartle seleziona universi classici.

4.2.2 Cosmologia $f(R)$

Possiamo ottenere risultati simili a quelli ottenuti per la teoria scalar-tensoriale anche per minisuperspazi a dimensioni maggiori. Consideriamo ad esempio un minisuperspazio di dimensione 4 con azione dipendente dallo scalare di Ricci R

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \tag{4.72}$$

che può essere riscritta come una metrica FRW

$$\mathcal{S} = \int dt \mathcal{L}(a, \dot{a}, R, \dot{R}), \tag{4.73}$$

dove il punto rappresenta la derivazione rispetto al tempo cosmologico. La dipendenza di R da a, $\dot{a}$ e $\ddot{a}$ porta ad una ridefinizione dell'azione da cui ne conseguirà un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine. L'azione sarà

$$\mathcal{S} = 2\pi^2 \int dt \left\{ a^3 f(R) - \lambda \left[R + 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \right\}, \tag{4.74}$$

con un moltiplicatore di Lagrange

$$\lambda = a^3 f'(R). \tag{4.75}$$

Introduciamo il campo ausiliario

$$p \equiv f'(R), \tag{4.76}$$

in modo che la lagrangiana diventi

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2p + 6a^2\dot{a}\dot{p} - 6kap - a^3W(p), \tag{4.77}$$

e ha una forma analoga al caso precedente. Per quanto riguarda il potenziale $W(p)$, esso è dato da

$$W(p) = h(p)p - r(p), \tag{4.78}$$

con

$$r(p) = \int f'(R)dR = \int pdR = \int f(R), \qquad h(p) = R. \tag{4.79}$$

Lo spazio delle configurazioni diventa ora $\mathcal{Q} \equiv \{a, p\}$ dove p riveste il ruolo di ϕ nella teoria precedente. Il vettore generatore sarà allora

$$\boldsymbol{X} = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial p} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{p}}, \tag{4.80}$$

con α e β dipendenti da a e p. Il sistema di equazioni risultante sarà

$$ap\left[\alpha + 2a\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right]p + a\left[\beta + a\frac{\partial\beta}{\partial a}\right] = 0, \tag{4.81}$$

$$a^2\frac{\partial\alpha}{\partial p} = 0, \tag{4.82}$$

$$2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + 2p\frac{\partial\alpha}{\partial p} + a\frac{\partial\beta}{\partial a} = 0, \tag{4.83}$$

$$6k[\alpha p\beta a] + a^2[3\alpha W + \alpha\beta\frac{\partial W}{\partial p}] = 0. \tag{4.84}$$

La simmetria di Noether richiede che

$$\alpha = \alpha(a), \qquad \beta(a,p) = \beta_0 a^s p, \tag{4.85}$$

con s parametro libero e β_0 costante di integrazione. In questa situazione abbiamo una distinzione in due casi particolari: uno per $s = 0$ e uno per $s = 2$.

Caso $s = 0$

In questo caso abbiamo

$$s = 0 \Rightarrow \alpha(a) = -\frac{\beta_0}{3}a, \quad \beta(p) = \beta_0 p, \tag{4.86}$$

$$W(p) = W_0 p, \quad k = 0, \tag{4.87}$$

dove W_0 è una costante. Possiamo fare anche qua una trasformazione come nell'esempio precedente e facendo il passaggio $\mathcal{Q} \equiv \{a, p\} \longrightarrow \bar{\mathcal{Q}} \equiv \{w, z\}$ abbiamo

$$w(a,p) = a^3p, \qquad z(p) = \ln p. \tag{4.88}$$

La lagrangiana diventa

$$\bar{\mathcal{L}} = \dot{z}\dot{w} - 2w\dot{z}^2 + \frac{\dot{w}^2}{w} - 3W_0 w. \tag{4.89}$$

Anche qua z è una variabile ciclica e i momenti coniugati saranno

$$\pi_z = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} = \dot{w} - 4\dot{z} = \Sigma_0, \tag{4.90}$$

$$\pi_w = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}} = \dot{z} + 2\frac{\dot{w}}{w} \tag{4.91}$$

e l'hamiltoniana sarà di conseguenza

$$\mathcal{H} = \pi_w \pi_z - \frac{\pi_z^2}{w} + 2w\pi_w^2 + 6W_0 w. \tag{4.92}$$

La quantizzazione canonica ci porta all'equazione

$$[\partial_z^2 - 2w^2\partial_w^2 - w\partial_w\partial_z + 6W_0 w^2] \left|\Psi\right\rangle = 0. \tag{4.93}$$

Utilizzando l'equazione del moto otteniamo

$$\left|\Psi\right\rangle = e^{i\Sigma_0 z} \left|\chi(w)\right\rangle. \tag{4.94}$$

La funzione $\left|\chi\right\rangle$ rispetta l'equazione di Bessel

$$\left[w^2\partial_w^2 + i\frac{\Sigma_0}{2}w\partial_w + \left(\frac{\Sigma_0^2}{2} - 3W_0 w^2\right)\right] \left|\chi(w)\right\rangle = 0, \tag{4.95}$$

le cui soluzioni combinazioni lineari delle funzioni di Bessel $Z_\nu(w)$

$$\chi(w) = w^{1/2 - i\Sigma_0/4} Z_\nu(\lambda w), \tag{4.96}$$

con

$$\nu = \pm\frac{1}{4}\sqrt{4 - 9\Sigma_0^2 - 4i\Sigma_0}, \qquad \lambda = \pm 9\sqrt{\frac{W_0}{2}}. \tag{4.97}$$

La realtà di queste due grandezze porta all'oscillazione del funzionale d'onda dell'universo, il quale è, per grandi valori di w,

$$\Psi(z, w) \sim e^{i[\Sigma_0 z - (\Sigma_0/4)\ln w \pm \lambda w]}. \tag{4.98}$$

Ritornando alle variabili iniziali a e p otteniamo le soluzioni cosmologiche

$$a(t) = a_0 e^{\frac{\lambda}{6}t} e^{-\frac{z_1}{3}e^{-(2\lambda/3}t}, \tag{4.99}$$

$$p(t) = p_0 e^{\frac{\lambda}{6}t} e^{z_1 e^{-2\lambda/3}t}, \tag{4.100}$$

con a_0, p_0 e z_1 costanti di integrazione, mentre λ ha il ruolo di una costante cosmologica e ci dà un comportamento inflazionario asintoticamente.

Caso $s = 2$

In questo caso avremo

$$s = 2 \longrightarrow \alpha(a) = -\frac{\beta_0}{a}, \qquad \beta(a,p) = \beta_0 \frac{p}{a^2}, \tag{4.101}$$

$$W(p) = W_1 p^3, \qquad \forall k, \tag{4.102}$$

con K_1 costante. Le variabili w e p saranno

$$w(a,p) = ap, \qquad z(a) = a^2, \tag{4.103}$$

con lagrangiana

$$\bar{\mathcal{L}} = 3\dot{z}\dot{w} - 6kw - W_1 w^3. \tag{4.104}$$

I momenti coniugati saranno

$$\pi_z = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} = 3\dot{w} = \Sigma_1, \tag{4.105}$$

$$\pi_w = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}} = 3\dot{z}, \tag{4.106}$$

con hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{3}\pi_z \pi_w + 6kw + W_1 w^3. \tag{4.107}$$

Analogamente al caso precedente otteniamo un funzionale d'onda

$$\Psi(z,w) \sim e^{i[\Sigma_1 z + 9kw^2 + (3W_1/4)w^4]}, \tag{4.108}$$

con soluzioni cosmologiche

$$a(t) = \pm\sqrt{h(t)}, \qquad p(t) = \pm\frac{c_1 + \frac{\Sigma_1}{3}t}{\sqrt{h(t)}}, \tag{4.109}$$

con

$$h(t) = \left(\frac{W_1 \Sigma_1^3}{36}\right)t^4 + \left(\frac{W_1 w_1 \Sigma_1}{6}\right)t^3 + \left(k\Sigma_1 + \frac{{}_1 w_1^2 \Sigma_1}{2}\right)t^2 + w_1(6k + W_1 w_1^2)t + z_2. \tag{4.110}$$

In questo caso le costanti di integrazione sono w_1, z_1 e z_2. Osserviamo che per t molto grandi otteniamo

$$a(t) \sim t^2, \qquad p(t) \sim \frac{1}{t} \tag{4.111}$$

e quindi abbiamo un comportamento inflazionario come potenza.

Conclusione

Nel corso dei vari capitoli si è potuto osservare l'elevata applicabilità del teorema di Noether. Innanzitutto sono state definite le simmetrie di un sistema fisico, dando particolare importanza al ruolo che esse hanno nella riduzione di un sistema di equazioni differenziali. E' stata effettuata un'associazione tra le simmetrie da un punto di vista prettamente matematico e le simmetrie di un sistema dinamico, osservando come leggi di conservazione, ricavate banalmente attraverso considerazioni di carattere fisico, discendano da principi primi. Gli integrali primi del moto derivano dalle proprietà che ha la natura stessa e questo porta allo sviluppo di diverse leggi fisiche. C'è tuttavia da dire che non tutte le leggi di conservazione derivano da delle simmetrie del sistema; un esempio è la conservazione del numero barionico, che non deriva da nessuna simmetrie dell'hamiltoniana. Il lavoro di Emmy Noether ha avuto una particolare rilevanza nello sviluppo di molteplici teorie, a partire dalla relatività generale, nella quale si è potuta associare la conservazione del tensore di Einstein alla conservazione dell'energia. Si è poi visto come il teorema di Noether possa in generale fornire un metodo di ricerca delle leggi di conservazione a partire dai generatori delle trasformazioni, in modo da poter ricavare le forme esplicite delle lagrangiane associate ai problemi dinamici e di poter trovare leggi che li semplifichino. Sempre nell'ambito di teorie della gravitazione è stato possibile osservare come il metodo della ricerca di simmetrie di Noether possa permettere la selezione di determinate teorie con specifiche caratteristiche, fornendo dunque la possibilità di ottenere soluzioni di problemi, come quelli cosmologici, a partire dalle lagrangiane ottenute attraverso principi variazionali. In questo modo è possibile separare tra di loro le diverse teorie fisiche (nel nostro caso le teorie estese della gravità), tenendo conto delle simmetrie che ci interessano. Anche nell'ambito della cosmologia quantistica il teorema di Noether permette di trovare soluzioni di universi classici attraverso lo stretto legame che sussiste tra il criterio di Hartle e le quantità conservate. Ancora più in generale possiamo trovare applicazioni anche in altre teorie fisiche, quali le teorie quantistiche di campo, dandoci la possibilità di ricavare le lagrangiane per le interazioni fondamentali attraverso delle precise invarianze di gauge locali. Sicuramente questo teorema ha un ruolo fondamentale nelle teorie fisiche moderne e permette di ricavare una serie di leggi e di relazioni che permettono lo sviluppo e la semplificazione di molteplici tipi di modelli.

Bibliografia

[1] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Geometria Contemporanea, Metodi e applicazioni, vol. I.* Editori Riuniti, 2011.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifšits, *Fisica Teorica, vol I.* Editori Riuniti, 2009.

[3] V. Barone, *Relatività, principi e applicazioni.* Bollati Boringhieri, 2004.

[4] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica.* Editori Riuniti, 2010.

[5] L. D. Landau and E. M. Lifšits, *Fisica Teorica, vol II.* Editori Riuniti, 2010.

[6] S. Capozziello and M. De Laurentis, "Extended theories of gravity," *Physics Reports*, vol. 509, pp. 5–12, Dec 2011.

[7] K. F. Dialektopoulos and S. Capozziello, "Noether symmetries as a geometric criterion to select theories of gravity," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 15, pp. 8–14, Nov 2018.

[8] S. Capozziello and M. De Laurentis, "Noether symmetries in extended gravity quantum cosmology," pp. 7–15, 2013.