

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Le funzioni negli spazi fuzzy

Relatore:

Prof. Fedele Lizzi

Candidato:

Miriam Cozzolino

Matr. N85001179

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	2
1 La sfera fuzzy	4
1.1 La quantizzazione dello spazio	4
1.2 L'algebra delle funzioni sulla sfera	6
1.3 La sfera fuzzy	8
1.4 Le armoniche fuzzy	9
2 Funzioni sulla sfera fuzzy	11
2.1 Funzionamento dell'algoritmo	11
2.2 Coefficienti	12
2.3 Analisi coefficienti e grafici	13
3 Conclusioni	23
A L'algebra di Lie	24
A.1 $SU(2)$	24
A.2 $O(3)$	25
B Codice sorgente	27

Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è presentare un algoritmo che permetta di utilizzare le mappe di Weyl-Wigner, le quali approssimano le funzioni sulla sfera S^2 con matrici di dimensione finita, rendendo possibile quindi un'analisi computazionale. Dopo un breve riassunto dei possibili metodi che si possono usare per rappresentare le funzioni con un numero limitato di parametri, ci si concentra sull'approssimazione della *sfera fuzzy*, che permette di ottenere la rappresentazione matriciale delle funzioni. Questo tipo di metodo è preferito rispetto agli altri per diversi motivi, primo tra tutti il mantenimento dell'associatività del prodotto, proprietà rispettata dagli spazi di matrice. Un'altra caratteristica importante dello spazio fuzzy è che mantiene le simmetrie sferiche, quindi vengono rispettate tutte le proprietà dei momenti angolari. Dopo aver introdotto lo spazio su cui si intende lavorare, si passerà ad analizzare le *armoniche fuzzy*, che definiscono le matrici di base e, come suggerisce il nome, sono le matrici relative alle armoniche sferiche. A partire dalla sfera fuzzy, la cui costruzione è meglio approfondita nell'articolo di John Madore [5], è stato scritto un algoritmo che permette di calcolare i coefficienti delle armoniche fuzzy, che poi vengono confrontati con quelli che si ottengono dal caso *continuo*, rispetto quindi alle armoniche sferiche. Le formule utilizzate sono elaborate nell'articolo di O'Connor e Dolan [1].

Una volta trovati i coefficienti è possibile graficare la funzione. Infatti, la mappa di Wigner permette di passare di nuovo allo spazio iniziale, in modo da poter confrontare rispetto alle stesse variabili il caso continuo e quello approssimato. I coefficienti saranno in generale diversi, e questo permetterà di visualizzare l'andamento delle funzioni e le differenze in modo immediato. Il plot utilizzato è il "ComplexPlot3D" da *Mathematica*, che permette di visualizzare contemporaneamente il valore assoluto della funzione e la fase: in questo modo si possono confrontare contemporaneamente le caratteristiche, quindi anche le informazioni

che si perdono. Attraverso il grafico, questo può essere fatto senza dover andare ad indagare i coefficienti singolarmente, processo molto lungo quando il numero di parametri è alto.

La tesi è organizzata come segue: il primo capitolo introduce alla sfera fuzzy, accennando al lavoro di Madore già sopracitato, mentre nel secondo si discuteranno grafici e, nei casi con un numero di parametri piccolo, i coefficienti delle funzioni approssimate.

Capitolo 1

La sfera fuzzy

1.1 La quantizzazione dello spazio

La quantizzazione classica cambia il modo di descrivere lo stato di un sistema, si passa da una varietà differenziabile ad un vettore dello spazio di Hilbert. Le funzioni reali diventano operatori autoaggiunti e le variabili che utilizziamo in meccanica classica $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ vengono sostituite da $(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$. I vettori P e Q sono tali da rispettare le seguenti regole di commutazione, richieste dalla meccanica quantistica:

$$\begin{aligned} [Q^i, Q^j] &= 0 \\ [P_i, P_j] &= 0 \\ [Q^i, P_j] &= i\hbar\delta_j^i \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le (2.1) descrivono un'algebra non commutativa, in cui ci sarà un'indeterminazione nella misura della posizione, vale infatti il principio di indeterminazione, per cui:

$$\Delta P \Delta Q = \frac{i\hbar}{2},$$

questo implica che almeno uno dei due vettori risulterà illimitato. Il principio avrà come conseguenza una perdita di informazione che non è possibile aggirare quando si passa ad una rappresentazione finita. Per fare fronte a questo problema si potrebbe pensare ad un troncamento dello spazio, passando in uno a dimensione finita (come uno spazio di matrici). Questo non sempre è possibile, soprattutto

se si vogliono mantenere le simmetrie del problema. Lo scopo dell'elaborato è di trovare una rappresentazione con un numero di *parametri finiti* di uno spazio quantistico che rappresenta una sfera ed analizzarne la perdita di informazioni, anche nei prodotti di più funzioni. In particolare, ci si concentrerà sulle funzioni a simmetria sferica, data la loro importanza in meccanica quantistica. A partire da queste imposizioni, si andranno ad analizzare le possibili rappresentazioni finite della generica funzione sulla sfera.

Tra le varie rappresentazioni c'è quella definita localmente, *il reticolo*, che è commutativa rispetto al prodotto. Questa però non è utilizzabile per funzioni a simmetria sferica, in quanto non esiste un reticolo regolare che possa approssimare la sfera. Quindi non vengono mantenute tutte le simmetrie spaziali, ma solo una parte, come per le traslazioni sul piano.

Un'altra possibilità è l'utilizzo di una base con variabili angolari, in cui si dovrà troncare la serie che approssima la funzione. Un esempio possono essere le trasformate di Fourier e Laplace o l'utilizzo di armoniche sferiche, ma se troncata brutalmente si perderebbe l'associatività delle funzioni. Nonostante anche in questo caso il prodotto risulti commutativo, la moltiplicazione di due trasformate troncate ad un generico indice N implica una perdita di informazione troppo grande. Infatti, sia f una generica funzione sulla sfera:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l a_{lm}(f) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

Il prodotto di due funzioni apparterrà ad $a(f * g)_{l'm'}$ con $(l', m') = (l_1 + l_2, m_1 + m_2)$, ma siccome la nostra approssimazione si ferma a $l = N$, tutti i termini in cui $l' > N$ non saranno presi in considerazione, quindi il prodotto perde l'associatività, creando molti problemi.

Per questi motivi la rappresentazione più interessante per gli scopi di questo elaborato, è la *sfera fuzzy*: uno spazio non commutativo, ma associativo rispetto al prodotto e con simmetria sferica. Questo spazio si ottiene facendo corrispondere alle funzioni definite su S^2 una serie di matrici quadrate $N \times N$. Ovviamente, essendo anche questa rappresentazione finita, ci sarà una perdita di informazione che verrà analizzata nei prossimi capitoli.

La perdita di informazione sarà dovuta non solo al fatto che si tratta di un'ap-

prossimazione finita, ma anche alla perdita di commutatività del prodotto interno. Infatti, per le regole delle matrici, in generale $M_1 * M_2 \neq M_2 * M_3$, mentre nel caso di due funzioni sulla sfera vale l'uguaglianza $f * g = g * f$; per questo motivo sarà interessante anche analizzare l'approssimazione di *prodotti* di funzioni. Inoltre questo spazio è interessante anche perché le funzioni diventano degli operatori a dimensione finita, quindi lo spazio diventa quantistico di dimensione $N \times N$.

1.2 L'algebra delle funzioni sulla sfera

Una due-sfera S^2 nello spazio R^3 viene rappresentata dal vincolo:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (1.3)$$

Questo permette di passare dalle x_i a delle variabili angolari, riscrivendo

$$f(x_1, x_2, x_3) \rightarrow f(\theta, \phi).$$

Se le x_i appartengono a C , l'algebra può avere come base possibile le armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta, \phi)$, che ci permettono di riscrivere la funzione come:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.4)$$

A questo punto è utile esplicitare la forma di $Y_{lm}(\theta, \phi)$, anche se questa non è univoca. Si è scelta la forma in funzione di $x_3 = r \cos \theta$, scritta rispetto alle funzioni associate $P_l^m(x_3)$ di Legendre:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = N_{lm} e^{im\phi} \frac{P_l^m(r \cos \theta)}{r^l} \quad (1.5)$$

in cui la dipendenza da x_1 e x_2 sta nel termine $e^{im\phi}$.

Inoltre è stato indicato con N_{lm} il coefficiente di normalizzazione, che si può

dimostrare essere uguale a:

$$N_{lm} = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

È interessante anche analizzare il prodotto di due armoniche sferiche, in cui con $C_{l'm'l''m''}^{lm}$ si indica il coefficiente di Clebsch-Gordan e si sott'intende che $Y_{lm} = Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$Y_{l'm'} Y_{l''m''} = \sum_{l=|l'+l''|}^{l'+l''} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi(2l+1)}} C_{l'0l''0}^{l0} C_{l'm'l''m''}^{lm} Y_{lm} \quad (1.7)$$

Come si nota dalla formula, il prodotto di due armoniche sferiche, quindi anche di due funzioni riscritte rispetto a questa base, è commutativo. Questa proprietà non appartiene agli spazi di matrici, utilizzati nella rappresentazione fuzzy. Utilizzando le armoniche sferiche si può scrivere:

$$x_3 = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \quad (1.8)$$

$$x_1 = r \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \quad (1.9)$$

$$x_2 = r \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i (Y_{1-1} + Y_{11}) \quad (1.10)$$

Inoltre, se consideriamo le armoniche sferiche come operatori moltiplicativi, queste seguiranno le seguenti regole di commutazione:

$$[L_3, Y_{1\pm 1}] = \pm Y_{1\pm 1} \quad (1.11)$$

$$[L_+, Y_{1-1}] = \sqrt{2} Y_{10} \quad (1.12)$$

$$[L_-, Y_{11}] = \sqrt{2} Y_{10} \quad (1.13)$$

Dove con L intendiamo i vari momenti angolari, in particolare L_i è il momento angolare rispetto ad x_i ed $L_{\pm} = L_1 \pm iL_2$.

1.3 La sfera fuzzy

Passare dalla sfera alla sfera fuzzy significa passare ad una rappresentazione matriciale attraverso le rappresentazioni dell'algebra di Lie del gruppo $SU(2)$ in ogni spazio C^N . L'approssimazione permette di dare agli spin l un numero finito di valori, mappando così le funzioni sulla sfera in uno spazio finito dimensionale. Troncare semplicemente la (2.3) comporterebbe una perdita ingente di informazioni, in quanto solitamente il prodotto di armoniche sferiche appartiene ad armoniche di grado superiore.

Il primo approccio alla sfera fuzzy fu quello di Madore [5], il quale la formalizzò come una sequenza di algebre non abeliane le cui coordinate soddisfano

$$\begin{aligned}\hat{x}_i \hat{x}_i &= 1 \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= k \epsilon_{ijk} \hat{x}_k\end{aligned}\quad (1.14)$$

con k parametro di non commutatività proporzionale ad $\frac{1}{N}$. Partendo dall'ipotesi di essere su una sfera S^2 le funzioni su questa possono essere riscritte in forma polinomiale:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{a_1 \dots a_l=1}^3 f_{a_1 \dots a_l} x^{a_1} \dots x^{a_l} \quad (1.15)$$

Questa forma avrà $2l + 1$ parametri indipendenti, per ogni l fissato, ciò significa che se si limita la serie ad N si ottiene:

$$\sum_{l=0}^N (2l + 1) = (N + 1)^2$$

Quindi, definita l'approssimazione della funzione nel seguente modo:

$$f^{(N)}(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} \sum_{a_1 \dots a_l=1}^3 f_{a_1 \dots a_l} x^{a_1} \dots x^{a_l} \quad (1.16)$$

essa avrà N^2 componenti indipendenti. I coefficienti possono quindi essere visti come elementi di C^{N^2} , analogo allo spazio delle matrici $N \times N$, non commutativo rispetto al prodotto.

Sono inoltre possibili rappresentazioni di dimensioni maggiori per le quali biso-

generà imporre le condizioni (2.6) per la generica matrice $N \times N$. In generale possiamo dire che le coordinate si trasformeranno nel seguente modo:

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i^{(N)} \equiv k\hat{L}_i^{(N)} \quad (1.17)$$

soddisfacendo le regole di commutazione:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = k\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (1.18)$$

1.4 Le armoniche fuzzy

Per quanto detto nella sezione 2.1, non è possibile semplicemente troncare le serie di espansione rispetto alle armoniche sferiche, quindi bisogna costruire una corrispondenza tra le armoniche sferiche e le cosiddette armoniche fuzzy, che appartengono allo spazio delle matrici $N \times N$. Per passare dalla rappresentazione N dimensionale a quella matriciale e viceversa dobbiamo definire la mappa di Weyl-Wigner, in particolare sia $\hat{f}^{(N)}$ la funzione espressa in termini delle armoniche fuzzy \hat{Y}_{lm} :

$$\hat{f}^{(N)} = \sum_{l=0}^{2l=N} f_{lm} \hat{Y}_{lm} \quad (1.19)$$

le f_{lm} sono i coefficienti della decomposizione (2.3).

Per ottenere le \hat{Y}_{lm} si è utilizzata la formula ricavata da [1], i cui elementi di matrice $|\hat{T}_{lm}|_{\sigma, \sigma'}$ sono descritti nel [2], da tenere presente anche nell'implementazione dell'algoritmo:

$$\hat{Y}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \hat{T}_{lm} \quad (1.20)$$

$$|\hat{T}_{lm}|_{\sigma, \sigma'} = \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} C_{S\sigma lm}^{S\sigma'} \quad (1.21)$$

In cui $C_{S\sigma lm}^{S\sigma'}$ sta per il coefficiente di Clebsch-Gordan sulla base $|S, \sigma\rangle$.

Ogni \hat{T}_{lm} sarà una matrice appartenente al $M(N)$ con $N = 2l$, in cui il coefficiente varia sia la componente σ sia la componente della base su cui si proietta σ' .¹

¹Nel caso specifico di questo elaborato, le normalizzazioni, quindi i relativi coefficienti di \hat{T}_{lm} saranno analizzati nel prossimo capitolo.

Sostituendo le armoniche sferiche con le armoniche fuzzy si ottiene, analogamente alle (2.7-9):

$$\hat{x}_3 = \hat{r} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \hat{Y}_{10} \quad (1.22)$$

$$\hat{x}_1 = \hat{r} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\hat{Y}_{1-1} - \hat{Y}_{11}) \quad (1.23)$$

$$\hat{x}_2 = \hat{r} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i (\hat{Y}_{1-1} + \hat{Y}_{11}) \quad (1.24)$$

In questo caso, le armoniche fuzzy saranno proporzionali al momento angolare, sotto forma matriciale:

$$[\hat{L}_3, \hat{Y}_{1\pm 1}] = \pm \hat{Y}_{1\pm 1} \propto \hat{L}_\pm \quad (1.25)$$

$$[\hat{L}_+, \hat{Y}_{1-1}] = \sqrt{2} \hat{Y}_{10} \propto \hat{L}_3 \quad (1.26)$$

$$[\hat{L}_-, \hat{Y}_{11}] = \sqrt{2} \hat{Y}_{10} \propto -\hat{L}_3 \quad (1.27)$$

Capitolo 2

Funzioni sulla sfera fuzzy

2.1 Funzionamento dell'algoritmo

Dopo aver costruito le armoniche fuzzy, sarà possibile "fuzzyficare" il problema. Infatti è stata definita una rappresentazione delle funzioni che sia: finita, a simmetria sferica, associativa. Associando ad ogni funzione una collezione di matrici $l \times l$ con $l = 1, 2, \dots, N$, si otterranno N spazi di matrici, le cui basi saranno le armoniche fuzzy.

Ovviamente ci sarà bisogno di formule che permettano di passare dallo spazio delle funzioni a quello delle matrici e viceversa. Nel primo caso, si parla di mappa di Weyl, definita dalle (2.18-19). Dopo aver effettuato questa trasformazione, sarà utile ritornare nello spazio delle funzioni per confrontare gli andamenti e analizzare la perdita di informazione dovuta al fatto che la (2.17) sia finita. Per tornare nello spazio delle funzioni si utilizzerà la formula presente nell'articolo [1], opportunamente normalizzata diventa:

$$\hat{f}_{lm} = (2j + 1)^{\frac{3}{2}} Tr(\hat{Y}_{lm}^\dagger F) \quad (2.1)$$

in cui F è la matrice di dimensione $l \times l$ associata alla funzione considerata. Nel caso in cui si analizzino proprio le armoniche sferiche, le F associate saranno le armoniche fuzzy, quindi $F = \hat{Y}_{l'm'}$. Si noti che in questo caso, le tracce dovranno essere zero sempre, tranne quando $(l', m') = (l, m)$, in tal caso si dovrà ottenere solo il termine di normalizzazione.

Per ottenere una funzione da una matrice si pone:

$$\hat{f}_{lm} \rightarrow f_{lm}, j \rightarrow \infty$$

ovvero i coefficienti delle espansioni tendono ad essere gli stessi quando j aumenta. Per capire come funziona il programma e qual è il margine di errore, verranno effettuate delle prove di diverso genere. Si analizzeranno gli andamenti delle approssimazioni delle armoniche sferiche, ad N (e quindi a j) differenti. Nella prossima sezione verranno discussi i grafici delle funzioni prima e dopo essere approssimate.

2.2 Coefficienti

Per calcolare i coefficienti rispetto alla base delle armoniche sferiche si utilizza la seguente formula:

$$f_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (2.2)$$

che nel caso in cui la $f(\theta, \phi)$ sia il risultato di un *prodotto* di armoniche sferiche, diventa:

$$f_{lm}(l_1, m_1, l_2, m_2) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 4\pi Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (2.3)$$

in cui il coefficiente di normalizzazione 4π permette di ottenere $f_{lm} = 1$ in tutti i casi in cui $f(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi)$.

In quest'ultima equazione, abbiamo esplicitato la dipendenza dai vari parametri per avvicinare la notazione qui utilizzata a quella del **codice sorgente**.

Si possono confrontare i coefficienti ottenuti dalla (2.3) con quelli che si ottengono effettuando un calcolo analogo, che coinvolge le armoniche *fuzzy*. In queste ultime, j sarà il parametro che definirà la dimensione delle matrici e si noterà facilmente che all'aumentare di j , diminuirà la differenza tra i coefficienti, quindi aumenterà la somiglianza tra i grafici delle funzioni analizzate.

La formula utilizzata per calcolare i coefficienti rispetto alle armoniche fuzzy è la

seguinte:

$$\hat{f}_{lm} = Tr(F\hat{Y}_{lm}^\dagger) \quad (2.4)$$

della quale, come per la (2.2), ne esplicitiamo la forma quando F è data da un prodotto di armoniche. Si ottiene:

$$\hat{f}_{lm} = Tr(\hat{Y}_{lm}^\dagger[\hat{Y}_{l_1m_1}\hat{Y}_{l_2m_2}]) \quad (2.5)$$

Ci si aspetta anche delle differenze tra i due casi possibili per la non commutatività del prodotto: $F = \hat{Y}_{l_1m_1}\hat{Y}_{l_2m_2}$ ed $F = \hat{Y}_{l_2m_2}\hat{Y}_{l_1m_1}$.

2.3 Analisi coefficienti e grafici

Il primo esempio che presente in questa sezione è quello di un'unica armonica sferica. Questo ha permesso di ottenere i coefficienti utilizzati nelle formule (2.2-2.4). Infatti, conoscendo L, M fissati dell'armonica iniziale, la rappresentazione matriciale relativa ad essa sarà la \hat{Y}_{LM} e ci aspettiamo che $\hat{f}_{lm} = 1$ solo quando $(l, m) = (L, M)$, quindi che il prodotto restituisca una matrice tale che:

$$Tr(\hat{Y}_{lm}^\dagger\hat{Y}_{LM}) = \delta_{lL}\delta_{mM}$$

Il risultato ottenuto sarà esatto, ovvero 1, quando

$$L \leq 2j + 1 \quad (2.6)$$

Ovviamente la condizione (2.6) non basta per ottenere il risultato esatto in ogni caso: quando si parla di prodotti di armoniche sferiche o di funzioni meno semplici, l'approssimazione migliora all'aumentare di j anche se gli ordini dei coefficienti diversi da 0 sono minori di $2j + 1$.

Nel prossimo esempio si andrà ad analizzare il prodotto di due armoniche sferiche, i cui parametri sono:

$$(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$$

Si tratterà quindi dell'analisi del caso in cui $f(\theta, \phi) = Y_{l_1m_1}(\theta, \phi)Y_{l_2m_2}(\theta, \phi)$ I

grafici delle figure successive sono stati ottenuti dall'utilizzo della funzione "ComplexPlot3D" messa a disposizione dall'ambiente di calcolo "Mathematica". Questa permette di graficare la sfera rispetto le variabili (θ, ϕ) : nel particolare θ è la variabile che va da 0 a π , quindi quella che si vede sulla profondità, mentre ϕ va da 0 a 2π ed è posta sull'asse orizzontale. Sull'asse verticale c'è il valore assoluto della funzione, mentre il colore permette di visualizzarne la fase.

La figura [2.1] e [2.2] sono i grafici ottenuti da questo prodotto, mentre nei successivi sono rappresentate le approssimazioni. Si noti come l'andamento "esatto" della funzione è leggermente asimmetrico ma molto regolare, in particolare per quanto riguarda la fase. Inoltre, in questo caso particolare, le asimmetrie che ci si aspetta di vedere sono impercettibili ma diventeranno molto più accentuate nelle approssimazioni fuzzy analizzate di seguito.

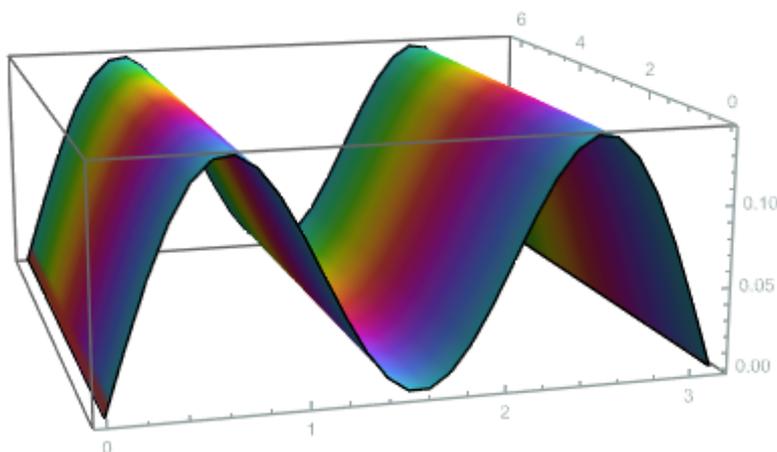


Figura 2.1: Caso continuo del prodotto di due armoniche sferiche con $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

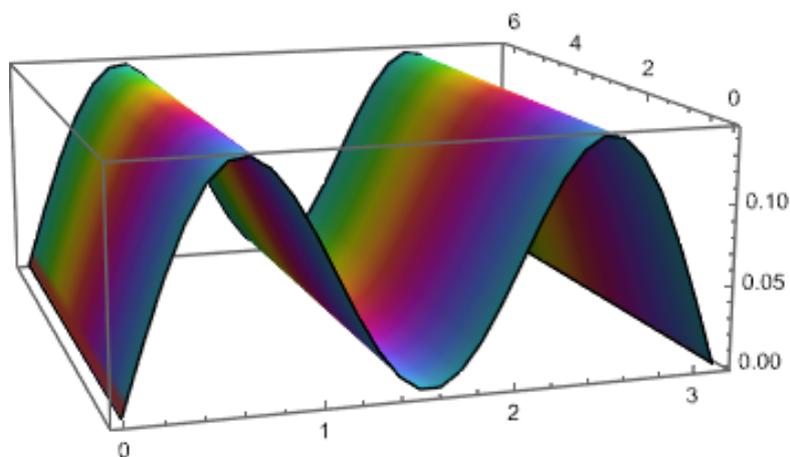


Figura 2.2: Caso continuo del prodotto di due armoniche sferiche con $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (2, 1, 1, 0)$

Nel grafico successivo, infatti, si può osservare l'approssimazione al primo ordine delle j , che mantiene e accentua la asimmetria: c'è una alta perdita di informazione che toglie la continuità sia al valore assoluto della funzione, sia alla fase.

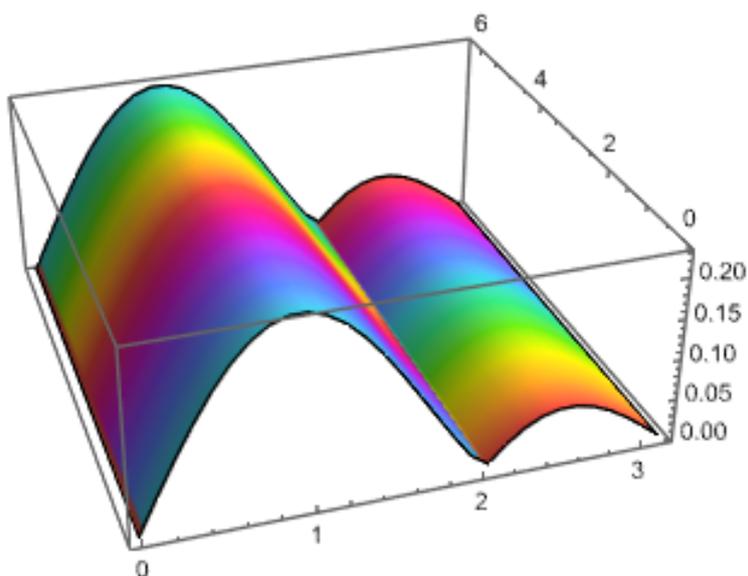


Figura 2.3: Approssimazione con $j = 1$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

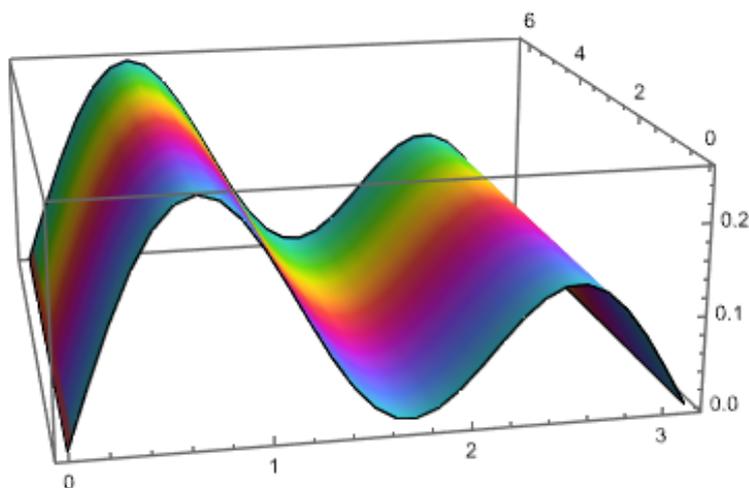


Figura 2.4: Approssimazione con $j = 2$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

Passando a $j = 2$ si ottiene un risultato più soddisfacente, in quanto nonostante la asimmetria sia molto più marcata rispetto al caso continuo, vengono mantenute sia la continuità di $|f(\theta, \phi)|$ sia della fase. Infatti, questo miglioramento dell'approssimazione lo si osserva anche analizzando i coefficienti ottenuti al variare di j . I coefficienti f_{lm} diversi da zero, calcolati attraverso la (2.4), sono:

$$\begin{aligned} f_{11} &= 0.2185 \\ f_{31} &= 0.2336 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Attraverso la formula (2.5) è possibile calcolare le \hat{f}_{lm} ai vari ordini di approssimazione.

I coefficienti diversi da zero ottenuti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} j = 1 \quad \hat{f}_{11} &= 0.3535 \\ \hat{f}_{21} &= 0.3535 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} j = 2 \quad \hat{f}_{11} &= 0.3240 \\ \hat{f}_{21} &= 0.1581 \\ \hat{f}_{31} &= 0.3024 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 j = 3 \quad \hat{f}_{11} &= 0.2835 \\
 \hat{f}_{21} &= -0.09449 \\
 \hat{f}_{31} &= 0.2857
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Si nota facilmente come la differenza tra gli f_{lm} ed \hat{f}_{lm} diventa sempre più piccola quanto più viene aumentato j . Sono stati ignorati tutti i coefficienti con ordine di grandezza minore di 10^{-5} . Nonostante siano imprecisioni che aumentano quando j è maggiore, possono essere ignorate in quanto sono spesso dell'ordine di 10^{-19} . Come accennato in precedenza, ci si aspettano risultati diversi nel caso in cui

$$(l_1, m_1, l_2, m_2) = (2, 1, 1, 0)$$

La non commutatività del prodotto interno, si tradurrà in una variazione del segno di alcuni dei coefficienti, nei casi particolari della (2.8-9-10) le \hat{f} che cambiano di segno saranno:

$$j = 1, \hat{f}_{21} = -0.3535$$

$$j = 2, \hat{f}_{21} = -0.1581$$

$$j = 3, \hat{f}_{21} = 0.0945$$

Che fa cambiare la simmetria dell'approssimazione, come possiamo osservare dai seguenti grafici nel caso di $j = 5$.

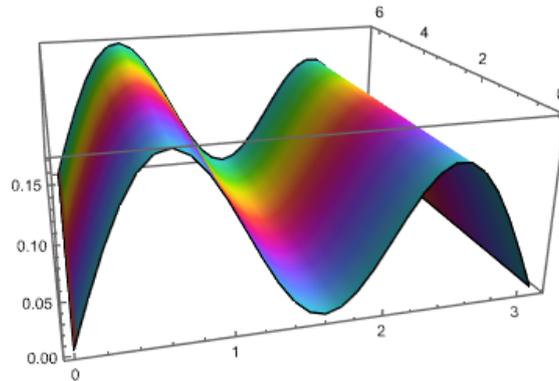


Figura 2.5: Approssimazione con $j = 5$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

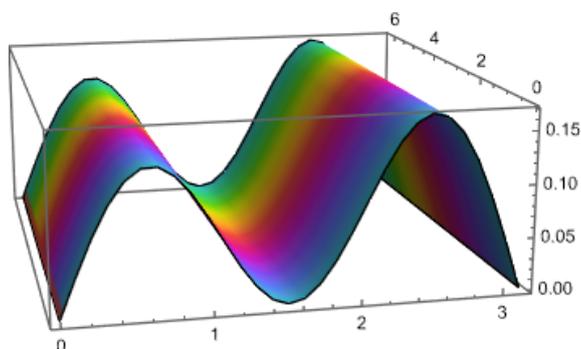


Figura 2.6: Approssimazione con $j = 5$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (2, 1, 1, 0)$

Aumentando ulteriormente j si ottengono grafici sempre più simili a quello iniziale, come nel caso che si osserva sopra di $j = 5$. Di seguito ci sono le approssimazioni per $j = 50$ e $j = 100$, le cui discrepanze sono praticamente impercettibili dai grafici.

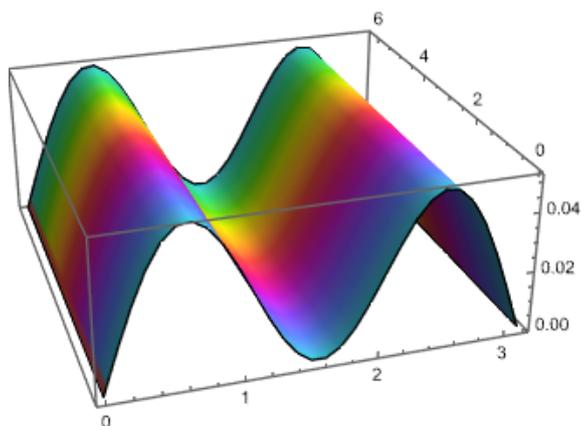


Figura 2.7: Approssimazione con $j = 50$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

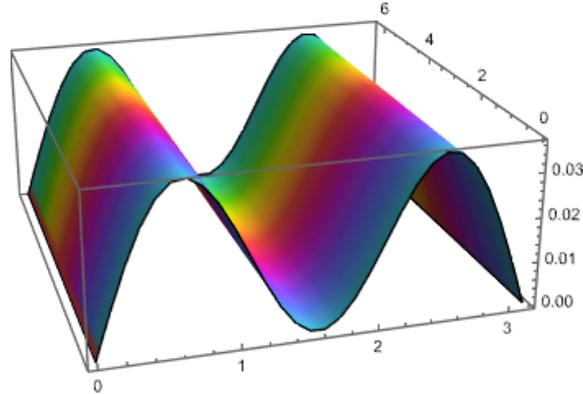


Figura 2.8: Approssimazione con $j = 100$ del prodotto di due armoniche sferiche con parametri $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, 0, 2, 1)$

Partendo da queste osservazioni, qualsiasi funzione sulla sfera potrà essere approssimata con questo metodo ed ottenerne un'approssimazione finita. L'unica richiesta è che sia possibile scrivere la funzione rispetto alle armoniche sferiche. Un caso interessante, è quello della δ di Dirac.

Prima di tutto bisognerà trovare l'espansione in armoniche sferiche della funzione scelta. Dall'articolo [3] si è presa la relazione:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2) = \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \delta(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.11)$$

In cui già l'espressione esatta della funzione ha il termine $l \rightarrow \infty$, quindi è un'approssimazione aggiuntiva. Infatti, anche con le armoniche sferiche, bisognerà fermare la somma ad un valore n finito. Per passare poi nello spazio fuzzy dovremmo utilizzare la formula:

$$\sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l \hat{Y}_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \delta(\cos\theta) \delta(\phi - \pi) \quad (2.12)$$

in cui $n = 2j + 1$.

Si può iniziare con l'analizzare casi con il parametro j molto piccolo. Il più piccolo, che non sia zero, è $j = \frac{1}{2}$. Si ottiene, dal calcolo continuo con le armoniche sferiche:

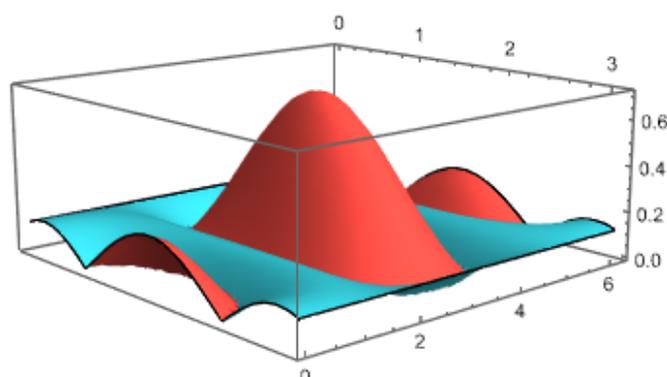


Figura 2.9: Approssimazione nel caso continuo della δ di Dirac, con $n = 3$

L'approssimazione, nonostante sia ad un grado molto basso, permette di osservare un picco abbastanza distinto in $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e dei valori minori di 0,6 lontano dal suddetto punto. In questo caso si osservano due colori diversi per la fase, questi rappresentano valori lontani nello spettro ed è dovuto al fatto che la funzione è reale con segno positivo o negativo, a cui corrispondono fasi di 0 e π . L'approssimazione che invece si ottiene nel caso in cui ci troviamo nello spazio fuzzy restituisce la seguente figura:

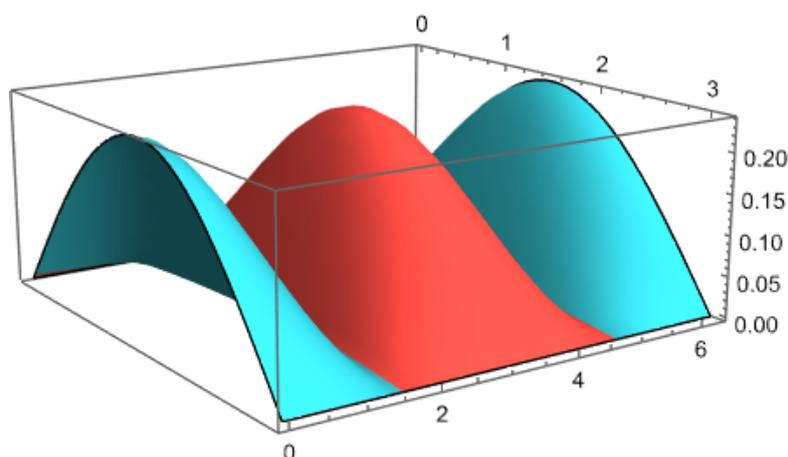


Figura 2.10: Approssimazione fuzzy della δ di Dirac, con $j = \frac{1}{2}$

In questo caso, l'approssimazione mantiene la simmetria della funzione analizzata e la fase, ma non si osserva un picco distinto. Sarà utile analizzare i casi

con j ed n maggiori. Preso il caso immediatamente successivo avremo come risultato:

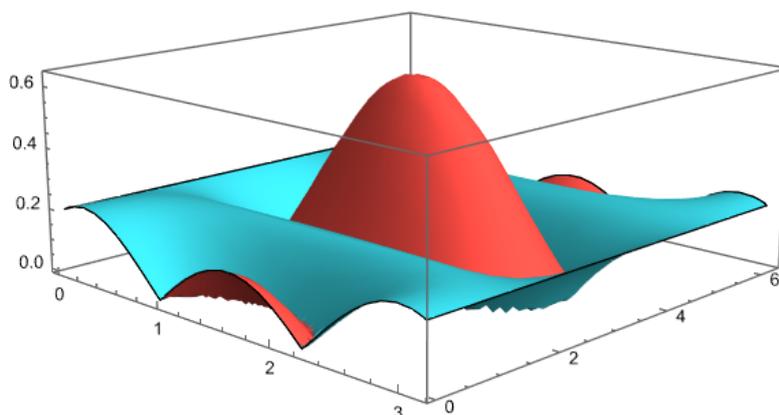


Figura 2.11: Approssimazione fuzzy della δ di Dirac, con $j = 1$

Si nota facilmente che con $j = 1$ si ottiene un'approssimazione molto simile a quella nella Figura (2.9), con un massimo ben definito.

L'approssimazione successiva con le armoniche sferiche sar :

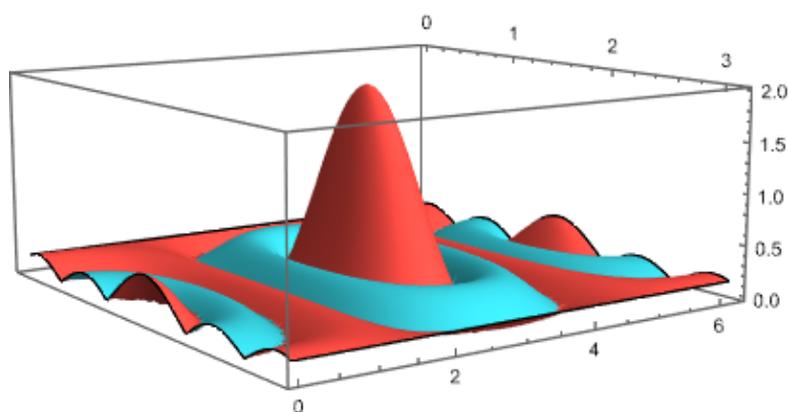


Figura 2.12: Approssimazione continua della δ di Dirac, con $n = 5$

È interessante vedere come migliora particolarmente l'approssimazione fuzzy nei casi in cui la j aumenta, anche di poco. Si veda nei prossimi grafici come utilizzando $j = 5$ e $j = 6$ la δ risulti decisamente meglio approssimata.

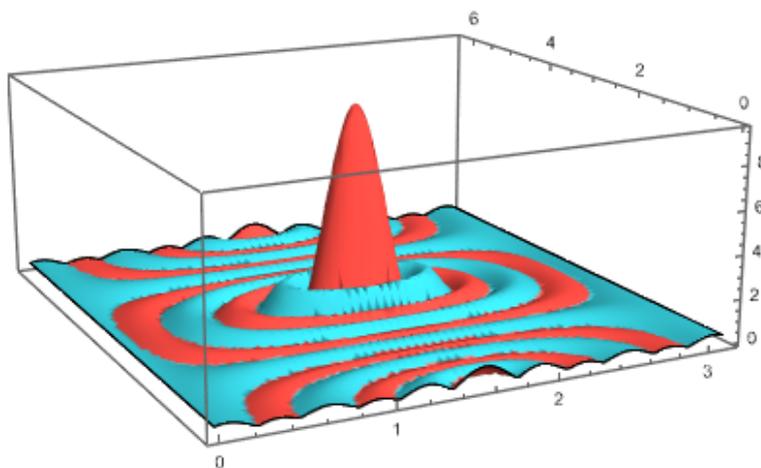


Figura 2.13: Approssimazione fuzzy della δ di Dirac, con $j = 5$

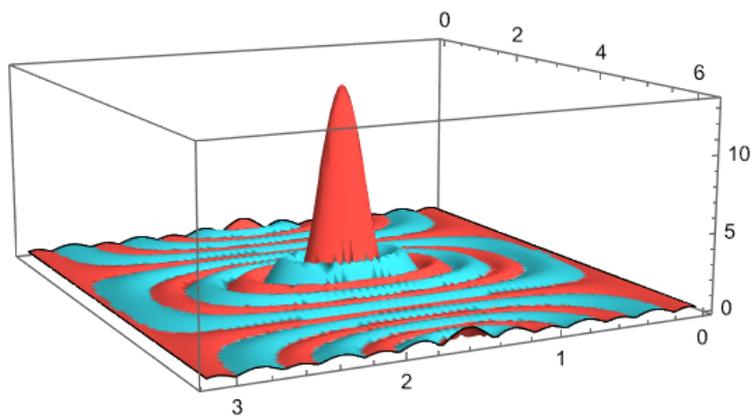


Figura 2.14: Approssimazione fuzzy della δ di Dirac, con $j = 6$

Capitolo 3

Conclusioni

L'elaborato ha permesso di provare la validità dell'approssimazione alla *sfera fuzzy* e alcuni dei suoi limiti. Il funzionamento di questa permette di riuscire a rappresentare con un numero di parametri finito una generica funzione sulla sfera S^2 . Avere parametri finiti, permette di poter utilizzare metodi computazionali per ottenere delle soluzioni approssimate, come viene fatto nella [6] per le equazioni differenziali indipendenti dal tempo.

I limiti di questo tipo di approssimazione possono essere la perdita di informazione, che non può essere sempre ben definita. Infatti, per quanto ci permetta di mantenere molte delle proprietà più importanti (associatività del prodotto, simmetrie), non è sempre possibile riuscire ad avere delle approssimazioni soddisfacenti, in particolare quando l'ordine delle armoniche sferiche in gioco è molto maggiore di 0.

Questo problema è palese anche nell'approssimazione della funzione δ , che avendo a priori l indefinito, diminuisce ulteriormente la precisione.

Appendice A

L'algebra di Lie

Caratteristica importante dell'algebra di Lie è che possiamo associare ad ogni gruppo di Lie un'algebra e viceversa.

A.1 SU(2)

Per mappare delle coordinate commutative in coordinate non commutative servono delle rappresentazioni dell'algebra di Lie del gruppo $SU(2)$ in ogni spazio C^N . Sia U il generico elemento del gruppo $SU(2)$, questo può essere rappresentato come una matrice unitaria 2×2 , quindi:

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

e dovrà rispettare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= U U^\dagger = 1 \\ \det U &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dall'uguaglianza di $U^\dagger = U^{-1}$ si ottiene:

$$U = \begin{bmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

che unita alla condizione sul determinante resistsce U in funzione di tre parametri

$$U(a_2, b_1, b_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - a_2 - b_1 - b_2} + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & \sqrt{1 - a_2 - b_1 - b_2} - ia_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Da questa si possono trovare i generatori della trasformazione infinitesima. Le tre matrici generatrici saranno ottenute dalla derivata di U rispetto ad ogni parametro, con $(a_2, b_1, b_2) = 0$. Facendo il calcolo si ottengono:

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

che corrispondono alle matrici di Pauli.

A.2 $O(3)$

Siccome le armoniche fuzzy conservano le simmetrie spaziali, può essere interessante anche analizzare il gruppo delle rotazioni $O(3)$ e la sua algebra di Lie $o(3)$. Il gruppo infatti può essere interpretato come il gruppo delle isometrie spaziali di dimensione n e può essere rappresentato dalle matrici $N \times N$. Infatti non c'è commutatività rispetto al prodotto.

Essendo un gruppo unitario dobbiamo imporre che la generica matrice R sia tale che:

$$R^T R = R R^T = 1 \quad (\text{A.8})$$

Nel caso di $O(3)$, avremo tre parametri che definiscono gli infiniti elementi del gruppo. Un esempio possono essere i tre angoli di Eulero che definiremo $\alpha = (\theta, \phi, \psi)$, da cui si potrà ottenere il generatore della rotazione J_i rispetto all'asse

x_i da:

$$J_i = \frac{1}{i} \frac{dR_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \Big|_{\alpha_i=0} \quad (\text{A.9})$$

Appendice B

Codice sorgente

Di seguito sono riportate le funzioni base utilizzate nella realizzazione del programma. Secondo le convenzioni di *Mathematica* la combinazione di simboli ":=" permette di definire una nuova funzione delle variabili tra le parentesi quadre.

```
fuzzyharm[j_, l_, m_] := Table[N[Sqrt[(2l + 1)/(2j + 1)]  
ClebschGordan[{l, m}, {j, a - j - 1}, {j, (b - j - 1)}]],  
{a, 1, 2j + 1}, {b, 1, 2j + 1}]
```

```
ffjlm[j_, l_, m_, ff_] := (-1)^m Tr[fuzzyharm[j, l, -m].ff]
```

```
fsh[l_, m_, \[Theta]_, \[Phi]_] = Integrate[Conjugate  
[SphericalHarmonicY[l, m, \[Theta], \[Phi]]]  
f[\[Theta], \[Phi]] Sin[\[Theta]],  
{\[Theta], 0, Pi}, {\[Phi], 0, 2Pi}]
```

```
da[j_, \[Theta]_, \[Phi]_] :=  
Sum[N[ffjlm[j, l, m,  
Sum[fuzzyharm[j, l, m],  
{l, 1, 2j + 1}, {m, -l, l}]]]*  
SphericalHarmonicY[l, m, \[Theta], \[Phi]] Conjugate  
[SphericalHarmonicY[l, m, \[Pi]/2, \[Pi]]],  
{l, 0, 2j}, {m, -l, l}]
```

```
dsh[j_, \[Theta]_, \[Phi]_] :=
  Sum[Conjugate[SphericalHarmonicY[l, m, \[Pi]/2, \[Pi]]]
    SphericalHarmonicY[l, m, \[Theta], \[Phi]],
    {l, 0, 2 j}, {m, -l, l}]
```

Adesso si possono approfondire le funzioni sopra definite.

La "fuzzyharm" permette di ottenere la matrice relativa all'armonica sferica $Y_{lm}(\theta, \phi)$ con grado di approssimazione j ; questo significa che la matrice sarà quadrata di dimensione $2j + 1 = N$.

La funzione "ffjlm" rappresenta la proiezione sulla base delle armoniche fuzzy \hat{Y}_{lm} di dimensione N e "ff" sta per la rappresentazione matriciale della funzione scelta. Invece "fsh" è la (1.2), ovvero la scomposizione in armoniche sferiche. La somma su l, m di "ffjlm" o di "fsh" moltiplicata per l'armonica sferica $Y_{lm}(\theta, \phi)$, restituisce la funzione approssimata rispettivamente nel caso fuzzy e continuo.

Le altre due funzioni, "da" e "dsh" rappresentano rispettivamente l'approssimazione fuzzy e continua della funzione δ di Dirac. In questi casi la somma è stata inglobata nella formula per rendere il passaggio al grafico più immediato.

Bibliografia

- [1] Brian P Dolan and Denjoe O'Connor. A fuzzy three sphere and fuzzy tori. *Journal of High Energy Physics*, 2003(10):060, 2003.
- [2] V.K. Khersonskii, A.N. Moskalev, and D.A. Varshalovich. *Quantum Theory Of Angular Momentum*. World Scientific Publishing Company, 1988.
- [3] YT Li and R Wong. Integral and series representations of the dirac delta function. *arXiv preprint arXiv:1303.1943*, 2013.
- [4] Fedele Lizzi. Noncommutative Geometry and Particle Physics. *PoS, CORFU2017*:133, 2018.
- [5] John Madore. “*The fuzzy sphere*”. *Classical and Quantum Gravity*, 9(1):69, 1992.
- [6] Bernardino Spisso. Applicazioni della sfera fuzzy. Tesi di laurea, 2004/2005.