UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Contrazioni di Inonu-Wigner

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Candidato:
Alessandro Sdino
Matr. N850001381

Anno Accademico 2020/2021

Introduzione

L'importanza dei gruppi in fisica è lapalissiana, specialmente se si considera che i gruppi evidenziano le simmetrie. Nelle parole di Gell-Mann, "*Disciplined judgement, about what is neat and symmetrical and elegant, has time and time again proved an excellent guide to how nature works*".[1] In particolare, il gruppo di Poincaré assume una rilevanza cruciale nella trattazione non solo della Relatività Speciale *per se*, ma anche delle particelle relativistiche e di varie altre sue applicazioni.

Dunque è importante riconoscere che c'è una naturale coerenza fra il gruppo di Poincaré e quello di Galilei, che ne è il limite non relativistico e intuitivo. Come vedremo, oltre all'approccio classico di fare il limite non relativistico delle trasformazioni di Lorentz, giungendo a quelle di Galilei, è anche possibile un approccio un po' più sofisticato, che attacca il problema direttamente nella struttura di gruppo e di algebra, mostrando una grande ed elegante coerenza formale. Questo era già stato fatto da Inonu e Wigner nel 1953, e poi da molti altri.

Noi proporremo la teoria della contrazione di algebre e gruppi nella sua completezza, trattando, inoltre, nello specifico il caso del gruppo di Poincaré e del gruppo delle rotazioni. Anche se il nostro approccio si discosterà parzialmente da quello di Inonu e Wigner, ne manterrà tuttavia lo spirito e la procedura fondamentale, avendo, in più, il vantaggio di mantenere sempre ben in evidenenza le caratteristiche fisiche del problema.

Infine, trattaremo un altro limite del gruppo di Poincaré, meno noto del gruppo di Galilei, meno intuitivo e per queste ragioni non meno interessante: infatti giungeremo, tramite il processo di contrazione, a un gruppo che descrive una fisica ultrarelativistica.

Indice

Capitolo 1

Algebre e gruppi di Lie

1.1 Motivazione

Il gruppo di Poincaré è un gruppo di Lie, e la sua algebra è un'algebra di Lie. Inoltre, dato che la teoria delle contrazioni che esporremo nel seguito, e che era stata sviluppata da Inonu e Wigner nel loro articolo originale, si applica a qualsiasi algebra e gruppo di Lie, ci è sembrato opportuno cominciare dando qualche elemento fondamentale su di essi. Ovviamente, l'argomento è troppo vasto per essere trattato esaustivamente in questa sede, ma noi daremo un certo numero di definizioni e proposizioni che saranno bastevoli a fondare un'impalcatura per il resto del nostro lavoro.

1.2 Gruppi e algebre di Lie

Definizione 1.2.1 (Gruppo)**.** *Un gruppo G è un insieme di oggetti od operazioni che possono essere combinati tramite una procedura detta "moltiplicazione" (e denotata dal simbolo "$\cdot$", o semplicemente accostando i due oggetti) nel formare un certo prodotto che soddisfa le seguenti quattro condizioni: 1. G è chiuso sotto moltiplicazione dei suoi elementi, cioè se $a, b \in G \implies a \cdot b \in G$; 2. la moltiplicazione è associativa, cioè $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; 3. esiste un unico elemento I nel gruppo, tale che $I \cdot a = a \cdot I = a \quad \forall a \in G$; 4. ogni elemento $a \in G$ ha un inverso (denotato da a^{-1}) tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I$.*

Un esempio di gruppo molto semplice da visualizzare può essere dato dalle simmetrie del triangolo. Immaginiamo di avere un triangolo equilatero, di cui coloriamo una faccia di rosso e l'altra di blu, posando la faccia blu sul tavolo e guardando quindi la faccia rossa. Abbiamo sei operazioni di simmetria che appartengono al gruppo in esame: l'identità (che lascia il triangolo così com'è), la rotazione di 120° in senso orario, la rotazione di 240° in senso orario, e queste tre operazioni possono essere ripetute capovolgendo il triangolo, con ora la faccia blu visibile.

Non tutte le simmetrie sono però discrete: il cerchio, ad esempio, può essere ruotato con infiniti angoli diversi! In altri termini, gli elementi di questo gruppo sono le rotazioni $R(\phi)$, con ϕ qualsiasi angolo fra 0 e 2π. In questo caso la moltiplicazione del gruppo è piuttosto banale ($R(\phi)R(\theta) = R(\phi + \theta)$), l'identità è $R(0)$, e l'inversione è $R(\phi)^{-1} = R(2\pi - \phi)$. Si dice anche che questo è un gruppo "abeliano" perché la sua moltiplicazione è commutativa, essendo $R(\theta + \phi) = R(\phi + \theta)$.

Definizione 1.2.2 (Gruppo di Lie)**.** *Un gruppo di Lie è un gruppo che sia anche varietà differenziabile, e le cui operazioni "moltiplicazione"*

$$(a, b) \to ab \tag{1.1}$$

e "inversione"

$$a \to a^{-1} \tag{1.2}$$

sono differenziabili nel senso della geometria differenziale (i.e., la loro rappresentazione locale è liscia nel senso dell'analisi).

Dato un gruppo di Lie G, diremo che K è un *sottogruppo di Lie* se è un sottogruppo e una sottovarietà regolare di G. Ricordiamo che, data una varietà differenziabile M e un suo sottoinsieme S dotato di struttura differenziabile, per definizione S è una sottovarietà regolare di M se l'inclusione i da S a M è un embedding, cioè un'immersione e un omeomorfismo con l'immagine ([2] pag 123).

Un esempio di gruppo di Lie è il gruppo generale lineare, che è definito nel seguente modo:

$$GL_n(\mathbb{K}) \equiv \{A \in M_{nn}(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\} \tag{1.3}$$

Un altro esempio è il piano complesso privato dell'origine, in cui l'operazione di moltiplicazione del gruppo è proprio la consueta moltiplicazione fra numeri complessi. Questi due primi esempi sono eloquenti perchè hanno ciascuno un proprio sottogruppo di Lie: rispettivamente $GL_n(\mathbb{R})^+$ e il cerchio unitario. In effetti, si potrebbe dimostrare che ogni gruppo di matrici è un gruppo di matrici *reali* ed è un gruppo di Lie.

Ma ci sono anche altri risultati molto interessanti. Noi ci limiteremo a riportare alcuni di questi nel corso del nostro discorso, senza alcuna dimostrazione, né pretesa di esaustività. Il *Teorema di Cartan*, per esempio, dice che ogni sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è esso stesso un gruppo di Lie.

Talvolta, invece di lavorare coi gruppi, si preferisce studiare le corrispondenti "algebre", che sono legate ai generatori, e dunque alle trasformazioni infinitesime di cui possiamo immediatamente riconoscere eventuali simmetrie.

Definizione 1.2.3. *Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale g dotato di una forma $[\ ,\ ] : g \times g \to g$ bilineare, antisimmetrica e soddisfacente l'identità di Jacobi (i.e. $[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$).*

Esempi familiari di questa forma [,] sono il commutatore di matrici su $M_{nn}(\mathbb{K})$ e le parentesi di Lie su campi vettoriali su varietà differenziabili.

Per quanto riguarda, invece, l'algebra di Lie nella sua interezza, un esempio molto importante, che ne chiarisce anche la motivazione, è l'algebra dei momenti angolari, espressa da

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{1.4}$$

con $i, j, k = 1, 2, 3$. I momenti angolari sono importanti perché sono i generatori delle rotazioni infinitesime, quindi se un sistema ha una simmetria fisica sotto rotazioni, possiamo esprimerla matematicamente con delle relazioni di commutazione fra i momenti angolari e gli osservabili che godono della suddetta simmetria, per esempio nel caso dell'atomo d'idrogeno $[L_z, H] = [L^2, H] = 0$. Lo studio dell'algebra dei momenti angolari si è rivelato di estrema importanza in Meccanica Quantistica.

Una *sottoalgebra di Lie* è un sottospazio vettoriale $h \leq g(\mathbb{K})$ tale che $[x, y] \in h \quad \forall\, x, y \in h$

Inoltre si dimostra che un gruppo di matrici $G \in GL_n(\mathbb{K})$ ha un'algebra di Lie associata $g = \{X \in M_{nn}(\mathbb{K}) : \exp(tX) \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$

C'è poi un altro risultato abbastanza interessante:

$$\forall\, A \in M_{nn}(\mathbb{C}) \quad f(t) \equiv \exp(tA) \Longrightarrow f'(t) = A\,\exp(tA) \tag{1.5}$$

e dunque

$$\exp(tA) = \exp(tB) \quad \forall\, t \Longleftrightarrow A = B \tag{1.6}$$

Da ciò deriva il fatto che $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.

Fissiamo ora la notazione che ci servirà nel prossimo capitolo, e chiariamo esplicitamente la relazione fra gruppi di Lie e relative algebre. In piena generalità, se prendiamo un gruppo di Lie con n parametri a^i, questo avrà come generatori (operatori infinitesimi)

$$I_i = \lim_{h \to 0} \frac{g(he_i) - g(0)}{h} \tag{1.7}$$

dove *0* sono i parametri dell'elemento unità e $e_i = 0 + 1a_i$.

1.3 Rappresentazioni

Definizione 1.3.1. *Se G è un gruppo di Lie, allora una rappresentazione di dimensione d è un morfismo a valori nelle matrici $d \times d$.*

Dunque è un morfismo di gruppi e una applicazione differenziabile. Ricordiamo che un morfismo f fra i gruppi G e H è $f : G \to H$ tale che $f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in G$. Cioè il morfismo trasforma il prodotto in G nel prodotto in H.

Definizione 1.3.2. *Data un'algebra di Lie reale g, una sua rappresentazione reale di dimensione m è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $\pi : g \to M_{d\times d}(\mathbb{R})$ che trasforma il prodotto di Lie di g nel commutatore fra matrici: $\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]\ \forall X, Y \in g$*

Vale il seguente Corollario:

Corollario 1. $\forall$ *rappresentazione* $\Pi : G \to GL_d(\mathbb{R})$, $\exists!$ *rappresentazione* $\pi : g \to M_{dd}(\mathbb{R})$ *tale che* $\exp(\pi(x)) = \Pi(e^x) \quad \forall X \in g$

Un esempio notevole è il Gruppo di Heisenberg tridimensionale.

Esempio 1. Definiamo il gruppo di Heisenberg tridimensionale nel seguente modo:

$$H \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tale che} \quad x,\, y,\, z,\, \in \mathbb{R} \right\}$$

L'algebra di Lie h di H è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tali che} \quad x,\, y,\, z,\, \in \mathbb{R} \right\}$$

Seguendo le convenzioni dei matematici, si vede che una base di h è data da

$$x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hbar \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Da cui risulta che $[x, p] = \hbar$, mentre si dice che $\hbar$ appartiene al *centro* perché commuta con ogni elemento di h (dal momento che commuta sia con x che con p che banalmente con se stesso).

Definizione 1.3.3. *Una rappresentazione è fedele se è iniettiva.*

L'immagine di una rappresentazione fedele è un sottogruppo di Lie di $GL(V)$, e la rappresentazione fedele ρ è un isomorfismo tra G e $\rho(G) \subset GL(V) \simeq GL(n;\mathbb{R})$

Un gruppo di Lie ammette una rappresentazione fedele se e solo se è isomorfo a un sottogruppo di Lie di $GL(n;\mathbb{R})$ o di $GL(n;\mathbb{C})$.

Vale il seguente

Teorema 1.3.1 (Teorema di Ado)**.** *Ogni algebra di Lie finito dimensionale ammette una rappresentazione fedele finito dimensionale.*

Definizione 1.3.4. *Un omeomorfismo di gruppi di Lie è una mappa fra due gruppi di Lie liscia e un omeomorfismo di gruppi.*

Se è un diffeomorfismo, si chiama *isomorfismo di gruppi di Lie*, e sappiamo che esiste un'inversa che è a sua volta un omoemorfismo di gruppi di Lie.

Definizione 1.3.5. *Se G è un gruppo di Lie connesso, esiste un gruppo di Lie $\tilde{G}$ semplicemente connesso, detto "gruppo del rivestimento universale" di G, che ammette una mappa di rivestimento $\pi : \tilde{G} \to G$ che è un omomorfismo di gruppi di Lie.*

Teorema 1.3.2. *$\tilde{G}$ è unico nel senso seguente: dati $\tilde{G}, \pi$ e $\tilde{G}', \pi'$, esiste un isomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \tilde{G} \to \tilde{G}'$ tale che $\pi' \circ \phi = \pi$*

1.4 Il gruppo e l'algebra di Poincaré

Come esempio di fondamentale importanza per il prosieguo del nostro discorso e in generale per tutta la fisica moderna vogliamo ora descrivere proprio il gruppo di Poincaré e la sua algebra, provando a far emergere il pieno significato fisico dalla sola struttura matematica. Ovviamente sarebbe troppo lungo richiamare in questa sede tutta la teoria delle trasformazioni di Lorentz proprie e improprie: noi ci soffermeremo soltanto sulla loro formulazione nel linguaggio dei gruppi.

Come è noto, il gruppo di Poincaré è il gruppo delle traformazioni di Lorentz non omogenee. Per studiare le traformazioni di coordinate basta costruire matrici 5×5, e la maniera più conveniente per farlo è partire dalle trasformazioni di Lorentz omogenee, come vedremo nel seguito.

1.4.1 Il gruppo di Lorentz

Fissate le notazioni

$$x^\mu = (x, y, z, t), \quad x_\mu = (x, y, z, -t),$$

dove l'apice è indice di riga e il pedice di colonna, si ha semplicemente $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, dove ovviamente il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ ha solo gli elementi sulla diagonale non nulli, i primi tre essendo uguali a 1, e l'ultimo a -1. Una matrice siffatta sarà indicata nel seguito anche come G.

Il *gruppo omogeneo di Lorentz* è formato da tutte le matrici A che soddisfano la condizione $AGA^T = G$, ovvero $g_{\mu\nu} a^\mu_\sigma a^\nu_\lambda = g_{\sigma\lambda}$. Dato che le matrici A lasciano la quantità $x^2+y^2+z^2-t^2$ invariata, tale gruppo è anche detto $O(3,1)$. Le condizioni sugli elementi matriciali implicano che abbiamo in ogni matrice del gruppo solo sei parametri indipendenti. Le matrici del gruppo con determinante uguale a 1 appartengono anche a $SO(3,1)$, e quelle con $a^4_4 > 0$ sono dette *ortocrone*. Il *gruppo proprio di Lorentz* è quello formato dalle trasformazioni ortocrone con determinante uguale a 1. Questo è un sottogruppo invariante del gruppo di Lorentz, che quindi può essere espanso nei suoi cosets, che formano un gruppo quoziente.

Un sottogruppo del gruppo proprio di Lorentz è formato dalle matrici che fanno una rotazione delle tre coordinate spaziali, $SO(3)$. La matrice che esprime il cambiamento di coordinate delle sole rotazioni è

$$A_r = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

dove il primo blocco in alto a sinistra è una matrice 3×3 delle rotazioni, e gli zeri indicano tre elementi nulli in verticale e tre in orrizzontale.

Invece, nel caso speciale in cui siamo interessati a un boost unicamente nella direzione z, la matrice che lo rappresenta è

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cosh\,\eta & sinh\,\eta \\ 0 & 0 & sinh\,\eta & cosh\,\eta \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

dove $\eta = \operatorname{arctanh}(v/c)$. Infatti, $\cosh\eta = \gamma$ e $\sinh\eta = \gamma\beta$, e così si ritrovano le trasformazioni di Lorentz, come si vede facendo il prodotto riga per colonna della suddetta matrice con un quadrivettore. Il risultato, dopo aver diviso l'ultimo termine $x'_4 = ct'$ per c, è infatti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma(z+vt) \\ \gamma(vz/c+ct)/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma(z+vt) \\ \gamma(vz/c^2+t) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Per avere un boost in una direzione generica, basta moltiplicare la suddetta matrice A_b a sinistra per la matrice A_r della rotazione dalla direzione z in tale direzione generica, e a destra per la sua inversa A_r^{-1}.

La matrice per la traformazione di Lorentz propria più generale possibile è $A = A_r\, A_b$. Notiamo che sia A_r che A_b hanno ciascuno tre parametri indipendenti, consistentemente con il fatto che il gruppo proprio di Lorentz è un gruppo a sei parametri.

Essendo il gruppo proprio di Lorentz un gruppo di Lie, è possibile scrivere questa A come esponenziale dei generatori infinitesimali: $A = \exp(-i\sum_{i=1}^{3}(\theta_i L_i + \eta_i K_i))$, dove L_i sono i generatori delle rotazioni e K_i sono i generatori dei boost propri di Lorentz. Tali generatori assumono delle forme matriciali particolarmente semplici se applicati al quadrivettore x^μ, ma ovviamente si possono applicare a qualsiasi funzione delle coordinate:

$$L_i = -i\epsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{e} \quad K_i = -i\left(t\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{1.12}$$

Il prezzo da pagare è che tale rappresentazione è infinito dimensionale.

Ovviamente i generatori formano l'algebra di Lie, e i loro commutatori sono:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{1.13}$$
$$[L_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{1.14}$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k \tag{1.15}$$

Il primo commutatore è coerente con quanto detto in precedenza: le trasformazioni generate dagli L_i formano un sottogruppo di rotazione (è la consueta algebra dei momenti angolari). Il secondo e il terzo commutatore indicano che i boost da soli non formano un gruppo. In particolare, il terzo commutarore dice che la moltiplicazione di due boost puri è equivalente alla moltiplicazione commutata di questi due boost con aggiunta una rotazione, cioè in formule $K_iK_j = K_jK_i - i\epsilon_{ijk}L_k$.

In effetti, i sei generatori testè menzionati possono essere espressi in forma covariante: $L_{\mu\nu} = -i(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu})$. Possiamo facilmente ricavare i vecchi commutatori: $L_i = \epsilon_{ijk}L_{kj}$ e $K_i = L_{0i}$. E' appena il caso di notare che, coerentemente con la notazione, le $L_{\mu\nu}$ si trasfmormano come tensori di rango due.

1.4.2 Il gruppo di Poincaré

Tutto quanto detto in precedenza riguarda il gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie, ma noi siamo interessati a quelle improprie, cioè del tipo $x'^\mu = a^\mu_\nu\, x^\nu + b^\nu$ nello spaziotempo di Minkowski. La costruzione della matrice che fa una siffatta trasformazione è immediata: consideriamo le seguenti matrici 5×5

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

dove L è una matrice 4×4 delle trasformazioni di Lorentz omogenee. Si ha banalmente che $x' = B(b)\,A(a)\,x$, dove fra A e B è stato semplicemente eseguito il prodotto di moltiplicazione fra matrici.

La matrice A ha le stesse proprietà di L, mentre la B (matrice delle traslazioni nello spaziotempo di Minkowski) è abeliana ed è un sottogruppo invariante del gruppo di Poincaré, cioè $B(b)\,B(b') = B(b + b')$. Proprio perché B è un sottogruppo invariante, si possono usare anche le matrici AB per rappresentare il gruppo di Poincaré, cioè non conta in che ordine componiamo le matrici A e B: in ogni caso otteniamo una rappresentazione del gruppo. (Le matrici BA si ottengono banalmente col prodotto fra matrici, come le AB. In generale, il prodotto fra matrici non è commutativo, quindi $AB \neq BA$, e dire che entrambi i prodotti danno una rappresentazione del gruppo è un risultato non banale). Dalle precedenti si ricava immediatamente che il gruppo BA gode della proprietà $(B(b')\,A(a'))\ (B(b)\,A(a)) = B(b' + a'ba'^{-1})\,A(aa')$.

Tutte le precedenti constatazioni implicano il fatto che il gruppo di Poincaré è un prodotto semidiretto del gruppo di Lorentz $A(a)$ e del gruppo delle traslazioni $B(b)$. [3] [4]

Capitolo 2

Contrazione di gruppi e algebre

2.1 Introduzione e un primo esempio

Nel seguito del capitolo esporremo la contrazione di gruppi e algebre di Lie nella sua più completa generalità, così come l'avevano concepita Inonu e Wigner nel loro articolo originale [5]. Tuttavia, ci è sembrato opportuno fare prima un esempio molto intuitivo, che possa rendere l'idea di che cosa sia una contrazione di un gruppo.

In effetti, tutti abbiamo già una certa familiarità con una contrazione di un gruppo, anche se di solito non ci facciamo troppo caso. Come è ben noto, schematizzando la Terra come una sfera, il passaggio da un punto a un altro della superficie terrestre corrisponde in fin dei conti al cambiamento dei due angoli che individuano la posizione sulla sfera, cioè a una rotazione nello spazio. Questo è proprio quello che ci viene in mente quando pensiamo a un volo aereo dall'aereoporto di Napoli a un posto lontano, come l'aereoporto di Rio de Janeiro: la nostra posizione in termini di latitudine e longitudine cambia tramite uno spostamento sulla sfera terrestre. Tuttavia, se consideriamo uno spostamento molto più piccolo, ad esempio da Monte Sant'Angelo all'aereoporto, o da una parte a un'altra dell'aereoporto stesso, la visione che abbiamo di questo spostamento non è affatto una rotazione nello spazio, ma una traslazione sul piano. Questo è propio il significato dietro il fatto che il gruppo $E(2)$ è un caso limite del gruppo $O(3)$ (limite per il raggio della Terra che va all'infinito, o più in generale, il limite che vede, almeno localmente e per raggi molto grandi, una sfera come un piano, in particolare come il suo piano tangente in quel punto).

Vediamo ora nel dettaglio i calcoli sulle algebre, ricordando che O(3) ha l'algebra dei momenti angolari, mentre E(2), il gruppo euclideo del piano, ha due traslazioni e una rotazione.

Compiamo allora la seguente sostituzione:

$$t_1 = \epsilon L_1 \tag{2.1}$$
$$t_2 = \epsilon L_2 \tag{2.2}$$

Notiamo che, nel limite per $\epsilon \to 0$, otteniamo, partendo dall'algebra dei momenti angolari, una nuova algebra:

$$[t_1, t_2] = \epsilon^2 [L_1, L_2] = \epsilon^2 i L_3 = 0 \tag{2.3}$$
$$[t_2, L_3] = \epsilon [L_2, L_3] = \epsilon i L_1 = i t_1 \tag{2.4}$$
$$[L_3, t_1] = \epsilon [L_3, L_1] = \epsilon i L_2 = i t_2 \tag{2.5}$$

che è proprio quella di E(2).

Il senso di questa contrazione è che, se ci mettiamo al polo Nord e mandiamo il raggio a infinito, la sfera localmente sarà un piano. Le rotazioni attorno all'asse zeta rimarranno tali, mentre le rotazioni rispetto agli altri due assi si "apriranno", diventando traslazioni.

2.2 Sulla contrazione di gruppi e algebre

In piena generalità, prendiamo un gruppo di Lie con n parametri a^i, e generatori I_i. Notiamo anzitutto che se il gruppo consta di matrici unitarie, le I_i sono antihermitiane e le iI_i sono hermitiane.

Le costanti di struttura C sono definite da

$$[I_i, I_j] = C_{ij}^k I_k \tag{2.6}$$

dove abbiamo sottinteso la convenzione di Einstein sulla somma di indici ripetuti.

Se sottoponiamo le I_i a una trasformazione lineare, omogenea e non singolare, cambieranno anche le C, con una certa trasformazione, e la struttura complessiva del gruppo resterà immutata.

Consideriamo la trasformazione $J_\nu = I_i U_\nu^i$, dove U è una matrice. A essa corrisponde la trasformazione $a^i = U_k^i b^k$, e dunque possiamo definire degli $e^{i'}$ come sopra. Anche se tale matrice U è singolare, otteniamo comunque un nuovo gruppo.

Definizione 2.2.1. *La "contrazione di un gruppo" è quello che si ottiene con una trasformazione singolare dei suoi elementi infinitesimali (cioè dei suoi generatori).*

La matrice singolare sarà il caso limite di una matrice non singolare, che dipenderà linearmente dal parametro ϵ, che manderemo a zero per ottenere la singolare. In altre parole, $U_\nu^i = u_\nu^i + \epsilon\, w_\nu^i$, dove per $0 < \epsilon < \epsilon_0$ si ha $\det U_\nu^i \not\equiv 0$ e per $\epsilon = 0$ $\det U_\nu^i = 0$.

Vogliamo trasformare $U^i_\nu = u^i_\nu + \epsilon\, w^i_\nu$ in una forma normale tramite una trasformazione non singolare e indipendente da ϵ sia per le I_i che per le J_i. Tali richieste nascono dal fatto questa trasformazione della matrice trasformante non deve inficiare le proprietà di quest'ultima (cioè di essere singolare e dipendente da ϵ). Se le matrici di tale trasformazione (la meta trasformazione, per intenderci) sono α e β, allora possiamo scrivere

$$u \to \beta\, u\, \alpha^{-1} \qquad w \to \beta\, w\, \alpha^{-1} \tag{2.7}$$

giungendo infine alla seguente forma

$$u = \begin{pmatrix} 1_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_{r\times r} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

con $r = \mathrm{rank}(u)$. Ora scegliamo la seguente notazione: etichettiamo J' e I' con una coppia di indici, di cui il primo è riferito alla sottodivisione di u, il secondo specifica il vario J e I nella divisione. In altri termini, con questa notazione abbiamo

$$J_{1\nu} = I_{1\nu} + \epsilon \sum_{\mu=1}^{r} v_{\mu\nu}\, I_{1\mu} \quad \nu = 1, ..., r \quad \text{e} \quad J_{2\nu} = \epsilon I_{2\nu} \quad \nu = 1, ..., n-r \tag{2.9}$$

Vale a dire che il primo indice è 1 se ci riferiamo al blocco in alto a sinistra, ed è uguale a 2 se invece ci riferiamo a quello in basso a destra. Con questa utile notazione, la trasformazione corrispondente ai parametri del gruppo (essendo, lo ricordiamo, $a^i = U^i_k b^k$) è

$$a_{1\nu} = b_{1\nu} + \epsilon \sum_{\mu=1}^{r} v_{\nu\mu} b_{1\mu} \quad \nu = 1, ..., r \tag{2.10}$$

$$a_{2\nu} = \epsilon b_{2\nu} \quad \nu = 1, ..., n-r \tag{2.11}$$

Osserviamo che i parametri a portano agli I, mentre i b agli J.

Al decrescere di ϵ, un insieme di parametri b corrisponde a valori sempre più piccoli dei parametri a. Nel limite $\epsilon \to 0$, l'intero gruppo è contratto a un intorno infinitesimamente piccolo del gruppo definito dai soli $a_{1\nu}$.

La trasformazione degli I in J cambia le costanti di struttura, infatti

$$[I_{\alpha\nu}, I_{\beta\mu}] = \sum_{k=1}^{r} C^{1k}_{\alpha\nu,\beta\mu} I_{1k} + \sum_{k=1}^{n-r} C^{2k}_{\alpha\nu,\beta\mu} I_{2k} \tag{2.12}$$

con $\alpha, \beta = 1, 2$, e dunque

$$\begin{aligned} [J_{1\nu}, J_{1\mu}] &= [I_{1\nu}, I_{1\mu}] + \epsilon \sum (v_{\nu\nu'}\delta_{\mu\mu'} + v_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} + \epsilon v_{\nu\nu'} v_{\mu\nu'})[I_{1\nu'}, I_{1\mu'}] = \\ &= \sum_k C^{1k}_{1\nu,1\mu} J_{1k} + \epsilon^{-1} \sum_k C^{1k}_{2\nu,1\mu} J_{2k} + O(1) \end{aligned} \tag{2.13}$$

e dunque $C^{2k}_{1\nu,1\mu} = 0$. Quindi $I_{1\nu}$ sottende un sottogruppo. Inoltre, abbiamo ottenuto le nuove costanti di struttura. Gli elementi $I_{2\mu}$ sono contratti, mentre gli $I_{1\nu}$ rimangono.

Il seguente teorema, che non dimostreremo, riassume e descrive la teoria della contrazione dei gruppi.

Teorema 2.2.1. *Ogni gruppo di Lie può essere contratto rispetto a ciascuno dei suoi sottogruppi continui, e solo rispetto a essi. Chiamiamo "S" il sottogruppo rispetto al quale facciamo la contrazione. Gli elementi infinitesimali contratti formano un sottogruppo invariante abeliano del gruppo contratto. Il sottogruppo S è isomorfo al gruppo fattore ("factor group") di questo sottogruppo invariante. Inoltre, l'esistenza di un sottogruppo abeliano invariante e la possibilità di scegliere da ciascuno dei suoi cosets un elemento tale da formare un sottogruppo S, è una condizione necessaria per ottenere il gruppo da un altro gruppo tramite contrazione.*

Nella contrazione, il sottogruppo S rimane invariato. Se si scelgono i parametri in modo tale da avere $a_{2\nu} = 0$ in tutto S, allora $a_{1\nu} = b_{1\nu}$, $a_{2\nu} = \epsilon b_{2\nu}$ in tutto il gruppo G. Si vede che, per $\epsilon \to 0$, i $b_{2\nu}$ avranno range infinito e descriveranno solo gli elementi del gruppo che differiscono infinitesimamente dagli elementi di S.

Gli elementi che sono in un intorno dell'elemento unità di G, ma hanno $b_{2\nu} < \infty$, commuteranno e formeranno il sottogruppo commutativo e invariante.

2.3 Sulle rappresentazioni

Per $\epsilon \to 0$ la rappresentazione di G diventerà isomorfa alla rappresentazione del gruppo S, cioè sarà una rappresentazione del gruppo fattore del gruppo invariante.

Per ottenere una rappresentazione fedele possiamo percorrere due vie. La prima consiste nel sottoporre le $J_{2\nu}$ a una trasformazione dipendente da ϵ. La seconda consiste nel prendere le $J_{2\nu}$ che corrispondono a diverse rappresentazioni. Nel seguito esporremo soltanto la prima di queste due opzioni, che ovviamente possiamo fare solo se gli elementi infinitesimi non sono operatori limitati, cioè solo se il gruppo non è compatto.

Il gruppo non compatto e non commutativo più semplice è quello delle trasformazioni lineari $x' = e^{\alpha}x + \beta$. Un elemento generico è $O_{\alpha,\beta} = T(\beta)R_{\alpha}$, con

$$\begin{aligned} T(\beta)T(\beta') &= T(\beta+\beta') \\ R_{\alpha}R_{\alpha'} &= R_{\alpha+\alpha'} \\ R_{\alpha}T(\beta) &= T(e^{\alpha}\beta)R_{\alpha} \end{aligned} \tag{2.14}$$

L'unica rappresentazione irriducibile unitaria (ma infinito dimensionale) di questo gruppo è in $L^2(\mathbb{R}^+)$:

$$R_\alpha \psi(x) = e^{\alpha/2}\psi(e^\alpha x) \quad T_\beta \psi(x) = e^{i\beta}\psi(x) \tag{2.15}$$

Gli operatori infinitesimi sono $I_\alpha = I_1 = 1/2 + x\partial_x$ e $I_\beta = I_2 = ix$, con $[I_1, I_2] = I_2$.

Dato che la contrazione rispetto al gruppo delle trasformazioni $x' = e^{\alpha x}$ lo lascia invariato (perché le uniche costanti di struttura non nulle sono le C_{12}^2, che non variano), cerchiamo una S_ϵ matrice unitaria dipendente da ϵ tale che I_1 non cambia, e invece $\epsilon I_2' \to I_2$.

Teorema 2.3.1. $S_\epsilon = R \ln \epsilon$

La dimostrazione si trova sull'articolo orginale di Inonu e Wigner [5].

Notiamo che possiamo usare lo stesso trucco per contrarre il gruppo rispetto al sottogruppo di $T(\beta)$. In tal caso il gruppo contratto è il gruppo abeliano a due parametri. Cerchiamo una S'_ϵ tale che I_β non cambi. Si dimostra che $S'_\epsilon = e^{if(x,\epsilon)}$, con $f(x, \epsilon) = f(x)/\epsilon$.

Dunque le trasformazioni del gruppo contratto corrispondente ai parametri α, β sono le moltiplicazioni per $e^{i\alpha_0(x)+i\beta x}$, che sono una rappresentazione fedele e irriducibile.

Nota bene: gli operatori corrispondenti a elementi finiti di un gruppo si possono ottenere trasformando $O_{\alpha,\epsilon\beta} = T(\epsilon\beta)R_\alpha$ (con $R_\alpha = R_{\ln\epsilon}$ nel caso della contrazione rispetto a R_α) oppure $O_{\epsilon\alpha,\beta} = T(\beta)R_{\epsilon\alpha}$ (con $e^{-if(x)}$).

Nell'articolo originale di Inonu e Wigner [5], che è la referenza principale per questo capitolo, viene esposta anche la seconda via, quella basata sulle $J_{2\nu}$ che corrispondono a diverse rappresentazioni, ma noi non la riteniamo istruttiva e quindi non la riporteremo. Nel prossimo capitolo effettueremo la contrazione di Inonu-Wigner vera e propria, cioè applicheremo questi concetti al gruppo di Poincarè, tuttavia seguendo un approccio che si discosta da quello fatto da Inonu e Wigner al loro tempo: il nostro procedimento ci permetterà di mantenere sotto controllo costantemente la fisica del problema, e di capire concettualmente cosa succede durante la contrazione con grande eleganza.

Capitolo 3

Contrazione di Galilei

3.1 Introduzione

Adesso facciamo la vera e propria contrazione del gruppo di Poincaré. Per procedere, ricordiamo che partiamo dall'algebra di Poincaré e vogliamo arrivare all'algebra di Galilei. Un possibile procendimento consiste semplicemente nell'esplicitare nell'algebra di partenza la velocità della luce c, e farne il limite per $c \to \infty$, in tal modo giungendo al caso non relativistico, o galileiano, in cui cioè la velocità della luce è molto più grande delle velocità in gioco (cioè, in riferimento al capitolo precedente, $\epsilon = c^{-1}$). Un metodo ancora più intuitivo è considerare gli andamenti degli elementi dell'agebra in termini della velocità v, e fare il limite per $v \to 0$ (questi due approcci sono concettualmente equivalenti, perché gli effetti relativistici risentono del rapporto $\beta = v/c$; tra l'altro, è più intuitivo pensare a c come una costante della natura, e considerare gli oggetti che si muovono lentamente rispetto ad essa).

Introduciamo quindi adesso l'algebra di Galilei:

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] =& i\epsilon_{ijk} L_k \\
[L_i, K_j^G] =& i\epsilon_{ijk} K_k^G \\
[K_i^G, K_j^G] =& 0 \\
[L_i, P_j] =& i\epsilon_{ijk} P_k \\
[K_i^G, P_j] =& 0 \\
[L_i, P_4] =& 0 \\
[K_i^G, P_4] =& iP_i \\
[P_i, P_j] =& 0 \\
[P_i, P_4] =& 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 La contrazione

L'algebra di Poincaré da cui partiamo è la seguente:

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] =& i\epsilon_{ijk}L_k \\
[L_i, K_j] =& i\epsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, K_j] =& -i\epsilon_{ijk}K_k \\
[L_i, P_j] =& i\epsilon_{ijk}P_k \\
[K_i, P_j] =& i\delta_{ij}P_4 \\
[L_i, P_4] =& 0 \\
[K_i, P_4] =& iP_i \\
[P_i, P_j] =& 0 \\
[P_i, P_4] =& 0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Notiamo anzitutto che, essendo i boost di Galilei diversi da quelli di Lorentz, anche i loro generatori saranno diversi. In effetti, tutta la contrazione si fa semplicemente scrivendo l'algebra di Poincaré in funzione dei generatori dei boost di Galilei, e facendone il limite per $c \to \infty$. La relazione è la seguente:

$$
\begin{aligned}
K_i^G &= \lim_{c\to\infty} \frac{K_i}{c} \\
P_i^G &= \lim_{c\to\infty} \frac{P_i}{c}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

In particolare, facendo esplicitamente il limite per i generatori dei boost, emerge che

$$\lim_{c\to\infty} \frac{K_i}{c} = \lim_{c\to\infty} \frac{-i}{c} \left(\frac{x_4}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i c \frac{\partial}{\partial x_4} \right) = -ix_i \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{3.4}$$

e dunque il terzo commutatore diventa

$$[K_i^G, K_j^G] = K_i^G K_j^G - K_j^G K_i^G = -x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = 0 \tag{3.5}$$

come ci aspettiamo. Anche il quinto commutatore si annulla, perché

$$[K_i^G, P_j^G] = \lim_{c\to\infty} \frac{[K_i, P_j]}{c^2} = \lim_{c\to\infty} \frac{i\delta_{ij}P_4}{c^2} = 0 \tag{3.6}$$

Discutere tutti gli altri commutatori sarebbe banale.

Capitolo 4

Contrazione di Carroll

4.1 Un errore comune

Sarebbe naturale chiedersi cosa avviene se facciamo la cosa inversa alla contrazione di Galilei, cioè il limite $c \to 0$ nell'algebra di Poincaré. Fisicamente, questo equivale a considerare particelle che viaggiano a velocità elevatissime, o, se vogliamo, è il caso in cui appena un oggetto comincia a muoversi arriva già a tali velocità. Uno studio è stato fatto in tal senso da Lévy-Leblond [6], e i risultati sono così curiosi che il gruppo cui si giunge con tale contrazione è stato da lui chiamato "di Carroll" in omaggio all'autore di "Alice nel Paese delle Meraviglie".

A onor del vero, però, Lévy-Leblond aveva introdotto il gruppo di Carroll per sottolineare le conseguenze di un errore comune. Infatti, si sente spesso dire, e si legge sovente persino nei libri specializzati, che il limite galileiano è il limite per basse velocità del gruppo di Poincaré. Questo non è del tutto vero: rimane, infatti, un'ulteriore, tacita ma fondamentale condizione da soddisfare, e cioè che bisogna considerare grandi intervalli di tipo tempo. L'articolo originale di Lévy-Leblond aveva appunto un carattere pedagogico, e voleva mostrare che succede se invece di grandi intervalli di tipo tempo si considerano grandi intervalli di tipo spazio. [6]

Per convincerci dell'importanza della condizione sugli intervalli di tipo tempo nell'approssimazione galileiana, prendiamo una tipica trasformazione di Lorentz in due dimensioni per una velocità u, fra due eventi separati dall'intervallo $(\Delta x, \Delta t)$:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x + u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{4.1}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t + u\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{4.2}$$

La prima condizione per ottenere l'approssimazione galileiana è $u \ll c$. Così si ottiene, matematicamente

$$\Delta x' = \Delta x + u\Delta t \tag{4.3}$$

$$\Delta t' = \Delta t \tag{4.4}$$

Ma la condizione sulla velocità u non è l'unica, se vogliamo davvero avere un caso galileiano: dobbiamo infatti anche imporre

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll c \tag{4.5}$$

che è appunto la condizione di avere grandi intervalli di tipo tempo.

Si nota una notevole coerenza, dal momento che dalle condizioni $u \ll c$ e 4.5 consegue che

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \ll c \tag{4.6}$$

che è proprio quello che volevamo: non avrebbe avuto alcun senso ottere, al seguito di una trasformazione galileiana, un sistema di riferimento con velocità relativistiche! In altri termini, queste due condizioni permettono di applicare con tranquillità l'appossimazione di Galilei, con la rassicurante consapevolezza che le trasformazioni di Galilei manderanno il sistema in un nuovo sistema in cui sono ancora valide queste condizioni, e che può dunque essere trattato coerentemente dalla relatività galileiana.

4.2 Le trasformazioni di Carroll

Che succede se consideriamo trasformazioni a basse velocità, ma stavolta con grandi intervalli di tipo spazio (i.e. $\frac{\Delta x}{\Delta t} \gg c$)? Le trasformazioni di Lorentz in questo caso diventano

$$\Delta x' = \Delta x \tag{4.7}$$

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{u\Delta x}{c^2} \tag{4.8}$$

Esiste un modo per visualizzare i due limiti, galileiano e carrolliano, tramite i coni-luce di Minkowski. Consideriamo prima il caso galileiano, scegliendo delle unità di misura per il tempo τ e per la lunghezza λ tali che $\tau/\lambda \gg c^{-1}$, come è in effetti il caso della nostra vita quotidiana (nel SI, $\tau = 1s$ e $\lambda = 1m$, e una persona cammina a una velocità che è grosso modo di un metro al secondo). In questo caso, il cono di luce è molto appiattito sul piano $t = 0$, e al limite coincide con questo piano.

Il caso di Carroll consiste nel scegliere delle unità di misura tali che $\tau/\lambda \ll c^{-1}$ (e.g., $\tau = 1s$ e $\lambda = 1$ anno luce). In tal caso, il cono-luce si chiude sull'asse $x = 0$, e al limite sarà proprio quell'asse.

Nella fisica di Galilei, ogni evento può essere causa o effetto di un altro, purché siano collegati da un segnale che viaggi a velocità sufficientemente elevate. Nel caso di Carroll, nessun evento può essere causa o effetto di un altro, perché non possono essere collegati da un nesso causale. In effetti, queste parole, che potrebbero risuonare assurde alle orecchie di un relativista, assumono il loro campo di validità in base alle ipotesi da cui partono: sappiamo che la teoria di Galilei non è valida per alte velocità, quindi la prima frase non è in contraddizione con la teoria di Einstein, perché semplicemente non rispetta le ipotesi dell'approssimazione galileiana. Similmente, ha perfettamente senso che due eventi separati da grandi intervalli spaziali non siano collegati causalmente, quindi anche la seconda frase non è sbagliata dal punto di vista della Relatività Speciale.

Nel caso di Carroll, la nozione stessa di causalità perde di significato, dato che, tramite un cambiamento di riferimento opportuno, si può modificare a piacere l'intervallo temporale fra due eventi, addirittura invertendone il segno (tranne che per $\Delta x = 0$): come si può parlare di causalità fra due eventi A e B, se in qualche sistema di riferimento A precede B, e in qualche altro sistema di riferimento B precede A? In altre parole, l'ombra causale di un tale evento è ridotta soltanto allo stesso punto spaziale in cui esso avviene, indipendentemente dal tempo che prendiamo in considerazione.

Vale la pena notare che mentre nella teoria galileiana l'intervallo di tempo fra due eventi è invariante ($\Delta t = \Delta t'$), con Carroll l'invariante è la lunghezza dell'intervallo spaziale ($\Delta x = \Delta x'$).

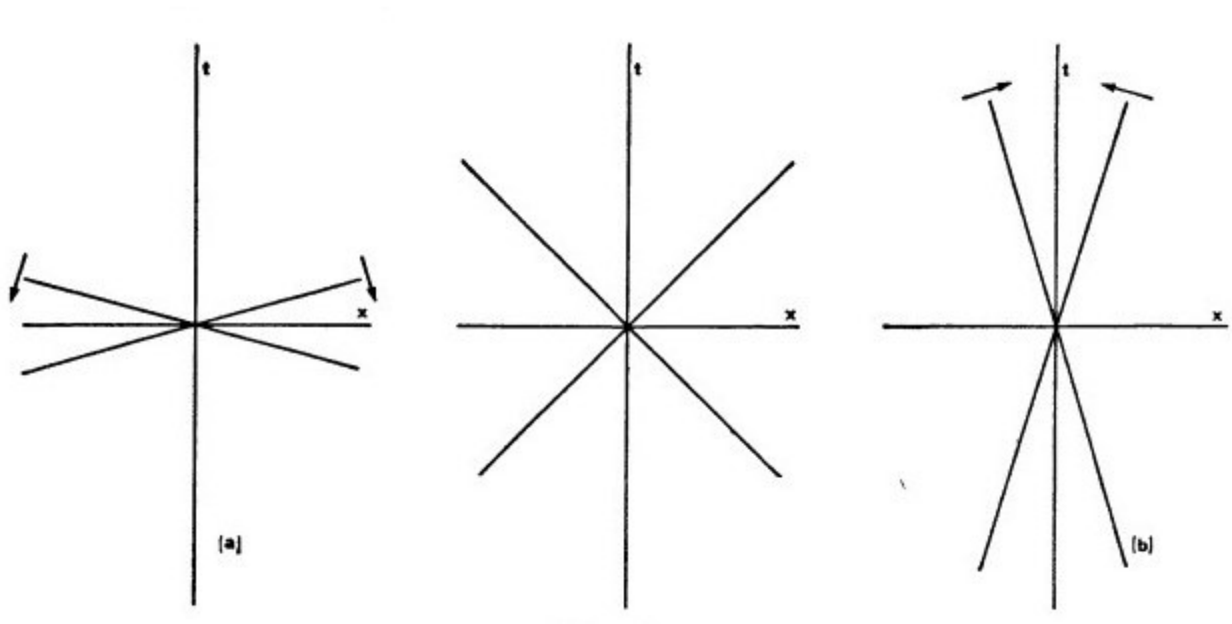

Figura 4.1: Coni luce nel caso di Galilei, Poincaré, e Carroll

4.3 Il gruppo e l'algebra di Carroll

Per ricavare il gruppo di Carroll, partiamo dalla generica trasformazione del gruppo di Poincaré:

$$\vec{x'} = R\vec{x} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot R\vec{x})\vec{\beta} + \gamma\beta x_4 + \vec{a} \tag{4.9}$$

$$x_4' = \gamma(x_4 + \vec{\beta}\cdot R\vec{x}) + a_4 \tag{4.10}$$

Adesso, data una costante C che ha l'inverso delle dimensioni di una velocità, cioè $[C] = TL^{-1}$ consideriamo le quantità

$$t = Cx_4 \tag{4.11}$$

$$\vec{v} = C\vec{\beta} \tag{4.12}$$

$$b = Ca_4 \tag{4.13}$$

Esplicitiamo le nuove quantità nella trasformazione di Lorentz ed eseguiamo quindi il limite per $C \to \infty$, ottenendo

$$t' = t + \vec{v}\cdot R\vec{x} + b \tag{4.14}$$

$$\vec{x'} = R\vec{x} + \vec{a} \tag{4.15}$$

che è l'elemento generale di un nuovo gruppo di trasformazioni a 10 parametri, sottogruppo di $GL(4,\mathbb{R})$. Il gruppo è generato dalle rotazioni (R), dalle trasformazioni di Carroll pure ($\vec{v}$, che non ha le dimensioni di una velocità!), dalle traslazioni si spazio ($\vec{a}$), e di tempo (b). La legge del gruppo è [6]

$$(b', \vec{a'}, \vec{v'}, R')(b, \vec{a}, \vec{b}, R) = (b' + b + \vec{v'}\cdot R'\vec{a}, \vec{a'} + R'\vec{a}, \vec{v'} + R'\vec{v}, R'R) \tag{4.16}$$

Facciamo ora la contrazione dell'algebra di Poincaré, in perfetta analogia con la contrazione che ci ha portati all'algebra di Galilei, volendo giungere all'algebra di Carroll:

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] =& i\epsilon_{ijk}L_k \\
[L_i, K_j] =& i\epsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, K_j] =& 0 \\
[L_i, P_j] =& i\epsilon_{ijk}P_k \\
[K_i, P_j] =& i\delta_{ij}P_4 \\
[L_i, P_4] =& 0 \\
[K_i, P_4] =& 0 \\
[P_i, P_j] =& 0 \\
[P_i, P_4] =& 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Per compiere la contrazione dobbiamo adesso porre

$$K_i^C = \lim_{C\to\infty} \frac{K_i}{C} \tag{4.18}$$

$$P_4^C = \lim_{C\to\infty} \frac{P_4}{C} \tag{4.19}$$

e fare il limite per $C \to \infty$. Si vede molto banalmente che dall'algebra di Poincaré otteniamo quella di Carroll sopra esposta, con gli stessi procedimenti che abbiamo fatto nel caso di Galilei. Infatti, senza discutere i commutatori più banali, il terzo commutatore restituisce

$$[K_i^C, K_j^C] = \lim_{C\to\infty} \frac{[K_i, K_j]}{C^2} = \frac{-i\epsilon_{ijk}L_k}{C^2} = 0 \tag{4.20}$$

il quinto, a differenza del caso di Galilei, dà

$$[K_i^C, P_j] = \lim_{C\to\infty} \frac{[K_i, P_j]}{C} = \lim_{C\to\infty} \frac{i\delta_{ij}P_4}{C} = i\delta_{ij}P_4^C \tag{4.21}$$

e il settimo, ancora differentemente dal caso galileiano, è

$$[K_i^C, P_4^C] = \lim_{C\to\infty} \frac{[K_i, P_4]}{C^2} = \lim_{C\to\infty} \frac{iP_i}{C^2} = 0 \tag{4.22}$$

4.4 La nozione di "tempo" secondo Galilei e Carroll

Lévy-Leblond si riferisce ai limiti galileiano e carrolliano come "non relativistici" [6], ma questa terminologia è impropria, perché gli spazio-tempi di Galilei e di Carroll sono in effetti dotati di una struttura invariante sotto i rispettivi boosts, e sono dunque dotabili di una teoria della relatività. Semplicemente, la relatività di Galilei, o quella di Carroll, non coincide con quella di Einstein, quindi sarebbe più corretto chiamarli "spazio-tempi non di Minkowski" [7], essendo a tutti gli effetti relavistici, almeno rispetto a qualche teoria della relatività.

In Relatività Speciale è spesso particolarmente utile considerare il tempo come un'ulteriore coordinata spaziale, tramite la semplice considerazione $x_4 = ct$. La nozione di tempo in Relatività Speciale è dunque legata alla lunghezza che la luce percorre nel vuoto in quel lasso di tempo. Nel seguito analizzeremo più nel dettaglio altre due concezioni di tempo: quella classica, legata alla nostra esperienza quotidiana e intuitiva, come l'aveva concepita Newton, e quella carrolliana, profondamente diversa da molti punti di vista, e curiosamente legata alla prima da una forma di "dualità". [7]

Il tempo di Newton è "assoluto, vero e matematico" [8] e scorre indipendentemente da qualsiasi cosa al di fuori di sé. Se esplicitiamo $t = x^4/c$, notiamo che possiamo ottenere il limite galileiano facendo il limite $c \to \infty$ nella metrica controvariante di Minkowski, che diventa appunto quella di Galilei:

$$G^{-1} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t} + \delta^{AB}\frac{\partial}{\partial x^A} \otimes \frac{\partial}{\partial x^B} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^A} \otimes \frac{\partial}{\partial x^B} \tag{4.23}$$

Può essere allora interessante definire il "tempo carrolliano" $s = Cx^4$. E' estremamente importante sottolineare che anche questa costante C (diversa da quella usata nella sezione precedente) ha le dimensioni di una velocità, e dunque $[s] = L^2T^{-1}$ non ha le dimensioni di un tempo (come d'altra parte non le ha $x_4 = ct$).

In questo caso, la contrazione viene fatta rispetto alla metrica di Minkowski scritta esplicitando la coordinata s al posto di x^4, e scrivendola in termini di differenziali, anziché di derivate:

$$G = -\frac{1}{C^2} ds \otimes ds + \delta_{AB} dx^A \otimes dx^B \tag{4.24}$$

Una varietà dotata di questa metrica si chiama "spazio-tempo di Carroll".

La dualità cui accennavamo prima può essere esplicitata in termini di una varietà di dimensione superiore che contiene i casi di Galilei e di Carroll. La dualità si ha allora scambiando le coordinate t ed s in un cono luce. La si può esplicitare ulteriormente definendo la varietà di Newton-Galilei e la varietà di Carroll, dato che laddove nella prima compare t, nella seconda s; inoltre la dualità corrisponde all'isomorfismo fra i gruppi omogenei galileiano e carrolliano, $E(d) \to \tilde{E}(d)$.

Appendice A

Cenni sulle trasformazioni relativistiche

La necessità di approfondire il concetto fisico di relatività si fonda anzitutto sull'intersoggettività della scienza, cioè sul fatto che un certo evento della natura può essere osservato da più sperimentatori: in che modo si configurano le relazioni fra le osservazioni di questi sperimentatori?

In ogni teoria della relatività bisogna determinare: 1) una classe di sistemi di riferimento equivalenti per la descrizione delle leggi fisiche, 2) il legame tra le coordinate spazio-temporali che due osservatori appartenenti a suddetta classe attribuiscono allo stesso evento, 3) come si trasformano le grandezze fisiche nel passaggio da un sistema a un altro della classe, 4) e infine le leggi fisiche che conservano la forma nella classe (cioè che sono covarianti). [9]

La prima teoria della relatività è stata quella sorta nel contesto della meccanica classica di Galilei e Newton, e corrisponde tutto sommato al nostro senso intuitivo. Infatti, a ogni ossevatore è associato uno spazio euclideo, e nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro le misure di lunghezze e di tempi sono invarianti: in altri termini, le coordinate spazio-temporali sono assolute. Conseguenza di questa assunzione e del Principio di Relativià (che afferma che *esiste un sistema di riferimento inerziale I in cui ogni punto isolato si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete*), segue che un nuovo sistema di riferimento I' è ancora inerziale solo se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a I.

Le trasformazioni di Galilei fra un sistema di riferimento centrato nell'origine e uno in moto rettilineo uniforme, la cui origine è individuata nel primo sistema riferimento dal vettore

$\vec{r_{o'}} = \vec{v}t'$, sono dunque

$$t' = t \tag{A.1}$$
$$\vec{r}_P = \vec{r'}_P + \vec{v}t' \tag{A.2}$$
$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{v'}_P + \vec{v} \tag{A.3}$$
$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \vec{a'}_P \tag{A.4}$$

dove il pedice P indica che ci stiamo riferendo al generico punto P, mentre il pedice O all'origine del sistema di riferimento.

In conseguenza di ciò, possiamo compiere le seguenti identificazioni: 1) la classe di sistemi di riferimento equivalenti è l'insieme di tutti i riferimenti inerziali, 2) le coordinate spazio-temporali variano con le trasformazioni di Galilei, 3) le masse e le forze sono invarianti, 4) vale il Principio di relatività galileiano: *le leggi della meccanica si formulano allo stesso modo in ogni riferimento inerziale.*

Ma solo le leggi della meccanica! Com'è ben noto, infatti, le leggi di Maxwell si sono rivelate incompatibili con la relatività galileiana, che in effetti era stata sviluppata ben prima della loro formulazione. Einstein ebbe il merito di sostenere la correttezza delle equazioni di Maxwell e di abbandonare la relatività classica, postulando il Principio di isotropia ottica: *esiste almeno un sistema di riferimento otticamente isotropo, cioè in cui sono valide le equazioni di Maxwell.*

Le conseguenze di questo principio sono notevoli: tra l'altro, è ora possibile dare una definizione operativa di tempo, e giungere alle trasformazioni di Lorentz, nella maniera che ci apprestiamo a descrivere. Il Principio di relatività di Einstein, infine, afferma che *le leggi della fisica sono invarianti rispetto a un cambiamento del riferimento otticamente isotropo, ossia sono covarianti per trasformazioni di Lorentz.*

Prima di impostare il ragionamento che ci condurrà alle trasformazioni di Lorentz, rendiamoci conto di cosa succede se imponiamo che la velocità della luce sia uguale in tutti i sistemi di riferimento. In conseguenza di questa assunzione, infatti, in un certo sistema di riferimento per un raggio di luce varrà la relazione $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e in un altro sistema di riferimento sarà $c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, dunque la quantità $s^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ è un invariante relativistico!

Adesso ci proponiamo di ricavare le trasformazioni di Lorentz nel passaggio fra due sistemi di riferimento inerziali, con gli assi z e z' paralleli, e la velocità relativa lungo l'asse z. Inoltre richiediamo che le origini delle coordinate spaziali e temporali coincidano. Ci aspettiamo che le trasformazioni siano: 1) invertibili e simmetriche (dato che i due sistemi di riferimento devono essere equivalenti, la trasformazione inversa deve essere ottenuta considerando una velocità relativa uguale a $-\vec{v}$), 2) lineari, 3) tali che $x' = x$ e $y' = y$ (perché il moto relativo lungo gli assi x e y è nullo), 4) tali che z' e t' non dipendano da x e y. Giungiamo dunque al sistema

$$\begin{aligned} x' =& x \\ y' =& y \\ z' =& a_{34}x_4 + a_{33}z \\ x'_4 =& a_{44}x_4 + a_{43}z \end{aligned} \tag{A.5}$$

Ora, dato che la posizione della vecchia origine nel nuovo sistema di riferimento è $z'_O = -vt'$ e che $z_O = 0$, si può imporre il sistema precedente per l'origine O:

$$ct' = a_{44}x_4 + a_{43}z_O = a_{44}x_4 \tag{A.6}$$

$$z' = a_{34}x_4 + a_{33}z_O = a_{34}x_4 = -vt' \tag{A.7}$$

facendo il rapporto di queste due equazioni si ottiene che

$$\frac{-v}{c} = \frac{a_{34}}{a_{44}} \tag{A.8}$$

Imponiamo ora al nostro caso la condizione sull'invariante relativistico $s^2 = s'^2$, cioè

$$x_4^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (a_{44}x_4 + a_{43}z)^2 - x^2 - y^2 - (a_{34}x_4 + a_{33}z)^2 \tag{A.9}$$

e dunque

$$x_4^2 - z^2 = (a_{44}x_4 + a_{43}z)^2 - (a_{34}x_4 + a_{33}z)^2 \tag{A.10}$$

da cui si ricava

$$x_4^2 - z^2 = x_4^2(a_{44}^2 - a_{34}^2) + z^2(a_{43}^2 - a_{33}^2) + 2x_4z(a_{44}a_{43} - a_{33}a_{34}) \tag{A.11}$$

che è valida ovviamente $\forall x_4, z$, e quindi otteniamo le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} a_{44}^2 - a_{34}^2 =& 1 \\ a_{43}^2 - a_{33}^2 =& 1 \\ a_{44}a_{43} - a_{33}a_{34} =& 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Sostituendo in questo sistema la condizione A.8 si ottengono le trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \gamma(t - vz/c^2) \tag{A.13}$$

$$x' = x \tag{A.14}$$

$$y' = y \tag{A.15}$$

$$z' = \gamma(z - vt) \tag{A.16}$$

Ci si rende immediatamente conto che le trasformazioni di Lorentz si possono facilmente rappresentare in forma matriciale nella maniera seguente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\gamma\beta \\ 0 & 0 & -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

e talvolta si scrive brevemente $x' = \Lambda x$ oppure $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$.

La rappresentazione matriciale rende evidente la struttura di gruppo che hanno le trasformazioni di Lorentz. Anzitutto, dall'invariante s^2 emerge che tutte le trasformazioni (rappresentate da una matrice Λ) devono soddisfare l'equazione $\Lambda^T g \Lambda = g$, dove g è il tensore metrico (una matrice con solo gli elementi diagonali non nulli, il primo uguale a 1 e gli altri tre a -1).

Ancora una volta, l'invariante relativistico ci rivela una cosa importante. Scrivendo $x_0 = ix_4$, le trasformazioni di Lorentz sono quelle che preservano l'invariante $s^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, cioè sono le trasformazioni ortogonali in uno spazio formato da tre coordinate reali e una immaginaria: come le trasformazioni ortogonali in uno spazio dato da tre coordinate spaziali formano il gruppo $O(3)$, queste formano il gruppo $O(3,1)$.

Bibliografia

[1] Arkfen et al., *Mathematical Methods for Physicists. A comprehensive guide. Seventh Edition*, Elsevier Inc., 2013

[2] F. D'Andrea, *Varietà differenziabili*, Esculapio (2020).

[3] Y. S. Kim, M. Noz, *Theory and application of the Poincaré group*, D. Reidel Puhlishing Company, 1986

[4] V. Barone, *Relatività. Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri (2019).

[5] E. Inonu e E. P. Wigner, *On the Contraction of Groups and their Representations*, Proc. Natl. Acad. Sci., 1953

[6] J. Lévy-Leblond, *Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. III, n° 1, 1965, p. 1-12

[7] Duval et al., *Carroll versus Newton and Galilei: two dual non-Einsteinian concepts of time*, Class.Quant.Grav. **31** (2014)

[8] I. S. Newton, *Philosophiae Naturalis Pricipia Mathematica*, Londra: Royal Society of London, 1686

[9] A. Romano, *Introduzione alla Meccanica classica*, Apogeo, 2019

[10] J. Lee, *Introduction to smooth manifold*, Springer (2012).