UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Teoria delle stringhe bosoniche

Relatori:
Massimo Taronna

Candidato:
Carmine Montela
Matr. $N850001427$

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1 Introduzione **1**

2 Stringa relativistica **3**
2.1 Azione di Nambu-Goto 3
2.2 Equazione del moto, condizioni al bordo e D-brane 5
2.3 Gauge statica ed esempi 6

3 Gauge di cono-luce **7**
3.1 Una scelta per τ 7
3.2 Una scelta per σ 8
3.3 Vincoli ed equazione del moto 9
3.4 Moto di una stringa relativistica libera 9
3.5 Gauge di cono-luce 10

4 Campi e particelle **12**
4.1 Equazione di Klein-Gordon 12
4.2 Soluzioni e vincoli 12
4.3 Campi scalari quantistici e particelle scalari 14
4.4 Campo elettromagnetico e fotoni 16
4.5 Campo gravitazionale e gravitoni 17

5 Quantizzazione della stringa aperta **20**
5.1 Hamiltoniana e commutatori 20
5.2 Operatori di creazione e distruzione 21
5.3 Operatore di Virasoro 22
5.4 Algebra di Virasoro 23
5.5 Carica di Lorentz e Dimensione critica 25
5.6 Spazio degli stati, oscillazioni e particelle 27
5.7 Stringa aperta e brane 29

6 Quantizzazione della stringa chiusa **31**
6.1 Hamiltoniana e commutatori 31
6.2 Hamiltoniana e spettro di massa 33
6.3 Oscillazioni e particelle: gravitone 35

7 T-dualità **37**
7.1 Dimensioni compatte 37
7.2 T-dualità per stringhe chiuse 37
7.3 Regole di quantizzazione 38
7.4 Spettro di massa 39
7.5 T-dualità per stringhe aperte 40

8 Conclusioni **42**

A Correnti e cariche sul world-sheet **44**

Capitolo 1

Introduzione

La teoria delle stringhe è una teoria fisica autoconsistente nella quale le particelle puntiformi sono sostituite da oggetti unidimensionali chiamati stringhe. A grandi distanze rispetto alla lunghezza tipica di una stringa, $L_S \sim L_P = 1,6162 \times 10^{-35} m$, una stringa può essere approssimata da una particella puntiforme con massa, carica e altre proprietà determinate dallo stato vibrazionale che essa assume. Uno dei possibili stati vibrazionali associati a una stringa corrisponde al gravitone, un ipotetico campo quantistico che trasmette l'interazione gravitazionale; quindi la teoria delle stringhe è una teoria di gravità quantistica. Una delle predizioni più importanti della teoria delle stringhe è l'esistenza di dimensioni extra. Ad esempio, per la teoria delle stringhe bosoniche è necessario avere 26 dimensioni, mentre per la teoria delle superstringhe 10 dimensioni. Ǫuesta condizione sul numero di dimensioni spazio-temporali $D = d+1$ è fissato, imponendo la consistenza quantistica della teoria. Quindi la teoria in sé predice il numero di dimensioni necessarie affinché possa esistere.
La realtà, però, indica che il numero di dimensioni spazio-temporali estese è 4; quindi, le dimensioni extra devono essere dimensioni nascoste. Questo risultato è totalmente estraneo alla nostra percezione della realtà, ma il paradosso si risolve richiedendo che le dimensioni nascoste siano compatte e dell'ordine di L_P, ossia incredibilmente piccole. In questo modo, però, per misurare gli effetti di queste dimensioni extra, è necessario una quantità di energia molto più grande rispetto all'energia degli acceleratori di particelle odierni.
Quindi, per studiare la teoria, è importante capire come queste dimensioni possano essere compattificate: la struttura delle superfici formate dalla compattificazione cambia totalmente la fisica descritta dalle stringhe. Infatti, ogni compattificazione restituisce diversi modelli fenomenologici e uno degli obiettivi principali per la teoria è di trovare la giusta compattificazione che descrive il modello standard a basse energie.
Un altro elemento fondamentale della teoria delle stringhe è il concetto di dualità. Una dualità è un'equivalenza che connette differenti teorie o regimi di teorie fisiche; due teorie si dicono duali se esiste una mappa tra di loro tale che gli osservabili delle due

teorie siano mappati gli uni negli altri.
Un esempio importante, discusso nell'ultimo capitolo, è la T-dualità. Questa dualità, nella sua forma più semplice, connette una teoria in cui una stringa si propaga in una dimensione circolare di raggio R, con una teoria in cui una stringa si avvolge attorno ad una dimensione circolare di raggio $\frac{\alpha}{R}$. In generale la T-dualità connette due teorie con differenti geometrie spazio-temporali.
La teoria delle stringhe bosoniche, sviluppata alla fine degli anni '60, è la prima versione formulata della teoria delle stringhe. Come possiamo vedere in questa tesi, il suo nome fa riferimento al fatto che il suo spettro contiene solo bosoni. Inoltre, l'assenza dei fermioni non è l'unico problema che presenta: essa predice una particella, chiamata tachione, con massa immaginaria; questa proprietà rende il tachione una particella instabile e con velocità sempre maggiore della velocità della luce c. Ad ogni modo, questa teoria resta un utilissimo modello per studiare le caratteristiche generali e le difficoltà teoriche della moderna teoria delle stringhe, o teoria delle superstringhe.
Nella prima parte di questa tesi verrà analizzata la stringa relativistica classica e le equazioni del moto ad essa associate. Inoltre, sarà definita la gauge di cono-luce che agevolerà la descrizione della teoria in un formalismo più comodo ai fini della quantizzazione.
In seguito, nel capitolo 4, si forniranno le basi della quantizzazione dei campi, utili a comprendere la successiva quantizzazione delle stringhe e il loro spettro. In particolare saranno studiati i campi scalari, elettromagnetici e gravitazionali deboli. Successivamente sarà pienamente affrontata la quantizzazione delle stringhe aperte e chiuse, studiandone le problematiche, l'algebra di Virasoro e il loro spettro, inoltre ci sarà una breve parte relativa alle brane. Infine, nel capitolo 7, si discuterà la T-dualità. In particolare si studierà brevemente la compattificazione toroidale, le novità associate alle dimensioni compatte e i corrispondenti spettri della teoria.

Capitolo 2

Stringa relativistica

2.1 Azione di Nambu-Goto

Per studiare una stringa relativistica possiamo formulare un principio di azione in maniera analoga al punto materiale relativistico, ossia partendo da un'azione della forma:

$$S \propto \int ds \tag{2.1}$$

Per il punto materiale l'invariante relativistico è la lunghezza della world-line ds, quindi postuliamo che l'azione di una stringa relativistica sia proporzionale all'area del world-sheet, ossia il luogo dei punti spazio-temporali che la stringa percorre durante il suo moto. Generalizzando la definizione di area per una superficie nello spazio-tempo di Minkowski, possiamo scrivere:

$$S \propto \int\int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \tag{2.2}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\mu X^\alpha\, \partial_\nu X^\beta, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \tag{2.3}$$

$$-g = (\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2 \tag{2.4}$$

Le coordinate del world-sheet all'interno dello spazio tempo sono denotate con le lettere maiuscole e dipendono dai due parametri locali: $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$. Indicando con $\partial_p = \frac{\partial}{\partial \xi^p}$ la derivata rispetto al p-esimo parametro, vediamo che in questo caso ci sono solo due parametri associati alla superficie del world-sheet, dunque possiamo scrivere: $\frac{\partial}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)$. Infine, introduciamo la notazione $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X^{\mu'} \equiv \partial_\sigma X^\mu$.
Inoltre, è fondamentale notare che la costante di proporzionalità tra l'azione e l'area del world-sheet (2.2) deve avere la dimensione di una forza su velocità. Possiamo

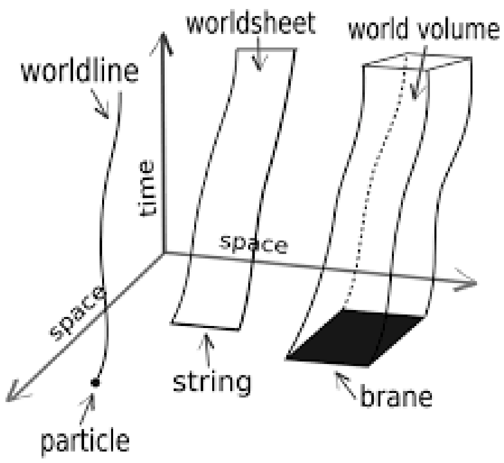
interpretare fisicamente la forza come la tensione intrinseca della stringa, mentre la velocità, in una teoria relativisticamente invariante, deve essere la velocità della luce c. In aggiunta, come per il punto materiale, l'azione è moltiplicata per il segno meno. La conferma di ciò sarà data dalle equazioni che ricaveremo.
Dunque, possiamo scrivere l'azione nella seguente forma:

$$\boxed{S_{NG} = -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma\sqrt{-g}} \tag{2.5}$$

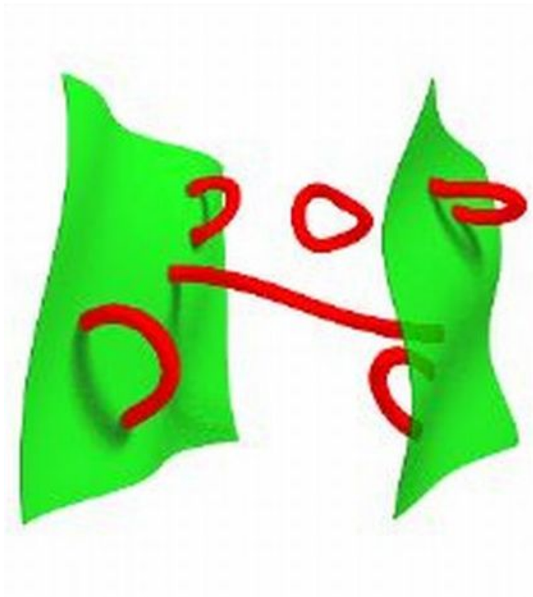
Quindi, la densità di Lagrangiana è descritta dalla funzione:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c}\sqrt{-g}, \quad g = det(g_{ab})} \tag{2.6}$$

L'invarianza dell'azione per riparametrizzazioni è manifesta poiché la densità di Lagrangiana è uno pseudo-scalare e si trasforma in maniera opposta all'area infinitesima del world-sheet. Inoltre, l'azione è manifestamente invariante anche per trasformazioni di Lorentz poiché il termine $\sqrt{-g}$ rappresenta uno scalare di Lorentz.



(a) World-line, world-sheet e world-volume



(b) D-Brane e stringhe

2.2 Equazione del moto, condizioni al bordo e D-brane

Prendiamo in considerazione l'azione definita dalla (2.5):

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X')$$

con:

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c}\sqrt{-g}$$

Per ricavare le equazioni del moto dobbiamo trovarne gli estremali calcolando la sua variazione:

$$\delta S = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu (\partial_\tau P^\tau_\mu + \partial_\sigma P^\sigma_\mu) + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu P^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1} \tag{2.7}$$

con:

$$P^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X'_\mu)^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \tag{2.8}$$

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \tag{2.9}$$

Dunque, affinché $\delta S = 0$, le equazioni del moto devono essere

$$\boxed{\partial_\tau P^\tau_\mu + \partial_\sigma P^\sigma_\mu = 0} \tag{2.10}$$

con due possibile condizioni al bordo:

$$\textbf{Condizione di Dirichlet:} \quad \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma^*) = 0, \quad \mu \neq 0 \tag{2.11}$$

$$\textbf{Condizione di estremi liberi:} \quad P^\sigma_\mu(\tau, \sigma^*) = 0 \tag{2.12}$$

Con σ^* è indicato il parametro che definisce gli estremi, ove questi siano presenti.
Le condizioni di Dirichlet indicano che la posizione degli estremi di una stringa aperta non cambino rispetto al cambiamento del parametro τ. Fisicamente possiamo immaginare questa condizione come se gli estremi siano vincolati ad altri oggetti che chiameremo D-Brane. Inoltre, le brane possono avere dimensione arbitraria p, e in questo caso le chiameremo Dp-Brane.
Se gli estremi di una stringa aperta possono muoversi liberamente in tutto lo spazio, allora la brana ha dimensione pari alla dimensione totale dello spazio-tempo. Quindi si verifica la condizione nota come D-Filling Space.

2.3 Gauge statica ed esempi

Nel nostro sistema di riferimento Lorentziano fissiamo un istante di tempo t_0 e intersechiamo il world-sheet con un iperpiano perpendicolare all'asse t passante per t_0. Tale intersezione, per il nostro sistema di riferimento, rappresenta una curva a cui corrisponde la stringa in quell'istante t_0. Considerando un punto qualsiasi Q del world-sheet, allora la gauge statica si esprime nel seguente modo:

$$\tau(Q) = t(Q) \tag{2.13}$$

Questa scelta di parametrizzazione indica che le linee di τ costante rappresentano linee di t costante, dunque stringhe statiche nel nostro sistema di riferimento.
Ora immaginiamo di fissare due estremi di una stringa aperta in $X^1(0) = 0$ e $X^1(\sigma_1) = a > 0$ e $X^\mu(0) = X^\mu(\sigma_1) = 0$, $\mu > 1$. La gauge statica non fissa la parametrizzazione per σ e, poiché stiamo considerando una stringa statica, possiamo scrivere in tutta generalità:

$$X^1(\tau, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = X^3 = \cdots = X^d = 0,$$

con f continua e monotona crescente. Allora, calcolando $\sqrt{-g}$, possiamo scrivere:

$$S = -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau(-T_0 a) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L = \int_{t_i}^{t_f} dt L$$

È importante notare che questa azione non dipende assolutamente dalla funzione scelta per descrivere le coordinate della stringa e ciò è dovuto all'invarianza per riparametrizzazione. Inoltre, poiché è una stringa statica, ha senso porre $L = -V$ con $V = T_0 a$. Infatti, se la stringa ha una tensione intrinseca pari a T_0, che non dipende dalla sua lunghezza, allora V è proprio l'energia necessaria per formare una stringa di lunghezza a. In questo modo stiamo descrivendo una massa a riposo

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{a} = T_0 \longrightarrow \mu_0 = \frac{T_0}{c^2}$$

con μ_0 densità di massa a riposo. Quindi una stringa statica ha una massa a riposo solo perché essa è in tensione. Infatti, il carattere unidimensionale della stringa rende possibile definire una stringa senza massa intrinseca!
Notiamo inoltre che questa analisi giustifica le costanti moltiplicative dell'azione (2.5).

Capitolo 3

Gauge di cono-luce

3.1 Una scelta per τ

La gauge che sarà analizzata in questo capitolo è un'estensione della gauge statica definita dalla (2.13). Fissato un versore nello spazio-tempo n^μ, consideriamo la seguente scelta di τ:

$$n_\mu X^\mu = \lambda\tau \tag{3.1}$$

Per $n^\mu = (1, 0, ..., 0)$ possiamo vedere che la seguente scelta di gauge restituisce l'espressione (2.13). Geometricamente rappresenta il luogo dei punti del world-sheet X^μ che intersecano un iperpiano individuato dal versore n^μ al variare di τ. Infatti, presi due punti X_1^μ, X_2^μ che soddisfano l'equazione (3.1), allora: $n_\mu(X_1^\mu - X_2^\mu) = 0$. Quindi due punti qualsiasi del world-sheet con lo stesso τ appartengono al piano individuato da n^μ.
Inoltre, è importante definire la stringa come un oggetto di tipo spazio, o al più di tipo luce. In questo modo ogni elemento della stringa si trova nel presente rispetto ad un altro elemento della stringa stessa. Quindi, se $n_\mu \Delta X^\mu = 0$, allora n^μ deve essere di tipo tempo o al più di tipo luce.
Infine, poiché il momento totale è una quantità conservata per un sistema libero, possiamo scrivere la nostra costante nel seguente modo

$$n_\mu X^\mu = \bar{\lambda}(n_\mu p^\mu)\tau, \tag{3.2}$$

dove n^μ in questo caso deve anche indicare una direzione tale per cui $n_\mu p^\mu$ si conservi, quindi valida per le condizioni di Dirichlet.
Da ora ci risulta comodo definire la grandezza:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}. \tag{3.3}$$

Usando il sistema naturale $\hbar = c = 1$, poiché $[\bar{\lambda}] = \frac{[\text{velocità}]}{[\text{forza}]}$ possiamo scrivere la (3.3) nel seguente modo: $\bar{\lambda} = \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha$

3.2 Una scelta per σ

Senza ledere la generalità, in questo paragrafo prendiamo in considerazione solo stringhe aperte. Indicando il dominio $\sigma \in [0, \pi]$, possiamo scegliere la nostra parametrizzazione per σ nel seguente modo:

$$(n_\mu p^\mu)\sigma = \pi \int_0^\sigma d\sigma' n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \sigma'). \tag{3.4}$$

Differenziando l'espressione rispetto a $d\sigma$ ricaviamo:

$$n_\mu p^\mu = \pi n_\mu P^{\tau\mu}.$$

Quindi $n_\mu P^{\tau\mu}$ è una costante sul world-sheet. Inoltre, moltiplicando l'equazione (2.10) per il versore n^μ

$$\partial_\tau(n_\mu P^{\tau\mu}) + \partial_\sigma(n_\mu P^{\sigma\mu}) = 0,$$

possiamo vedere che il primo termine è nullo e quindi $n_\mu P^{\sigma\mu}$ è indipendente da σ. Quindi, per garantire la conservazione di p lungo n, negli estremi la funzione $n_\mu P^{\sigma\mu}$ deve essere nulla per ogni τ, dunque scriviamo:

$$n_\mu P^{\sigma\mu} = 0 \tag{3.5}$$

Non verranno mostrati i passaggi matematici relativi alla stringa chiusa poiché sono analoghi, ma è fondamentale notare che non deve necessariamente annullarsi $n_\mu P^{\sigma\mu}$ affinché si conservi il momento totale. Infatti, l'integrale è lungo un percorso chiuso e la topologia dello spazio è banale. Inoltre, è importante notare che c'è ancora un fattore libero per le stringhe chiuse non fissato dalla scelta gauge poiché, a differenza delle stringhe aperte, c'è invarianza traslazionale lungo la stringa stessa.
Indichiamo il dominio di σ per le stringhe chiuse con $\sigma \in [0, 2\pi]$. In questo modo le equazioni successive saranno simmetriche per entrambi i tipi di stringa.
Riepiloghiamo le seguenti scelte di gauge:

$$n_\mu X^\mu = \beta\alpha(n_\mu p^\mu)\tau \tag{3.6}$$

$$(n_\mu p^\mu)\sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\sigma' n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \sigma') \tag{3.7}$$

con

$$\beta = \begin{cases} 1 \text{ Chiusa} \\ 2 \text{ Aperta} \end{cases} \tag{3.8}$$

3.3 Vincoli ed equazione del moto

Sostituendo le espressioni (2.9) nelle gauge (3.6) e (3.7), ricaviamo due vincoli

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \tag{3.9}$$

che in maniera più compatta possiamo scrivere, per ogni scelta di β, nel seguente modo:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \tag{3.10}$$

Queste condizioni ci permettono di semplificare molte relazioni e di scrivere le densità di momento nella forma:

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha}\dot{X}^\mu \,, \tag{3.11}$$

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha}X^{\mu'} \tag{3.12}$$

Dunque, attraverso le espressioni appena ricavate, possiamo scrivere l'equazione del moto (2.10) nel seguente modo:

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \tag{3.13}$$

È importante notare che queste equazioni rappresentano equazioni delle onde per le coordinate del world-sheet X^μ. In aggiunta, la condizione di estremi liberi è scrivibile come condizione al bordo di Neumann: $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma^*) = 0$.

3.4 Moto di una stringa relativistica libera

Partendo dalle equazioni del moto associate alle condizioni al bordo di Neumann, possiamo scriverne la soluzione nel seguente modo:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)\right) \cos(n\sigma) \tag{3.14}$$

Inoltre, per trovare il momento della stringa, usiamo la sua definizione:

$$p^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha}\pi f_1^\mu \;\longrightarrow\; f_1^\mu = 2\alpha p^\mu \tag{3.15}$$

In questo problema possiamo scrivere le ampiezze di oscillazione A_n^μ, B_n^μ in funzione delle a_n^μ definite da

$$A_n^\mu cos(n\tau) + B_n^\mu sin(n\tau) \equiv -i\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{n}}\left((a_n^\mu)^* e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}\right) , \tag{3.16}$$

il cui significato fisico sarà espresso successivamente.
Infine, per scrivere la soluzione in maniera più compatta, è comodo definire le grandezze:

$$\alpha_n^\mu \equiv a_n^\mu \sqrt{n}\ ; \quad \alpha_{-n}^\mu \equiv (a_n^\mu)^* \sqrt{n}\ ; \quad n > 0 \tag{3.17}$$

con:

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^*$$
$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha} p^\mu$$

Quindi possiamo scrivere la soluzione (3.14) nel seguente modo:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha} p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha} \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \tag{3.18}$$

Questa soluzione individua la composizione di un moto uniforme rispetto al parametro τ e una composizione di oscillazioni con ampiezze α_n^μ!
Infine, per il prossimo paragrafo, ci è utile scrivere le derivate di X^μ rispetto ai parametri (τ,σ):

$$\begin{cases} \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha} \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ X^{\mu'} = -i\sqrt{2\alpha} \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ \dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha} \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau\pm\sigma)} \end{cases} \tag{3.19}$$

3.5 Gauge di cono-luce

Affinché si possano scrivere le soluzioni dell'equazione del moto in maniera più semplice, è comodo definire le coordinate di cono-luce nel seguente modo:

$$X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^1), \quad X^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 - X^1), \quad X^l = X^l, \quad l > 1 \tag{3.20}$$

Dunque è conveniente scegliere n_μ in modo tale da riscrivere il nostro sistema nelle coordinate di cono-luce. Infatti, scegliendo n^μ in modo tale che

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ..., 0 \right),$$

ne risulta:

$$X^+ = \beta \alpha p^+ \tau \tag{3.21}$$

$$p^+ \sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\sigma' P^{\tau +}(\tau,\sigma'). \tag{3.22}$$

Queste equazioni valgono se la stringa ha momento conservato lungo la direzione $+$ che non sia nullo, e ciò si verifica se la stringa è senza massa e si muove lungo direzione negativa di X^1.
In questo modo i vincoli descritti dalle equazioni (3.10) possono riscriversi nel seguente modo:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \longrightarrow (\dot{X}^- \pm X^{-'}) = \frac{1}{\beta\alpha}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^l \pm X^{l'})^2 \tag{3.23}$$

Quindi possiamo ricavare X^- conoscendo le coordinate trasversali X^l, $l > 1$; inoltre, poiché $X^+ = \beta\alpha p^+\tau$, esse saranno le uniche coordinate indipendenti.
È importante notare che le equazioni del moto sono soddisfatte anche dalle coordinate di cono-luce X^+, X^- poiché sono combinazioni lineari di soluzioni.
Inoltre, unendo le relazioni (3.19) e (3.23) possiamo scrivere:

$$\sqrt{2\alpha}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+}\sum_{\mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^l \alpha_p^l \equiv \frac{1}{p^+}L_n^\perp, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.24}$$

Tale espressione ci indica una relazione esplicita tra le ampiezze di oscillazioni di X^- e delle X^l. Inoltre, la grandezze $L_n^\perp$ sono indicate come modi di Virasoro e rappresentano funzioni fondamentali per la quantizzazione della teoria.
Al tal proposito è importante calcolare $L_n^\perp$ per $n = 0$:

$$L_0^\perp = 2\alpha p^+ p^- \tag{3.25}$$

Quindi, possiamo affermare che la soluzione è nota se è fissato il set di variabili date dalle condizioni al bordo:

$$\left(p^+,\ x_0^-,\ x_0^l,\ \alpha_n^l\right) \tag{3.26}$$

Infine calcoliamo la massa di una stringa relativistica. Tale grandezza può essere ricavata sfruttando la relazione di mass-shell scritta in coordinate di cono-luce:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^l p^l \tag{3.27}$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^l)^* a_n^l \geq 0 \tag{3.28}$$

È importante capire che tale espressione indica che la massa della stringa è proporzionale alle frequenze e alle ampiezze delle oscillazioni che presenta! Infatti, quando tutti i coefficienti per $n > 0$ sono posti a zero, l'unico contributo al moto è dato dal momento del centro di massa e la stringa collassa in un singolo punto. Inoltre, poiché $M^2 = 0$, essa si muoverà in moto rettilineo uniforme alla velocità della luce c.

Capitolo 4

Campi e particelle

4.1 Equazione di Klein-Gordon

Per definizione la densità di Lagrangiana di un campo scalare libero può essere scritta nella forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_0\psi\partial_0\psi - \frac{1}{2}\partial_i\psi\partial_i\psi - \frac{1}{2}m^2\psi^2 = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}m^2\psi^2, \tag{4.1}$$

dunque la nostra azione è data da

$$S = \int d^Dx(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m^2\psi^2) \tag{4.2}$$

con $D = d + 1$ e $d^Dx = d^0x\ d^1x \ldots\ d^dx$.
Per ricavare le equazioni del moto si devono trovare gli estremali dell'azione (4.2). Con semplici passaggi si può dimostrare che l'equazione di Eulero-Lagrange associata alla (4.1) è data da:

$$\delta S = 0 \iff \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - m^2\psi = -\partial_t^2\psi + \nabla^2\psi - m^2\psi = 0 \tag{4.3}$$

o analogamente:

$$(\partial^2 - m^2)\psi = 0 \tag{4.4}$$

Tale equazione è chiamata equazione di Klein-Gordon per il campo scalare ψ ed è del secondo ordine rispetto alle variabili spazio-temporali presentando un termine lineare rispetto a ψ proporzionale a m^2.

4.2 Soluzioni e vincoli

Consideriamo la trasformata di Fourier del campo ψ:

$$\psi(x) = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} e^{ip^\mu x_\mu}\psi(p)$$

È importante notare che il campo che dobbiamo descrivere deve essere una funzione reale, dunque la sua trasformata deve soddisfare:

$$\psi(-p) = (\psi(p))^*$$

Date le proprietà della trasformata di Fourier è utile applicare tale trasformata all'equazione di Klein-Gordon (4.4):

$$(p^2 + m^2)\psi(p) = 0 \tag{4.5}$$

Tale equazione può essere risolta considerando due casi:

$$\begin{cases} \text{Per } p^2 + m^2 \neq 0, & \psi(p) = 0 \\ \text{Per } p^2 + m^2 = 0, & \psi(p) \text{ libero} \end{cases} \tag{4.6}$$

L'ipersuperficie descritta da $p^2 + m^2 = 0$ è la condizione di mass-shell per il campo ψ ed è equivalente a:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$$

Inoltre, se usiamo le coordinate di cono-luce, possiamo scrivere l'equazione di Klein-Gordon nel modo seguente

$$(-2\partial_+\partial_- + \partial_l\partial_l - m^2)\psi(x^+, x^-, x_T) = 0$$

e applicando la trasformata rispetto alle variabili $x^+, \vec{x}_T$ ricaviamo:

$$\left(i\partial_+ - \frac{1}{2p^+}(p^l p^l + m^2)\right)\psi(x^+, p^+, p_T) = 0$$

Questa equazione corrisponde ad un'equazione differenziale del primo ordine rispetto a x^+, ma non manifestamente covariante.
Inoltre, se si volesse usare la parametrizzazione di cono-luce data da $x^+ = p^+\tau/m^2$, possiamo scrivere l'equazione di Klein-Gordon e la condizione di mass-shell in un modo più utile:

$$\left(i\partial_\tau - \frac{1}{2m^2}(p^l p^l + m^2)\right)\psi(x^+, p^+, p_T) = 0$$

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p^l p^l + m^2)$$

In questo modo siamo passati a un'equazione del primo ordine rispetto a τ.

4.3 Campi scalari quantistici e particelle scalari

Consideriamo una soluzione particolare dell'equazione di Klein-Gordon:
un'onda piana di momento $\vec{p}$ in un volume fisso V con condizione periodica al bordo

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + (a(t))^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \tag{4.7}$$

Sono inserite alcune costanti di normalizzazione per il solo fine di comodità.
Allora, in questo caso, l'azione di questo sistema è data da:

$$S = \int \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t)\dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right) dt \tag{4.8}$$

Quindi, scrivendo

$$a(t) = q_1 + iq_2,$$

con q_1, q_2 funzioni reali, possiamo riscrivere l'azione (4.8) come:

$$S = \int L dt = \sum_{i=1}^{2} \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2(t) - \frac{1}{2} E_p q_i^2(t) \right).$$

Questa azione ha la stessa forma di un'azione descritta da un sistema di due oscillatori armonici non accoppiati!
Quindi possiamo scrivere con facilità le equazioni del moto

$$\ddot{q}_i(t) = -E_p^2 q_i \iff \ddot{a}_i(t) = -E_p^2 a(t)$$

e le soluzioni:

$$a(t) = a_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + a^*_{-\vec{p}} e^{iE_p t} \tag{4.9}$$

Il sistema studiato, quindi, è totalmente riscrivibile in termini delle ampiezze di oscillazione (4.9). Dunque, l'Hamiltoniana del sistema può essere scritta come

$$H = E_{\vec{p}} (a^*_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a^*_{-\vec{p}} a_{-\vec{p}}). \tag{4.10}$$

Si può dimostrare che il momento totale del campo è:

$$\vec{P} = -\int d^d x (\partial_0 \psi) \nabla \psi,$$

e in questo caso può essere scritto come

$$\vec{P} = \vec{p} (a^*_{\vec{p}} a_{\vec{p}} - a^*_{-\vec{p}} a_{-\vec{p}}) \tag{4.11}$$

Quindi è importante notare che la soluzione di onda piana (4.7), che è alla base della trasformata di Fourier, ci suggerisce di quantizzare il sistema partendo dall'oscillatore armonico. L'idea di base è quella di associare ad a_p, a_{-p} gli operatori di distruzione e ad a_p^*, a_{-p}^* gli operatore di creazione, riferiti al momento generico $\vec{p}$.
Quindi, possiamo quantizzare il sistema postulando i seguenti commutatori per i diversi p:

$$[a_p, a_p^\dagger] = 1. \tag{4.12}$$

Inoltre, poiché il momento associato agli oscillatori armonici è dato da

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i(t)}{E_p},$$

dalle relazioni canoniche di commutazioni (4.12) segue che:

$$[q_i(t), p_i(t)] = i$$

Infine, sostituendo le soluzioni (4.9) nel campo (4.7), possiamo riscrivere la soluzione (4.7) rendendo espliciti i legami con gli operatori di creazione e distruzione:

$$\hat{\psi}_p(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_p e^{-iE_pt+ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{iE_pt-ip\cdot x}) + \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_{-p} e^{-iE_pt-ip\cdot x} + a_{-p}^\dagger e^{iE_pt+ip\cdot x})$$

È importante notare che per il processo di quantizzazione anche il campo ψ è un operatore i cui autovalori sono le possibili onde piane.
In tutta generalità possiamo scrivere la soluzione generica per una funzione espressa in serie di Fourier nel seguente modo

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_p e^{-iE_pt+ip\cdot x} + a_p^\dagger e^{iE_pt-ip\cdot x}) \tag{4.13}$$

e quindi:

$$[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{pk}; \quad [a_p, a_k] = [a_p^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \tag{4.14}$$

Il campo libero può essere visualizzato in questo modo: nello spazio dei momenti in ogni punto sono presenti degli oscillatori armonici e una perturbazione in un punto provoca un'oscillazione complessiva del sistema dato dal moto di un numero non numerabile di oscillatori, che rappresenta la propagazione del campo stesso.
Definiamo $|\omega\rangle$ lo stato fondamentale del sistema, chiamato anche stato di vuoto, definito da:

$$a_k |\omega\rangle = 0 \tag{4.15}$$

Mentre stati del tipo $a_k^\dagger |\omega\rangle$ sono stati eccitati dello spazio e rappresentano stati di singola particella con momento $\vec{k}$. Chiaramente se agiamo più volte sullo stato fondamentale con gli operatori di creazione formiamo stati a più particelle definiti da diversi momenti. Infatti, se calcoliamo il momento e l'energia del primo stato eccitato, possiamo vedere che:

$$\vec{P}a_k^\dagger |\omega\rangle = \vec{p}a_k^\dagger |\omega\rangle ; \quad Ha_k^\dagger |\omega\rangle = E_p a_k^\dagger |\omega\rangle$$

Quando usiamo le coordinate di cono-luce gli operatori di creazione e distruzione sono identificati dalle componenti indipendenti del momento $|p^+, \vec{p}_T\rangle$, poiché il valore di p^- è fissato dalla mass-shell. Dunque possiamo definire gli stati indicando solo le componenti indipendenti:

$$|\phi\rangle = a_{p^+,p_T}^\dagger |\omega\rangle$$

4.4 Campo elettromagnetico e fotoni

Ricordiamo che le equazioni di Maxwell si scrivono in forma covariante nel seguente modo

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

o in maniera analoga

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A) = 0$$

Inoltre è importante ricordare che le equazioni di Maxwell permettono l'esistenza di una funzione di gauge definita da:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon(x)$$

In maniera analoga ai campi scalari liberi, applichiamo la trasformata di Fourier alle equazioni:

$$p^2 A^\mu(p) - p^\mu(p \cdot A(p)) = 0$$

$$\delta A_\mu(p) = ip_\mu \epsilon(p)$$

Utilizzando le coordinate di cono-luce, per $p^+ \neq 0$ possiamo sempre scegliere la gauge in modo tale che:

$$A^+(p) \longrightarrow A^{+'}(p) = A^+(p) + ip^+\epsilon(p) = 0 \Longleftrightarrow \epsilon(p) = iA^+/p^+$$

Dunque, se consideriamo le equazioni di Maxwell per $\mu = +$ ricaviamo:

$$p \cdot A = 0 \longrightarrow A^- = \frac{1}{p^+}(p^l A^l)$$

Quindi le equazioni di Maxwell possono scriversi nel seguente modo:

$$p^2 A^\mu = 0$$

Come abbiamo fatto per il campo scalare (4.5), possiamo dividere la soluzione in due parti:

$$\begin{cases} \text{Per } p \neq 0, & A^l = 0 \\ \text{Per } p = 0, & A^l \text{ libero} \end{cases} \tag{4.16}$$

Queste equazioni rappresentano le condizioni di mass-shell per un campo senza massa, infatti: $E^2 = |\vec{p}|^2$.
Inoltre, poiché il campo elettromagnetico è descritto da quadrivettori possiamo affermare che lo stato quantistico associato è descritto da una particella di spin 1. Infine, come abbiamo visto dalle equazioni precedenti, abbiamo $D-2$ polarizzazioni diverse per ogni particella. Quindi un generico stato di questo campo è descritto da:

$$|\gamma\rangle = \sum_{l=2}^{D-1} \chi_l a^{l\dagger}_{p^+,p_T} |\Omega\rangle$$

In 4 dimensioni spazio-temporali ci sono 2 direzioni linearmente indipendenti per ogni stato di singola particella o fotone.

4.5 Campo gravitazionale e gravitoni

Consideriamo il campo gravitazionale nell'approssimazione di piccoli campi. Le componenti del tensore metrico al primo ordine è data da:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \ \ |h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$$

Ricordiamo che l'equazione di campo di Einstein linearizzata in assenza di materia $G_{\mu\nu} = 0$ può essere scritta nel seguente modo:

$$G^{\mu\nu} = \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_a(\partial^\mu h^{\nu a} + \partial^\nu h^{\mu a}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0$$

Come abbiamo fatto per il campo elettromagnetico, risulta comodo scrivere le componenti del tensore $\mathcal{G}$ nella rappresentazione coniugata:

$$S^{\mu\nu} = p^2 h^{\mu\nu} - p_a(p^\mu h^{\nu a} + p^\nu h^{\mu a}) + p^\mu p^\nu h = 0,$$

con $h = h^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.
Ricordiamo che l'equazione di campo permette un'invarianza di gauge che, espressa nello spazio dei momenti, assume la forma:

$$\delta h^{\mu\nu}(p) = ip^\mu \epsilon^\nu(p) + ip^\nu \epsilon^\mu(p)$$

Una differenza importante con il campo elettromagnetico è il carattere tensoriale dell'equazione, che si traduce nel fatto che la funzione di gauge è un quadrivettore. Nelle coordinate di cono-luce le componenti del campo sono:

$$(h^{lj},\ h^{+l},\ h^{-l},\ h^{+-},\ h^{++},\ h^{--})$$

Quindi, nell'ipotesi in cui $p^+ \neq 0$, possiamo rendere nulli tutti i termini in cui è presente la componente $+$:

$$h^{++} = h^{+-} = h^{+l} = 0$$

A questo punto consideriamo l'equazione per le componenti $\mu = \nu = +$:

$$h = h^{\mu}_{\mu} = 0 = -2h^{+-} - h^{ll} \longrightarrow h^{ll} = 0 \tag{4.17}$$

cioè la matrice h^{lj}, con $l, j \in 2, \dots, d$, ha traccia nulla.
Ora, sfruttando questa proprietà, fissiamo $\mu = +$ e ricaviamo:

$$p_a h^{\nu a} = 0 \tag{4.18}$$

Dunque l'equazione di campo di Einstein si riduce alla seguente equazione:

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0 \tag{4.19}$$

L'equazione (4.18) restituisce le seguenti espressioni:

$$h^{--} = \frac{1}{p^+}(p_l h^{-l}) \tag{4.20}$$

$$h^{l-} = \frac{1}{p^+}(p_j h^{lj}) \tag{4.21}$$

Mentre l'equazione (4.19) restituisce:

$$p^2 h^{lj} = 0. \tag{4.22}$$

Quest'ultima è la relazione di mass-shell per il campo gravitazionale:

$$\begin{cases} \text{Per } p \neq 0, & h^{lj} = 0 \\ \text{Per } p = 0, & h^{lj} \text{ libero} \end{cases} \tag{4.23}$$

È fondamentale notare che le relazioni di mass-shell per il campo gravitazionale si riferiscono a un campo senza massa.
Quindi, i gradi di libertà di un campo gravitazionale D-dimensionale sono portati da un tensore simmetrico, trasversale e senza traccia che soddisfa le equazioni di Klein-Gordon. Infine, il numero di componenti indipendenti di $h^{\mu\nu}$ è pari a

$$n(D) = \frac{1}{2}D(D-3)$$

Nel caso 4-dimensionale $n(4) = 2$.
Quindi, possiamo affermare che un generico stato di singola particella per un campo gravitazionale è descritto da:

$$|g\rangle = \sum_{l,j=2}^{D-1} \xi_{lj} (a^{lj}_{p^+,p_T})^\dagger |\omega\rangle \,, \quad \xi_{ll} = 0$$

Questa particella senza massa è chiamata gravitone ed è descritta da un tensore di ordine due, simmetrico e trasversale. Inoltre, dato il carattere tensoriale di ordine due di questa particella possiamo affermare che ha spin intero pari a due.

Capitolo 5

Quantizzazione della stringa aperta

5.1 Hamiltoniana e commutatori

Prima di quantizzare una stringa aperta relativistica è fondamentale riprendere alcuni risultati ricavati in precedenza (3.10)-(3.12), (3.19)-(3.23):

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha} X^{\mu'}; \qquad P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha} \dot{X}^{\mu}; \qquad \dot{X}^{-} = \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{2p^{+}} (\dot{X}^{l} \dot{X}^{l} + X^{l'} X^{l'})$$

$$P^{\tau -} = \frac{\pi}{2p^{+}} \left(P^{\tau l} P^{\tau l} + \frac{X^{l'} X^{l'}}{(2\pi\alpha)^2} \right).$$

Come primo passo per definire una teoria quantistica di una stringa relativistica usando la gauge di cono-luce dobbiamo trovare un set di operatori indipendenti tra loro. Motivati dal set (3.26) definiamo il nostro set di operatori τ indipendenti nel seguente modo:

$$\left(X^{l}(\sigma),\ x_0^{-},\ P^{\tau l}(\sigma),\ p^{+} \right) \tag{5.1}$$

È importante notare che il set scelto è definito da operatori scritti nella formulazione di Schrondinger, quindi in questo caso sono gli stati che dipendono dal parametro τ. Dunque, per quantizzare il sistema, è necessario postulare le regole di commutazione tra questi operatori. Postuliamo le seguenti relazioni di commutazione:

$$\left[X^{l}(\sigma), P^{\tau l}(\sigma') \right] = i\eta^{lj} \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.2}$$

$$\left[X^{l}(\sigma), X^{j}(\sigma') \right] = \left[P^{\tau l}(\sigma), P^{\tau l}(\sigma') \right] = 0 \tag{5.3}$$

$$\left[x_0^{-}, p^{+} \right] = -i \tag{5.4}$$

$$\left[x_0^{-}, X^{l}(\sigma) \right] = \left[p^{+}, X^{l}(\sigma) \right] = \left[p^{+}, P^{\tau l} \right] = \left[x_0^{-}, P^{\tau l} \right] = 0 \tag{5.5}$$

In questo caso le regole di quantizzazione sono diverse da quelle descritte per un punto materiale anche per la presenza di $\delta(\sigma - \sigma')$, che fa in modo che punti di una stringa definiti da σ e σ' diversi hanno coordinate $X^l(\sigma)$ e densità di momento $P^{\tau l}(\sigma')$ non coniugate tra loro. Infine, è importante definire l'Hamiltoniana del sistema. L'Hamiltoniana, per come abbiamo definito il set di operatori (5.1), deve rappresentare il generatore delle traslazioni di τ. Per costruire tale Hamiltoniana ricordiamo che, come per un punto materiale, p^- genera una traslazione di X^+; usando la gauge di cono-luce $X^+ = 2\alpha p^+ \tau \rightarrow \partial_\tau = 2\alpha p^+ \partial_+$ segue che l'Hamiltoniana può essere scritta come:

$$H = 2\alpha p^+ p^- = 2\alpha p^+ \int_0^\pi d\sigma P^{\tau -} = L_0^\perp \tag{5.6}$$

Possiamo verificare che questa definizione sia giusta calcolando l'evoluzione degli operatori nella rappresentazione di Heisenberg in funzione di τ attraverso le relazioni:

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = i\partial_\tau\,|\psi\rangle \longrightarrow \frac{d\hat{A}}{d\tau} = -i\left[\hat{A},\,\hat{H}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \tau} \tag{5.7}$$

Senza svolgere ulteriore calcoli, queste equazioni restituiscono tutte le equazioni ricavate nel caso non quantistico, ma espresse in termini di operatori.

5.2 Operatori di creazione e distruzione

Una volta quantizzato il sistema è importante individuare il ruolo di ogni operatore e il loro significato fisico. Scriviamo la soluzione (3.18) per le componenti trasversali, che ricordiamo essere soluzioni delle equazioni (5.7):

$$X^l(\tau,\sigma) = x_0^l + \sqrt{2\alpha}\alpha_0^l \tau + i\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n}\alpha_n^l \cos(n\sigma)e^{-in\tau}$$

Da questa espressione si può mostrare facilmente che:

$$\left[(\dot{X}^l \pm X^{l'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^j \pm X^{j'})(\tau,\sigma^{'})\right] = \pm 4\pi\alpha\, i\eta^{lj}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma - \sigma^{'}) \tag{5.8}$$

$$\left[(\dot{X}^l \pm X^{l'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^j \mp X^{j'})(\tau,\sigma^{'})\right] = 0 \tag{5.9}$$

Sfruttando le relazioni (3.19) per le componenti trasversali ricaviamo:

$$[\alpha_m^l, \alpha_n^j] = m\eta^{lj}\delta_{m+n,0} \tag{5.10}$$

o in maniera equivalente

$$[a_m^l, (a_n^\dagger)^j] = \eta^{lj}\delta_{n+m,0} \tag{5.11}$$

Da questa relazione possiamo vedere che gli operatori a_k^p, $(a_k^p)^\dagger$ sono operatori di creazione e distruzione delle oscillazioni di frequenza k lungo p!
È fondamentale notare che l'espressione (5.11) implica che $\alpha_0^k = \sqrt{2\alpha}p^k$ commuta con tutti gli operatori di creazione. Questo è un risultato atteso perché ci aspettiamo che il momento della stringa abbia commutatori non nulli solo con x_0^k.
Infine, per trovare le relazioni di commutazione tra x_0^l e α_n^j il procedimento è lo stesso, ma dobbiamo integrare in σ in modo tale che la parte oscillante si annulli. Il risultato che otteniamo è:

$$[x_0^l, \alpha_n^j] = 0, \; n \neq 0 \tag{5.12}$$

$$[x_0^l, p^j] = i\eta^{lj} \tag{5.13}$$

5.3 Operatore di Virasoro

Riprendiamo la soluzione dell'equazione delle onde (2.10) per la coordinata X^-

$$X^-(\tau,\sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^- \cos(n\sigma)e^{-in\tau}$$

e ricordiamo la relazione tra α_n^- e le α_n^l

$$\sqrt{2\alpha}\alpha_n^- \equiv \frac{1}{p^+}L_n^\perp$$

con

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-p}^l\alpha_p^l$$

Possiamo affermare che queste relazioni valgono anche in senso operatoriale. Questo poiché $L_n^\perp$, ora operatore di Virasoro trasversale, per $n \neq 0$ è definito da α_p^l e α_{n-p}^l che commutano tra loro; quindi tutti i calcoli con gli operatori seguono la stesse regole dell'algebra commutativa.
Per $n = 0$ l'operatore è definito da operatori che non commutano tra loro. In aggiunta non è normale-ordinato, ossia gli operatori di creazione non agiscono per primi sugli stati, e per renderlo tale dobbiamo usare le regole di commutazione (5.11) per ordinare i termini:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^l\alpha_p^l + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p^l\alpha_{-p}^l + \frac{1}{2}\alpha_0^l\alpha_0^l \tag{5.14}$$

con

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p^l\alpha_{-p}^l = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^l\alpha_p^l + \frac{(D-2)}{2}\sum_{p=1}^{\infty}p \tag{5.15}$$

Prima di capire fisicamente questo risultato cerchiamo di elaborarlo: separiamo dalla definizione dell'operatore di Virasoro $L_0^{\perp}$ la costante additiva $a \equiv \frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n$.
In questo modo in tutte le relazioni in cui è presente $L_0^{\perp}$ dobbiamo sostituire $L_0^{\perp} + a$, con $L_0^{\perp}$ ordinato-normale.
Inoltre dalla relazione di mass-shell $M^2 + p^2 = 0$ possiamo scrivere:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^l p^l = \frac{1}{\alpha}\left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^l)^\dagger a_n^l\right) \tag{5.16}$$

In questo caso possiamo notare che a introduce uno shift nello spettro dell'operatore M^2. Gli operatori di creazione hanno uno spettro di cardinalità $\aleph_0$; quindi lo spettro di M^2 prevede un'infinità numerabile di stati con massa sempre più grande!
In più è fondamentale ricordare che l'energia è definita a meno di una costante additiva. Infatti, poiché $H = L_0^{\perp} + a$, allora dobbiamo rinormalizzare il nostro risultato definendo l'energia di punto zero in modo tale da rendere finita la quantità a. Questo processo è fondamentale poiché rinormalizzando il risultato possiamo ricavare una costante di shift finita per lo spettro di massa. In tal modo la parte non fisica di a sarà parte dell'energia di punto zero che non è misurabile.
Un modo per risolvere questo problema è quello di identificare la somma infinita dei numeri naturali con la continuazione analitica della funzione zeta di Riemann
per $s \to -1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$$

con

$$\lim_{s \to -1} \zeta(s) = -\frac{1}{12}.$$

In seguito dimostreremo questo risultato attraverso la consistenza interna della teoria delle stringhe. Per ora scriviamo:

$$a = -\frac{1}{24}(D-2) \tag{5.17}$$

5.4 Algebra di Virasoro

Al fine di studiare la teoria della stringhe è importante studiare l'algebra definita dagli operatori di Virasoro.
Per prima cosa è importante calcolare l'aggiunto dell'operatore di Virasoro. Per fare ciò usiamo le relazioni $\alpha_{-n}^j = (\alpha_n^j)^\dagger$:

$$(L_n^{\perp})^\dagger = L_{-n}^{\perp} \tag{5.18}$$

Come possiamo vedere per $n = 0$ l'operatore $L_0^\perp$ è hermitiano, il che è un risultato atteso poiché rappresenta l'Hamiltoniana del sistema.
A questo punto per definire l'algebra di Virasoro è importante conoscere le relazioni di commutazioni tra $L_n^\perp$ e α_n^l. Usando la definizione di $L_n^\perp$ data da (3.24) possiamo scrivere:

$$[L_m^\perp, \alpha_n^j] = -n\alpha_{n+m}^j \tag{5.19}$$

Come possiamo vedere la commutazione dà luogo ad un altro operatore α_k^j, ma con $k = n + m$.
A questo punto possiamo calcolare il commutatore $[L_m^\perp, L_n^\perp]$. Per cominciare, consideriamo il caso più semplice in cui $n + m \neq 0$. Quindi possiamo scrivere $[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2}\sum_{p\in Z}[L_m^\perp, \alpha_{n-p}^l \alpha_p^l]$ e applicando (5.19) possiamo ricavare:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp, \quad m+n \neq 0 \tag{5.20}$$

Consideriamo ora il caso $n + m = 0$ e applichiamo lo stesso procedimento. In questo caso ci saranno dei termini non normali-ordinati, quindi ci aspettiamo delle costanti di shift.
Per semplicità annunciamo prima la forma del commutatore, per poi calcolarlo quando andremo a calcolare i vari termini:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m,n}^\perp + A^\perp(m)\delta_{m+n,0} \tag{5.21}$$

Al fine di ridurre il numero di passaggi consideriamo prima il caso $m = 2, D = 3$:

$$L_2 = \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_1 + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_{-1}\alpha_3 + \dots)$$

$$L_{-2} = \frac{1}{2}\alpha_{-1}\alpha_{-1} + (\alpha_{-2}\alpha_0 + \alpha_{-3}\alpha_1 + \dots)$$

È fondamentale notare che i termini misti dentro e fuori parentesi commutano tra loro e dunque dobbiamo calcolare solo i commutatori dei termini tra parentesi e dei termini fuori parentesi.
Ricordando sempre la forma di (5.21) calcoliamo $[\alpha_{-p}\alpha_q, \ \alpha_{-q}\alpha_p] = q\alpha_{-p}\alpha_q - p\alpha_{-q}\alpha_p$. In questo caso questo commutatore restituisce valori normale-ordinati e quindi non saranno presenti termini additivi costanti, ossia questo commutatore non contribuisce al fattore $A^\perp(2)$ di (5.21). I termini restanti ci restituiscono

$$\frac{1}{4}[\alpha_1\alpha_1, \alpha_{-1}\alpha_1] = \frac{1}{2} + \alpha_{-1}\alpha_1$$

il quale darà il contributo centrale: $A^\perp(2) = \frac{1}{2}$. Se consideriamo tutte le coordinate trasversali, allora dobbiamo rendere normale-ordinati ogni componente, quindi dobbiamo contare $(D-2)$ commutatori: $A^\perp(2) = \frac{1}{2}(D-2)$.

La generalizzazione per ogni m è immediata se consideriamo lo stesso procedimento separando i termini che andranno nella parte centrale e non. Nella parte centrale andranno tutti i termini costanti che derivano da un ordinamento degli operatori. Nel caso generale ci sono molte più combinazioni di $\alpha_{-q}\alpha_p$ tale che $p < m$.
Quindi, senza scrivere i passaggi intermedi, possiamo scrivere il risultato in questo modo:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m,n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{5.22}$$

L'algebra definita da questi commutatori è chiamata algebra di Virasoro o di Witt con estensione centrale.
Come ultima cosa calcoliamo i commutatori tra $L_n^\perp$ e X^l:

$$[L_m^\perp, X^l(\tau,\sigma)] = -ie^{im\tau}cos(m\sigma)\dot{X}^l + e^{im\tau}sin(m\sigma)X^{l'} = \dot{X}^l\xi_m^\tau + \xi_m^\sigma X^{l'}$$

L'interpretazione fisica di questa relazione diventa più chiara se consideriamo la variazione

$$\tau \to \tau + \epsilon\xi_m^\tau$$
$$\sigma \to \sigma + \epsilon\xi_m^\sigma$$

con ϵ parametro infinitesimo. Quindi, se calcoliamo

$$X^l(\sigma + \epsilon\xi_m^\sigma, \tau + \epsilon\xi_m^\tau) = X^l(\sigma,\tau) + \epsilon[L_m^\perp, X^l(\tau,\sigma)]$$

possiamo vedere che l'azione degli operatori di Virasoro sulle coordinate della stringa X^l genera lo stesso cambiamento che risulta se riparametrizzassimo il world-sheet. Si noti che gli estremi della stringa non subiscono riparametrizzazione.
Invece per $n = 0$ otteniamo:

$$[L_0^\perp, X^l(\tau,\sigma)] = -i\partial_\tau X^l$$

che rappresenta l'equazione del moto per le coordinate X^l.

5.5 Carica di Lorentz e Dimensione critica

Sappiamo che se l'azione (2.5) è invariante per trasformazioni di Lorentz, allora si conserva la carica

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma = \int_o^\pi (X_\mu P_\nu^\tau - X_\nu P_\mu^\tau)d\sigma \tag{5.23}$$

Poiché la carica di Lorentz $M_{\mu\nu}$ si conserva abbiamo la garanzia che sia indipendente da τ. Per questo motivo possiamo sostituire X^μ e $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ in (5.23) e considerare solo i termini τ indipendenti. Da una semplice sostituzione ricaviamo:

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu)$$

L'espressione appena ricavata differisce da quella di una particella puntiforme per la presenza dei termini proporzionali agli oscillatori. Affinché una teoria quantistica scritta con la gauge di cono-luce rappresenti ancora una teoria relativistica è necessario capire come scrivere le cariche di Lorentz.
Infatti non è garantito avere una teoria relativistica quando la si quantizza partendo da una formulazione non manifestamente covariante. Nel nostro caso siamo partiti da una formulazione di cono-luce che non è manifestamente covariante, ma sappiamo che deve rappresentare una teoria relativistica.
Come nel caso della particella puntiforme, sappiamo che per scrivere la nostra carica nelle coordinate di cono-luce bisogna costruirla in modo tale che gli operatori siano hermitiani e in più soddisfino la stessa algebra:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} \tag{5.24}$$

Questo processo garantisce l'esistenza di una carica di Lorentz nella nostra teoria non manifestamente covariante. Inoltre, in teoria delle stringhe, è necessario che la carica di Lorentz generi anche una riparametrizzazione del world-sheet.
L'operatore più delicato è M^{-l}, poiché comprende l'operatore X^- che dipende in maniera non banale dalle coordinate X^l. L'algebra di Lorentz, esprimendo le cariche nelle coordinate di cono-luce, indica che:

$$[M^{-l}, M^{-j}] = 0$$

Per prima cosa possiamo rendere hermitiano l'operatore M^{-l} attraverso il processo di simmetrizzazione:

$$M^{-l} = x_0^- p^l - \frac{1}{2}(x_0^l p^- + p^- x_0^l) - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^-\alpha_n^l - \alpha_{-n}^l\alpha_n^-)$$

Il calcolo è molto elaborato e non saranno mostrati i passaggi intermedi:

$$[M^{-l}, M^{-j}] = \frac{1}{\alpha(p^+)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha_{-n}^l\alpha_n^j - \alpha_{-n}^j\alpha_n^l)\left(m\left(1-\frac{1}{24}(d-2)\right)\right) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{24}(D-2)+a\right)\right]$$

In questo caso è importante ricordare che la nostra teoria ha ancora due parametri liberi mai fissati: D ed a. Infatti il commutatore è nullo se e solo se ogni termine della sommatoria è identicamente nullo, il che implica:

$$\boxed{D = 26} \tag{5.25}$$

$$\boxed{a = -1} \tag{5.26}$$

È fondamentale notare che il numero di dimensioni spazio-temporali e il punto zero dell'energia sono precisamente fissati dalla teoria stessa e dalla sua consistenza con la simmetria di Lorentz. Infatti, la teoria delle stringhe è una teoria estremamente restrittiva e ci permette di fissare tutti i parametri liberi della teoria. Dunque la teoria delle stringhe bosoniche ha necessariamente bisogno di un numero di dimensioni spazio-temporali pari a 26. È ancora necessario vedere che il valore di a ricavato coincide con quello che si ottiene se si considera il prolungamento analitico della funzione zeta di Riemann per $s = -1$.

5.6 Spazio degli stati, oscillazioni e particelle

Adesso che abbiamo definito una quantizzazione consistente possiamo studiarne lo spettro. Per prima cosa dobbiamo formare un insieme massimale scegliendo un operatore per ogni coppia canonica:

$$(x_0^l . p^l) \quad (x_0^-, p^+)$$

La scelta più conveniente è quella di scegliere una base di autostati dell'operatore momento

$$|\omega\rangle = |p^+, p_T\rangle$$

tale che

$$a_n^l \, |p^+, p_T\rangle = 0; \quad n > 0, \; l = 2, \ldots, 25.$$

Tutti gli stati $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ corrispondono a stati fondamentali per tutti i valori del momento.
Ogni nuovo stato può essere creato applicando allo stato fondamentale gli operatori di creazione per ogni modo di oscillazione e per ogni coordinata! Dunque, la base dello spazio degli stati è data del seguente spazio di Fock:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{l=2}^{25} (a_n^l)^{\lambda_{n,l}} \, |p^+, p_T\rangle$$

con $\lambda_{n,l} \in \mathbb{N}_0$.
Per capire quali stati sono rappresentati da queste oscillazioni possiamo considerare l'operatore M^2 e H:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^l)^\dagger a_n^l \right) = \frac{1}{\alpha}(-1 + N^\perp) \tag{5.27}$$

$$H = L_0 - 1 = \alpha p^l p^l + N^\perp - 1 = \alpha \left(p^l p^l + M^2 \right) \tag{5.28}$$

L'operatore numero appena introdotto soddisfa le relazioni già note:

$$[N^{\perp}, (a_n^l)^{\dagger}] = n(a_n^l)^{\dagger}, \quad [N^{\perp}, a_n^l] = -n(a_n^l) \tag{5.29}$$

$$N^{\perp} |\lambda\rangle = N_{\lambda}^{\perp} |\lambda\rangle, \quad N_{\lambda}^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{25} n\lambda_{n,l} \tag{5.30}$$

Il primo autovalore è $N_{\lambda}^{\perp} = 0$ a cui corrisponde una massa:

$$M^2 |\lambda\rangle = -\frac{1}{\alpha} |\lambda\rangle < 0$$

Ad esso è associato solo uno stato per ogni valore del momento e quindi la funzione d'onda rappresenta un campo scalare. Queste particelle si chiamano tachioni e hanno $M^2 < 0$. La Lagrangiana di campo libero presenta un termine $\frac{1}{2}M^2\psi^2 < 0$, quindi è instabile, ossia presenta un massimo nel punto di equilibrio. L'equazione di campo associata è

$$i\partial_{\tau}\psi = \left(\alpha p^j p^j - 1\right) \psi \tag{5.31}$$

Una trattazione estesa dei tachioni è complessa e non sarà affrontata in questa tesi.
Il secondo autovalore è dato da $N_{\lambda}^{\perp} = 1$ a cui corrisponde una massa pari a $M^2 = 0$. Lo stato generico che descrive questa oscillazione è

$$|\gamma\rangle = \sum_{l=2}^{25} \xi_l (a_1^l)^{\dagger} |p^+, p_T\rangle,$$

dunque abbiamo 24 stati possibili diversi per ogni valore del momento. Inoltre, l'equazione di campo associata è:

$$i\partial_{\tau}\psi^l = \alpha p^j p^j \psi^l \tag{5.32}$$

È fondamentale notare che questa combinazione di stati descrive un fotone, poiché abbiamo $D-2$ stati, la massa è nulla e gli indici degli stati sono indici di Lorentz. Inoltre l'equazione di Schrödinger coincide con l'equazione di campo per un fotone se consideriamo $\psi^l(p) \longleftrightarrow A^l(p)$.
Concludiamo studiando gli autovettori descritti da $N_{\lambda}^{\perp} = 2$. Essi sono costruiti agendo sullo stato fondamentale con $(a_1^l)^{\dagger}(a_1^j)^{\dagger}$ o con $(a_2^l)^{\dagger}$. Il numero di stati costruiti con $(a_1^l)^{\dagger}(a_1^j)^{\dagger}$ è il numero di entrate indipendenti di una matrice simmetrica di ordine $D-2$: $\frac{(D-2)(D-1)}{2}$. Mentre il numero di stati costruiti con $(a_2^l)^{\dagger}$ è $D-2$. Quindi totalmente il numero di stati è

$$n_2(D) = \frac{(D-2)(D+1)}{2}, \tag{5.33}$$

e la loro massa data da: $M^2 = \frac{1}{\alpha}$. Queste particelle sono note come particelle massive tensoriali, e in $D = 26$ dimensioni ci sono $n_2(26) = 324$ stati. Gli stati descritti da $N_{\lambda}^{\perp}$ sempre maggiore rappresentano particelle sempre più massive e spin sempre maggiore.

5.7 Stringa aperta e brane

Consideriamo il sistema formato da una stringa unita a due Brane della stessa dimensione p. In questo caso dobbiamo utilizzare le condizioni al bordo di Dirichlet:

$$X^a(\tau,0)=\bar{x}_1^a, \quad X^a(\tau,\pi)=\bar{x}_2^a, \quad a=p+1,\dots,d$$

La soluzione delle onde con queste condizioni al bordo può essere scritta nel seguente modo:

$$X^a(\tau,\sigma)=\bar{x}_1^a+(\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a)\frac{\sigma}{\pi}+\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^a e^{-in\tau}sin(n\sigma)$$

È importante notare che x_1^a e x_2^a sono parametri fissi, dunque nel processo di quantizzazione verranno rappresentate da $\hat{x_i^a}=\hat{1}x_i^a$. In questo modo il loro spettro è composto solo dalle posizioni delle brane. Inoltre, in questa configurazione, non c'è un termine lineare in τ, quindi c'è un momento netto nullo lungo queste coordinate. Nonostante ciò è sempre possibile definire

$$\sqrt{2\alpha}\alpha_0^a=\frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a),$$

infatti la definizione di α_0 non è in contraddizione con l'assenza del momento nelle direzioni a. Pertanto, possiamo scrivere:

$$M^2=2p^+p^- - p^ip^i - p^ap^a=2p^+p^- - p^ip^i=\frac{\alpha_0^a\alpha_0^a}{2\alpha}+\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^i\alpha_n^i+\alpha_{-n}^a\alpha_n^a\right]-1\right) \tag{5.34}$$

Lo spettro di M^2, dato da (5.34), è diverso da quello descritto da (5.27) per la presenza del primo termine. Infatti, possiamo esprimere questa relazione nel seguente modo

$$M^2=\left(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\alpha\pi}\right)^2+\frac{1}{\alpha}(N-1)$$

con

$$N=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}na_n^{i\dagger}a_n^i+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=p+1}^{d}ma_m^{a\dagger}a_m^a$$

Cosa rappresenta il nuovo termine? Il termine $T_0(\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a)$ corrisponde proprio all'energia di allungamento di una stringa con tensione intrinseca T_0 con estremi fissi a x_1^a e x_2^a! Infatti l'energia di allungamento, come quella di oscillazione, si trasforma in massa della stringa.
Lo stato fondamentale, descritto da $N_\lambda=0$, ha una massa pari a:

$$M^2=-\frac{1}{\alpha}+(\frac{\bar{x}_2^a-\bar{x}_1^a}{2\pi\alpha})^2$$

In questo caso M^2 può essere positiva, nulla o negativa a seconda della distanza delle due brane, ma rappresenta sempre una particella scalare. La grande novità introdotta dalle due brane è il processo di acquisizione di massa delle particelle.
Il secondo autovalore è $N_\lambda^\perp = 1$ a cui corrisponde una pari pari a:

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha}\right)^2$$

Poiché la stringa può oscillare nelle direzioni parallele e ortogonali alla brana, in questo caso esistono due gruppi distinti di stati possibili.
Il primo gruppo è rappresentato da stati definiti da $(a_1^a)^\dagger\,|p^+,\, p_T\rangle$. Ad essi corrispondono $d-p$ particelle scalari massive, poiché non c'è simmetria di Lorentz per queste componenti.
Il secondo gruppo è rappresentato da $(a_1^i)^\dagger\,|p^+, p_T\rangle$. Ad essi sono associati $p-1$ vettori di Lorentz massivi, dunque l'equazione di campo associata è l'equazione di Proca.
Questa equazione descrive particelle di spin 1 dotate di massa, e tale caratteristica fa si che queste particelle abbiamo $p-1$ componenti indipendenti e non $p-2$ come per i fotoni.

Capitolo 6

Quantizzazione della stringa chiusa

6.1 Hamiltoniana e commutatori

Per una stringa chiusa la soluzione generale dell'equazione del moto può essere scritta nel seguente modo:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma)$$

Se lo spazio è semplicemente connesso la funzione X^μ deve essere periodica rispetto al parametro $\sigma \in [0, 2\pi]$. Questa condizione è equivalente a una relazione di equivalenza tra i punti del world-sheet nella forma:

$$(\tau,\sigma) \sim (\tau, \sigma+2\pi) \longrightarrow X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+2\pi) \tag{6.1}$$

Usando la notazione

$$u = \tau+\sigma, \quad v = \tau - \sigma$$

possiamo scrivere la condizione di periodicità nel seguente modo:

$$X_L^\mu(u+2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) + X_R^\mu(v-2\pi) \tag{6.2}$$

Quindi, X_L e X_R sono dipendenti tra loro in modo tale che X^μ sia periodica, nonostante non ci sia bisogno che singolarmente siano periodiche. Dunque, la condizione (6.2) implica che le funzioni X_L, X_R abbiano derivata periodica rispetto ai rispettivi parametri u e v:

$$X_L^{\mu'}(u) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \tag{6.3}$$

$$X_R^{\mu'}(v) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv} \tag{6.4}$$

A questo punto, poiché le funzioni $X_L,\ X_R$ hanno relazioni simmetriche rispetto allo scambio di u e v indicherò solo una di esse. Integrando la relazione (6.4) possiamo scrivere:

$$X_R^\mu(v) = \frac{x_0^{R\mu}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\alpha_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-inv} \tag{6.5}$$

In questo caso possiamo vedere che esistono due momenti $\alpha_0^\mu,\ \bar{\alpha}_0^n$, ma la condizione (6.2) indica che

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}p^\mu, \tag{6.6}$$

dunque esiste solo un momento del "centro di massa".
Inoltre, indicando con $\frac{1}{2}(x_0^{R\mu} + x_0^{L\mu}) = x_0^\mu$, scriviamo la soluzione generale dell'equazione (3.13):

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma})e^{-in\tau}. \tag{6.7}$$

Possiamo vedere che l'unica variabile importante è x_0^μ, non $x_0^{R\mu}$ e $x_0^{L\mu}$ singolarmente.
Per quantizzare la stringa chiusa postuliamo le stesse regole di quantizzazione (5.2)-(5.5).
Infine, calcolando

$$\dot{X}^\mu + X^{\mu'} = 2X_L^{\mu'}(u) \tag{6.8}$$

$$\dot{X}^\mu - X^{\mu'} = 2X_R^{\mu'}(v) \tag{6.9}$$

possiamo vedere che le formule

$$\Big[(\dot{X}^l \pm X^{l'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^j \pm X^{j'})(\tau,\sigma^{'})\Big] = \pm 4\pi\alpha i\,\eta^{lj}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma^{'}) \tag{6.10}$$

$$\Big[(\dot{X}^l \pm X^{l'})(\tau,\sigma),\ (\dot{X}^j \mp X^{j'})(\tau,\sigma^{'})\Big] = 0 \tag{6.11}$$

descrivono due relazioni distinte tra loro per la presenza delle ampiezze $\alpha_n^l,\ \bar{\alpha}_n^l$. Infatti, sostituendo le relazioni (6.8) e (6.9), ricaviamo:

$$[\alpha_m^l, \alpha_n^j] = m\eta^{lj}\delta_{m+n,0} \tag{6.12}$$

$$[\bar{\alpha_m}^l, \bar{\alpha_n}^j] = m\eta^{lj}\delta_{m+n,0} \tag{6.13}$$

Mentre la relazione (6.11) ci restituisce:

$$[\alpha_m^l, \bar{\alpha_n}^j] = 0 \tag{6.14}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$[x_0^l, \alpha_0^j] = [x_0^l, \bar{\alpha}_0^j] = i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\eta^{lj} \longrightarrow [x_0^l, p^j] = i\eta^{lj}$$

6.2 Hamiltoniana e spettro di massa

Come abbiamo già visto per la stringa aperta, possiamo postulare l'Hamiltoniana per la stringa chiusa nel seguente modo:

$$H = \alpha p^+ p^- \tag{6.15}$$

Il fattore β, descritto nell'espressione (3.8), che differenzia l'equazione (5.6) e (6.15) deriva solo dal diverso dominio di σ che abbiamo deciso per la stringa chiusa: $\sigma \in [0, 2\pi]$.
Al fine di trovare lo spettro di M^2, riprendiamo i risultati già dimostrati (3.23)-(3.24). Infatti, in questo caso possiamo scrivere i seguenti vincoli:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^l \pm X^{l'})^2 \tag{6.16}$$

$$\sqrt{2\alpha}\bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+}\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{p^+}\sum_{p\in Z}\alpha_{n-p}^l\alpha_p^l \tag{6.17}$$

$$\sqrt{2\alpha}\alpha_n^- = \frac{2}{p^+}L_n^\perp \equiv \frac{1}{p^+}\sum_{p\in Z}\bar{\alpha}_{n-p}^l\bar{\alpha}_p^l \tag{6.18}$$

È fondamentale notare che le equazioni (6.17)-(6.18) calcolate per $n = 0$ restituiscono la seguente relazione:

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp \tag{6.19}$$

Questa relazione va sempre intesa come una relazione operatoriale. Quindi, nonostante le due diverse definizioni, i due operatori restituiscono lo stesso risultato quando sono applicati sugli stati fisici del sistema $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$. In formule: $L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle$
È fondamentale dire che la dimensione dello spazio-tempo e il coefficiente a per la teoria di stringa chiusa sono uguali a quelli ricavati per la stringa aperta (5.25)-(5.26). Non dovrebbe sorprenderci perché una stringa aperta può assumere una configurazione chiusa unendo i due estremi e viceversa.
Al fine di calcolare lo spettro di massa M^2 scriviamo le relazioni:

$$L_0^\perp = \frac{\alpha}{4}p^l p^l + N^\perp, \quad \bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha}{4}p^l p^l + \bar{N}^\perp$$

con

$$\bar{N}^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{a}_n^{l\dagger}\bar{a}_n^l, \quad N^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{l\dagger} a_n^l$$

Infine, dalle equazioni (6.17)-(6.19), possiamo scrivere

$$N^{\perp}|\lambda\rangle = \bar{N}^{\perp}|\lambda\rangle$$

$$\sqrt{2\alpha}\alpha_0^- = \frac{1}{p^+}(L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp} - 2) = \alpha p^-$$

Quindi, attraverso la relazione di mass-shell $M^2 + p^2 = 0$, possiamo ricavare:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha}(N^{\perp} + \bar{N}^{\perp} - 2) \tag{6.20}$$

$$H = \alpha p^+ p^- = L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp} - 2 \tag{6.21}$$

Inoltre, è importante notare che tutte le relazioni di commutazioni tra gli operatori di Virasoro (5.20)-(5.22) sono ancora valide, ma in aggiunta possiamo scrivere:

$$[L_m^{\perp}, \bar{\alpha}_n^j] = [\bar{L}_m^{\perp}, \alpha_n^j] = 0$$

$$[\bar{L}_m^{\perp}, x_0^l] = -i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\bar{\alpha}_m^l, \quad [L_m^{\perp}, x_0^l] = -i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\alpha_m^l$$

In questo caso gli operatori $L_m^{\perp}$ e $\bar{L}_m^{\perp}$ agiscono diversamente sulle coordinate del world-sheet

$$[L_m^{\perp}, X^l(\tau,\sigma)] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^l - X^{l'}), \quad [\bar{L}_m^{\perp}, X^l(\tau,\sigma)] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^l + X^{l'}),$$

infatti possiamo scrivere:

$$[L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp}, X^l] = -i\partial_\tau X^l, \quad [L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}, X^l] = -i\partial_\sigma X^l$$

Cerchiamo di capire cosa significano geometricamente e fisicamente queste equazioni. La prima equazione è chiara: genera l'evoluzione di X^l rispetto a τ, poiché rappresenta proprio l'Hamiltoniana del sistema.
La seconda equazione è molto interessante: essa genera una traslazione rigida lungo la stringa chiusa. Infatti:

$$X^l(\tau, \sigma + \epsilon) = X^l(\tau,\sigma) + [-i\epsilon(L_0^{\perp} + \bar{L}_0^{\perp}), X^l]$$

Ossia l'operatore $P = L_0^{\perp} - \bar{L}_0^{\perp}$ genera una traslazione rigida lungo la stringa chiusa, che si annulla se applicato a uno stato fisico della stringa (6.19). Infatti ogni stato di una stringa chiusa è invariante per traslazione rigida lungo la stringa e non c'è una funzione di gauge che fissi questo grado di libertà.
Quindi l'operatore P può essere visualizzato come un momento del world-sheet rispetto alla traslazione interna della stringa.

6.3 Oscillazioni e particelle: gravitone

Abbiamo già visto che la base dello spazio di Hilbert di una stringa chiusa è descritta da una composizione di operatori di creazione sugli stati fondamentali:

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{l=2}^{25}(a_n^l)^{\lambda_{n,l}}\right]\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{j=2}^{25}(\bar{a}_m^l)^{\bar{\lambda}_{m,j}}\right]|p^+, p_T\rangle$$

Chiaramente affinché lo stato sia fisico per la teoria deve soddisfare:

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp \Longleftrightarrow N^\perp = \bar{N}^\perp,$$

questa condizione è denominata condizione di level matching. Infine, possiamo scrivere lo spettro di massa per una stringa chiusa:

$$\frac{1}{2}\alpha M^2 = N^\perp + \bar{N}^\perp - 2$$

Il primo stato è descritto da $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$. In questo caso $M^2 = -\frac{4}{\alpha} < 0$ a cui corrisponde uno stato tachionico con M^2 minore rispetto al tachione descritto da una stringa aperta.
Lo stato successivo è descritto da $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$. Ciò indica che la massa di questa particella sia data da $M^2 = 0$. Per avere uno stato in cui entrambi gli operatori agiscono solo con un'oscillazione, l'unica combinazione possibile di stati è data da

$$|\psi\rangle = \sum_{l,j} R_{lj} a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle$$

In generale R_{lj} sono le componenti di una matrice quadrata di ordine $D-2$. Possiamo sempre scomporre la matrice in tre parti: una simmetrica senza traccia, una antisimmetrica e una parte di traccia. In questo modo possiamo scrivere:

$$R_{lj} = S_{lj} + A_{lj} + B\delta_{lj}$$

Quindi lo stato generico di prima oscillazione è descritto da:

$$\sum_{l,j} R_{lj} a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle = \underbrace{\sum_{l,j} S_{lj} a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle}_{Simmetrica} + \underbrace{\sum_{l,j} A_{lj} a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle}_{Antisimmetrica} + \underbrace{B a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle}_{Traccia}$$

Cosa rappresentano questi stati?
L'identificazione tra $a_1^{l\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, p_T}^{lj\dagger} |\Omega\rangle$, che sappiamo rappresenti lo stato quantistico di una perturbazione gravitazionale nella gauge di cono-luce, è sempre

possibile poiché hanno gli stessi indici Lorentz, hanno spin 2, portano i stessi momenti e hanno la stessa massa!
Il secondo stato è descritto dal campo di Kalb-Ramond, un campo tensoriale antisimmetrico che rappresenta una generalizzazione del campo elettromagnetico per una stringa, cioè questo campo si accoppia con la stringa analogamente a come il campo elettromagnetico fa con le particelle cariche. La trattazione di questo campo non sarà descritta in questa tesi. Mentre l'ultimo stato non ha indici liberi e ad esso è associato un campo scalare senza massa detto dilatone. Anche in questo caso la trattazione di questa particella non è descritta in questa tesi.

Capitolo 7

T-dualità

7.1 Dimensioni compatte

Come già accennato nel paragrafo di introduzione, una teoria con dimensione spazio-temporale maggiore di quattro deve essere compattificata in modo tale che il numero delle dimensioni estese sia quattro. Possiamo compattificare lo spazio in molti modi diversi e tale processo può generare tanti modelli fenomenologici differenti. In questa tesi limiteremo la nostra attenzione alla compattificazione toroidale.
Indichiamo la relazione di equivalenza che definisce la compattificazione toroidale nel seguente modo:

$$x \sim x + 2\pi R \tag{7.1}$$

Lo spazio dotato di questa relazione di equivalenza ha una topologia non banale e dunque non esiste un omeomorfismo tra tutte curve dello spazio!
Poiché in ogni punto $x \sim x + 2\pi Rn$, con $n \in \mathbb{Z}$, la condizione di periodicità imposta per le stringhe chiuse si scrive nel seguente modo:

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + (2\pi R)m, \quad m \in Z \tag{7.2}$$

Per notazione indichiamo con m il numero di giri attorno alla dimensione compatta, anche detto winding number, e con $\omega = mR/\alpha$ indichiamo l'avvolgimento, o winding.

7.2 T-dualità per stringhe chiuse

Per semplicità consideriamo solo una dimensione compatta. Dalle equazioni del moto con la condizione al bordo (7.2) possiamo scrivere la soluzione nel seguente modo:

$$X_L(u) = \frac{1}{2}x_0^L + \sqrt{\alpha/2}\bar{\alpha}_0 u + i\sqrt{\alpha/2}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_n}{n}e^{-inu} \tag{7.3}$$

$$X_L(u) = \frac{1}{2}x_0^R + \sqrt{\alpha/2}\alpha_0 u + i\sqrt{\alpha/2}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}e^{-inv} \tag{7.4}$$

$$\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = \sqrt{2\alpha}\omega \tag{7.5}$$

Possiamo vedere che α_0 e $\bar{\alpha}_0$ non sono uguali e la loro differenza deriva proprio dal numero di avvolgimenti della stringa attorno alla dimensione compatta. Inoltre, calcolando il momento p, possiamo scrivere le relazioni:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\bar{\alpha}_0 + \alpha_0) \tag{7.6}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0) \tag{7.7}$$

In aggiunta, è importante notare che possiamo sempre scrivere $x_0^L = x_0 + q_0,\ x_0^R = x_0 - q_0$, cioè come somma tra coordinata del centro di massa e coordinata relativa. Infine, scriviamo la soluzione generica dell'equazione del moto per la stringa chiusa:

$$X(\tau,\sigma) = x_0 + \alpha p\tau + \alpha\omega\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{e^{in\tau}}{n}\left(\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma}\right) \tag{7.8}$$

Il termine ω fa riferimento alla diversa topologia dello spazio e svolge lo stesso ruolo che $T_0(x_1 - x_2)$ aveva per una stringa aperta con estremi fissi su due brane. Dunque questo termine fa riferimento alla variazione di lunghezza della stringa attorno alla dimensione compattificata. In più si può notare che il termine q_0 non compare nell'equazione del moto.

7.3 Regole di quantizzazione

Per quantizzare la stringa chiusa in questa configurazione usiamo le regole di quantizzazione date da (5.2)-(5.5). Sostituendo le relazioni (7.6)-(7.7) possiamo scrivere:

$$[\alpha_m, \bar{\alpha}_m] = 0 \tag{7.9}$$

$$[p,\ \omega] = 0, \quad [x_0,\ p] = i, \quad [x_0,\ \omega] = 0 \tag{7.10}$$

In questo caso ω è un operatore e i suoi autovalori rappresentano i possibili avvolgimenti della stringa. È fondamentale notare che ogni operatore che compare nell'equazione (7.8) commuta con l'operatore ω.

Inoltre, se calcoliamo lo spettro del momento del centro di massa, vediamo che ha lo spettro di una particella puntiforme vincolata su un cerchio. Quindi l'operatore di traslazione calcolato in un punto x e $x + 2\pi$ deve restituire lo stesso valore, cioè non deve avere effetto sugli stati fisici del problema: $e^{-i2\pi R\hat{p}} |\psi\rangle = |\psi\rangle$:

$$p = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{7.11}$$

7.4 Spettro di massa

Seguendo la stessa dimostrazione per scrivere le (6.20) e (6.21) possiamo ricavare la seguente relazione:

$$L_0 - \bar{L}_0 = \alpha p\omega + N - \bar{N} \tag{7.12}$$

Quindi, in questo caso

$$(L_0 - \bar{L}_0) |\lambda\rangle = 0 \;\not\Longrightarrow\; (N - \bar{N}) |\lambda\rangle = 0$$

Infatti ricaviamo la seguente equazione:

$$(N - \bar{N}) |\lambda\rangle = nm |\lambda\rangle = \alpha p\omega |\lambda\rangle \tag{7.13}$$

Infine, scriviamo l'operatore M^2 nel seguente modo:

$$M^2 = 2p^+p^- - p^lp^l = \frac{1}{\alpha}(\alpha_0\alpha_0 + \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_0) + \frac{2}{\alpha}(N + \bar{N} - 2)$$

$$M^2 = p^2 + \omega^2 + \frac{2}{\alpha}(N + \bar{N} - 2) \tag{7.14}$$

Quindi la massa è influenzata dal momento lungo la direzione compatta e, come nel caso di una stringa aperta tra due brane, dall'allungamento, che in questo caso si scrive in termini di ω.
Non sarà mostrata una dimostrazione formale, ma è fondamentale notare che data la sostituzione

$$R \longleftrightarrow \frac{\alpha}{R} \iff p = \frac{n}{R} \longleftrightarrow \omega = \frac{mR}{\alpha} \tag{7.15}$$

tutti gli osservabili $\hat{O}$ del sistema studiato non cambiano

$$\hat{O} \equiv \hat{O}(p, \omega, A) = \hat{O}(\omega, p, A) \tag{7.16}$$

La relazione (7.15) sostituisce il raggio R con il raggio $\frac{\alpha}{R}$, quindi sostituisce il momento p con il winding ω. Dunque, poiché tutti gli osservabili non cambiano, esiste una T-dualità per la teoria di stringa chiusa. In questo caso c'è un'equivalenza tra un

sistema descritto da un raggio R, momento p e winding ω con un sistema descritto rispettivamente da raggio $\frac{\alpha}{R}$, momento ω e winding p. Per fare un esempio: se in uno spazio compatto di raggio R abbiamo un momento descritto da $n = 1$ e un numero di attorcigliamenti pari a $m = 9$, allora la rappresentazione duale è data da una teoria in uno spazio compatto di raggio α/R in cui il momento è definito da $n = 9$, quindi con maggiore velocità, e numero di avvolgimenti pari a $m = 1$, quindi con meno attorcigliamenti. Un esempio è dato dall'operatore $\hat{O} = \hat{M}^2$ definito dalla relazione (7.14).
Per trovare la rappresentazione duale consideriamo la seguente espressione:

$$\tilde{X}(\tau,\sigma) \equiv X_L(u) - X_R(v) = q_0 + \alpha\omega\tau + \alpha p\sigma + i\sqrt{\alpha/2}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{e^{in\tau}}{n}(\bar{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma}) \tag{7.17}$$

Questa coordinata si riferisce a una configurazione in cui ω è il momento della stringa attorno alla dimensione compatta, mentre p si riferisce all'avvolgimento e, come possiamo vedere svolgendo la sostituzione, rappresenta proprio la coordinata duale a (7.8).

7.5 T-dualità per stringhe aperte

In questo caso la T-Dualità per le stringhe chiuse ci guiderà per trovare la corrispondenza tra due configurazioni di stringa aperta. Consideriamo il moto di stringa aperta con condizione al bordo di Neumann e dividiamo la soluzione in componenti Left e Right

$$X(\tau,\sigma) = X_L(u) + X_R(v),$$

con

$$X_L = \frac{1}{2}(x_0 + q_0) + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\alpha_0(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{-in\sigma}$$

$$X_R = \frac{1}{2}(x_0 - q_0) + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{in\sigma}$$

Ispirati dalla T-Dualità per le stringhe chiuse definiamo:

$$X(\tau,\sigma) = X_L + X_R = x_0 + +\sqrt{2\alpha}\alpha_0\tau + i\sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}cos(n\sigma) \tag{7.18}$$

$$\tilde{X}(\tau,\sigma) = X_L - X_R = q_0 + \sqrt{2\alpha}\alpha_0\sigma + \sqrt{2\alpha}\sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}sin(n\sigma) \tag{7.19}$$

La prima espressione rappresenta una stringa con con estremi liberi, mentre la seconda espressione rappresenta un sistema con condizioni di Dirichlet attorno alla direzione compatta.
In questo caso le coordinate DD hanno gli estremi fissati a distanza:

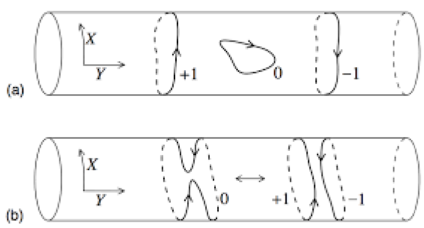
$$\tilde{X}(\tau,\pi) - \tilde{X}(\tau,0) = \sqrt{2\alpha}\alpha_0\pi = 2\pi\alpha p = 2\pi\alpha/Rn = 2\pi\tilde{R}n \tag{7.20}$$

Poiché, senza perdere generalità, abbiamo considerato una sola dimensione compatta, si ha un'infinità numerabile di D24-brane distanziate uniformemente attorno alla direzione compatta di raggio α/R.
Senza svolgere la dimostrazione relativa per la stringa aperta, si può dimostrare che esiste una T-dualità tra queste due configurazioni. In questo caso, il sistema descritto da condizioni NN e raggio R è T-duale a un sistema in cui la stringa ha condizioni DD lungo la stessa direzione, ma con raggio di compattificazione α/R. Anche in questo caso il numero di avvolgimenti è tanto maggiore quanto maggiore è il momento nell'altra rappresentazione e viceversa, ma ora la dualità è mediata da un'infinità di brane equamente distanziate. Infatti, la T-dualità fa sì che le condizioni al bordo si scambino, ossia possiamo scrivere:

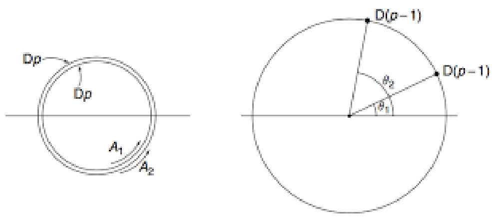
$$\partial_\sigma X(\tau,\sigma^*) = \partial_\tau \tilde{X}(\tau,\sigma^*)$$

$$\partial_\tau X(\tau,\sigma^*) = \partial_\sigma \tilde{X}(\tau,\sigma^*)$$

Per brevità non verranno calcolati altri osservabili, ma anche in questo caso l'energia del momento si trasforma in energia di allungamento della stringa aperta attorno a due brane.



(a) Winding number



(b) T-Dualità per stringhe aperte

Capitolo 8

Conclusioni

In questo lavoro, partendo dall'azione di una stringa relativistica libera e dalle usuali regole di quantizzazione canonica, è stato possibile quantizzare una stringa relativistica. I risultati ottenuti sono molteplici: ad esempio, abbiamo visto come la teoria delle stringhe bosoniche abbia bisogno di 26 dimensioni affinché la sua quantizzazione sia consistente con le simmetrie relativistiche. In seguito abbiamo calcolato lo spettro di una stringa aperta e chiusa. Per una stringa aperta, per esempio, abbiamo visto che la prima oscillazione rappresenta un fotone, mentre per una stringa chiusa rappresenta un insieme di tre particelle a massa nulla, di cui una è il gravitone. Questi risultati sono sorprendenti, poiché non si è mai imposto nessuna condizione di invarianza di gauge elettromagnetica o gravitazionale. D'altra parte, una delle oscillazioni, sia per la stringa aperta che per la stringa chiusa, descrive un tachione; questo stato rappresenta un'instabilità della teoria, poiché $M^2 < 0, \beta = \frac{v}{c} > 1$ e suggerisce che lo spazio di Minkowski sia una soluzione instabile. Inoltre, un altro problema che deriva dalla teoria è il fatto che le equazioni associate a ciascuna oscillazione prevedono solo stati con spin intero. Questo risultato è chiaramente incompleto, poiché tutta la materia conosciuta è formata da particelle con spin semi-intero, anche detti fermioni. Una possibile soluzione a questi problemi è la super-simmetria. Essa è una simmetria tra due classi di particelle: bosoni e fermioni. In una teoria super-simmetrica ogni particella di una classe possiede una controparte nell'altra classe, nota come super-partner, con spin semi-intero. Nella teoria delle superstringhe le dimensioni spazio-temporali necessarie sono 10; inoltre, in questa teoria, non sono presenti tachioni. Questa teoria, quindi, risolve due problemi relativi alla teoria delle stringhe bosoniche. Il framework della teoria delle stringhe ha permesso inoltre negli anni di decidere importanti proprietà di teorie di gravità quantistica. Oltre alla T-dualità, che abbiamo studiato in questo lavoro di tesi, forse la dualità più importante che la teoria delle stringhe ha svelato è la corrispondenza AdS/CFT o Anti-de Sitter/Conformal Field Theory. Essa connette particolari teorie quantistiche di campo (CFT) in N dimensioni con teorie di gravità su uno spazio Anti-de Sitter in $N+1$ dimensioni. Questa dualità permette un nuova visione dei classici problemi di relatività generale. Infatti, se essa è equivalente a una QFT, allora nessuna delle due è più fondamentale e profonda dell'altra. Inoltre, tutta una classe di problemi possono essere tradotti in un linguaggio diverso, che può rendere la soluzione più semplice. Ad esempio, le proprietà della materia, descritte nel linguaggio della teoria dei campi, potrebbero essere calcolate usando una teoria gravitazionale equivalente, oppure una teoria di gravità quantistica consistente può essere descritta attraverso le proprietà non perturbative di una teoria di campo quantistica.

Appendice A

Correnti e cariche sul world-sheet

Cariche e correnti conservate

Consideriamo l'azione generica di un campo ϕ con densità di lagrangiana $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$:

$$S[\phi] = \int d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$$

con $\partial_\alpha \phi^a = \frac{\partial \phi^a}{\partial \xi^\alpha}$ e k numero di dimensioni spaziali.
Consideriamo una variazione infinitesima del campo

$$\phi^a(\xi) \longrightarrow \phi^a(\xi) + \delta\phi^a(\xi)$$

e scriviamo la variazione come combinazione lineare di funzioni h_i^α:

$$\delta\phi^a = \epsilon^i h_i^a(\phi)$$

con ϵ_i un set di costanti infinitesime. Se la densità di lagrangiana è invariante per trasformazioni di simmetria, allora le quantità j_i^α definite da

$$\epsilon^i j_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \delta\phi^a$$

sono, per il teorema di Noether, correnti conservate:

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0$$

Nota che, in questo caso, l'indice i indica quante correnti sono conservate e le componenti della corrente sono tante quante il numero di dimensioni dello spazio-tempo in cui ci troviamo!

La carica è data dall'integrale rispetto alle variabili spaziali della componente 0-esima della corrente:

$$Q_i = \int d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k j_i^0, \quad \frac{dQ_i}{d\xi^0} = 0$$

nell'ipotesi che le correnti svaniscano rapidamente all'infinito. Ad esempio l'azione di Nambu-Goto è definta solo dalle derivate di X^μ, dunque la corrente conservata è la densità di momento e il teorema di Noether ci indica le equazioni del moto.

Correnti conservate sul world-sheet

Nel caso in cui l'azione rappresenti l'azione di Nambu-Goto allora:

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu), \quad con \;\; (\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma)$$

Poiché la densità di Lagrangiana è in funzione solo delle derivate delle coordinate, sarà invariante per traslazioni di coordinate spazio-temporali:

$$\delta X^\mu(\mu, \tau) = \epsilon^\mu$$

Allora le correnti conservate sono date da:

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} = P_\mu^\alpha$$

Dunque, l'equazione di conservazione della corrente per le traslazioni ci restituisce proprio l'equazione del moto e P_μ^α è la densità di momento.
La carica associata, che in questo caso è il momento, è data da:

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} P_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma$$

Infatti:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -[P_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1}$$

Per una stringa chiusa o per una stringa aperta con estremi liberi, la carica si conserva, mentre per le condizioni di Dirichlet non si conserva, per questo in futuro si considererà il sistema stringa e brana che avranno complessivamente momento conservato.
In generale il momento si può definire non solo lungo linee di τ costanti, ma più in generale su una qualsiasi curva. In effetti si può dimostrare che il momento è indipendente dalla curva scelta se hanno estremi al bordo del world-sheet.

Simmetria di Lorentz

Per costruzione l'azione di Nambu-Goto è un invariante di Lorentz. Un problema sostanziale sorge quando cerchiamo di quantizzare la teoria di una stringa relativistica quando usiamo la gauge di cono-luce. Non è assolutamente detto che il sistema quantizzato sia invariante per trasformazioni di Lorentz poiché non è manifestamente covariante. Sappiamo che in generale una trasformazione di Lorentz è una trasformazione lineare delle coordinate spazio-temporali che lascia la metrica invariata:

$$\delta X^\mu = A^{\mu\nu} X_\nu$$

Sappiamo che affinché la trasformazione

$$X^\mu \longrightarrow X^\mu + \delta X^\mu$$

lasci la metrica invariata la matrice dei coefficienti deve essere antisimmetrica:

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$$

In questo caso i gradi di libertà della corrente sono di più, poiché la trasformazione di simmetria è rappresentata da una matrice:

$$A^{\mu\nu} j^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = P^\alpha_\mu A^{\mu\nu} X_\nu$$

Inoltre poiché la matrice è antisimmetrica possiamo scrivere la relazione procedente in questo modo:

$$A^{\mu\nu} j^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} A^{\mu\nu} (X_\mu P^\alpha_\nu - X_\nu P^\alpha_\mu)$$

Quindi, a meno di una costante moltiplicativa che non influisce nell'equazione di campo, possiamo definire la corrente come:

$$j^\alpha_{\mu\nu} = \mathcal{M}^\alpha_{\mu\nu} = X_\mu P^\alpha_\nu - X_\nu P^\alpha_\mu$$

$$\partial_\sigma \mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} + \partial_\tau \mathcal{M}^\tau_{\mu\nu} = 0$$

e la carica associata, in analogia al momento, possiamo scriverla nel seguente modo

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}^\tau_{\mu\nu} d\sigma - \mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} d\tau)$$

e dunque lungo le linee di τ costante:

$$M_{\mu\nu} = \int_\beta \mathcal{M}^\tau_{\mu\nu} d\sigma = \int_\beta (X_\mu P^\tau_\nu - X_\nu P^\tau_\mu) d\sigma$$

Infine possiamo dire che la carica di Lorentz è un tensore di ordine D e antisimmetrico con $n(D) = D(D-1)/2$ cariche indipendenti. Se denotiamo con i e j gli indici spaziali, già sappiamo che M_{0i} rappresentano le cariche associate ai boosts, mentre le M_{ij} sono le cariche associate alle rotazioni.

Bibliografia

[1] Barton Zwiebach (2009), *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press.

[2] David Tong (2012) *Lectures on String Theory*

[3] Joseph Polchinski (2005), *String Theory, Vol 1: An Introduction to the Bosonic String*

[4] Steven Weinberg (2005), *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press.

[5] David Tong (2007) *Lectures on Quantum Field Theory*