

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Gruppidi in Meccanica Quantistica

Relatore:

Prof. Francesco D'Andrea

Candidato:

Mattia Carrino

Matricola: N85001361

Anno Accademico 2020-2021

Indice

1	Introduzione	2
2	Gruppoidi	4
2.1	Nozioni preliminari	4
2.2	Definizione esplicita dei gruppoidi	7
2.3	Puzzle del quindici	11
3	C* - algebre e rappresentazioni	15
3.1	Nozioni fondamentali	15
3.2	C*-algebre	17
3.3	Morfismi e rappresentazioni	18
3.4	Algebra di un gruppoide discreto	19
4	L'approccio di Schwinger	22
4.1	Gruppoidi come struttura fondamentale	23
4.2	Osservabili e Stati	24
4.3	Rappresentazione di $C^*(G)$	26
4.4	Evoluzione temporale	27
5	Conclusioni	29

Capitolo 1

Introduzione

Agli albori della teoria quantistica emersero due diverse formulazioni atte a descrivere e ad analizzare i principi e le caratteristiche di sistemi quantistici: la teoria di Heisenberg e quella di Schrödinger (per un'analisi più approfondita degli sviluppi storici della meccanica quantistica si veda [9]).

La prima, chiamata *meccanica delle matrici*, fu sviluppata, appunto, da Heisenberg, Born e Jordan nel 1925 e fu la prima versione completa e coerente della meccanica quantistica; tra i vari successi di questa teoria si annoverano quelli di aver esteso il modello atomico di Bohr e di aver spiegato i cosiddetti *salto quantici*.

La seconda, detta *meccanica ondulatoria*, fu teorizzata, invece, da Schrödinger e Born (quest'ultimo propose, infatti, un'interpretazione probabilistica della funzione d'onda, fondamento della formulazione di Schrödinger) nel 1926 e nacque in analogia con, appunto, l'ottica.

Le differenze tra queste due teorie fisicamente equivalenti sono da trovare principalmente nelle strutture matematiche alla loro base. Schrödinger, infatti, descrive un sistema fisico associandolo a uno spazio di Hilbert complesso e separabile; egli scelse, nello specifico, lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile ($L^2(\mathbb{R})$ in una dimensione e più in generale $L^2(\mathbb{R}^n)$ in n dimensioni spaziali) e i suoi vettori furono interpretati come le *funzioni d'onda* della teoria. Infine fu data un'interpretazione statistica di quest'ultime, dimostrando che esse, appunto, fossero delle ampiezze di probabilità.

Heisenberg, di contro, associò a ogni sistema fisico un'opportuna algebra di operatori (matrici nel caso più semplice), che oggi è chiamata *C*-algebra* e i cui elementi autoaggiunti sono interpretati come osservabili del sistema.

In questo breve elaborato, ci si prefigge di illustrare i principi alla base di

un'ulteriore formulazione quantistica, ovvero quella sviluppata da Schwinger. Il suo *simbolismo delle misure atomiche* si basa su una serie di processi chiamati *misure selettive* che, come sarà spiegato di seguito, sono associabili a un gruppoide, come dimostrato da Ibort, Marmo, Ciaglia et al. in [7], [8] (per maggiori approfondimenti sull'argomento si vedano successivi articoli presenti su *arXiv.org*). Nello specifico, dopo aver descritto brevemente in cosa consista la struttura di un gruppoide, si illustreranno i procedimenti tramite i quali si possa ottenere una C^* -algebra (si consulti [3] per una trattazione più rigorosa) e, tramite una costruzione detta GNS, una rappresentazione della suddetta C^* -algebra. Successivamente si ricaveranno gli osservabili e gli stati di questa teoria quantistica, oltre a fornire un'interpretazione statistica delle grandezze ottenute. Infine si otterrà l'equazione di evoluzione temporale nella rappresentazione GNS.

Capitolo 2

Gruppoidi

2.1 Nozioni preliminari

Una trattazione completa sui gruppoidi richiederebbe nozioni di topologia e analisi funzionale e va oltre gli scopi della tesi. Nello specifico, quindi, si considereranno gruppoidi senza topologia e, da un certo punto, finiti. Per la loro definizione serve qualche nozione preliminare delle *categorie* (si veda [1]).

Definizione 2.1. Un *grafo* è una struttura matematica composta da *vertici* o *oggetti* $(a, b, c, d, \dots)$, *frecce* o *morfismi* $(f, g, h, \dots)$ e da due funzioni così definite:

- *dominio*, che assegna a ogni morfismo f un oggetto $a = \text{dom } f$;
- *codominio*, che assegna a ogni morfismo g un oggetto $b = \text{cod } g$.

Può essere d'aiuto visualizzare tali operazioni con delle vere e proprie frecce che colleghino l'oggetto associato ad un morfismo f dalla funzione dominio (detta in inglese *source map*) all'oggetto associato ad f tramite funzione codominio (detta in inglese *target map*). Quindi:

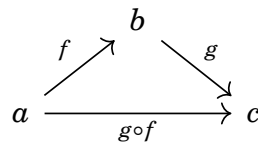
$$f : a \rightarrow b ,$$

oppure

$$a \xrightarrow{f} b.$$

Definizione 2.2. Una *categoria* è un grafo con due ulteriori operazioni:

- *identità*, l'operazione che associa ad ogni oggetto b un morfismo $b \rightarrow b$ indicato con id_b o 1_b ;
- *composizione*, che associa ad ogni coppia (g, f) di morfismi, con $dom\ g = cod\ f$, un morfismo $g \circ f$, detta loro *composta*, tale che $g \circ f : dom\ f \rightarrow cod\ g$. È possibile rappresentare graficamente tale operazione con il seguente diagramma:



Identità e composizione, inoltre, devono rispettare le seguenti proprietà:

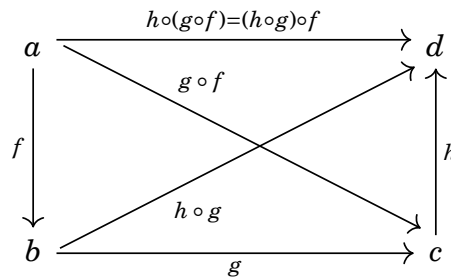
- *associatività*; data una successione di morfismi di questo tipo:

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d;$$

dove quindi sono rispettate opportune condizioni sui domini e codomini dei morfismi f, g e h , vale la seguente uguaglianza:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f; \quad (2.1)$$

tale relazione può essere rappresentata graficamente attraverso il seguente diagramma:



- *legge dell'unità*; presi dei morfismi $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$ e considerata la composizione con l'identità 1_b definita sopra, vale che:

$$1_b \circ f = f; \quad g \circ 1_b = g; \quad (2.2)$$

Pertanto un adeguato utilizzo della identità permette di utilizzarla come elemento neutro della composizione. Inoltre in quanto la proprietà (2.2) definisce univocamente l'identità 1_b a partire dall'oggetto b si userà la notazione $1_b \equiv b$ con $b : b \rightarrow b$. È possibile poi rappresentare tale proprietà con il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f} & b & & \\ & \searrow f & \downarrow 1_b & \searrow g & \\ & & b & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

Una categoria è, dunque, un qualsiasi grafo che rispetti gli assiomi appena definiti.

Definizione 2.3. Presa una categoria, un morfismo $f : a \rightarrow b$ si dice *invertibile* o *isomorfismo* se esiste un morfismo $g : b \rightarrow a$ (nella stessa categoria) tale che:

$$f \circ g = id_b, \quad g \circ f = id_a.$$

Definizione 2.4. Presa una categoria, essa si dice *piccola* se la classe di oggetti e quella di morfismi sono insiemi.

Si considerino i seguenti esempi:

Esempio 2.5. La *categoria degli insiemi* è composta da *insiemi* come oggetti e da *funzioni* su questi ultimi come morfismi. Per funzioni si intendono vere e proprie funzioni aventi domini e codomini specifici negli oggetti appena definiti. Quindi un morfismo di questa categoria è una funzione $f : A \rightarrow B$, dove il dominio A e il codominio B sono insiemi, e avente legge $f : x \in A \rightarrow f(x) \in B$. Per costruire una funzione identità 1_A su tale categoria si considera la l'applicazione tale che $a \mapsto a, \forall a \in A$. In questo modo possiamo dire che tale applicazione è proprio $1_A : A \rightarrow A$.

Esempio 2.6. Un *omomorfismo* tra due gruppi $(G, +)$ e $(L, \circ)$ è una qualunque applicazione $\varphi : G \rightarrow L$ tale da lasciare invariate le operazioni su di essi definite. Quindi:

$$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \circ \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G.$$

Dunque, la *categoria dei gruppi* è composta da gruppi come oggetti e da omomorfismi su tali gruppi come morfismi.

A partire dalla definizione assiomatica di categoria appena data è possibile anche definire i gruppoidi.

Definizione 2.7 (Gruppoide I). Un *gruppoide* è una categoria piccola in cui ogni morfismo è un isomorfismo.

Si consideri il seguente esempio.

Esempio 2.8. Ogni gruppo G si può vedere come gruppoide nel seguente modo: tale gruppoide ha un solo oggetto a ed esiste un morfismo $g : a \rightarrow a$ per ogni $g \in G$; la composizione è data dall'operazione di moltiplicazione in G e l'identità dall'elemento neutro di G .

2.2 Definizione esplicita dei gruppoidi

La definizione di gruppoide come categoria è molto sintetica. Per lavorare, può essere utile introdurre due definizioni equivalenti (per approfondimenti su queste si veda [2]) tra loro e anche a quella già data, che saranno date nel seguente paragrafo. Tali definizioni saranno più esplicite rispetto a quella precedentemente data in Definizione 2.7.

Definizione 2.9 (Gruppoide II). Un *gruppoide* è una struttura algebrica formata da un insieme G , un sottogruppo $G^{(2)} \subseteq G \times G$, una funzione $G^{(2)} \rightarrow G$, $(a, b) \rightarrow ab$ detta *moltiplicazione*, e una funzione $G \rightarrow G$, $c \rightarrow c^{-1}$ detta *inversione*, soddisfacenti le seguenti tre proprietà:

- $(c^{-1})^{-1} = c \quad \forall c \in G$;
- se (a, b) e (b, c) appartengono a $G^{(2)}$, allora (ab, c) e (a, bc) appartengono a $G^{(2)}$ e $a(bc) = (ab)c \equiv abc$;
- se $(c, c^{-1}) \in G^{(2)}$, $\forall c \in G$ e $(c, d) \in G^{(2)}$, allora vale che $c^{-1}(cd) = d$ e $(cd)d^{-1} = c$, $\forall d \in G$;

Tipicamente il gruppoide è indicato semplicemente con G .

Dato un gruppoide G , l'insieme

$$G^{(0)} := \{c^{-1}c \mid c \in G\}$$

è detto *spazio delle unità* e ci si riferirà ai suoi elementi con il nome di *unità*. Ovviamente poichè vale che $(c^{-1})^{-1} = c$ è possibile dire che $G^{(0)} = \{cc^{-1} \mid c \in$

$G\}$. A questo punto si definiscono le due applicazioni $r, s : G \rightarrow G^{(0)}$ attraverso le seguenti relazioni:

- $r(c) := cc^{-1}, \quad \forall c \in G;$
- $s(c) := c^{-1}c, \quad \forall c \in G;$

Quindi, tenendo conto della Definizione 2.7, si nota che G è l'insieme dei morfismi, $G^{(0)}$ l'insieme degli oggetti, r e s dicono chi sono dominio e codominio di ogni morfismo, e $G^{(2)}$ è l'insieme delle coppie di morfismi componibili (il dominio di uno deve essere il codominio dell'altro).

Si definiranno ora una serie di proprietà, che non saranno però dimostrate, utili ai fini della trattazione.

Proposizione 2.1. *Preso un gruppoide G e $c \in G$, allora $(r(c), c)$ e $(c, s(c))$ appartengono a $G^{(2)}$ e vale che:*

$$r(c)c = c = cs(c);$$

Inoltre si ha che:

- $r(c^{-1}) = s(c), \quad \forall c \in G;$
- $s(c^{-1}) = r(c), \quad \forall c \in G;$

In aggiunta c^{-1} è l'unico elemento tale che $(c, c^{-1}) \in G^{(2)}$ e $cc^{-1} = r(c)$, oltre ad essere l'unico per cui $(c^{-1}, c) \in G^{(2)}$ e $c^{-1}c = s(c)$.

Proposizione 2.2. *Sia G un gruppoide. Supponiamo che (a, c) e $(b, c) \in G^{(2)}$ e che $ac = bc$, allora $a = b$.*

Proposizione 2.3. *Sia G un gruppoide. Allora $(a, b) \in G^{(2)}$ se e solo se $s(a) = r(b)$. Valgono, inoltre, le seguenti relazioni:*

- $r(ab) = r(a)$ e $s(ab) = s(b)$ per tutte le $(a, b) \in G^{(2)}$;
- $(a, b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \quad \forall (a, b) \in G^{(2)}$;
- $r(x) = x = s(x), \quad \forall x \in G^{(0)}$;

L'insieme di queste proprietà, unito alla Definizione 2.9, permette dunque di trattare i gruppoidi nella loro totalità. È possibile dare un'ulteriore definizione di gruppoide che, in virtù delle proposizioni precedenti, è ovviamente equivalente a quella sopra data.

Definizione 2.10 (Gruppoide III). Un *gruppoide* è una struttura algebrica formata da un insieme G , un suo sottoinsieme $G^{(0)}$, due applicazioni $r, s : G \rightarrow G^{(0)}$, un'applicazione, detta *composizione*, tale che $(a, b) \mapsto ab$ che quindi porta da $\{(a, b) \in G \times G \mid s(a) = r(b)\}$ a G e un'applicazione $c \in G \rightarrow c^{-1} \in G$. Sono rispettate, inoltre, le seguenti proprietà:

1. $r(x) = x = s(x), \quad \forall x \in G^{(0)}$;
2. $r(c)c = c = cs(c), \quad \forall c \in G$;
3. $r(c^{-1}) = s(c)$ e $s(c^{-1}) = r(c)$ per ogni $c \in G$;
4. $c^{-1}c = s(c)$ e $cc^{-1} = r(c)$ per ogni $c \in G$;
5. $r(ab) = r(a)$ e $s(ab) = s(b)$ se $r(b) = s(a)$;
6. $(ab)c = a(bc)$ se $s(a) = r(b)$ e $s(b) = r(c)$;

Le Proprietà 2.1 e 2.3 sono equivalenti a quelle appena date. Tra le due definizioni proposte quella che sarà utilizzata come riferimento è proprio quest'ultima, poichè più intuitiva e immediata di quella data precedentemente. Per questo quando si parlerà di gruppoide si intenderà la struttura definita univocamente dagli insiemi G e $G^{(0)}$, le applicazioni r, s e le mappe di composizione e inversione.

Esempio 2.11. Si prenda un insieme di punti $G^{(0)} = \{A, B, C\}$ e un insieme di applicazioni $G = \{a, b, d, f\}$ dove

$$d^{-1} = a, \quad f^{-1} = b;$$

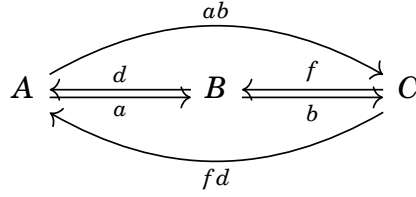
inoltre le applicazioni sono così definite:

$$a : A \rightarrow B, \quad b : B \rightarrow C.$$

Si consideri l'operazione di composizione tale che:

$$ab : A \rightarrow C, \quad fd : C \rightarrow A.$$

In aggiunta si definiscono le applicazioni di *range* e *source* in maniera tale che, quando queste vengano applicate ad una delle funzioni di G , restituiscano rispettivamente codominio e dominio della funzione stessa. Questa struttura forma, dunque, un gruppoide che si può rappresentare in questo modo:



Da questo diagramma è facile comprendere il significato delle applicazioni di *range* e *source*. Esse individuano rispettivamente i punti di arrivo e partenza dei morfismi del gruppoide. Ad esempio $r(a) = B$ mentre $s(fd) = C$. Grazie a questa rappresentazione grafica si realizza anche il senso dell'operazione di composizione definita su G .

Esempio 2.12 (Gruppoide delle trasformazioni). Uno degli esempi più utilizzati per permettere di comprendere al meglio la natura dei gruppoidi a chi non abbia familiarità con essi è il gruppoide delle trasformazioni. Tale gruppoide permette di visualizzare chiaramente la struttura del gruppoide come collezione di morfismi invertibili che colleghino elementi di $G^{(0)}$. Si prenda, infatti, un insieme X , un gruppo Γ che agisce su X tramite biiezioni. Sia allora $G := \Gamma \times X$ e $G^{(0)} := X$. Definite $r(g, x) := g \cdot x$ e $s(g, x) := x$ e le seguenti operazioni:

- $(g, h \cdot x)(h, x) := (gh, h);$
- $(g, x)^{-1} := (g^{-1}, g \cdot x).$

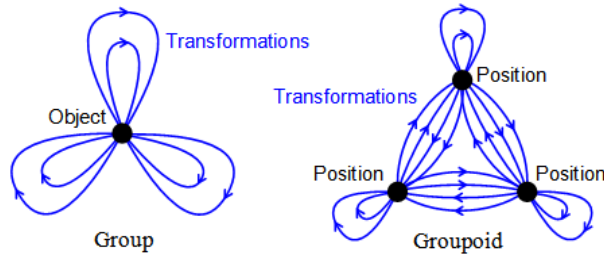


Figura 2.1: differenze tra gruppo e gruppoide delle trasformazioni

Si è visto che ogni gruppo si può pensare come gruppoide. Verrà allora riproposto questo esempio come caso particolare del gruppoide di trasformazioni di un insieme.

Esempio 2.13 (Gruppi). Preso un qualsiasi gruppo Γ si può costruire un gruppoide a partire da esso considerando $\Gamma^0 = \{*\}$, composizione data dall'operazione del gruppo e inversa definita sempre a partire dal gruppo. Al

contrario, un gruppoide è un gruppo se e solo se il suo spazio delle unità è un *singoletto*.

Esempio 2.14 (Relazioni d'equivalenza). Sia dato un insieme X e una relazione d'equivalenza R su di esso definita, allora $R^0 := \{(x, x) \mid x \in X\}$ è contenuto in R per proprietà riflessiva; identifichiamo allora R^0 con X . Si costruiscono allora le mappe $r(x, y) = x$ e $s(x, y) = y$, tali che $(x, y)(y, z) = (x, z)$, e la mappa $(x, y)^{-1} = (y, x)$. In tal modo si ottiene un gruppoide.

2.3 Puzzle del quindici

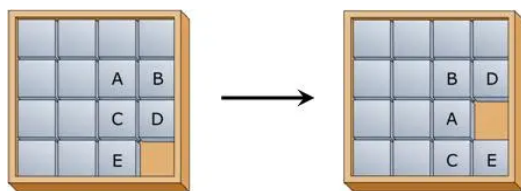
La Figura 2.2 mostra il gioco del quindici, un puzzle che consiste nel disporre in ordine crescente i numeri da 1 a 15 raffigurati su queste caselle. Il tutto è possibile spostando i pezzi in uno spazio vuoto che rimane tra le 16 caselle. Il concetto fondamentale che va compreso per poter risolvere questo puzzle



Figura 2.2: Un esempio di puzzle del 15

è che a muoversi è effettivamente il pezzo non numerato. La sua posizione, inoltre, sarà indicata con un numero da 1 a 16 (nello specifico la numerazione delle celle è crescente e parte dalla prima casella in alto a sinistra e continua verso destra). Infatti se si vuole spostare una certa casella in basso, bisogna muovere le altre celle in modo che il pezzo non numerato sia effettivamente sotto la casella desiderata. A differenza di altri puzzle, i movimenti possibili per questo gioco dipendono dalla posizione attuale della cella vuota (si veda [5] per un approfondimento sulle differenze rispetto ad altri puzzle). Data, quindi, una specifica configurazione delle celle è possibile *trasformare*

il puzzle attraverso una serie di mosse. Ad esempio se il pezzo vuoto si trova nell'angolo in basso a destra (identificato con il numero 16) lo si può portare nella posizione 12 (la casella immediatamente sopra) spostandolo inizialmente in alto, a sinistra, ancora in alto, a destra e infine in basso (non tutte le sequenze devono essere uguali per portarlo nella posizione prefissata):



Si noti che per trasformazioni equivalenti si intendono due trasformazioni che partano dalla stessa posizione della casella vuota e che la portino nella stessa casella di arrivo senza avere necessariamente le stesse mosse

intermedie. È inoltre possibile visualizzare il gioco del quindici proprio con un gruppoide e successivamente sviluppare una strategia risolutiva che sfrutti un tipo particolare di gruppoidi: i gruppi. Esso è, difatti, costituito da un insieme di posizioni (le 16 coordinate che può avere la cella vuota) che rappresentano l'insieme *oggetto*, e di trasformazioni (l'insieme dei *morfismi*) che possono essere opportunamente composte riottenendo una trasformazione sull'insieme delle posizioni prima definito. Banalmente è possibile introdurre le funzioni di range e source che associano a ogni trasformazione la posizione finale e iniziale della cella vuota. Ovviamente anche in questo caso l'operazione di composizione ha senso se e solo se il range della prima trasformazione coincide con la source della seconda. Infine esiste l'inversione in quanto una qualsiasi trasformazione può essere annullata con un'opportuna sequenza di mosse. Per poter comprendere il metodo risolutivo di questo puzzle è necessario, adesso, semplificare il gioco considerando solo 4 caselle e non più 16. Inoltre tra le possibili trasformazioni che possono essere effettuate saranno considerate unicamente quelle di rotazione che lasciano invariate la posizione iniziale della cella vuota. Questa semplificazione ha ridotto le posizioni possibili da 16 a 1 e quindi il gruppoide prima definito si è ora ridotto a un gruppo.

Si noti che quando si prendono in considerazione altre posizioni per la cella vuota si torna a considerare il puzzle come un gruppoide; è possibile complicare ulteriormente la situazione considerando ora 6 celle (puzzle del 5). Nello specifico si prenda la configurazione iniziale mostrata in figura.

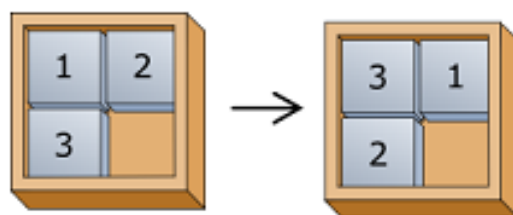
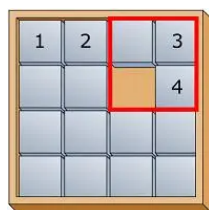


Figura 2.3: Una rotazione per il puzzle del tre



Le possibili trasformazioni che lasciano invariata la posizione della cella vuota sono quelle che ruotano i pezzi 1,2,3 sulla sinistra oppure le celle 3,4,5 sulla destra. In tutto queste due possibilità di partenza generano 60 trasformazioni.

Da qui è possibile notare un'analogia con il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ generate dalle rotazioni $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. Queste due permutazioni generano il *gruppo alternante* A_5 , ovvero il gruppo delle permutazioni dispari. Allo stesso modo si possono considerare le $\frac{15!}{2} = 65,383,7184,000$ trasformazioni possibili date le posizioni fissate per la cella vuota; la differenza con i giochi del tre e del cinque sta nel fatto che non esistono set di mosse semplici per risolverlo (rotazioni e permutazioni sono molto più basilari e facili da trattare). Quindi per risolvere il gioco del quindici si sfruttano le configurazioni dei puzzle del tre e del cinque.



Si inizia col porre il puzzle nella configurazione qui mostrata. Essa può essere sempre ottenuta con una certa semplicità poichè non le posizioni delle altre celle non interessano. Si effettui ora la rotazione discussa nel puzzle del 3 e si portino nelle posizioni corrette il 3 e il 4. Con lo stesso processo si posizionino nelle giuste posizioni le celle 5,6,7 e 8. Si spostino ora i numeri 9 e 13 vicino all'angolo basso sinistro (non serve alcuna configurazione specifica). Per esempio si consideri questa conformazione:



Figura 2.4: 2° passo

Si risolva ora il puzzle del 5 formatosi utilizzando le permutazioni dispari del gruppo A_5 sopra definite. Una volta risolto si otterrà la seguente configurazione:



Figura 2.5: 3° passo

e da questo punto si risolva anche questo puzzle del 5 con le regole prima definite. Nonostante questa non sia la metodologia più veloce essa ci permette di risolvere il puzzle del quindici in circa due, tre minuti.

Capitolo 3

C* - algebre e rappresentazioni

Prima di poter discuter di C*-algebre e di rappresentazioni è necessario introdurre una serie di nozioni fondamentali per la trattazione di quest'ultime (si veda [4]).

3.1 Nozioni fondamentali

Definizione 3.1. Si dice *forma hermitiana* definita positiva su uno spazio vettoriale V definito su $\mathbb{C}$, un'operazione binaria $\langle , \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ che rispetti le seguenti proprietà $\forall u, v, w \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- ii) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;
- iii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$;
- iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$ dove $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Definizione 3.2. Una *topologia* su un insieme X è una collezione $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X tale che:

- l'insieme vuoto e X appartengono a $\mathcal{T}$;
- l'unione di una collezione arbitraria di insiemi di $\mathcal{T}$ appartenga a $\mathcal{T}$ stesso;
- l'intersezione di due insiemi di $\mathcal{T}$, appartiene a $\mathcal{T}$.

Se X è, inoltre, uno spazio vettoriale, esso si dice *spazio topologico*. Gli insiemi di $\mathcal{T}$ vengono detti *aperti*. Un insieme, inoltre, si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto.

Definizione 3.3. Dato uno spazio topologico X , un insieme $U \subset X$ è detto intorno di un punto x di X se contiene un insieme aperto di X contenente il punto.

Definizione 3.4. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Allora x è un punto di chiusura di S se ogni intorno di x contiene un punto di S .

Definizione 3.5. La chiusura di un insieme S è l'insieme di tutti i punti di chiusura di S e si indica con $\overline{S}$.

Definizione 3.6. Si prenda uno spazio vettoriale V definito su un campo K e sia $+$ l'operazione binaria interna definita su V . Lo spazio A si dice *algebra* se esiste un'ulteriore operazione binaria interna $\cdot : A \times A \rightarrow A$ che rispetti le seguenti proprietà per ogni $u, v, w \in V$ e $\lambda \in K$:

1. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
2. $w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v$;
3. $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$;
4. $u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$.

L'operazione $\cdot$ così definita viene chiamata *moltiplicazione* e, conseguentemente, $u \cdot v$ è detto *prodotto* tra vettori dell'algebra.

Definizione 3.7. Si prenda uno spazio vettoriale V definito sul campo complesso. Una *norma* definita su V è una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ che soddisfa le seguenti relazioni $\forall u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (non degenerazione);
2. $\|v\| = |\lambda| \|v\|$ (omogeneità);
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale V su cui è definita una norma è anche detto *normato*. Inoltre se su V è definita una forma hermitiana definita positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, è possibile definire una norma a partire da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nel seguente modo:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \forall v \in V.$$

Definizione 3.8. Per uno spazio normato V , un vettore $v \in V$ e uno scalare $r > 0$, la *palla* aperta di raggio r centrata in v è data da tutti i vettori w di V che soddisfano:

$$\|v - w\| < r. \quad (3.1)$$

Si noti che ad ogni norma di uno spazio normato è associata una topologia i cui aperti sono dati da tutte le possibili unioni di palle aperte (di centro e raggio arbitrari).

Definizione 3.9. Preso uno spazio normato V e presa una successione $(v_k)_{k \geq 0}$ di vettori di V tale che:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \|v_k - v_m\| < \epsilon, \forall k, m \geq n_\epsilon, \quad (3.2)$$

allora tale successione si dice *di Cauchy*.

Definizione 3.10. Preso uno spazio normato V , esso si dice *completo* se tutte le sue successioni di Cauchy convergono ad un punto (vettore) di V .

Definizione 3.11. Presa un'algebra A , essa si dice *normata* se la sua norma è *submoltiplicativa*, i.e.:

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|; \quad (3.3)$$

3.2 C*-algebre

Definizione 3.12. Presa un'algebra A definita su $\mathbb{C}$, essa si dice **-algebra* se è dotata di una mappa $*$: $A \rightarrow A$ detta *involuzione* che soddisfi le seguenti relazioni per ogni $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(a^*)^* = a$;
2. $(a + b)^* = a^* + b^*$;
3. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;
4. $(ab)^* = b^* a^*$.

Definizione 3.13. Uno spazio vettoriale normato completo si dice di *Banach*; un'algebra di Banach, invece, è un'algebra normata completa.

Definizione 3.14. Presa un'algebra di Banach essa si dice *unitaria* se esiste un elemento con norma uno e che sia neutro per l'operazione di moltiplicazione.

Definizione 3.15. Uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare e che sia completo rispetto alla norma da esso indotta è detto *spazio di Hilbert*.

Definizione 3.16. Presa una Banach $*$ -algebra A , essa si dice *C^* -algebra* se soddisfa la *C^* -identità*:

$$\|aa^*\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A. \quad (3.4)$$

Inoltre una norma che soddisfa la C^* -identità è detta *C^* -norma*.

Si considerino i seguenti esempi.

Esempio 3.17 ($M_n(\mathbb{C})$). Se si considera il gruppo delle matrici quadrate complesse, l'involuzione può essere ottenuta dalla coniugazione hermitiana, mentre la norma da quella operatoriale¹. Questa struttura è una C^* -algebra unitaria di dimensione finita².

Esempio 3.18 ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$). Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Se $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è un'applicazione lineare allora la sua norma operatoriale è definita come di seguito:

$$\|T\| := \sup_{v \in \mathcal{H}: \|v\|_{\mathcal{H}}=1} \|Tv\|_{\mathcal{H}}; \quad (3.5)$$

dove con $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ si intende la norma definita sullo spazio di Hilbert. Un operatore T è inoltre detto *limitato* se $\|T\| < \infty$. Preso, dunque, l'insieme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formato da tutti gli operatori limitati su $\mathcal{H}$, esso è una C^* -algebra unitaria.

3.3 Morfismi e rappresentazioni

Definizione 3.19. Si considerino due C^* -algebre (unitarie) A e B ; un *morfismo* $\varphi : A \rightarrow B$, o anche *C^* -omomorfismo*, è un'applicazione lineare e moltiplicativa ($\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in A$) tra C^* -algebre che commuti con l'involuzione, ovvero:

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*, \quad \forall a \in A.$$

Per i morfismi vale la letteratura usuale (*endomorfismo* se $B = A$, *isomorfismo* se il morfismo è invertibile, etc.).

¹si veda Esempio 3.18

²si noti che quando parliamo di dimensione di una C^* -algebra ci riferiamo alla dimensione dello spazio vettoriale sottostante.

Definizione 3.20. Una *rappresentazione* di una C^* -algebra A su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è un morfismo $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$; inoltre è possibile definire una rappresentazione:

- *fedele* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi(a)v = 0, \forall v \in \mathcal{H}$ implica che $a = 0$;
- *non-degenere* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi(a)v = 0, \forall a \in A$ implica che $v = 0$;
- *degenere* se non è "non-degenere".

Proposizione 3.1 (Teorema di Gel'fand-Naimark). *Per ogni C^* -algebra esiste uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e una rappresentazione fedele $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

3.4 Algebra di un gruppoide discreto

Ricordando gli obiettivi di questo elaborato, è necessario introdurre il concetto di algebra di un gruppoide. Infatti, come si vedrà successivamente, attraverso questo concetto si potrà comprendere la natura delle tre maggiori formulazioni quantistiche. Nello specifico, per semplificare la trattazione, l'attenzione sarà posta su algebre di gruppoidi discreti e su come esse si possano costruire attraverso due metodologie discusse in [3].

Definizione 3.21. Sia G un gruppoide finito (ovvero l'insieme dei morfismi è finito) e si costruisca il seguente spazio vettoriale:

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{\gamma \in G} \mathbb{C}\gamma,$$

ovvero lo spazio vettoriale avente come base l'insieme dei morfismi di G (cioé, ogni vettore è combinazione lineare formale di morfismi, che si assumono linearmente indipendenti). Il prodotto tra due γ_1 e γ_2 coincide con la composizione tra morfismi definita in G se tale composizione è ben definita; altrimenti esso è nullo.

Tale operazione si può estendere (in un unico modo) ad una applicazione bilineare $\mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$, ottenendo in questo modo un prodotto associativo. L'algebra risultante sarà, allora, chiamata *algebra del gruppoide* G . Si noti, inoltre, che $\mathbb{C}G$ è unitaria solo se l'insieme $G^{(0)}$ di oggetti del gruppoide G è discreto; infatti l'elemento neutro a norma unitaria è dato dalla seguente relazione:

$$1 = \sum_{x \in G^{(0)}} 1_x;$$

La metodologia appena proposta ha permesso di ottenere un'algebra del gruppoide.

Sarà data ora una definizione alternativa ed equivalente di algebra del gruppoide da cui, nel Capitolo 4, si capirà più facilmente in che modo ottenere una C^* -algebra.

Definizione 3.22. Preso un gruppoide G finito, si può creare il seguente insieme:

$$\mathbb{C}G \simeq \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$$

Si definisce poi il prodotto di convoluzione

$$(fg)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2).$$

Si prendano poi una funzione costantemente uguale ad uno come identità, l'operazione di involuzione $*$: $f \rightarrow \bar{f}$ e norma operatoriale. Si ottiene così un'algebra.

Si consideri ora il seguente esempio che assume una rilevanza notevole.

Esempio 3.23. In questo esempio verrà illustrata la metodologia atta alla costruzione dell'algebra di un gruppoide discreto. Si inizi considerando la seguente decomposizione:

$$G^{(0)} = \bigcup_i G_i^{(0)}$$

In questo modo l'insieme $G^{(0)}$ degli oggetti del gruppoide è stato espresso come unione delle sue *componenti connesse*. Nello specifico si dice che due oggetti a e b appartengono alla stessa componente connessa $G_i^{(0)} \subseteq G^{(0)}$ se esiste un morfismo (o freccia) γ di G tale che $s(\gamma) = x$ e $r(\gamma) = y$. Allo stesso modo è possibile decomporre l'algebra del gruppoide $\mathbb{C}G$, infatti:

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_i \mathbb{C}G_i$$

dove le G_i sono le algebre delle componenti connesse di G . Si prenda ora un oggetto $x_0 \in G^{(0)}$ e sia

$$J = \text{Hom}_G(x_0, x_0)$$

il gruppo delle isotropie di x_0 , ovvero degli isomorfismi che vanno da x_0 a x_0 stesso. Si facciano ora le seguenti assunzioni:

- $J = \{1\}$ ovvero il gruppo delle isotropie è composto solo dall'isomorfismo identico;
- $G^{(0)}$ è composto da n elementi.

Tenuto conto delle considerazioni precedenti circa le scomposizioni in componenti connesse, il gruppoide G è l'insieme delle coppie possibili tra n oggetti. Dunque, riassumendo

$$G = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, n\};$$

la composizione è, invece, costruita in questo modo:

$$(l, k) \circ (j, i) = (l, i) \quad \text{se } j = k,$$

a meno che essa non sia definita. In questo caso essa sarebbe nulla come mostrato nella Definizione 3.21.

Pertanto, alla luce di queste considerazioni, è facile comprendere che

$$\mathbb{C}G \simeq M_n(\mathbb{C}),$$

ovvero il gruppo delle matrici quadrate complesse può rappresentare l'algebra del gruppoide $\mathbb{C}G$. Infatti è possibile creare una mappa

$$(i, j) \mapsto E_{i,j},$$

(dove $E_{i,j}$ rappresenta l'elemento i,j -esimo della generica matrice di $M_n(\mathbb{C})$)

che identifica un isomorfismo tra le algebre $\mathbb{C}G$ e $M_n(\mathbb{C})$. Considerata questa mappa, si potrà, quindi, rappresentare l'algebra del gruppoide. Questo procedimento, inoltre, è proprio quello alla base della formulazione quantistica di Heisenberg.

Capitolo 4

L'approccio di Schwinger

Facendo seguito a quanto illustrato nell'introduzione di questo elaborato, l'approccio di Schwinger si differenzia dalle formulazioni quantistiche principali (ovvero quelle di Heisenberg e di Schrödinger); essa, infatti, non si basa su alcuna assunzione "primitiva" teorica (dove con primitiva non si vuole intendere in alcun modo una natura rozza e priva di fondamenti dello stesso postulato; anzi uno dei presupposti fondamentali per una teoria che si basi su tali assunzioni è che esse siano giustificabili attraverso un'attenta analisi). La teoria di Schwinger, infatti, si basa sulle proprietà algebriche di specifici processi di misura che egli definisce *selective measurements*. Citando lo stesso Schwinger, infatti "... *we have to recognize the fundamental philosophical conception that Physics is an experimental science; it is concerned only with those statements which in some sense can be verified by an experiment. The purpose of the theory is to provide a unification, a codification, or however you want to say it, of those results which can be tested by means of some experiment. Therefore, what is fundamental to any theory of a specific department of nature is the theory of a measurement within that domain*"¹. Per spiegare al meglio le *selective measurements* Schwinger affermò: (a selective measurement is, *n.d.r.*) "*a device that selects the system (in a given ensemble) with well defined values a for the observable A , and returns it with well defined values b for the observable B* ". Dunque tale operazione

¹J. Schwinger; *Quantum Kinematics and Dynamics*. Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, Inc., (New York 1970); *ibid.*, *Quantum Kinematics and Dynamics*. Advanced Book Classics, Westview Press (Perseus Books Group 1991); *ibid.*, *Quantum Mechanics Symbolism of Atomic measurements*, edited by Berthold-Georg Englert. Springer-Verlag, (Berlin 2001).

di "misura selettiva" descritta da Schwinger (ci si riferirà così alle *selective measurements* da questo punto) viene rappresentata attraverso un *simbolo di misura*

$$M(b, a), \quad (4.1)$$

che descrive un processo attraverso il quale un sistema fisico analizzato subisce una transizione come descritta sopra. Per quanto detto precedentemente, pertanto, le assunzioni primitive su cui Schwinger basa il proprio approccio sono queste *transizioni* (esse si diranno in aggiunta *elementari* se non si potranno scomporre in ulteriori transizioni fondamentali), ovvero questi fenomeni di cambiamento delle proprietà descrittive di un sistema fisico. La natura delle transizioni è ovviamente varia. Esse possono essere dovute all'interazione dello stesso dispositivo di misura con il sistema fisico in analisi, oppure possono essere il risultato di un comportamento dinamico dello stesso.

4.1 Gruppoidi come struttura fondamentale

Si consideri la seguente misura selettiva $M(a', a)$. Si ricordi che a e a' sono rispettivamente lo stato d'ingresso e di uscita del nostro sistema fisico; inoltre a e a' sono valori associati allo stesso osservabile $\mathbb{A}$. È, allora, possibile definire un'operazione di composizione tra simboli di misura (come dimostrato in [7] e [8]). Essa ha ragione di esistere poichè è realizzabile un processo di rilevazione che si concretizza nella selezione del sistema fisico prima in uno stato (descritto da a') e poi in un altro (descritto da a''). Tale composizione viene rappresentata simbolicamente in questo modo:

$$M(a'', a'') \circ M(a', a); \quad (4.2)$$

la (4.2), però, non ha sempre significato. Se, infatti, il sistema evolve in uno stato per cui il nuovo valore associato all'osservabile $\mathbb{A}$ non sia rivelabile dal secondo processo di misura, allora la composizione di queste due misure non produrrà alcun risultato. Bisogna quindi imporre la condizione per la quale $a'' = a'$.

Considerato il simbolo di misura $M(a', a)$, si introduce ora la seguente nomenclatura:

- a si dice *source* di $M(a', a)$;

- a' si dice *range* di $M(a', a)$.

Ciò premesso, si dice che la composizione tra due misure selettive è possibile solo se il range della prima coincide con la source della seconda. L'operazione di composizione, nell'ipotesi che essa sia possibile, rispetta, inoltre, le seguenti proprietà:

1. $M(a''', a'') \circ (M(a'', a') \circ M(a', a)) = (M(a''', a'') \circ M(a'', a')) \circ M(a', a)$;
2. $M(a', a') \circ M(a', a) = M(a', a)$ e $M(a', a) \circ M(a, a) = M(a', a)$;
3. $M(a', a) \circ M(a, a') = M(a', a')$ e $M(a, a') \circ M(a', a) = M(a, a)$.

Si analizzino ora le relazioni appena definite. La prima equazione caratterizza l'associatività dell'operazione di composizione; la seconda relazione dimostra l'esistenza dei simboli di misura neutri rispetto alla composizione; l'ultima proprietà, invece, evidenzia come esistano gli elementi neutri rispetto all'operazione di misura stessa. Esiste, quindi, un processo di misura selettiva che riporta nello stato precedente il sistema fisico in analisi. Le Eq. 1-3, pertanto, definiscono un gruppoide formato dall'insieme di misure selettive e dalla famiglia di osservabili compatibili $\mathbb{A}$ ad esse associati. Dunque:

Definizione 4.1. Un sistema fisico è descritto da un gruppoide G dove i suoi morfismi $\gamma : a \in \Omega \rightarrow a' \in \Omega$, con a e a' appartenenti all'insieme di autovalori associati alla famiglia di osservabili compatibili $\mathbb{A}$, sono detti *transizioni* del sistema; gli oggetti del gruppoide, invece, sono gli elementi a di Ω e sono detti *outcomes* del sistema. Inoltre, le unità corrispondenti ad un outcome $a \in \Omega$ sono indicate con il simbolo $\mathbf{1}_a$, $a \in \Omega$. Le mappe di *range* e *source* saranno definite, presa una transizione $\gamma : a \in \Omega \rightarrow a' \in \Omega$, come di seguito:

$$s(\gamma) = a ; \quad r(\gamma) = a' .$$

Infine se, prese due transizioni α e β , vale che $s(\alpha) = r(\beta)$, allora si dice che le due transizioni sono componibili e la loro composta si indicherà con $s(\alpha) = r(\beta)$.

4.2 Osservabili e Stati

Una volta compreso in che modo i gruppoidi sono utilizzati da Schwinger per porre le basi della propria formulazione quantistica, è possibile analizzare come egli abbia introdotto i concetti di osservabili e stati nella sua teoria.

Osservabili

Considerato un gruppoide G finito, avente insieme di oggetti Ω , che descrive un sistema fisico (per quanto illustrato fino ad ora esso riesce solo a descrivere la sua struttura cinematica), è possibile costruire un'algebra a partire da esso come mostrato nella Definizione 3.22. A partire da questa algebra si ottiene una C^* -algebra considerando la chiusura definita a partire da una opportuna norma. Essendo G di dimensione finita, possiamo, allora, prendere l'insieme delle funzioni $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ che sono diverse da zero per un numero finito di elementi di G ; dunque:

$$f = \sum_{\alpha \in G} f(\alpha) \delta_\alpha = 0, \quad f(\alpha) = 0.$$

Si richiama di seguito il prodotto di convoluzione che sarà indicato con $\star$:

$$f \star g = \left(\sum_{\alpha \in G} f(\alpha) \delta_\alpha \right) \star \left(\sum_{\beta \in G} g(\beta) \delta_\beta \right) = \sum_{s(\alpha)=r(\beta)} f(\alpha) g(\alpha) \delta_{\alpha \circ \beta}. \quad (4.3)$$

Si ricorda che l'identità è ottenuta a partire dalla funzione costantemente uguale ad 1 e l'involuzione è definita da f^* di f è definita come $f^* = \overline{f(\alpha)} \delta_{\alpha^{-1}}$. Ciò che è fondamentale è che $C^*(G)$ è tale da essere formato da alcune applicazioni $f : f^* = f$; tale relazione permette l'identificazione di osservabili fisici² (sono associati, infatti, a operatori lineari e autoaggiunti). Allo stesso modo si noti che $f(\mathbf{1}_x) \equiv f(x)$ è proprio l'autovalore associato all'osservabile f quando esso è selezionato nello stato $x \in \Omega$. Considerando, invece, una transizione $\alpha : x \rightarrow y$, $f(\alpha)$ è associata all'ampiezza di probabilità di transizione dell'osservabile f tra gli eventi (o stati) x e y . Inoltre la C^* -algebra così ottenuta è unitaria in quanto $\mathbf{1} \in C^*(G)$.

Stati del sistema

Gli stati del sistema, invece, sono tutti quei funzionali lineari ρ definiti su $C^*(G)$ positivi e a norma unitaria:

$$\rho : C^*(G) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \rho(f^* f) \geq 0 \quad \forall f \in C^*(G) \quad e \quad t.c. \quad \rho(\mathbf{1}) = 1. \quad (4.4)$$

Questa definizione sottolinea l'interpretazione statistica degli stati così come permette di ottenere i valori attesi di un osservabile f ; infatti, il numero

²si noti, inoltre, che con il termine di osservabile si indicherà una generica f di $C^*(G)$ e non unicamente gli osservabili *fisici* associati alle f autoaggiunte.

$\rho(f)$ sarà interpretato come il valore atteso dell'osservabile f (in più se f è autoaggiunto, allora $\rho(f)$ è reale). Quindi:

$$\langle f \rangle_\rho = \rho(f) = \sum_{\alpha \in G} f(\alpha) \rho(\delta_\alpha). \quad (4.5)$$

Si consideri ora la funzione $\phi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ così definita:

$$\phi_\rho(\alpha) := \rho(\delta_\alpha) \quad (4.6)$$

allora si potrà esprimere $\langle f \rangle_\rho$ come di seguito:

$$\langle f \rangle_\rho = \sum_{\alpha \in G} f(\alpha) \phi_\rho(\alpha). \quad (4.7)$$

Pertanto, si può reinterpretare il valore atteso dell'osservabile f come il valore medio dell'ampiezza di transizione $f(\alpha)$ dato dalla "distribuzione" ϕ_ρ . La funzione ϕ_ρ , dunque, è quella che caratterizza lo stato ρ e consente di ottenere le ampiezze di probabilità delle varie transizioni possibili. È, quindi, proprio la funzione ϕ_ρ a descrivere lo stato nel quale si trova il nostro sistema fisico, poichè essa contiene le informazioni sulle distribuzioni delle probabilità. A partire da ρ e poi da ϕ_ρ si otterrà la rappresentazione della C^* -algebra definita in questo capitolo.

4.3 Rappresentazione di $C^*(G)$

Come mostrato nel Paragrafo 3.3 è sempre possibile ottenere una rappresentazione di una C^* -algebra. In questo caso, utilizzando la costruzione GNS (che non sarà trattata in questo elaborato vista la sua complessità), si otterrà una rappresentazione fondamentale π_0 definita come di seguito:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{C}|x\rangle; \quad \pi_0(f)|x\rangle = \sum_{\alpha: x \rightarrow y} f(\alpha)|y\rangle; \quad (4.8)$$

dove è definito un isomorfismo tra gli oggetti $x \in \Omega$ del gruppoide di partenza e i vettori $|x\rangle$ dello spazio di Hilbert ottenuto tramite costruzione GNS. Inoltre si ricorda che $f = \sum_{\alpha \in G} f(\alpha) \delta_\alpha$.

Si ha, poi, che:

$$\langle y | \pi_0(f) | x \rangle = \sum_{\alpha: x \rightarrow y} f(\alpha). \quad (4.9)$$

Nello specifico se scegliamo come osservabile f la funzione caratteristica ϕ_ρ dello stato ρ si ha che:

$$\langle y | \pi_0(\phi_\rho) | x \rangle = \sum_{\alpha: x \rightarrow y} \phi_\rho(\alpha). \quad (4.10)$$

Questo valore sarà interpretato come l'ampiezza di probabilità della transizione $x \rightarrow y$. Ci si riferirà ad esso con la notazione compatta ϕ_{xy} . Inoltre, se si assume che:

$$\phi_\rho(\alpha \circ \beta) = \phi_\rho(\alpha) \phi_\rho(\beta), \quad (4.11)$$

ovvero se ρ è uno stato fattorizzabile per le transizioni α e β , si otterrà la seguente proprietà per le ampiezze di probabilità:

$$\phi_{zx} = \sum_{y \in \Omega} \phi_{zy} \phi_{yx}. \quad (4.12)$$

La relazione 4.10, però, da sola non basta per poter rispettare le prescrizioni di Feynman per le proprietà delle ampiezze di probabilità. Bisogna infatti dimostrare che i moduli quadri di queste quantità definiscano la statistica di un evento generico. L'esistenza di una proprietà così strutturata non sarà, però, dimostrata in quanto sarebbero necessarie nozioni preliminari ben più complesse di quelle fornite in questo breve elaborato. Infine, a partire dalla rappresentazione fondamentale appena definita, si possono ottenere i più generali spazi di Hilbert $\mathcal{H}_\rho$.

4.4 Evoluzione temporale

Una volta ottenuta una rappresentazione per $C^*(G)$ è possibile definire l'evoluzione temporale di uno stato. Nello specifico si utilizzerà lo stesso approccio di Heisenberg, ovviamente applicato allo spazio di Hilbert ottenuto precedentemente tramite costruzione GNS. Quindi l'evoluzione temporale sarà ottenuta a partire da un gruppo di automorfismi Φ_t di $C^*(G)$ definiti da un unico parametro (la variabile temporale t , appunto). Preso un osservabile a , esso avrà un'evoluzione temporale descritta da una famiglia di valori $a_t = \Phi_t(a)$. Il sistema è ovviamente determinato anche dallo stato ρ nel quale si trova e quindi i valori attesi dell'osservabile variano nel tempo secondo la relazione:

$$\langle a_t \rangle_\rho = \rho(a_t) = \rho(\Phi_t(a)). \quad (4.13)$$

Alternativamente si può usare un'interpretazione inversa attraverso la quale è lo stato ρ a cambiare con il tempo e quindi $\rho_t(a) = \rho(a_t)$; qui si utilizzerà, però, solo la prima interpretazione. Date opportune ipotesi di regolarità si può, quindi, introdurre la seguente operazione di derivazione:

$$D(a) = \frac{d}{dt} \Phi_t(a) \Big|_{t=0}, \quad (4.14)$$

e, poichè il gruppoide di partenza è finito, esisterà un elemento $h \in C^*(G)$ tale che:

$$D(a) = i[a, h]. \quad (4.15)$$

Questo elemento sarà chiamato *Hamiltoniana* del sistema. Come ottenuto per la formulazione di Heisenberg, varrà che:

$$\Phi_t(a) = u_t^\dagger a u_t, \quad (4.16)$$

con $u_t = e^{ith}$. Si perviene allora alla seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} a = i[a, h]. \quad (4.17)$$

Si espliciterà adesso tale equazione nello spazio di Hilbert ottenuto attraverso il metodo GNS. Poichè da Eq. (4.5) vale che $\langle 0 | \pi_\rho(a) | 0 \rangle$, si ottiene che:

$$\langle a_t \rangle_\rho = \rho(a_t) = \langle 0 | \pi_\rho(u_t)^\dagger \pi_\rho(a) \pi_\rho(u_t) | 0 \rangle = \langle \psi_t | \pi_\rho(a) | \psi_t \rangle, \quad (4.18)$$

dove $|\psi_t\rangle = \pi_\rho(u_t) | 0 \rangle = U_t | 0 \rangle$.

Ora poichè è valida la seguente:

$$\pi_\rho(h) |\psi_t\rangle = -i \frac{d}{dt} \pi_\rho(e^{ith}) | 0 \rangle = -i \frac{d}{dt} U_t | 0 \rangle = H |\psi_t\rangle, \quad (4.19)$$

si ha che $H = \pi_\rho(h)$ è l'operatore di Hamiltoniana sullo spazio di Hilbert, ottenuto attraverso il metodo GNS. La rappresentazione GNS dell'equazione di evoluzione temporale è, pertanto, la seguente:

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \quad (4.20)$$

Capitolo 5

Conclusioni

L'elaborato illustra, seguendo gli articoli [7] e [8], come i cosiddetti processi di *misura selettiva* $M(a', a)$ posti alla base della teoria di Schwinger, definiscano un vero e proprio gruppoide. A partire da quest'ultimo si è poi costruita una C^* -algebra di convoluzione del gruppoide per poi rappresentarla tramite costruzione GNS. È stata inoltre fornita un'interpretazione statistica delle grandezze costruite a partire dagli osservabili della C^* -algebra $C^*(G)$; infatti si è visto come le ϕ_{xy} rispettino le prescrizioni di Feynman per le ampiezze di probabilità. Allo stesso modo è stato fatto notare nell'Esempio 3.23 come si possa ottenere una formulazione analoga a quella di Heisenberg partendo proprio da un gruppoide; sono state mostrate, infine, le varie analogie che sorgono, una volta ottenuta $C^*(G)$, tra la teoria di Schwinger e la meccanica ondulatoria. Tali similitudini sono, in realtà, ovvie considerato il fatto che una volta prese due C^* -algebre generiche, i procedimenti per ottenere rappresentazioni di queste sono trivialmente gli stessi. Si è dimostrato, allora, che i gruppoidi sono alla base delle maggiori formulazioni quantistiche e non solo della teoria del simbolismo delle misure atomiche; difatti a partire da un gruppoide è possibile costruire non solo una C^* -algebra (fondamento della formulazione di Heisenberg), ma anche uno spazio di Hilbert, struttura cardine della teoria di Schrödinger.

Bibliografia

- [1] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1978.
- [2] A. Sims, G. Szabó and D. Williams, *Operator Algebras and Dynamics: Groupoids, Crossed Products, and Rokhlin Dimension*, Birkhäuser, 2020.
- [3] M. Khalkhali, *Basic Noncommutative Geometry*, Amer Mathematical Society, 2009.
- [4] S. N. Burris and H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Dover Pubns, 2012.
- [5] D. Joyner, *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys*, JHUP, 2002.
- [6] B. Farb and R. K. Dennis, *Noncommutative Algebra*, Springer, 1993.
- [7] F. M. Ciaglia, A. Ibort and G. Marmo, *A gentle introduction to Schwinger's formulation of Quantum Mechanics: the groupoid picture*, Modern Physics Letters A, Volume 33, Issue 20, 2018.
- [8] F. M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort and G. Marmo, *Schwinger's picture of Quantum Mechanics*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Volume 17, Number 04, 2020.
- [9] G. Holton, *Source of Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1967.