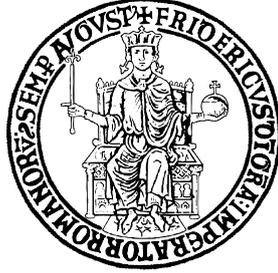


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Discussione di soluzioni teoriche al problema
dell’espansione accelerata dell’Universo

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello

Dr. Francesco Bajardi

Salvatore Capozziello
Francesco Bajardi

Candidato:

Federico Brunetti

Matr. N85000650

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione	2
1 Cosmologia Standard	4
1.1 Metrica Robertson-Walker	5
1.2 I simboli di Christoffel e il tensore di Ricci	10
1.3 Il tensore energia impulso e l'equazione di conservazione	12
1.4 Le equazioni cosmologiche	14
1.5 Le soluzioni delle equazioni cosmologiche: i limiti della cosmologia standard	15
1.6 L'espansione dell'universo e il redshift cosmologico	19
2 Soluzioni all'espansione accelerata	25
2.1 L'introduzione della costante cosmologica	25
2.2 Le lagrangiane di ordine superiore: la teoria $f(R)$	29
2.3 Quintessenza di curvatura	33
Conclusioni	39
Appendice A Calcolo dei simboli di Christoffel e del tensore di Ricci	40

Introduzione

Nel 1917, quando Albert Einstein applicò il sistema di equazioni dinamiche della sua Relatività Generale a un sistema fisico che potesse rappresentare l'intero Universo, ponendo così le basi della Cosmologia Scientifica, le osservazioni astronomiche dell'epoca (o forse una presa di posizione arbitraria, legata a un determinato contesto storico-culturale) lo spinsero ad introdurre un termine correttivo nelle sue equazioni. Tale termine correttivo, detto "costante cosmologica" permetteva di rendere statico l'Universo che altrimenti sarebbe risultato dinamico ed in continua evoluzione.

Osservazioni astronomiche successive e la formulazione del 1929, da parte dell'astronomo Hubble, della legge di espansione dell'Universo, spinsero lo stesso Einstein ad ammettere che introdurre un termine di costante cosmologica per rendere statico l'Universo fosse stata una grossa svista (se non addirittura, il suo più grave errore). Per di più, lavori successivi mostrarono come l'equilibrio dell'Universo "statico" di Einstein, con costante cosmologica, risultasse un equilibrio instabile.

Le ipotesi e i risultati della Cosmologia Standard, che saranno approfonditi nel primo capitolo, rivelano un Universo che nasce da una singolarità iniziale caratterizzata da densità, temperatura ed energia elevatissime. A tale singolarità iniziale, segue un'espansione accelerata, al termine della quale l'Universo raffredda e decelera.

Osservazioni astronomiche più recenti hanno tuttavia messo in crisi i risultati della Cosmologia Standard, dimostrando come l'espansione del nostro Universo sia accelerata, ossia l'Universo espande più rapidamente oggi di quanto non facesse in epoche passate, come se un qualche "propulsore", di natura tuttora sconosciuta, alimentasse questa espansione. Questo problema, tuttora irrisolto, è noto come

problema dell'energia oscura dell'Universo.

Per avere un'idea di quanto sia rilevante la discrepanza con i valori attesi e con i principi di conservazione dell'energia standard si noti che, secondo gli attuali dati astronomici, l'energia oscura dovrebbe rappresentare il 68% dei costituenti di tutto l'Universo, di cui solo circa il 5% corrisponde a materia barionica standard. Il restante si stima essere materia oscura, che non verrà discussa in questo elaborato di tesi ma che rappresenta un ulteriore elemento di crisi della Relatività e della Cosmologia Standard; entrambe le teorie, infatti, non rendono efficientemente conto delle orbite di buchi neri e di altri oggetti celesti sommessi a campi gravitazionali particolarmente intensi.

Nel secondo capitolo saranno discusse due possibili soluzioni teoriche al problema dell'espansione accelerata, tentando di metterle a confronto da un punto di vista tanto formale quanto fisico e mostrando come le due soluzioni siano essenzialmente interconnesse.

Capitolo 1

Cosmologia Standard

In Cosmologia Standard, l'Universo è rappresentato da un modello matematico chiamato varietà, che generalizza lo spazio-tempo piatto di Minkowski della Relatività Ristretta, annoverando la possibilità di avere una curvatura geometrica intrinseca. Una metafora efficace per visualizzare questa idea può essere quella del piano euclideo (bidimensionale), che per effetto di una curvatura si chiude su se stesso formando una superficie sferica. Si parla tuttavia qui di una varietà geometrica quadrimensionale, che sarà chiamata d'ora in poi semplicemente Universo, o spazio-tempo.

Una delle evidenze sperimentali su cui si basa la Cosmologia moderna è che l'Universo, dal nostro punto di vista, si presenta omogeneo ed isotropo in qualsiasi direzione lo si osservi, qualora l'osservazione sia fatta su scale sufficientemente grandi da includere un gran numero di oggetti astronomici, quali galassie e ammassi di galassie. Una Cosmologia scientifica, che prescindendo da qualsiasi visione o sovrastruttura etico-religiosa, si basa sull'assunzione che il nostro punto di vista non abbia una posizione privilegiata nell'Universo. Questo significa che la stessa evidenza osservativa di omogeneità e isotropia accorrerebbe se si potesse osservare l'Universo da una qualsiasi altra posizione interna all'Universo stesso. Queste informazioni sono il contenuto del cosiddetto "Principio cosmologico", il quale afferma che l'Universo è (su scale sufficientemente grandi) omogeneo e isotropo ovunque. E' bene sottolineare che tale principio di omogeneità e isotropia (che da un punto di vista matematico conduce a una serie di simmetrie, legate ad

altrettante leggi di conservazione che si impongono sulla varietà geometrica che rappresenta il nostro modello di Universo) è applicabile sulla parte spaziale della metrica definita sulla varietà.

Una estremizzazione di tale principio è nota come “Principio Cosmologico Perfetto” e afferma che l’Universo è omogeneo e isotropo sull’intera varietà spazio-temporale, ovvero l’Universo apparirebbe omogeneo e isotropo non solo spazialmente, ma anche temporalmente, e tutti gli istanti (o meglio, le epoche) di osservazione dell’Universo sarebbero equivalenti. Nel secolo scorso, una Cosmologia basata sul Principio Cosmologico Perfetto fu proposta, da molti scienziati, come modello adeguato a descrivere l’Universo fisico in cui viviamo, sposando così l’idea che l’Universo fosse eterno, ingenerato ed eternamente uguale a se stesso. Tuttavia, prove sperimentali a sfavore di questo modello quali la scoperta della radiazione cosmica di fondo (e la già discussa espansione “di Hubble” dell’universo, già evidenziata nel 1927) hanno contribuito all’affermazione di un modello basato sul Principio Cosmologico “Standard”, che si basa sull’ipotesi secondo cui l’Universo è caratterizzato da massima simmetria spaziale (per traslazioni e rotazioni) ma non è simmetrico per traslazioni temporali.

1.1 Metrica Robertson-Walker

Considerate le ipotesi pocanzi discusse, la metrica che descrive l’Universo sarà caratterizzata da una parte spaziale massimamente simmetrica nella forma

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = F(r)[dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

da combinare con la componente temporale. La funzione $F(r)$ conterrà tutte le informazioni di curvatura spaziale, la cui eventuale presenza non compromette le proprietà di massima simmetria della varietà. Il caso particolare $F(r) = 1$ restituisce il ben noto spazio tridimensionale euclideo (piatto).

Per tener conto dell’espansione di Hubble si introduce un fattore moltiplicativo $a^2(t)$ nella parte spaziale della metrica. La metrica completa risulterà nella forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2$$

Questo fattore moltiplicativo sarà fondamentale per lo studio della dinamica e dell’evoluzione dell’Universo, poiché è in questo fattore che saranno racchiuse le

informazioni sull'espansione, considerata da ora in poi come una variazione nel tempo del fattore di scala $a(t)$ che determina la taglia dell'Universo. La variazione del fattore di scala si traduce in una variazione, nel tempo, della distanza tra due punti "fissi" arbitrari (ossia una velocità di espansione) che sarà proporzionale alla distanza stessa, in accordo con la legge di espansione di Hubble, riportata di seguito nella sua formulazione ricavata sperimentalmente da Edwin Hubble nel 1929 a valle dell'osservazione diretta della velocità di recessione (o meglio, di un effetto di redshift gravitazionale, interpretabile come effetto doppler associato a un allontanamento relativo tra sorgente luminosa e osservatore) di stelle più o meno lontane da noi:

$$v = H_0 d.$$

Come sarà mostrato nel seguito questa legge di espansione discende direttamente dalle ipotesi del Modello Cosmologico Standard.

In definitiva, la metrica spaziotemporale potrà essere scritta come

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) F(r) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt \quad dt = d\tau \quad g_{00} = 1$$

Il tempo coordinato coincide con il tempo proprio e sarà chiamato, in questo contesto, tempo cosmico.

Si operi una trasformazione che lasci invariata la metrica, ossia

$$x^\alpha \rightarrow \bar{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha du$$

tale che

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(\bar{x}^\lambda) = g^{\alpha\beta}(x^\lambda).$$

ξ rappresenta il vettore che genera la trasformazione e, affinché la metrica si conservi, deve obbedire alle equazioni di Killing

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0; \quad \xi^0 = 0 \tag{1.2}$$

che nella loro forma più generale si scrivono come[1]

$$\xi^\lambda_{;\alpha} g_{\lambda\beta} + \xi^\lambda_{;\beta} g_{\alpha\lambda} + g_{\alpha\beta,\lambda} \xi^\lambda = 0; \quad \xi^0 = 0$$

Esplicitando le varie componenti si ha

$$\alpha = \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi^{\lambda}_{,r} g_{\lambda 1} + \xi^{\lambda}_{,r} g_{1\lambda} + g_{11,\lambda} \xi^{\lambda} = 0$$

Si noti che l'unico elemento della metrica (ad indici spaziali del tipo $g_{1\lambda}$) diverso da 0 è g_{11} (analogamente per $g_{\lambda 1}$), per cui si ha:

$$2\xi^r_{,r} g_{11} + g_{11,\lambda} \xi^{\lambda} = 0$$

Si osservi, dalla forma della metrica, che $g_{11} = -a^2(t)F(r)$ dipende solo da t , r . Dalla condizione $\xi^0 = 0$ segue che $g_{11,\lambda} \xi^{\lambda} = g_{11,r} \xi^r$, per cui

$$2\xi^r_{,r} g_{11} + g_{11,r} \xi^r = 0$$

Inserendo l'espressione per g_{11} si ottiene

$$2\xi^r_{,r} F(r) + \frac{dF}{dr} \xi^r = 0 \quad (1.3)$$

Questa equazione ammette soluzione $\sqrt{F} \xi^r = C$. Per ragioni di isotropia, la quantità C può dipendere solo dall'angolo θ .

Si ponga dunque, senza perdere di generalità:

$$\xi^r = |\xi| \cos \theta; \quad C = A \cos \theta \quad (1.4)$$

Al fine di ricavare F , si può scrivere una seconda equazione di Killing per $\alpha = \beta = 2$. Si ottiene, con considerazioni analoghe alle precedenti,

$$2\xi^{\theta}_{,\theta} g_{22} + g_{22,\lambda} \xi^{\lambda} = 0$$

Come prima, l'espressione per g_{22} è data da $g_{22} = -r^2 a^2(t) F(r)$ che unito con la condizione $\xi^0 = 0$ implica $g_{22,\lambda} \xi^{\lambda} = g_{22,r} \xi^r$; per cui segue che

$$2\xi^{\theta}_{,\theta} g_{22} + g_{22,r} \xi^r = 0$$

Inserendo l'espressione per g_{22} si ricava

$$2\xi^{\theta}_{,\theta} r^2 F(r) + \frac{d}{dr} (r^2 F) \xi^r = 0 \quad (1.5)$$

La comparsa di un'ulteriore incognita $\xi^{\theta}_{,\theta}$ induce ad esplicitare una terza equazione di Killing. Per $\alpha = 1$, $\beta = 2$ si ottiene l'equazione

$$\xi^{\lambda}_{,r} g_{\lambda 2} + \xi^{\lambda}_{,\theta} g_{1\lambda} + g_{12,\lambda} \xi^{\lambda} = 0$$

Analogamente ai casi precedenti, $g_{12} = 0$, $g_{1\lambda} = g_{11}$, $g_{\lambda 2} = g_{22}$, per cui risulta

$$\xi^{\theta}_{,r} g_{22} + \xi^r_{,\theta} g_{11} = 0$$

Da cui, inserendo i valori $g_{11} = -a^2 F$ e $g_{22} = -a^2 r^2 F$ segue

$$\xi^{\theta}_{,r} r^2 + \xi^r_{,\theta} = 0$$

Si derivi questa equazione rispetto a θ per eliminare ξ^{θ}

$$\xi^{\theta}_{,r\theta} = -\frac{1}{r^2} \xi^r_{,\theta\theta} \quad (1.6)$$

Mettendo momentaneamente da parte l'ultima equazione e dividendo invece l'equazione 1.5 per $2r^2 F$, si ottiene

$$\xi^{\theta}_{,\theta} + \frac{\xi^r}{2r^2 F} \frac{d}{dr}(r^2 F) = 0$$

Derivando questa rispetto ad r , si ricava

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\xi^r}{2r^2 F} \frac{d}{dr}(r^2 F) \right] = -\xi^{\theta}_{,\theta r}$$

A questo punto inserendo, in quest'ultima, l'equazione 1.6 si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\xi^r}{2r^2 F} \frac{d}{dr}(r^2 F) \right] = \frac{1}{r^2} \xi^r_{,\theta\theta} \quad (1.7)$$

Si osservi che, come preannunciato, l'equazione è indipendente da ξ^{θ} . Tornando alle equazioni 1.1 e 1.4, è immediato ricavare

$$\xi^r = \frac{A \cos \theta}{\sqrt{F}} \quad (1.8)$$

e quindi

$$\xi^r_{,\theta\theta} = -\frac{A \cos \theta}{\sqrt{F}} \quad (1.9)$$

Inserendo le equazioni 1.8 e la 1.9 nella 1.7 e dividendo ambo i membri per $A \cos \theta$, si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2r^2 F^{\frac{3}{2}}} (2rF + r^2 F') \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{F}}$$

da cui

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{F'}{2F^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{rF^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{F}} = 0$$

Esplicitando le derivate si ricava

$$\frac{F''}{2F^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(F')^2}{4F^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{r^2 F^{\frac{1}{2}}} - \frac{F'}{2rF^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{F^{\frac{1}{2}}} = 0$$

da cui

$$F'' - \frac{F'}{r} - \frac{3(F')^2}{2F} = 0 \quad (1.10)$$

Una soluzione di questa equazione è data da

$$F' = ArF^{\frac{3}{2}}$$

Si noti che è stata sostituita, nell'ultima uguaglianza, la relazione $\frac{F'}{r} = AF^{\frac{3}{2}}$, che si può riscrivere come

$$\frac{F'}{F^{\frac{3}{2}}} = Ar \quad (1.11)$$

Si osservi che vale la relazione

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{2}{\sqrt{F}} \right] = \frac{F'}{F^{\frac{3}{2}}}$$

che, confrontata con la 1.11, restituisce

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{2}{\sqrt{F}} \right] = Ar$$

Integrando questa equazione rispetto a r , si ottiene

$$-\frac{2}{\sqrt{F}} = \frac{A}{2}r^2 + B$$

e dunque

$$F(r) = \frac{4}{(B + \frac{A}{2}r^2)^2}$$

che può essere equivalentemente riscritta come

$$F(r) = \frac{1}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2}$$

Una volta trovata la forma di $F(r)$, è possibile scrivere esplicitamente l'elemento di linea come:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{1}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

Riscalando la coordinata radiale attraverso il cambio $\bar{r} = \frac{r}{1 + \frac{kr^2}{4}}$, la metrica può equivalentemente scriversi come

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{(1 - kr^2)^2} + r^2 d\Omega^2$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. La metrica così ottenuta è detta metrica Friedmann-LemaitreRobertson-Walker dello spazio-tempo e descrive una ipersuperficie massimamente simmetrica che evolve di taglia. Il parametro k determina la curvatura dello spazio e varia, in linea tecnica, tra $-\infty$ e $+\infty$. Si noti tuttavia che c'è una certa ridondanza nel termine $a^2(t)d\sigma^2$ che permette di riassorbire in $a(t)$ eventuali fattori moltiplicativi per $d\sigma$ (e dunque per $F(r)$) così da normalizzare questa metrica in modo che k possa assumere solo i valori $\{-1, 0, +1\}$ e riassorbendo nel fattore moltiplicativo di scala $a(t)$ (ancora da definire) la taglia fisica della varietà.

Il caso $k = -1$ corrisponde a una costante di curvatura negativa per la sottovarietà spaziale, che è talvolta chiamata “spazio aperto”. Il caso $k = 0$ corrisponde a curvatura nulla, e la varietà è talvolta chiamata “spazio piatto”. Il caso $k = +1$ corrisponde ad una curvatura positiva e si parla in questo caso di “spazio chiuso”.

1.2 I simboli di Christoffel e il tensore di Ricci

È stato possibile dedurre una metrica adatta a descrivere l'Universo (la metrica FLRW) a partire dalle sole ipotesi di omogeneità ed isotropia spaziale e contemplando la possibilità di avere un Universo in espansione, eventualmente dotato di una curvatura spaziale (uniforme ovunque per l'ipotesi di omogeneità) diversa da zero. Applicando le equazioni di campo a tale metrica è possibile determinare le equazioni cosmologiche, ossia il sistema di equazioni che descrive la dinamica dell'universo e dalla soluzione delle quali si può dedurre l'andamento dei parametri fisici di rilievo nello studio dell'evoluzione cosmica, quali il fattore di scala e la densità media della materia che riempie l'universo. Tuttavia, al fine di definire completamente il sistema dinamico, sono necessarie ipotesi sul tipo di fluido che permea l'Universo, ossia è necessario assegnare un tensore energia-impulso per la materia, nonché una legge di conservazione che questo tensore deve soddisfare affinché la teoria abbia coerenza fisica.

Per ricavare le equazioni cosmologiche, si consideri la metrica FLRW nella forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{1}{(1 + \frac{k}{4} r^2)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega] \quad (1.12)$$

Conviene porsi, per comodità di calcolo, in un intorno dell'origine ($r = 0$) in modo da poter sviluppare al secondo ordine la quantità

$$\frac{1}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2} \approx 1 - \frac{k}{2}r^2$$

Come solito in Relatività Generale, per ricavare le equazioni di campo si può definire la lagrangiana di una particella a partire dalla metrica, come:

$$L = (\dot{x}^0)^2 - a^2(t)[1 - \frac{k}{2}r^2][(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2].$$

dove il punto rappresenta la derivazione rispetto al parametro affine. Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange per le varie componenti, ovvero:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$$

e confrontandole con l'equazione geodetica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

si potranno identificare i simboli di Christoffel non nulli. Il calcolo esplicito, riportato in appendice, restituisce i risultati riportati di seguito:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c} \delta_{ik} & \Gamma_{0k}^i &= \Gamma_{k0}^i = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ik} & \Gamma_{ii}^i &= -\frac{1}{2} k x^i \\ \Gamma_{jj}^i &= \frac{1}{2} k x^i & \Gamma_{ij}^i &= \Gamma_{ji}^i = -\frac{1}{2} k x^j \end{aligned}$$

Le componenti del tensore di Ricci si possono calcolare attraverso la relazione[2]

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \ln \sqrt{-g} + \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau \Gamma_{\tau\beta}^\sigma$$

Dalla forma della metrica 1.12 si identifica il determinante del tensore metrico:

$$g = -\frac{a^6}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^6}$$

che, sviluppato al secondo ordine, fornisce

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^3} \approx a^3(1 - \frac{3}{4}r^2)$$

Il calcolo esplicito¹ restituisce le seguenti componenti non nulle per il tensore di Ricci:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{kc^2}{a^2} \right]$$

¹Riportato in appendice

Per le componenti in forma mista invece si ottiene:

$$R^0_0 = g^{0\mu} R_{\mu 0} = g^{00} R_{00} = R_{00}, \quad R^1_1 = g^{11} R_{11} = -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right]$$

$$R^2_2 = R^3_3 = R^1_1$$

avendo tenuto conto che nell'origine vale

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2}{a^2} \approx -\frac{1}{a^2}$$

Infine, per lo scalare di curvatura di Ricci, si verifica facilmente che vale

$$R = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 = -\frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right] \quad (1.13)$$

1.3 Il tensore energia impulso e l'equazione di conservazione

Manca un ultimo ingrediente per poter scrivere le equazioni di campo, ossia il tensore energia-impulso, che per un fluido perfetto, può essere scritto come:

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \quad [2]$$

Se il fluido è a riposo rispetto alle coordinate, si ha

$$u^k = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

e la condizione per la quadrivelocità

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$$

si traduce, nella metrica che stiamo studiando, nella condizione

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = 1 \quad (1.14)$$

Il vettore quadrivelocità è, in definitiva

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$$

e conoscere la sua forma ci permette di esplicitare le componenti del tensore energia-impulso, per le quali risulta:

$$\begin{aligned} T^{00} &= T^0_0 = \epsilon \\ T^{11} &= -pg^{11} = p \frac{(1 + \frac{k}{4}r^2)}{a^2} = T^{22} = T^{33} \\ T^1_1 &= g_{11}T^{11} = -p \quad T^2_2 = T^3_3 = -p \end{aligned}$$

Dunque il tensore energia-impulso (in forma mista) si può scrivere come:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \text{diag}(\epsilon, -p, -p, -p) \quad (1.15)$$

Le equazioni di conservazione dell'energia in Relatività Generale sono fornite dalle identità di Bianchi contratte[2]

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{;\beta} = 0$$

Che possono essere esplicitate come

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{-g} T^{\beta}_{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu} = 0 \quad [2]$$

La componente temporale di questa equazione si ottiene per $\alpha = \beta = 0$ ed è data da

$$T_0^0{}_{;0} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{-g} T^0_0) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,0} T^{\mu\nu} = 0$$

Sostituendo dentro questa i termini

$$g = -\frac{a^6}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^6}, \quad \sqrt{-g} = \frac{a^3}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^3}$$

e le componenti del tensore energia impulso già determinate, si ottiene

$$\frac{(1 + \frac{k}{4}r^2)^3}{a^3} \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\frac{a^3 \epsilon}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^3} \right] + \frac{3}{2} p \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\frac{a^2}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2} \right] \frac{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2}{a^2} = 0$$

La scelta di porsi nell'origine ($r = 0$) semplifica di molto la precedente equazione, che dunque diventa

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial(a^3 \epsilon)}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{2a\dot{a}}{a^2} p = 0$$

Questa si riscrive, con le opportune semplificazioni, come

$$\frac{\partial(a^3 \epsilon)}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} a^3 = 0$$

Questa rappresenta l'equazione di conservazione in Cosmologia Standard. Si noti che, pur avendo assegnato una forma per il tensore energia-impulso, non è stata ancora considerata un'equazione di stato per la materia, ossia una relazione tra densità e pressione che definisca il tipo di fluido che permea l'Universo.

1.4 Le equazioni cosmologiche

Avendo già determinato le componenti dei tensori energia-impulso e di curvatura, è possibile ricavare facilmente le equazioni di campo. Le equazioni di Einstein con il termine cosmologico sono date da

$$G_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \quad \chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

che può equivalentemente risciversi come

$$R_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T)$$

$$T^\alpha_\beta = \text{diag}(\epsilon, -p, -p, -p); \quad T = (\epsilon - 3p)$$

Esplicitando la prima equazione di campo, in componenti miste, si ottiene

$$R^0_0 + \Lambda = \chi(T^0_0 - \frac{1}{2}T).$$

Inserendo i valori di T^0_0, T , tenendo conto del valore di χ e ricordando che vale la relazione

$$R^0_0 = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

la precedente equazione diventa:

$$-\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \Lambda = \frac{4\pi G_N}{c^4}(\epsilon + 3p)$$

da cui

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3c^2}(\epsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

. La seconda equazione di campo in componenti miste è

$$R^1_1 + \Lambda = \chi(T^1_1 - \frac{1}{2}T)$$

Inserendo i valori di T^1_1, T e ricordando che vale la relazione

$$R^1_1 = -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right]$$

si ottiene, per la seconda equazione di campo:

$$-\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right] + \Lambda c^2 = \frac{4\pi G_N}{c^2}(p - \epsilon)$$

Sostituendo in questa seconda equazione di campo la prima equazione di campo, ossia il termine $\frac{\ddot{a}}{a}$, si ottiene

$$-\left[-\frac{4\pi G_N}{3c^2}(\epsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2}\right] + \Lambda c^2 = \frac{4\pi G_N}{c^2}(p - \epsilon)$$

e quindi, semplificando i termini omologhi, si ha

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G_N}{3c^2}\epsilon. \quad (1.16)$$

Se si trascuria la costante cosmologica, questa diventa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^2}\epsilon. \quad (1.17)$$

La precedente equazione cosmologica è nota come equazione di Friedman.

Il sistema di equazioni cosmologiche così definito determinerà completamente la dinamica del nostro sistema cosmologico solo una volta assegnata un'equazione di stato per la materia, che stabilisca una relazione tra la pressione p e la densità di energia ϵ . La soluzione determinerà l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ in funzione del tempo cosmico, nonché l'evoluzione dei parametri ϵ, p , nelle diverse epoche.

1.5 Le soluzioni delle equazioni cosmologiche: i limiti della cosmologia standard

L'equazione di conservazione dell'energia può essere riscritta con le derivate parziali rimpiazzate dalle derivate totali:

$$\frac{d}{dt}(a^3\epsilon) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0$$

poiché le grandezze in gioco dipendono solo dal tempo.

L'approccio più semplice e immediato in Cosmologia Standard è assumere che la materia che riempie l'Universo sia un fluido perfetto che, com'è noto in termodinamica, può essere descritto da una proporzionalità lineare del tipo

$$p = \gamma\epsilon, \quad (0 \leq \gamma \leq 1)$$

che rappresenta l'equazione di stato per la materia, dove l'indice adiabatico γ è definito come c_s^2/c^2 , con c_s velocità del suono nel fluido in esame[3].

L'equazione di stato, inserita nella conservazione dell'energia, restituisce

$$\dot{\epsilon}a^3 + 3a^2\dot{a}(\gamma + 1)\epsilon = 0$$

da cui si ricava

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} + 3(\gamma + 1)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

che, integrata, implica

$$\epsilon = \frac{\text{costante}}{a^{3(\gamma+1)}}$$

Considerata la proporzionalità tra densità di energia e densità di massa, ossia la relazione $\epsilon = \rho c^2$, e fissato il valore della costante ponendosi in un istante iniziale t_0 per cui si abbia

$$\rho(t_0) = \rho_0 \quad a(t_0) = a_0$$

si ottiene

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\gamma+1)}$$

La precedente sostituzione è giustificata dalla definizione di ϵ come densità di energia:

$$\epsilon = \frac{dE}{dV} = \frac{d(mc^2)}{dV} = \frac{dm}{dV}c^2 = \rho c^2$$

Riprendendo l'equazione cosmologica, scritta nel particolare caso $k = 0$ (spazio piatto):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3c^2}\epsilon$$

e sostituendo la soluzione trovata per ρ , si ottiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\gamma+1)}$$

da cui segue che

$$(\dot{a})^2 \propto \frac{1}{a^{3(\gamma+1)}}$$

Da questa si ricava

$$a^{(3\gamma+1)}(\dot{a})^2 = \text{costante}$$

ossia

$$\dot{a}a^{\frac{3\gamma+1}{2}} = \text{costante}$$

e, quindi

$$\frac{d}{dt}[a^{\frac{3}{2}(\gamma+1)}] = \text{costante}$$

che, integrata, restituisce

$$a^{\frac{3}{2}(\gamma+1)} = ct + b$$

Assumendo che valga $b = 0$, in modo da avere $a = 0$ per $t = 0$, si ottiene

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(\gamma+1)}} \quad (1.18)$$

La definizione del parametro di Hubble relativo all'espansione, che sarà giustificata rigorosamente nel prossimo paragrafo, dedicato all'espansione cosmologica, è:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

Dalla soluzione per a , si osservi che

$$a = Ct^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}$$

con C generica costante di proporzionalità. Derivando tale equazione si ottiene

$$\dot{a} = C \frac{2}{3(\gamma+1)} t^{-\frac{3\gamma+1}{3(\gamma+1)}}$$

Inserendo queste due nella precedente definizione del parametro di Hubble si ottiene:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(\gamma+1)} t^{-\frac{3\gamma+1}{3(\gamma+1)} - \frac{2}{3(\gamma+1)}} = \frac{2}{3(\gamma+1)} t^{-\frac{3(\gamma+1)}{3(\gamma+1)}} = \frac{2}{3(\gamma+1)} t^{-1}$$

Questa equazione mostra come il parametro di Hubble (che, come vedremo, rappresenta il tasso di espansione nelle varie epoche) tenda a decrescere di pari passo con l'espansione. Il suo valore all'epoca attuale fornisce, dunque, un fondamentale indizio per poter definire l'età dell'Universo.

Il valore del parametro di Hubble all'epoca attuale fornisce la costante di Hubble

$$H_0 = \frac{2}{3(\gamma+1)} \frac{1}{t_0}$$

da cui si ricava, dunque, il “tempo di Hubble”

$$t_0 = \frac{2}{3(\gamma+1)} H_0^{-1}$$

che chiaramente dipende, tramite γ , dal tipo di fluido cosmologico.

Si consideri ancora l'equazione

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho$$

Invertendola e considerando la relazione appena determinata per $H = \frac{\dot{a}}{a}$ si ricava,

$$\rho(t) = \frac{3}{8\pi G_N} \frac{4}{9(\gamma+1)} t^{-2} = \frac{1}{6\pi G_N(\gamma+1)} \frac{1}{t^2}$$

Si derivi una seconda volta l'equazione per a per ottenere

$$\ddot{a} = -C \frac{2(3\gamma+1)}{9(\gamma+1)^2} t^{-\frac{2(3\gamma+2)}{3(\gamma+1)}}$$

Il “parametro di decelerazione” si definisce in Cosmologia come

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad [2]$$

Nel caso in esame, tenendo in considerazione i risultati precedentemente ottenuti, il parametro di decelerazione diventa

$$q = \frac{3\gamma+1}{2} \quad (1.19)$$

Di seguito è riassunto il set di soluzioni ottenuto per il modello cosmologico assegnato, anche detto *Universo di Einstein-De Sitter*, dipendente dal parametro γ dell'equazione di stato $p = \gamma\epsilon$

$$H = \frac{2}{3(\gamma+1)t} \quad t_0 = \frac{2}{3(\gamma+1)} H_0^{-1} \quad \rho(t) = \frac{1}{6\pi G_N(\gamma+1)} \frac{1}{t^2} \quad q = \frac{3\gamma+1}{2}$$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(\gamma+1)}} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\gamma+1)} \quad \frac{t}{t_0} = (1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\gamma)}$$

Si è anche introdotto il parametro di redshift, z , il cui significato sarà chiarito nel paragrafo dedicato all'espansione. Si possono distinguere, al variare del valore di γ , tre casi fondamentali

- $\gamma = 0 \implies p = 0$, in questo caso l'Universo risulta dominato da materia incoerente sotto forma di “polvere”, priva di pressione, ossia materia non relativistica (barioni). Risultano, per tale valore del parametro di stato, i seguenti andamenti per le grandezze di rilievo nello studio della dinamica:

$$a \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad t = t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}},$$

$$H = \frac{2}{3t}, \quad t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}, \quad \rho(t) = \frac{1}{6\pi G_N t^2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

- $\gamma = \frac{1}{3} \implies p = \frac{1}{3}\epsilon$ (radiazione), in questo caso l'Universo risulta dominato da materia relativistica (fotoni e neutrini). Si ottengono i seguenti andamenti:

$$a \propto t^{\frac{1}{2}}, \quad \rho \propto a^{-4}, \quad t = t_0(1+z)^{-2},$$

$$H = \frac{1}{2t}, \quad t_0 = \frac{1}{2}H_0^{-1}, \quad \rho(t) = \frac{3}{32\pi G_N t^2}, \quad q = 1$$

- $\gamma = 1 \implies p = \epsilon$ (stiff matter), l'universo è dominato da un fluido rigidissimo, come potrebbe essere accaduto in epoche primordiali. La soluzione è:

$$a \propto t^{\frac{1}{3}}, \quad \rho \propto a^{-6}, \quad t = t_0(1+z)^{-3},$$

$$H = \frac{1}{3t}, \quad t_0 = \frac{1}{3}H_0^{-1}, \quad \rho(t) = \frac{1}{24\pi G_N t^2}, \quad q = 2$$

Si osservi la positività, in tutti questi casi, del coefficiente di decelerazione: per tutti i fluidi conosciuti e usualmente considerati in Relatività Generale, l'espansione dell'Universo è decelerata nel tempo, come confermato anche dall'esponente sempre minore di uno nelle relazioni di proporzionalità tra il fattore di scala $a(t)$ e il tempo. Il che implica che il tasso di espansione (la costante di Hubble che, come si può osservare, decresce a sua volta nel tempo) dell'Universo è via via più piccolo nelle successive epoche. In Cosmologia Standard, in definitiva, l'Universo nasce da una singolarità iniziale ed espande, inizialmente a velocità elevatissime, per poi rallentare asintoticamente nel corso di questa espansione.

Numerosi risultati sperimentali, ottenuti studiando deviazioni della legge di Hubble dall'andamento lineare nei casi di stelle molto lontane (ossia molto vecchie), hanno portato gli astronomi a concludere che il tasso di espansione del nostro Universo aumenta nel tempo, ossia l'Universo accelera, in contrasto con ogni aspettativa e legge di conservazione dell'energia totale. E' questo il problema della cosiddetta Energia Oscura.

1.6 L'espansione dell'universo e il redshift cosmologico

Prima di indagare possibili soluzioni al problema dell'energia oscura in questo paragrafo verrà discusso nel dettaglio che cosa si intende per "espansione cosmo-

logica” e sarà definito il concetto di “redshift cosmologico”. Questi concetti saranno analizzati a partire dalla legge di recessione delle galassie, scoperta per via sperimentale da Hubble nel 1929. Secondo tale legge, stelle e galassie a distanza d si allontanano da noi con una velocità tale che

$$v = H_0 d$$

Data l’incertezza sul valore di H_0 , si usa introdurre il parametro adimensionale h , definito tramite la relazione:

$$H = 100 \frac{km}{secMpc} h, \quad 0.5 < h < 1$$

L’intervallo di valori di h più attendibile è, attualmente, $0.65 < h < 0.71$.

Come già anticipato, la legge di espansione di Hubble discende dalle sole ipotesi di omogeneità ed isotropia. Per mostrarlo, si consideri una generica metrica per un Universo omogeneo ed isotropo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) F(r) [dr^2 + r^2 d\Omega] \quad (1.20)$$

La distanza radiale di una galassia dal centro delle coordinate è definita come

$$d = \int_0^{r_s} \sqrt{-g_{11}} dr = a(t) \int_0^{r_s} \sqrt{F(r)} dr$$

essendo

$$-g_{11} = a^2(t) F(r)$$

Si derivi allora rispetto al tempo per studiare come la distanza vari in caso di un’espansione (o contrazione) del fattore di scala

$$\dot{d} = \dot{a}(t) \int_0^{r_s} \sqrt{F(r)} dr$$

Moltiplicando e dividendo per il fattore di scala $a(t)$ otteniamo

$$\dot{d} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t) \int_0^{r_s} \sqrt{F(r)} dr \implies \dot{d} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d$$

da cui

$$\dot{d} = H_0 d, \quad H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_0$$

che è la legge di Hubble di recessione delle galassie; H_0 rappresenta dunque il tasso di espansione all'epoca attuale.

In generale, nelle varie epoche varrà

$$v = Hd$$

dove $H = \frac{\dot{a}}{a}$ rappresenta il tasso di espansione calcolato nella generica epoca. La conseguenza di questa espansione, come mostrato di seguito, è un fenomeno di redshift cosmologico.

Affinché il discorso che segue sia più chiaro, è bene specificare come la variazione del fattore di scala dell'Universo si traduca nella variazione di una distanza (unidimensionale), in caso di espansione. Si usa a tal proposito definire coordinate "comoventi" per tutti i corpi, il cui valore non varia nel tempo, in modo da codificare la variazione della distanza effettiva tra due corpi in una variazione del fattore di scala dell'Universo². Ciò equivale a scrivere:

$$d_{12}(t) = a(t)r_{12}$$

d_{12} rappresenta la distanza effettiva tra due corpi a ogni istante, mentre r_{12} rappresenta la distanza tra il corpo 1 e il corpo 2 ad un opportuno istante iniziale ed è per definizione costante nel tempo. Nel discorso che segue sul redshift si può comodamente assumere per r_{12} il valore della distanza effettiva tra la sorgente e l'osservatore all'epoca di emissione dei segnali.

Si consideri, dunque, un'onda elettromagnetica che viaggi radialmente, lungo l'asse $\theta = 0$, $\phi = 0$, verso l'origine. Per le onde elettromagnetiche, vale

$$ds^2 = 0$$

Questa relazione, applicata alla metrica 1.20 e considerata la direzione radiale del moto ($d\Omega = 0$), si traduce nella seguente equazione

$$c^2 dt^2 = a^2(t)F(r)dr^2$$

da cui segue

$$cdt = \pm a(t)\sqrt{F(r)}dr$$

²Coerentemente con quanto fatto con la metrica RW

Scegliendo il segno negativo, poiché è quello che corrisponde ad un'onda che viaggia verso l'origine (ricezione), si ricava

$$\frac{cdt}{a(t)} = -\sqrt{F(r)}dr$$

Integrando questa equazione, si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_s}^0 \sqrt{F(r)}dr = \int_0^{r_s} \sqrt{F(r)}dr = I(r)$$

dove t_1 e t_0 sono, rispettivamente, gli istanti di emissione (dalla galassia) e di ricezione del segnale.

Si consideri adesso una seconda onda, emessa dalla sorgente dopo un ritardo Δt_1 rispetto all'istante di emissione della prima onda, e ricevuta dall'osservatore dopo un ritardo Δt_0 , rispetto all'istante di ricezione della prima onda. Si assuma inoltre che Δt_1 e Δt_0 siano piccoli abbastanza da poter considerare $a(t_1)$ e $a(t_0)$ costanti durante questi ritardi.

In un Universo statico ci si aspetterebbe, banalmente, $\Delta t_1 = \Delta t_0$. Tuttavia, in caso di espansione, ci sarà da tener conto della variazione del fattore di scala cosmologico durante il viaggio dell'onda tra sorgente e osservatore. Poiché r_s è definita come una coordinata comovente, il suo valore, per definizione, non varia nel tempo, sicché il valore dell'integrale $I(r)$, che rappresenta il valore della distanza comovente r_{12} , deve conservarsi tra gli istanti di emissione e di ricezione delle due onde, ossia deve valere

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = I(r)$$

Si spezzi l'integrale al membro destro, considerando il seguente ordinamento per gli istanti di tempo cosmico

$$t_1 < t_1 + \Delta t_1 < t_0 < t_0 + \Delta t_0$$

ottenendo

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{cdt}{a(t)}$$

Dunque, l'ipotesi di conservazione della distanza comovente si traduce nella conservazione del valore della seguente grandezza integrale:

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Si noti che l'integrale di sinistra è limitato all'intervallo di tempo corrispondente al ritardo di emissione, mentre l'integrale di destra è esteso al solo ritardo tra i due istanti di ricezione. L'ipotesi di ritardi piccoli permette allora di considerare $a(t)$ costante nei due range di integrazione:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_1) & t &\in [t_1, t_1 + \Delta t_1] \\ a(t) &= a(t_0) & t &\in [t_0, t_0 + \Delta t_0] \end{aligned}$$

per cui l'integrazione restituisce, banalmente

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}.$$

Poiché le frequenze sono inversamente proporzionali ai tempi, si ottiene

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

Si osserva dunque una variazione nella frequenza osservata, rispetto a quella emessa, tanto più grande quanto maggiore è la differenza di taglia (ossia l'espansione) dell'Universo tra l'istante di emissione e quello di ricezione.

Il parametro di redshift è definito come

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}$$

Unendo le ultime due equazioni si ottiene

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1$$

Questo significa che un oggetto celeste, per cui si osservi un redshift $z = 2$, si trova ad una distanza che corrisponde ad un'espansione della taglia dell'Universo di tre volte, durante il viaggio che l'onda elettromagnetica ha compiuto tra la posizione di emissione e quella di ricezione. Il parametro di redshift si impone come un naturale indicatore di distanza in Cosmologia.

Si consideri, adesso, l'equazione di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^2}\epsilon.$$

Dividendola per $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ si ottiene

$$\frac{8\pi G_N}{3H^2}\rho - 1 = \frac{kc^2}{H^2 a^2}$$

dove si è considerata la relazione $\epsilon = \rho c^2$. Si pone

$$\Omega = \frac{8\pi G_N}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c}$$

dove si è introdotto il parametro

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N}$$

L'equazione di Friedmann si scrive in questo caso

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{H^2 a^2}$$

Il termine ρ_c rappresenta la soglia critica di densità del nostro Universo che determina il segno della curvatura, ed è comunemente detto “densità critica”.

Il valore di $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ infatti determina il segno del parametro k di curvatura dell'Universo. Si distinguono allora tre casi:

- $\rho > \rho_c \implies \Omega > 1 \implies k > 0$. Se la densità dell'universo è superiore al valore di ρ_c , l'Universo ha curvatura positiva e viene denominato “Universo chiuso”;
- $\rho = \rho_c \implies \Omega = 1 \implies k = 0$. In questo caso limite la densità dell'Universo corrisponde esattamente alla densità critica, restituendo una curvatura nulla. Si parla in questo caso di “Universo piatto”;
- $\rho < \rho_c \implies \Omega < 1 \implies k < 0$. In questo caso, la densità dell'Universo risulta inferiore al valore critico, la curvatura è negativa e si parla di “Universo aperto”.

Numerose osservazioni astronomiche sembrano portare alla luce un Universo poco denso, spazialmente piatto, per il quale risulta

$$\rho \simeq \rho_c \simeq 2 \cdot 10^{-29} \frac{gr}{cm^3} \quad \Omega \simeq 1 \quad [3]$$

Capitolo 2

Soluzioni all'espansione accelerata

Il primo capitolo si è concluso portando alla luce gravi contraddizioni fra i risultati della Cosmologia Standard e i risultati relativi alle osservazioni astronomiche più recenti.

In questo capitolo saranno analizzati due possibili approcci teorici al problema. Il primo rientra nell'ambito della Relatività Generale ordinaria, e consiste nel riesumare il termine di costante cosmologica trascurato dallo stesso Einstein nelle sue equazioni di campo. Il secondo consiste nel cercare di ampliare la Relatività Generale ordinaria in una teoria di ordine superiore, che riproduca la gravità einsteiniana nel caso banale ma che, nel caso generale, porti alla luce termini di ordine superiore nell'equazione di campo, di natura geometrica e intrinsecamente legati alla struttura dello spazio-tempo.

2.1 L'introduzione della costante cosmologica

Come proposto da molti fisici teorici per risolvere il problema della Energia Oscura, si può considerare un'equazione di Einstein con costante cosmologica, che assume lo stesso ruolo di un campo scalare che permea l'Universo e che funge, così, da propulsore per l'espansione. In questo caso l'equazione di Friedmann si scrive come

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^2}\epsilon + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Come mostrato nel seguito, la presenza del termine di costante cosmologica (con segno e valore ancora da discutere) può condurre naturalmente a un comportamento accelerato.

Si moltiplichino per a^2 la precedente equazione di Friedman, ottenendo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G_N}{3c^2} \epsilon a^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 - kc^2$$

che può risciversi in forma compatta come

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} c^2 a^2 [\Lambda - W(a)]$$

dove si è definito

$$W(a) = \frac{3k}{a^2} - \frac{8\pi G_N}{c^4} \epsilon$$

La condizione

$$\dot{a}^2 \geq 0$$

implica evidentemente

$$\Lambda \geq W(a)$$

Occorre studiare separatamente i tre casi $k = 0, -1, +1$ ciascuno dei quali dipenderà dal segno di Λ :

- $k = 0$

$$\begin{aligned} W(a) &= -\frac{8\pi G_N}{c^4} \epsilon \\ \dot{a}^2 &= \frac{1}{3} a^2 c^2 \left[\Lambda + \frac{8\pi G_N}{c^4} \epsilon \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Analizzando il segno di Λ risulta

- $\Lambda > 0 \implies \dot{a}^2 > 0 \quad \forall a$, si ha in questo caso un'espansione monotona. Si osservi infatti che, al crescere di a , la densità di energia ϵ decresce in maniera proporzionale al cubo di a il che implica, tramite l'equazione per \dot{a} , che, nel caso $\Lambda = 0$, l'Universo decelera man mano che espande. Tuttavia per $\Lambda > 0$ (eventualmente costante e piccolo a piacere) si osserva un'espansione che aumenta di velocità (ossia è accelerata) linearmente con la crescita del fattore di scala $a(t)$, come si deduce dall'equazione 2.1 nel caso in cui $\epsilon \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$), ossia:

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} a^2 c^2 \Lambda$$

– $\Lambda < 0$, . All'aumentare di a , $\epsilon \rightarrow 0$. Si ottiene in questo caso, per $a > a_c$, $\dot{a}^2 < 0$, condizione ovviamente non accettabile. La condizione $\dot{a}^2 > 0$ implica che esiste un valore critico a_c di a che rappresenta la soglia massima per il fattore di scala. Si ottiene, in definitiva, la condizione

$$0 \leq a \leq a_c$$

e si parla, in questo caso, di modelli di Universo oscillanti.

- $k = -1$

$$W(a) = -\frac{3}{a^2} - \frac{8\pi G_N \epsilon}{c^4}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3}c^2 a^2 \left[\Lambda + \frac{3}{a^2} + \frac{8\pi G_N \epsilon}{c^4} \right]$$

Il caso è analogo a quello per $k = 0$ poiché l'unica conseguenza del termine aggiuntivo $\frac{3}{a^2}$, tendente a 0 al decrescere di a , è quella di far slittare il valore numerico del termine critico a_c , senza l'apporto di effetti qualitativamente interessanti. Anche in questo caso si ha dunque un'espansione monotona nel caso $\Lambda > 0$, mentre si ottengono modelli oscillanti per $\Lambda < 0$.

- $k = 1$

$$W(a) = \frac{3}{a^2} - \frac{8\pi G_N \epsilon}{c^4}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3}c^2 a^2 \left[\Lambda - \frac{3}{a^2} + \frac{8\pi G_N \epsilon}{c^4} \right]$$

In questo caso, $W(a)$ è la somma di due termini di segno opposto, per cui conviene calcolarne la derivata per studiarne l'andamento:

$$\frac{dW}{da} = -\frac{6}{a^3} - \frac{8\pi G_N}{c^4} \frac{d\epsilon}{da} \quad (2.2)$$

Considerando l'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{d}{dt}(a^3 \epsilon) + p \frac{d}{dt} a^3 = 0, \quad (2.3)$$

effettuandone le derivate e dividendo per a^2 otteniamo:

$$a \frac{d\epsilon}{dt} + 3 \frac{da}{dt} (\epsilon + p) = 0$$

da cui segue

$$\frac{d\epsilon}{da} = -\frac{3(\epsilon + p)}{a}$$

Sostituendo questa nell'espressione di $\frac{dW}{da}$ si ottiene

$$\frac{dW}{da} = -\frac{6}{a^3} + \frac{24\pi G_N (\epsilon + p)}{c^4 a}$$

Sia a_M il valore di a per cui si annulla questa equazione; risulta allora:

$$\frac{dW}{da} = 0 \implies \frac{1}{a_M^2} = \frac{4\pi G_N (\epsilon + p)}{c^4}$$

E il corrispondente valore di $W(a)$ risulta essere:

$$W(a_M) = \frac{4\pi G_N}{c^4} (\epsilon + 3p)$$

La derivata seconda di $W(a)$, calcolata in a_M , sarà

$$\left(\frac{d^2W}{da^2} \right)_{a_M} = \frac{24\pi G_N}{c^4} \left[-\frac{\epsilon + p}{a^2} + \frac{1}{a} \frac{dp}{da} \right] < 0$$

Questa risulta negativa per ogni valore di a , poiché $\frac{dp}{da} < 0$. Pertanto a_M è un punto di massimo per la funzione $W(a)$. Dalla condizione $\Lambda \geq W(a)$ segue che il valore massimo che W può assumere al variare di a , è proprio Λ

$$W(a_M) \equiv W_M = \Lambda$$

Il valore di Λ trovato coincide con quello di Einstein Λ_E , inteso come quel valore che la costante cosmologica deve avere per rendere statico l'Universo: infatti, in questo caso, dall'equazione

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} c^2 a^2 [\Lambda - W(a)]$$

segue

$$\dot{a} = 0$$

ossia l'Universo risulta statico. Non risulta tuttavia stabile, poiché piccole perturbazioni lo fanno allontanare dal massimo (caratterizzato da una parabola con concavità rivolta verso il basso, che caratterizza i punti di equilibrio instabili).

Se Λ è di poco più grande di $W_M = \Lambda_E$, allora \dot{a} è piccola e l'Universo si trova in una fase di evoluzione lenta, dalla quale poi si allontana, esponenzialmente, nella direzione della perturbazione (espansione di De Sitter). Infatti, dalle equazioni

$$W(a) = \frac{3}{a^2} - \frac{8\pi G_N}{c^4} \epsilon, \quad \dot{a}^2 = \frac{1}{3} c^2 a^2 [\Lambda - W(a)]$$

si osservano i seguenti andamenti: per valori di $a(t)$ prossimi allo zero risulta $a \rightarrow 0$, $W(a) \rightarrow -\infty$ (si noti che ϵ tende a zero proporzionalmente all'inverso di a^3), e dunque $\dot{a}^2 \rightarrow +\infty$ (De Sitter). D'altro canto, per $a \rightarrow \infty$, $W(a) \rightarrow 0$ e $\dot{a}^2 \rightarrow +\infty$.

2.2 Le lagrangiane di ordine superiore: la teoria $f(R)$

Le equazioni di campo della Gravità Standard discendono da un principio variazionale in cui la densità di lagrangiana si identifica con lo scalare di curvatura R . In questo e nel prossimo paragrafo mostriamo come si possono ricavare equazioni di campo generalizzate al caso in cui la densità di lagrangiana sia una funzione qualsiasi di R continua e derivabile

$$L = f(R)$$

e poi cercare soluzioni per $f(R)$ che naturalmente restituiscono un comportamento accelerato[3]. Le equazioni di campo discendono dal principio variazionale

$$\delta \int \sqrt{-g} f(R) d^4x = 0$$

Si farà uso delle relazioni

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad \delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad [2]$$

Si calcoli la variazione in un sistema inerziale

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int \sqrt{-g} f(R) d^4x = \int \delta \sqrt{-g} f(R) d^4x + \int \sqrt{-g} \delta f(R) d^4x = \\ &= \int \sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x \quad (2.4) \end{aligned}$$

dove l'apice indica la derivata rispetto a R .

La definizione del tensore di Riemann in un sistema localmente geodetico è

$$R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}$$

che, contratta, restituisce il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}$$

Risulta che la variazione può essere scritta come

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \partial_{\nu}\delta(\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})$$

Dunque

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\delta(\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})$$

e quindi, rinominando gli indici muti, si può scrivere

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\sigma}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}\partial_{\sigma}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\nu}) \equiv \partial_{\sigma}W^{\sigma}$$

dove si è posto

$$W^{\sigma} = g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\nu})$$

Per il secondo integrale che compare nel principio variazionale 2.2 risulta, dunque

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \sqrt{-g}f'(R)\partial_{\sigma}W^{\sigma}d^4x$$

Integrato per parti, quest'ultimo restituisce

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R)W^{\sigma} \right] d^4x - \int \partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R) \right] W^{\sigma} d^4x \quad (2.5)$$

Il primo di questi integrali è nullo per il teorema della divergenza (ipotizzando che non esistano campi all'infinito). Si ottiene, quindi, che

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = - \int \partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R) \right] W^{\sigma} d^4x$$

Bisogna esplicitare il termine W^{σ} , la cui definizione è $W^{\sigma} = g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\nu})$.

Utilizzando la definizione delle connessioni affini di prima specie possiamo scrivere

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \delta \left[\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \right] = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} [\partial_{\mu}(\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_{\nu}(\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_{\alpha}(\delta g_{\mu\nu})] \quad (2.6)$$

Da cui

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_{\mu}(\delta g_{\alpha\nu})$$

Sostituendo queste due, e facendo uso della relazione

$$g^{\sigma\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\sigma} \implies g^{\sigma\alpha}\delta g_{\alpha\nu} = -g_{\alpha\nu}\delta g^{\sigma\alpha}$$

e della proprietà, valida nei sistemi inerziali

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$$

si ricava

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} &= g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}[\partial_{\mu}(\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_{\nu}(\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_{\alpha}(\delta g_{\mu\nu})] = \\ &g^{\mu\nu}\frac{1}{2}[\partial_{\mu}(g^{\sigma\alpha}\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_{\nu}(g^{\sigma\alpha}\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_{\alpha}(g^{\sigma\alpha}\delta g_{\mu\nu})] = \\ &g^{\mu\nu}\frac{1}{2}[-\partial_{\mu}(g_{\alpha\nu}\delta g^{\sigma\alpha}) - \partial_{\nu}(g_{\mu\alpha}\delta g^{\sigma\alpha}) - g^{\sigma\alpha}\partial_{\alpha}(\delta g_{\mu\nu})] = \\ &\frac{1}{2}\partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\alpha\mu}\delta g^{\sigma\alpha}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mentre, per il secondo termine di W^{σ} , si ha

$$g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu} = -\frac{1}{2}\partial^{\sigma}(g_{\alpha\nu}\delta g^{\nu\alpha})$$

Sostituendo questi risultati si ottiene

$$W^{\sigma} = g^{\mu\nu}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) - g^{\mu\sigma}\delta(\Gamma_{\nu\mu}^{\nu}) = \partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu})$$

Inserendo questo risultato all'interno dell'integrale 2.5 si ottiene

$$\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R) \right] [\partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}) - \partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})] d^4x$$

Integrando per parti ed eliminando i termini nulli per il teorema della divergenza, si ricava

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \\ &\int g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}\partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R) \right] \delta g^{\mu\nu}d^4x - \int g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial_{\sigma} \left[\sqrt{-g}f'(R) \right] \delta g^{\sigma\nu}d^4x \end{aligned}$$

Sostituendo questa equazione si ottiene, per la variazione dell'azione, la seguente espressione

$$\begin{aligned} & \delta \int \sqrt{-g} f(R) d^4x = \\ & \int \sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \\ & = \int \sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x + \\ & + \int \left[g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma \left(\sqrt{-g} f'(R) \right) - g_{\sigma\nu} \partial^\sigma \partial_\mu \left(\sqrt{-g} f'(R) \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

Affinché tale variazione sia nulla, deve essere

$$\sqrt{-g} \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] = \partial_\nu \partial_\mu \left(\sqrt{-g} f'(R) \right) - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma \left(\sqrt{-g} f'(R) \right)$$

che, in un sistema inerziale in cui la derivata ordinaria coincide con la derivata covariante (che è nulla per il tensore metrico e per le sue funzioni elementari), può scriversi come

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)$$

che appare in una forma manifestamente covariante e dunque immediatamente generalizzabile a tutti i sistemi di riferimento. Il d'Alembertiano è definito come $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$.

L'equazione di campo ottenuta risulta essere del quarto ordine nelle derivate della metrica e può essere riscritta in termini del tensore di Einstein. Per far ciò si somma e si sottrae il termine $\frac{1}{2} f'(R) g_{\mu\nu} R$, ottenendo

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f'(R) g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} f'(R) g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)$$

da cui, ricordando la definizione del tensore di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, si ricava

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[f(R) - f'(R) R \right] + f'(R)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right\}$$

Si noti che queste equazioni di campo sono ricavate nel vuoto e non si è ancora definito un tensore energia-impulso per la materia. Tuttavia il secondo membro di questa equazione può senz'altro essere considerato un contributo di curvatura al tensore totale energia-impulso, cioè il secondo termine può essere definito come $T_{\mu\nu}^{(curv)}$. Questa "rilettura materiale" dei termini di ordine superiore è giustificata dal fatto che essi contribuiscono, come sorgenti, alle equazioni di campo.

2.3 Quintessenza di curvatura

Si è già osservato che le osservazioni astronomiche avvalorano l'ipotesi di un Universo spazialmente piatto e poco denso, per il cui parametro di densità Ω (totale) vale

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \simeq 1 \quad [3]$$

Nello specifico, l'Universo appare dominato da una qualche forma di energia oscura, che mostra una dinamica propria e che è alla base dell'accelerazione cosmica. In termini dei parametri di densità, risulta

$$\Omega_{(matter)} \simeq 0.3, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.7 \quad \Omega_k \simeq 0.0$$

dove “matter” sta per materia non relativistica barionica e non barionica (oscura), Λ rappresenta l'energia oscura (costante cosmologica, quintessenza...), k è il parametro di curvatura della metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) scritta nella forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Ricordiamo la definizione del parametro di decelerazione nel caso in cui si considera solo materia standard

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}(3\gamma + 1)$$

questa si può generalizzare prendendo in considerazione i vari contributi delle diverse forme di materia-energia, ossia la densità di energia oscura, nella forma seguente

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}(3\gamma + 1)\Omega_{(matter)} - \Omega_\Lambda.$$

Evidentemente, il valore di γ determina il segno di q e quindi il comportamento, accelerato o decelerato, nell'espansione. Come già sottolineato in precedenza, per i fluidi usualmente considerati si assume

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

essendo γ l'indice adiabatico dell'equazione di stato $p = \gamma\epsilon$.

Nel capitolo precedente si è mostrato come la risoluzione delle equazioni cosmologiche standard, con materia standard, dia luogo ad una dinamica decelerata.

Per andare incontro alle osservazioni e per inquadrarle in un quadro teorico si possono allora prendere in considerazione forme di materia-energia non standard.

Come si è mostrato, una teoria del quarto ordine (in quattro dimensioni) può essere descritta dall'azione

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_{(matter)}]$$

dove $f(r)$ è una funzione dello scalare di Ricci, e $L_{(matter)}$ è il contributo della materia standard.

La parte geometrica dell'equazione, ossia il termine $f(r)$, conduce, come si è visto, all'equazione di campo

$$f'(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}f(R) = \nabla_\beta \nabla_\alpha f'(R) - g_{\alpha\beta} \square f'(R)$$

dove $\square = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$. Alzando gli indici di derivazione della funzione $f(r)$ utilizzando la metrica, e sostituendo la forma esplicita del d'Alembertiano siottiene

$$f'(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}f(R) = \nabla^\nu \nabla^\mu f'(R) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu f'(R)$$

Che può essere riscritta come

$$f'(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}f(R) = f'(R)^{;\mu;\nu} [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}]$$

dove il simbolo ; indica la derivazione covariante. A questo punto si può aggiungere il contributo della materia standard al tensore totale energia impulso:

$$f'(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}f(R) = f'(R)^{;\mu;\nu} [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}] + \widehat{T}_{\alpha\beta}^{(matter)}$$

Esplicitando il tensore di Einstein, come fatto in precedenza, si può riscrivere questa equazione come

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}^{(curv)} + T_{\alpha\beta}^{(matter)}$$

dove la componente di curvatura al tensore totale energia-impulso è data da

$$T_{\alpha\beta}^{(curv)} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ f'(R)^{;\mu;\nu} [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} [f(R) - Rf'(R)] \right\}$$

Per la componente di materia, invece, risulta

$$T_{\alpha\beta}^{(matter)} = \frac{1}{f'(R)} \widehat{T}_{\alpha\beta}^{(matter)}$$

Il caso $f(R) = R + 2\Lambda$ riconduce alla gravità standard del secondo ordine.

Tornando a considerare l'azione

$$A_{(curv)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$$

Dalla forma della metrica FLRW, ponendosi nell'origine, si possono identificare le componenti metriche

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a^2(t) \implies \sqrt{-g} = a^3(t)$$

da cui, considerando che le variabili indipendenti R ed a dipendono solo da t , ne consegue

$$A_{(curv)} = 2\pi^2 \int dt a^3(t) f(R)$$

Ricordando il valore determinato in cosmologia standard per lo scalare di curvatura (equazione 1.13)

$$R = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

e adottando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, l'azione A diventa

$$A = 2\pi^2 \int dt \left\{ a^3(t) f(R) - \lambda \left[R + 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right] \right\}$$

Il moltiplicatore di Lagrange λ si ottiene differenziando rispetto a R . Si ottiene così

$$\lambda = a^3(t) f'(R)$$

Scegliendo come variabili indipendenti a, \dot{a}, R, \dot{R} e liberando dalle derivate seconde si può identificare, dalla precedente azione, la lagrangiana

$$\begin{aligned} L &= L_{(curv)} + L_{(matter)} = \\ &= a^3 [f(R) - R f'(R)] + 6a^2 \dot{a} \dot{R} f''(R) + 6a \dot{a}^2 f'(R) - 6ka f'(R) + a^3 p_{(matter)} \end{aligned}$$

avendo sommato il termine di materia che risulta essere essenzialmente un termine di pressione.

Le equazioni di Eulero-Lagrange in queste variabili sono date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial L}{\partial a} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R}$$

e restituiscono il sistema di equazioni del moto:

$$2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -p_{tot}$$

$$f''(R) \left[R + 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] = 0$$

La dinamica del sistema è completamente determinata dalla condizione sull'energia

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3}\rho_{(tot)}$$

Sostituendo questa condizione sull'energia nella prima equazione di EL si ha

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{1}{6} [\rho_{(tot)} + 3p_{tot}]$$

è chiaro che il lato destro dell'equazione determina se il comportamento è accelerato o decelerato. Distinguendo i contributi di curvatura e di materia, abbiamo

$$P_{(tot)} = P_{(curv)} + P_{(matter)} \quad \rho_{(tot)} = \rho_{(curv)} + \rho_{(matter)}$$

Per analogia con il tensore energia-impulso della materia, si possono identificare le componenti del tensore di curvatura

$$T_{\alpha\beta}^{(curv)} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ f'(R)^{;\mu;\nu} [g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} [f(R) - Rf'(R)] \right\}$$

come densità e pressione di curvatura ottenendo:

$$p_{(curv)} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] \right\} \quad [3]$$

$$\rho_{(curv)} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R}f''(R) \right\}$$

Dall'equazione

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{1}{6} [\rho_{(tot)} + 3p_{(tot)}]$$

segue che il comportamento accelerato si ottiene se

$$\rho_{(tot)} + 3p_{(tot)} < 0$$

il che significa, se si assume $p_{(matter)} > 0$ per tutte le componenti di materia:

$$-p_{(curv)} > \frac{1}{3}\rho_{(tot)}$$

Volendo dare un'interpretazione materiale alla densità di curvatura, identificandola come un fluido a pressione negativa del tipo $p_{(curv)} = \gamma_{(curv)}\rho_{(curv)}$ con $\gamma_{(curv)} = -1$ la precedente disequazione diventa

$$\rho_{(curv)} > \frac{1}{3}\rho_{(tot)}$$

In altre parole, considerata la positività dei contributi materiali, le condizioni per ottenere l'accelerazione dipendono dalla relazione

$$\begin{aligned} \rho_{(curv)} + 3p_{(curv)} = & \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R}f''(R) \right\} + \\ & + \frac{3}{f'(R)} \left\{ 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)] \right\} \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \rho_{(curv)} + 3p_{(curv)} = \\ = \frac{3}{f'(R)} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) - \frac{1}{3}[f(R) - Rf'(R)] \right\} \end{aligned}$$

che deve essere comparata con il contributo di materia. In ogni caso per il coefficiente γ nell'equazione di stato

$$\frac{p_{(curv)}}{\rho_{(curv)}} = \gamma_{(curv)}$$

deve valere

$$-1 \leq \gamma_{(curv)} \leq 0$$

affinché il contributo al parametro di decelerazione risulti negativo (si abbia ossia un contributo di accelerazione). La forma della funzione $f(R)$ è l'ingrediente principale per ottenere questa "quintessenza di curvatura" e, come semplice scelta per ottemperare alle ipotesi richieste, si possono cercare soluzioni nella forma

$$f(R) = f_0 R^n \quad a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^\beta$$

I casi interessanti sono $n \neq 1$ (il caso $n = 1$ riconduce alla gravità standard), e $\beta \geq 1$ (che implica un comportamento accelerato nell'espansione del fattore di scala). Inserendo queste condizioni nel sistema di equazioni della dinamica, si ottengono le soluzioni esatte

$$\beta = 2 \quad n = -1, 3/2 \quad k = 0 \quad [3]$$

In entrambi i casi, il parametro di decelerazione è

$$q_0 = -\frac{1}{2} \quad [3]$$

in perfetto accordo con i risultati sperimentali relativi alle osservazioni.

Conclusioni

Si è mostrato come il problema dell'energia oscura possa essere approcciato nel contesto della gravità standard, presupponendo l'esistenza di un campo scalare, identificato tramite costante cosmologica e dotato di dinamica propria (il valore di Λ). Questa dinamica non è definita a priori nelle varie epoche e, una volta spiegata, permetterebbe di comprendere il meccanismo che ha condotto l'Universo ad evolvere dallo stato primordiale fino alle strutture a larga scala oggi osservate, nonché capire quali siano le sorti dell'Universo in epoche future.

Si è visto, inoltre, come lo stesso problema possa essere affrontato in un contesto di teorie della gravità di ordine superiore, il che conduce a ipotizzare l'esistenza di una sorta di “quintessenza di curvatura”, identificata tramite termini di ordine superiore negli invarianti di curvatura, che fungono da ulteriori sorgenti alle equazioni di campo. I due approcci sono tuttavia analoghi poiché questi termini sono reinterpretabili da un punto di vista materiale come fluidi a pressione negativa, responsabili dell'accelerazione cosmica. L'interesse di questo approccio è che la quintessenza potrebbe essere legata a qualche effettiva teoria della gravità quantistica, da cui discendono gli invarianti di curvatura.

In ogni caso l'assenza di nuove grandezze osservabili derivabili da queste soluzioni obbliga a cercare nuovi riscontri, da includere in una visione unificata, che permettano di restringere il campo tra le diverse teorie e selezionare quelle che più naturalmente conducono ai risultati sperimentali.

Appendice A

Calcolo dei simboli di Christoffel e del tensore di Ricci

In questa sezione è mostrato il calcolo dei simboli di Christoffel a partire dalla lagrangiana 1.13

$$L = (\dot{x}^0)^2 - a^2(t) \left[1 - \frac{k}{2} r^2 \right] [(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2],$$

da cui, scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange per le varie componenti:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad (\text{A.1})$$

si possono identificare i simboli di Christoffel non nulli, per confronto con l'equazione geodetica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

- $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} &= 2\dot{x}^0, & \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} &= 2\ddot{x}^0, \\ \frac{\partial L}{\partial x^0} &= -\frac{1}{c} 2a\dot{a} \left[(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right] \left[1 - \frac{k}{2} r^2 \right]. \end{aligned}$$

Eseguendo il calcolo nell'origine, si può porre

$$1 - \frac{k}{2} r^2 = 1. \quad (\text{A.2})$$

L'equazione di Eulero-Lagrange, per $\alpha = 0$, si scrive dunque

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{c} a \dot{a} \left[(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

da cui si possono identificare i seguenti simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{c} a \dot{a} \quad (\text{A.4})$$

Formula che può scriversi più sinteticamente come

$$\Gamma_{ik}^0 = \frac{a \dot{a}}{c} \delta_{ik}$$

dato che, come si vede dalle A.3 A.4 tutti i termini per $i \neq k$ sono nulli.

- $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} &= -2a^2 \left(1 - \frac{k}{2} r^2\right) \dot{x}^1, \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} &= -2a^2 \left(1 - \frac{k}{2} r^2\right) \ddot{x}^1 - \frac{4}{c} a \dot{a} \left(1 - \frac{k}{2} r^2\right) \dot{x}^0 \dot{x}^1 + k a^2 \dot{x}^1 \left[2r \frac{x}{r} \dot{x}^1 + 2r \frac{y}{r} \dot{x}^2 + 2r \frac{z}{r} \dot{x}^3 \right], \\ \frac{\partial L}{\partial x^1} &= a^2 \frac{k}{2} 2r \frac{x}{r} \left[(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right]. \end{aligned}$$

Essendo nell'origine, è valida la A.2, per cui la A.1 per $\alpha = 1$ si scrive

$$2a^2 \ddot{x}^1 + \frac{4}{c} a \dot{a} \dot{x}^0 \dot{x}^1 - k a^2 \dot{x}^1 \left[2x \dot{x}^1 + 2y \dot{x}^2 + 2z \dot{x}^3 \right] + k a^2 x \left[(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right] = 0$$

Dividendo questa equazione per $2a^2$, si ottiene

$$\ddot{x}^1 + \frac{2 \dot{a}}{c a} \dot{x}^0 \dot{x}^1 - k \dot{x}^1 \left[x \dot{x}^1 + y \dot{x}^2 + z \dot{x}^3 \right] + \frac{1}{2} k x \left[(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

da cui si possono identificare, quindi, i seguenti simboli di Christoffel

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}$$

riscrivibile in forma sintetica come

$$\Gamma_{0k}^i = \Gamma_{k0}^i = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ik}.$$

Gli altri simboli di Christoffel identificabili dalla A.5 sono

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2}kx, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{2}ky, & \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = -\frac{1}{2}kz, \\ & & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}kx, & \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}kx\end{aligned}$$

In forma sintetica, tali simboli si scrivono¹

$$\Gamma_{ii}^i = -\frac{1}{2}kx^i, \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{1}{2}kx^i, \quad \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = -\frac{1}{2}kx^j$$

I simboli di Christoffel non nulli sono, dunque

$$\begin{aligned}\Gamma_{ik}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c}\delta_{ik} & \Gamma_{0k}^i &= \Gamma_{k0}^i = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ik} \\ \Gamma_{ii}^i &= -\frac{1}{2}kx^i & \Gamma_{jj}^i &= \frac{1}{2}kx^i & \Gamma_{ij}^i &= \Gamma_{ji}^i = -\frac{1}{2}kx^j\end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A partire dai precedenti risultati, si possono ricavare le componenti del tensore di Ricci attraverso la relazione 1.14

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\ln\sqrt{-g} + \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma\Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau\Gamma_{\tau\beta}^\sigma \quad [2]$$

dove, per la metrica in questione sviluppata al secondo ordine, vale

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^3} \simeq a^3(1 - \frac{3}{4}kr^2)$$

La precedente equazione implica

$$\ln\sqrt{-g} = 3\ln a + \ln(1 - \frac{3}{4}kr^2) \quad (\text{A.7})$$

Esplicitando le varie componenti si ha allora, per $\alpha = 0$:

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma_{00}^\sigma - \frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^0}\ln\sqrt{-g} + \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma\Gamma_{00}^\tau - \Gamma_{0\sigma}^\tau\Gamma_{\tau 0}^\sigma.$$

Dalle A.6 si evince che non ci sono simboli di Christoffel con due pedici temporali, da cui segue:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma_{00}^\sigma = 0, \quad \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma\Gamma_{00}^\tau = 0$$

¹Il conto per $\alpha = 2, 3$ restituisce risultati analoghi a quelli per $\alpha = 1$ per isotropia della metrica

$$\Gamma_{0\sigma}^{\tau}\Gamma_{\tau 0}^{\sigma} = \Gamma_{0k}^i\Gamma_{i0}^k = 3(\Gamma_{01}^1)^2 = \frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.$$

Utilizzando la A.7 si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (3 \ln a) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(3 \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2.$$

La componente R_{00} è, quindi,

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Per $\alpha = 1$ si ha

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{11}^{\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \ln \sqrt{-g} + \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} \Gamma_{11}^{\tau} - \Gamma_{1\sigma}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^{\sigma}.$$

Si scomponga l'ultimo termine nella somma

$$\Gamma_{1\sigma}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^{\sigma} = \Gamma_{1k}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^k + \Gamma_{10}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^0$$

Ponendosi nell'origine, vale $x^i = 0 \quad i = 1, 2, 3$, per cui, dalla A.6 segue che

$$\Gamma_{1k}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^k = \Gamma_{1k}^0 \Gamma_{01}^k = \Gamma_{1i}^0 \Gamma_{01}^i = \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}^2}{c^2}$$

e

$$\Gamma_{10}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^0 = \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}^2}{c^2}.$$

Si ottiene, pertanto,

$$\Gamma_{1\sigma}^{\tau} \Gamma_{\tau 1}^{\sigma} = \frac{2}{c^2} \dot{a}^2.$$

Per il primo termine, invece, risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{11}^{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{11}^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{11}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \Gamma_{11}^3 = \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (a\dot{a}) - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k = \frac{1}{c^2} \dot{a}^2 + \frac{1}{c^2} a\ddot{a} + \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

Utilizzando la A.7 e tenendo conto che, essendo nell'origine, è valida l'uguaglianza $1 - \frac{3}{4}kr^2 = 1$, si ricava che

$$\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \ln \sqrt{-g} = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \ln \left(1 - \frac{3}{4}kr^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x^1} \ln \left(\frac{3}{2}kx^1 \right) = -\frac{3}{2}k$$

Resta da calcolare il termine

$$\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma}\Gamma_{11}^{\tau} = \Gamma_{0\sigma}^{\sigma}\Gamma_{11}^0$$

dove si è posto $\tau = 0$ che restituisce, stando alle A.6, e all'ipotesi $x^i = 0$, l'unico termine non nullo. Si ottiene, allora dalla A.7

$$\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma}\Gamma_{11}^{\tau} = \Gamma_{0\sigma}^{\sigma}\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{0k}^k\Gamma_{11}^0 = 3\Gamma_{01}^1\Gamma_{11}^0 = \frac{3}{c^2}\dot{a}^2.$$

Sommando tutti i termini, si ottiene

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{c^2}\dot{a}^2 + \frac{1}{c^2}a\ddot{a} + \frac{1}{2}k + \frac{3}{2}k + \frac{3}{c^2}\dot{a}^2 - \frac{2}{c^2}\dot{a}^2 = \frac{1}{c^2}a\ddot{a} + \frac{2}{c^2}\dot{a}^2 + 2k = \\ &= \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

Il conto è analogo per R_{22}, R_{33} , ed è immediato verificare che si ottiene $R_{11} = R_{22} = R_{33}$ corettamente con l'ipotesi di isotropia.

Bibliografia

- [1] Sean M. Carroll *Spacetime and geometry* 2019, Cambridge University Press.
- [2] Wladimir-Georges Boskoff, Salvatore Capozziello *A Mathematical Journey to Relativity* 2020: Springer.
- [3] Salvatore Capozziello *Curvature Quintessence:* Int.J.Mod.Phys.D11:483-492,2002.