Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**

*Laurea triennale in Fisica*

# Misure di precisione gravitazionali tramite giroscopi di Sagnac

**Relatori:**
Prof. Salvatore Capozziello
Prof. Alberto Porzio

Salvatore Capozziello

**Candidato:**
Francesco Giovinetti
Matricola N85001327

A.A. 2020/2021

# Indice

# Introduzione

La Teoria della Relatività Generale (RG), pubblicata per la prima volta da Einstein nel 1916 negli *Annalen der Physik*, è considerata uno dei capisaldi della Fisica moderna.

La Relatività Generale è ad oggi, non solo la teoria che meglio descrive l'interazione gravitazionale, ma è anche una tra le teorie più eleganti a livello formale.

Già nella Teoria della Relatività Ristretta o Speciale (RS), spazio e tempo erano considerati non più come entità fisiche assolute e separate, ma come due aspetti parziali di una nuova struttura geometrica detta *spaziotempo,* la cui descrizione dipende dall'osservatore considerato. Lo spazio e il tempo perdono lo status di entità assolute che avevano nella Meccanica Newtoniana e al loro posto la velocità della luce, assunta come una costante sul cui valore tutti gli osservatori concordano, acquisisce una posizione privilegiata.

La RG porta avanti le idee della RS e le estende descrivendo spazio, tempo e gravità sotto lo stesso standard geometrico. Lo spaziotempo viene visto come una struttura geometrica in evoluzione formalmente descritta come una varietà differenziabile, la quale è soluzione di equazioni di campo per una distribuzione di materia assegnata. In questo contesto la gravità è considerata non più come un'interazione a distanza istantanea, ma come un effetto della curvatura dello spaziotempo generata dalla presenza di materia e/o energia.

Le sue straordinarie capacità predittive su scale astrofisiche e locali hanno reso la RG una delle teorie con più largo consenso nella storia della Fisica. Le prime previsioni della RG sono state la "anomala" precessione al perielio di Mercurio, il redshift gravitazionale e la deflessione della luce. Ma la Relatività Generale, a distanza di più di un secolo dalla sua prima formulazione, continua a ricevere prove a suo sostegno. Basti pensare alle recenti conferme dell'esistenza delle onde gravitazionali e dei buchi neri (si veda ad esempio [1, 2, 3]). Inoltre il corretto funzionamento della tecnologia GPS è esso stesso una prova quotidiana della validità della Relatività Generale su scale locali (si veda [4], Capitolo 6).

Nonostante le innumerevoli prove a sostegno della RG, essa non fornisce una descrizione soddisfacente della Natura sulle scale dell'ultravioletto e dell'infrarosso.

Ad esempio, la RG su scale ultraviolette non può essere trattata sotto lo stesso standard della Teoria Quantistica dei Campi, altro caposaldo della Fisica moderna. Il cosiddetto *problema della quantizzazione della gravità* nasce dal fatto che, nella costruzione delle teorie quantistiche dei campi non gravitazionali, si utilizza una struttura metrica spaziotemporale fissa. Tale struttura viene quantizzata e, *su di essa,* si va a quantizzare il campo dell'interazione considerata. Ma la RG prevede che lo spaziotempo sia esso stesso una struttura dinamica, quindi manca una geometria di *background* su cui andare a quantizzare la gravità.

Dal punto di vista della Cosmologia, la RG ha dato vita al cosiddetto Modello Cosmologico Standard, il quale spiega in maniera soddisfacente gran parte dell'evoluzione dell'Universo su larga scala. Purtroppo la teoria fallisce nell'interpretare i recenti dati sperimentali, i quali suggeriscono un'espansione accelerata dell'Universo in epoche recenti. Allo stesso modo, la RG non fornisce una spiegazione soddisfacente delle anomalie osservate nelle velocità di rotazione di stelle e gas attorno ai centri galattici.

Allo stato attuale i due fenomeni vengono spiegati rispettivamente attraverso l'introduzione delle cosiddette *energia* e *materia oscura* (*dark energy* e *dark matter*), la cui esistenza attualmente sarebbe rivelabile unicamente a partire dai loro effetti gravitazionali.

Queste e altre problematiche hanno portato allo sviluppo di una serie di teorie della gravitazione volte a migliorare o sostituire la RG come teoria geometrica della gravità e dello spaziotempo [5]. Esse si dividono in due categorie principali.

Le *Teorie Estese della Gravitazione* sono quelle teorie che intervengono sull'originale formulazione della RG modificando la forma della lagrangiana da cui discendono le equazioni di campo, ad esempio includendo invarianti di ordine superiore.

Le *Teorie Alternative della Gravitazione*, invece, rilassano alcune delle assunzioni di base della RG, come la validità universale del Principio di Equivalenza o l'ipotesi di torsione nulla per le connessioni.

Entrambi i tipi di teorie devono rispettare alcuni criteri affinché possano essere considerate valide, tra cui riprodurre o generalizzare i risultati newtoniani nel regime di campo debole.

Ad oggi sono state sviluppate diverse teorie che potrebbero andare ad ampliare o sostituire la Relatività Generale. Al fine di testarne il potere predittivo, risulta necessario mettere a punto esperimenti sempre più precisi.

Vogliamo focalizzare la nostra attenzione su quegli esperimenti che ricercano particolari effetti gravitazionali collegati alle rotazioni e che possono essere rivelati anche in regime di campo debole: l'*effetto Lense-Thirring* (LT) e l'*effetto geodetico*.

Entrambi gli effetti consistono nella precessione del momento angolare di giroscopi (rispetto al sistema di riferimento delle stelle fisse) dovuta agli effetti di curvatura dello spaziotempo. Mentre l'effetto di precessione geodetica è dovuto alla sola presenza di campo gravitazionale, l'effetto LT si riscontra solo nel caso in cui la sorgente abbia momento angolare non nullo. Tali effetti sono anche detti *gravitoelettromagnetici*, in quanto possono essere considerati l'analogo gravitazionale di fenomeni peculiari dell'elettromagnetismo classico, come la precessione di Larmor.

Differenti teorie della gravitazione conducono a formulazioni matematiche differenti per le velocità angolari di precessione. Pertanto, in linea di principio, si può considerare il limite di campo debole di tali teorie e ricavare l'espressione degli effetti gravitoelettromagnetici, per poi confrontarne l'accordo con i risultati sperimentali.

In passato sono stati eseguiti una serie di esperimenti *space-based* volti ad indagare gli effetti sopracitati e in particolare l'effetto LT. Tra questi esperimenti citiamo LARES [6] e Gravity Probe B (GP-B) [7, 8, 9]. In particolare, GP-B prevedeva la misurazione di piccole variazioni nelle direzioni degli spin di quattro giroscopi contenuti in un satellite in orbita direttamente sopra i poli.

Solo di recente è stata dimostrata la possibilità di poter realizzare esperimenti a terra in grado di verificare la validità delle teorie estese/alternative della gravitazione.

Tra questi, GINGER (Gyroscopes IN GEneral Relativity) è un esperimento (allo stato attuale in fase di approvazione) che prevede l'utilizzo di più giroscopi laser tra loro indipendenti al fine di studiare, principalmente, l'effetto LT [10, 11].

Il meccanismo alla base della rivelazione è il cosiddetto *effetto Sagnac*, che prevede uno shift in frequenza per fasci laser contropropaganti in un interferometro rotante [12, 13]. L'idea alla base di GINGER è che lo shift in frequenza rivelato dall'interferometro, sarà dovuto non solo alla semplice rotazione terrestre, ma anche agli effetti di "rotazione" aggiuntivi dovuti al campo gravitoelettromagnetico terrestre.

Sebbene la possibilità di eseguire esperimenti a terra porti dei vantaggi, allo stesso tempo impone una sensibilità della strumentazione molto elevata: nel riferimento dell'interferometro il contributo previsto dell'effetto LT allo shift in frequenza complessivo è di circa una parte per miliardo. Inoltre la strumentazione deve confrontarsi anche con diverse fonti di errore, tra cui il rumore del laser, l'allineamento e la deformazione degli specchi ecc.

L'esperimento GINGER, che sarà allestito nel Laboratorio Nazionale del Gran Sasso, mira a raggiungere una sensibilità di qualche ordine al di sotto della soglia di rivelazione dell'effetto LT della RG, sufficiente anche a limitare i valori dei parametri di alcune Teorie Estese [14, 15, 16].

La presente tesi è strutturata in tre capitoli:

1. Nel primo capitolo presenteremo gli effetti Lense-Thirring e geodetico nel formalismo gravitoelettromagnetico. Gli effetti verranno illustrati principalmente nell'ambito della RG, ma si accennerà anche al loro ruolo nella formulazione PPN delle Teorie Estese.

2. Nel secondo capitolo presenteremo il meccanismo alla base del funzionamento dei moderni giroscopi laser (l'*effetto Sagnac*) e mostreremo come questi possano essere impiegati anche per la rivelazione di effetti gravitazionali.

3. Nell'ultimo capitolo descriveremo l'apparato strumentale dell'esperimento GINGER e illustreremo la procedura di analisi del segnale in uscita per un giroscopio laser.

# Notazione

Salvo dove specificamente indicato il contrario, useremo la seguente notazione:

- Adotteremo la convenzione (+,-,-,-) per la segnatura della metrica spaziotemporale.
- Gli indici tensoriali quadrimensionali vengono indicati con lettere greche $\alpha, \beta, \delta$...
- Gli indici tensoriali tridimensionali vengono indicati con lettere latine $i, j, k$...

# Capitolo 1

# Effetti Lense-Thirring e geodetico

Il nostro scopo è quello di presentare alcuni effetti gravitazionali riconducibili a delle rotazioni e che possono essere investigati a terra tramite l'impiego di giroscopi laser sufficientemente precisi.

Ci concentreremo in particolare sull'effetto geodetico e sull'effetto Lense-Thirring. Presenteremo i due fenomeni nell'approssimazione gravitoelettromagnetica, prima nel framework della Relatività Generale, poi nel contesto delle Teorie Estese/Alternative della Gravitazione.

## 1.1 Gravitoelettromagnetismo

Con il termine Gravitoelettromagnetismo (GEM) ci si riferisce a una serie di analogie formali tra le equazioni del campo elettromagnetico di Maxwell e le equazioni di campo di Einstein nel *limite Post-Newtoniano* (PN), anche detto limite di campo debole e basse velocità. Più specificamente, in questa approssimazione le grandezze di interesse da cui dipendono i coefficienti della metrica (come il potenziale Newtoniano, le velocità, la densità di materia ecc.) sono considerate quantità piccole rispetto alle scale di grandezza caratteristiche del Sistema Solare ($\Phi/c^2, v^2/c^2 \lesssim 10^{-6}$). Pertanto questa approssimazione descrive bene il campo gravitazionale nei pressi della Terra[1].

Ci limiteremo a mostrare l'analogia formale tra le due teorie nel caso di campo gravitazionale debole generato da un sistema lentamente rotante e per il quale possono essere trascurati gli effetti autogravitazionali.

Partiamo dalla teoria delle perturbazioni su spaziotempo piatto. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ può essere scritto nella seguente forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico dello spazio di Minkowski e $h_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico tale per cui $|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$. Stiamo quindi costruendo uno spaziotempo piatto di background sul quale si propaga una piccola perturbazione $h_{\mu\nu}$.

Vogliamo scrivere le equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

trascurando le grandezze di ordine superiore al primo nella perturbazione $h_{\mu\nu}$ e nelle sue derivate.

Definiamo la *trace-reverse amplitude* come:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{1.3}$$

dove $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ è la traccia della perturbazione $h_{\mu\nu}$ [2]. Si ha che $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h$.

[1] La descrizione nel limite PN del Sistema Solare risulta essere in generale valida, tranne che in casi particolari. Ad esempio, essa non descrive bene il Sistema Solare tutte le volte in cui esso non possa essere considerato un "sistema chiuso", ovvero quando è necessario introdurre effetti dovuti all'influenza di sorgenti distanti (es. onde gravitazionali da oggetti distanti).

[2] Poiché stiamo trascurando termini di ordine superiore al primo in $h_{\mu\nu}$, gli indici della perturbazione vengono sollevati (abbassati) tramite l'azione del tensore $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$ ).

Si può far vedere che la metrica (1.1) non fissa completamente il riferimento spaziotemporale ed è possibile imporre la seguente condizione di *gauge trasversa o di Lorenz*:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{1.4}$$

In questa gauge le equazioni di Einstein (1.2) si riscrivono come:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

La soluzione generale della (1.5) ha la forma di un potenziale ritardato analoga al caso dei potenziali elettromagnetici:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G_N}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}\left(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{1.6}$$

Nelle ipotesi fattesi può dimostrare (si veda [17], Capitolo 19) che la metrica, molto lontano dalla sorgente rotante, si può scrivere come:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{4G_N}{c^3} \epsilon_{jkl} \frac{J^k x^l}{r^3} dx^j cdt - \left(1 + \frac{2MG_N}{c^2 r}\right) \delta_{jk} dx^j dx^k \tag{1.7}$$

dove $M$ è la massa totale della sorgente gravitazionale e $\mathbf{J} = (J^k)$ è il suo momento angolare intrinseco.

La (1.7) prende il nome di *metrica di Lense-Thirring* ed è l'approssimazione di campo debole della *metrica di Kerr*, soluzione esatta delle equazioni di Einstein nel caso di sorgente (non carica) rotante attorno un suo asse di simmetria. Osserviamo che per $\mathbf{J} = 0$, la (1.7) si riduce alla *metrica di Schwartzschild*.

La (1.7) può essere riscritta in maniera equivalente come:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + 4\frac{\mathbf{A}}{c^2} \cdot d\mathbf{r} cdt - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \delta_{jk} dx^j dx^k \tag{1.8}$$

dove:

$$\Phi = -\frac{G_N M}{r} \tag{1.9}$$

è il *potenziale gravitazionale Newtoniano*, mentre la seguente grandezza:

$$\mathbf{A} = \frac{G_N}{c} \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{r})}{r^3} \tag{1.10}$$

è detta *potenziale vettore*.

La perturbazione assume quindi la forma[3]:

$$h_{\mu\nu} = \frac{2}{c^2} \begin{pmatrix} \Phi & A_j \\ A_j & \Phi \delta_{jk} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Per $\nu = 0$ la (1.7) si riduce a:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right) = 0 \tag{1.12}$$

che è l'analogo gravitazionale della *condizione di Lorenz* in elettromagnetismo (a meno di un fattore 1/2).

Definiamo allora i cosiddetti *campi gravitoelettromagnetici:*

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right) \tag{1.13}$$

[3] Osserviamo che nel caso da noi trattato la perturbazione ha termini diagonali identici tra loro, ma ciò non è sempre vero. In generale, il "buon" potenziale gravitoelettrico si ottiene a partire dal termine tempo-tempo della metrica.

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right) \tag{1.14}$$

Vediamo che le espressioni dei campi GEM coincidono con quelle dei loro analoghi elettromagnetici (in unità gaussiane) a meno di un fattore moltiplicativo nella definizione del potenziale vettore. Osserviamo che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ hanno le stesse dimensioni fisiche.

Per come sono stati definiti i campi GEM, si ha:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Nell'ipotesi semplificativa che la sorgente di campo gravitazionale sia costituita da materia incoerente (polvere), il tensore stress-energia assume la forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 u^\mu u^\nu \tag{1.15}$$

dove $\rho$ è la densità propria di energia, $u^\nu$ è la quadrivelocità. Poiché abbiamo assunto sorgente non relativistica, vale $u^\nu \simeq (1, \mathbf{v}/c)$.

In queste ipotesi le equazioni (1.5) assumono la forma:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -4\pi G_N \rho,\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi G_N}{c}\mathbf{j}$$

dove $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ è la densità di corrente di materia.

Riassumendo, le equazioni GEM, l'analogo gravitazionale delle equazioni di Maxwell, sono:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -4\pi G_N \rho \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi G_N}{c}\mathbf{j} \tag{1.19}$$

Per completare l'analogia con l'elettromagnetismo classico, bisogna ricavare anche un analogo gravitazionale della *forza di Lorentz*. Nel caso semplice in cui $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ (rotazione uniforme) e all'ordine più basso nelle velocità, essa si esprime come:

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{E} - 4m\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \tag{1.20}$$

Rispetto al caso EM, la formula (1.20), oltre a presentare un cambio di segno, manifesta fattori moltiplicativi differenti per quanto riguarda le componenti elettriche e magnetiche[4].

Tali differenze si interpretano riscrivendo la formula nel seguente modo:

$$\mathbf{F} = q_E\mathbf{E} + 2q_B\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \tag{1.21}$$

dove $q_E$ e $q_B$ rappresentano rispettivamente la carica gravitoelettrica e la carica gravitomagnetica della carica di prova, con $q_B = 2q_E = -2m$. L'ulteriore fattore 2 nella formula deriva dalla scelta fatta per la definizione di $\mathbf{B}$ in termini di $\mathbf{A}$[5].

Per preservare il carattere attrattivo dell'interazione gravitazionale, le cariche gravitoelettriche e gravitomagnetiche della sorgente devono essere considerate positive.

[4]Ciò è dovuto alle differenti proprietà spinoriali del campo elettromagnetico e gravitazionale.

[5]L'ulteriore fattore 2 comporta che, a livello puramente formale, la componente gravitomagnetica della forza di Lorentz è il doppio rispetto al caso EM. Ciò comporta anche una differente espressione del momento torcente gravitomagnetico, di cui si deve tener conto nella derivazione della precessione di Larmor gravitazionale a partire dalla forza gravitomagnetica.

## 1.2 Effetto Lense-Thirring

Abbiamo quindi mostrato, in un caso semplice, che nel limite di campi deboli le equazioni di Einstein si riducono a una forma particolare, analoga alle equazioni che governano il campo elettromagnetico.

Ci aspettiamo quindi di trovare, nel regime di validità dell'approssimazione GEM, fenomeni previsti dall'elettromagnetismo classico. In particolare si ritrova un analogo gravitazionale della *precessione di Larmor.*

Consideriamo una carica elettrica di prova $q_B$ in posizione fissata, dotata di momento angolare intrinseco $\mathbf{S}$, massa $m$ e immersa in una campo magnetico $\mathbf{B}$ costante. L'elettromagnetismo classico prevede in questo caso una precessione del momento intrinseco $\mathbf{S}$ attorno alla direzione del campo magnetico con vettore velocità angolare $\boldsymbol{\Omega} = -\frac{g_S q_B}{2mc}\mathbf{B}$, dove $g_S$ è il fattore giromagnetico.

Consideriamo adesso un giroscopio con momento angolare intrinseco $\mathbf{S}$ e massa $m$ a riposo nel campo gravitazionale generato da una sorgente debolmente rotante[6]. Supponiamo inoltre che le forze (non gravitazionali) che mantengono il giroscopio in posizione fissata rispetto alla posizione della sorgente, siano applicate nel suo centro di massa, così che nel sistema di riferimento proprio del giroscopio non vi sia momento torcente.

Tale giroscopio può essere considerato l'analogo gravitazionale del dipolo magnetico descritto in precedenza. Pertanto, seguendo l'approccio GEM e tenendo conto della differente espressione della forza di Lorentz nel caso gravitazionale, avremo:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S} \tag{1.22}$$

dove $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare di precessione rispetto alla base locale del riferimento comovente; l'espressione di $\boldsymbol{\Omega}$ è:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{G_N}{c^2 r^3}\left[-\mathbf{J} + 3\frac{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^2}\right] \tag{1.23}$$

La formula (1.23) coincide con il suo analogo EM nel caso in cui $q_B = -2m$ e $g_S = 1$.

La (1.23) rappresenta la velocità angolare di precessione rispetto alla terna di assi della base locale Tale terna è a sua volta "ancorata" a un sistema inerziale ideale a distanza infinita, il cosiddetto sistema di riferimento delle *stelle fisse*; pertanto la precessione giroscopica è rispetto a quest'ultimo sistema.

L'effetto appena illustrato prende il nome di *effetto Lense-Thirring* (LT) e può essere interpretato nel modo descritto di seguito.

Il giroscopio, a cui non è applicato alcun momento torcente nel suo sistema di riferimento proprio, è rotazionalmente a riposo rispetto ai sistemi di riferimento inerziali nelle sue vicinanze. Tali sistemi di riferimento, e il giroscopio con essi, ruotano a velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ per effetto di "trascinamento" dovuto alla rotazione della sorgente. Per tale motivo l'effetto LT è spesso chiamato anche *effetto di frame-dragging.*

Si osservi che il verso di precessione dipende dalla posizione relativa del giroscopio rispetto alla sorgente.

Per un giroscopio che si trovi lungo l'asse di rotazione ($\mathbf{J}\cdot\mathbf{r} = Jr$) si ha: $\boldsymbol{\Omega} = 2\frac{G_N}{c^2 r^3}\mathbf{J}$; quindi il verso di precessione è concorde con il verso di rotazione della sorgente.

Se invece valutiamo la (1.23) nel piano equatoriale ($\mathbf{J}\cdot\mathbf{r} = 0$): $\boldsymbol{\Omega} = -\frac{G_N}{c^2 r^3}\mathbf{J}$ e i sistemi inerziali locali ruotano in verso opposto a quello della sorgente.

Per visualizzare meglio l'effetto LT, immaginiamo di immergere all'interno di un fluido viscoso una sfera rotante e dei bastoncini (Figura 1.2).

I bastoncini che si trovano nei pressi dei poli ruoteranno, trascinati dalla corrente, nella stessa direzione della sfera. Per quanto riguarda i bastoncini all'equatore, il verso di rotazione è opposto: seppure entrambe le estremità dei bastoncini siano trascinate nella stessa direzione, l'estremità più vicina alla sorgente è quella che viene trascinata più rapidamente. Ciò è dovuto al fatto che la forza della corrente decresce all'aumentare della distanza dalla sfera.

[6]Per il momento, supponiamo che il giroscopio in questione sia di tipo meccanico. Questa semplificazione consente di visualizzare più facilmente l'effetto LT, ma nel seguito mostreremo che gli effetti gravitolelettromagnetici influenzano anche dispositivi ottici come i giroscopi laser.

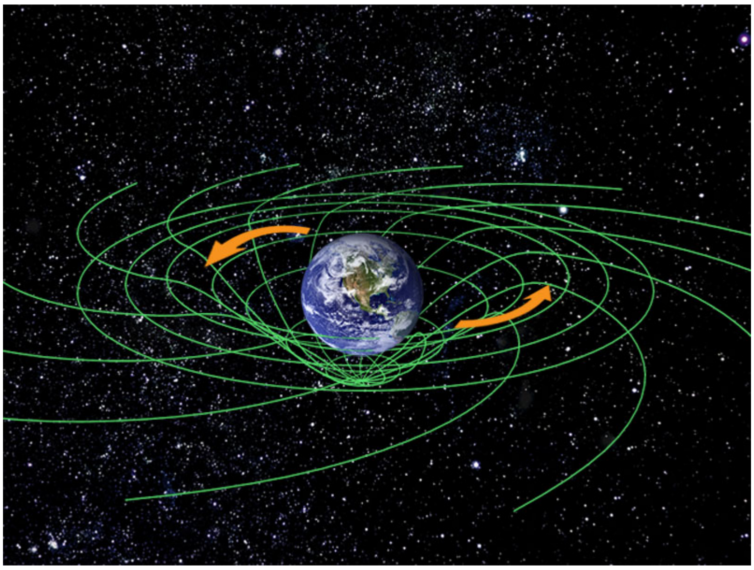


Figura 1.1: Illustrazione dell'effetto di frame-dragging attorno a un corpo massiccio. Immagine reperibile al link bodyhttps://einstein.stanford.edu/MISSION/mission1.html

L'effetto LT è presente in tutti i casi in cui la sorgente di campo gravitazionale ruoti intorno a un suo asse, benché la sua esatta formulazione matematica dipenda dalla forma specifica della metrica.

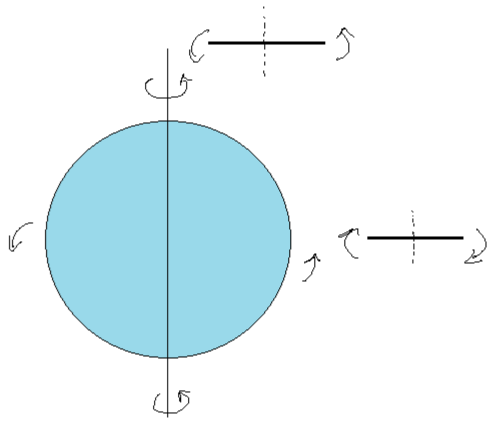


Figura 1.2: Analogo fluidodinamico dell'effetto di frame-dragging

## 1.3 Effetto geodetico

Nella sezione precedente abbiamo analizzato gli effetti che una massa in rotazione ha su un giroscopio in posizione *fissata* rispetto ad essa. Nel caso in cui si abbia a che fare con un giroscopio orbitante intorno alla sorgente di campo gravitazionale, allora bisogna tenere conto anche del cosiddetto *effetto geodetico*, detto anche *effetto de Sitter*.

A differenza dell'effetto LT, l'effetto geodetico è dovuto alla sola presenza di una massa centrale indipendentemente dal suo stato rotazionale. Quindi esso è atteso, ad esempio, anche in uno spaziotempo di Schwartzschild. Nel caso di giroscopio orbitante nel campo gravitazionale di una sorgente rotante, la velocità angolare di precessione totale si ottiene sommando i contributi degli effetti Lense-Thirring e geodetico[7].

È possibile dare un'interpretazione qualitativa dell'effetto geodetico nel contesto del gravitoelettomagnetismo.

Consideriamo una carica elettrica che si muove a velocità $\mathbf{v}$ non relativistica all'interno di un campo elettrico $\mathbf{E}$ generato da una sorgente statica. Nel riferimento proprio della carica di prova, è presente anche un campo magnetico che agisce su di essa, la cui espressione è data da: $\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$. Quindi, se la carica in movimento possiede un momento angolare intrinseco, quest'ultimo sperimenterà una precessione di Larmor.

Analogamente, un giroscopio in rotazione attorno a una sorgente gravitazionale statica, sperimenterà un rate di precessione del momento angolare, rispetto al sistema delle stelle fisse, che a meno di fattori moltiplicativi è dato da:

$$\boldsymbol{\Omega} \sim \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Phi} = -\frac{GM}{r^3 c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{r} \tag{1.24}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità istantanea del giroscopio rispetto alla sorgente e $\Phi$ è il potenziale gravitazionale Newtoniano. Osserviamo che la precessione avviene nel piano orbitale.

Inoltre, se la sorgente è in rotazione e l'orbita del giroscopio giace nel piano equatoriale, allora la velocità angolare di precessione LT e geodetica hanno la stessa direzione. Anche il verso è lo stesso se l'orbita è percorsa in direzione concorde al verso di rotazione della sorgente; verso opposto altrimenti.

La velocità angolare di precessione geodetica può anche essere ottenuta in via analitica o, sfruttando ancora l'analogia GEM, considerando l'ulteriore contributo al potenziale vettore dato dai termini non diagonali tempo-spazio nel riferimento rotante.

## 1.4 Effetti gravitoelettromagnetici nelle Teorie Estese della Gravitazione in formalismo PPN

Accenniamo a come derivare gli effetti gravitoelettromagnetici, trattati in precedenza nel contesto della RG, questa volta nell'ambito delle Teorie Estese e Alternative della Gravitazione[8], limitandoci a teorie metriche.

Poiché siamo interessati a testare tali teorie tramite esperimenti a terra, se ne può semplificare l'analisi andando a considerare il loro limite Post-Newtoniano. Questo significa effettuare una espansione simultanea dei termini della metrica in termini di piccole quantità come $\Phi/c^2, v^2/c^2$....

Per una "buona" Teoria Estesa ci aspettiamo che questa espansione restituisca:

- uno spazio tempo di Minkowski all'ordine più basso (assenza di gravità, spaziotempo piatto)
- la gravitazione Newtoniana al "primo ordine"
- correzioni alla gravità Newtoniana agli ordini successivi.

Ciascuna teoria estesa avrà un suo limite PN, ma si può vedere che non differiscono molto tra di loro e dal limite PN della RG (d'altra parte se le differenze fossero evidenti non sarebbe così difficile discriminare tra l'una e l'altra teoria tramite esperimenti nel Sistema Solare). Infatti, si può far vedere, che è possibile costruire una teoria generale della gravitazione nel limite PN che contenga come caso particolare i limiti di tutte le teorie metriche. Il tensore metrico di questa "teoria complessiva" viene infatti espresso in termini di alcuni parametri liberi, al cui variare si ottengono i tensori metrici delle varie teorie.

Tale approccio, chiamato *formalismo PPN* (formalismo Post-Newtoniano Parametrizzato), è utile perché permette di lavorare "contemporaneamente" a gruppi di teorie metriche (tra loro

[7]Bisognerebbe in realtà considerare un ulteriore contributo detto di *precessione di Thomas*. Esso si può ricavare anche dalla sola teoria della Relatività Speciale e, nel nostro caso, risulterebbe essere proporzionale al prodotto vettoriale tra accelerazione e velocità rispetto alla sorgente. Siccome tale prodotto risulta essere nullo nel caso che analizzeremo in seguito (interferometro a terra), lo trascureremo. Si veda [17, 18] per una discussione più dettagliata.

[8]Nel corso di questa sezione, per brevità, ci riferiremo all'insieme delle Teorie Estese e Alternative della Gravitazione indicandole genericamente come Teorie Estese (TE).

analoghe) nel limite PN, facendo però uso di un unico tensore metrico, il quale dipende dalla specifica teoria considerata solo tramite alcuni parametri[9].

Pertanto, in questo contesto, testare Teorie Estese ”si riduce” ai seguenti passaggi:

1. trovare il limite PPN del gruppo di teorie considerato
2. scegliere un particolare effetto gravitazionale e trovare un gruppo di grandezze che lo caratterizzano; esse, in generale, dipenderanno dai parametri PPN
3. misurare tali grandezze e confrontarle con il valore atteso nel limite PPN per vincolare i parametri

Nel nostro caso, siamo interessati a individuare effetti gravitoelettromagnetici. Concludiamo questa sezione presentando brevemente l'approccio da seguire per completare il primo passaggio (si veda [9, 16] per una trattazione più dettagliata).

Vogliamo considerare il caso di campo gravitazionale all'esterno di una sorgente sferica scarica (lentamente) rotante attorno a un suo asse.

Pertanto bisogna scrivere la lagrangiana d'azione per il particolare gruppo di Teorie Estese in esame, trovare le equazioni di campo associate e risolvere per un generico spaziotempo di Kerr per ottenere la metrica $g_{\mu\nu}$.

L'espansione di $g_{\mu\nu}$ che vogliamo eseguire è in termini del parametro perturbativo $\epsilon = v/c$, dove $v$ è la massima velocità osservata nel Sistema Solare[10]. Si ha che $v^2/c^2 \backsim 10^{-6}$.

Sotto inversione temporale ($x^0 \to -x^0$) gli elementi $g_{00}$ e $g_{jk}$ restano immutati (così come le grandezze *pari* in $\epsilon$), mentre gli elementi $g_{0k}$ (e le grandezze *dispari* in $\epsilon$) cambiano segno[11].

Da questa considerazione si deduce che gli elementi diagonali della perturbazione devono contenere solo termini contenenti potenze pari di $\epsilon$, mentre gli elementi non diagonali solo termini dispari.

Considerazioni sul corretto limite Newtoniano di $g_{\mu\nu}$ (si veda [17], Capitolo 39) implicano che il tensore metrico si possa scrivere nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + g^{(2)}_{00} + g^{(4)}_{00} + ... & g^{(3)}_{0k} + ... \\ g^{(3)}_{k0} + ... & -\delta_{jk} + g^{(2)}_{jk} + ... \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

dove $g^{(n)}_{\mu\nu} \backsim O(\epsilon^n)$.

Il tensore metrico troncato al quarto ordine in $\epsilon$ è:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + 2\frac{\Xi}{c^2} & 2\frac{A_k}{c^2} \\ 2\frac{A_k}{c^2} & -\delta_{jk} + 2\frac{\Psi}{c^2}\delta_{jk} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

dove le quantità $\Phi, \Xi, \Psi, A_k$ sono i potenziali gravitazionali. Si osservi che $h_{jk} = 2\frac{\Psi}{c^2}\delta_{jk}$ poiché abbiamo scelto coordinate isotrope e supposto una sorgente a simmetria sferica.

Si ha che $\Phi$ è il potenziale Newtoniano. $\Phi, \Xi, \Psi$ sono potenziali scalari e $\Phi, \Psi \backsim O(v^2)$, mentre $\Xi \backsim O(v^4)$. $A_k$ sono le componenti (covarianti) di un potenziale vettoriale e vale $A_k \backsim O(v^3)$.

Per i nostri scopi è utile trascurare termini di ordine superiore al terzo in $\epsilon$. Abbiamo quindi la seguente forma per la perturbazione:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\frac{\Phi}{c^2} & 2\frac{A_k}{c^2} \\ 2\frac{A_k}{c^2} & 2\frac{\Psi}{c^2}\delta_{jk} \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Si può far vedere che gli effetti gravitoelettromagnetici (LT e geodetico) si ottengono a partire dai soli potenziali $\Phi, A_k$ tramite le tecniche descritte nel corso delle sezioni precedenti.

Per un'analisi dettagliata condotta su esempi concreti di Teorie Estese (come le teorie $f(R)$, scalar-tensoriali, Horava-Lifshitz) si veda [16].

[9]Esistono diversi formalismi PPN, ognuno con un suo specifico set di parametri liberi.

[10]Gli altri parametri perturbativi possono essere dati in termini di $\epsilon$. Vediamo, ad esempio, che $\Phi = GM/r \sim v^2$, dove abbiamo sfruttato il teorema dell'energia cinetica per collegare velocità e potenziale (è lecito in quanto nel limite PN si considera il Sistema Solare come un sistema isolato).

[11]Ciò smette di essere vero quando si vogliono considerare anche effetti di *radiation damping*, ai quali però non siamo interessati. Inoltre essi intervengono solo al quinto ordine perturbativo in $\epsilon$.

# Capitolo 2

# Principi di funzionamento dei giroscopi laser

Nel precedente capitolo abbiamo presentato gli effetti Lense-Thirring e geodetico e abbiamo mostrato come la loro espressione matematica possa essere ottenuta a partire dal potenziale vettore **A**,analogamente all'elettromagnetismo classico. Tale potenziale è a sua volta collegato alla presenza di termini $g_{0i}$ non nulli all'interno della metrica scritta nel sistema di riferimento comovente dei giroscopi. Pertanto, a partire dall'analisi delle velocità angolari di precessione di questi ultimi, è possibile ottenere informazioni dirette sulle proprietà dello spaziotempo.

Da qui nasce quindi l'importanza dei giroscopi all'interno della ricerca sperimentale in Fisica della Gravitazione e nello studio delle Teorie Estese.

Precedentemente, nel presentare gli effetti gravitelettromagnetici, abbiamo considerato soltanto giroscopi di tipo meccanico. Nel corso di questo capitolo vogliamo presentare la possibilità di rivelare rotazioni tramite dispositivi ottici che non posseggono componenti rotanti.

I *giroscopi laser ad anello* (ring laser gyroscopes) sono costituiti essenzialmente da due fasci laser (ad alta monocromaticità) che si propagano in direzioni opposte all'interno di una cavità ottica costituente un percorso chiuso.

Il fenomeno fisico alla base di questi giroscopi laser è l'effetto Sagnac [19], che prende il nome dall'omonimo fisico che per primo nel 1913, dimostrò la possibilità di rivelare rotazioni assolute (da intendersi rispetto al sistema di riferimento delle stelle fisse) tramite l'utilizzo di un interferometro. In particolare, quello che si osserva, è una differenza nei tempi di roundtrip di ciascun fascio, dovuta alla rotazione dell'interferometro stesso. Tale differenza è rivelabile a partire dal pattern di interferenza dei due fasci, osservato esternamente alla cavità ottica.

I giroscopi laser ad anello possono essere distinti in due categorie: risonatori passivi ad anello, in cui la sorgente laser è esterna alla cavità ottica, e giroscopi laser attivi, in cui il mezzo attivo è all'interno della cavità anulare stessa. In particolare, GINGER prevede l'impiego di giroscopi del secondo tipo.

In questo capitolo verrà presentata una dimostrazione elementare dell'effetto Sagnac nel contesto della Meccanica Classica e una generalizzazione dello stesso effetto nel framework della RG (e delle teorie metriche in generale), con particolare attenzione al contributo gravitomagnetico sul segnale in uscita dei giroscopi laser.

Si osservi che nel corso di questo capitolo si ignoreranno gli effetti di mezzi rifrattivi nel percorso dei fasci luminosi, salvo dove esplicitamente indicato il contrario.

## 2.1 Derivazione elementare dell'effetto Sagnac

Presentiamo una dimostrazione elementare dell'effetto Sagnac dovuta ad Aronowitz.

Consideriamo, per semplicità, che la cavità ottica sia costituita da un anello circolare come quello mostrato in Figura 2.1.

La luce laser entra nella cavità ottica nel punto A e tramite un *beam splitter* viene separata in due fasci laser, uno che si propaga in verso orario (CW) e l'altro in verso antiorario (CCW).

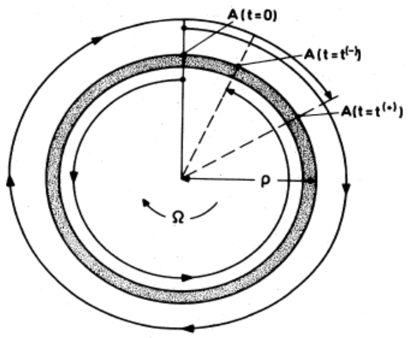



Figura 2.1: Schema per un giroscopio ad anello con cavità ottica circolare

Se l'apparato è non rotante, i due fasci contropropaganti si ricombinano nel punto A dopo un tempo:

$$t = \frac{2\pi\rho}{c} \tag{2.1}$$

dove $\rho$ è il raggio del percorso circolare seguito dai fasci laser e $c$ è la velocità della luce nel vuoto.

Se invece l'apparato è in rotazione, bisogna tener conto del fatto che la distanza percorsa dai due fasci prima di ricombinarsi sul *beam splitter* è differente.

Per semplicità, si supponga che l'interferometro sia in rotazione, a velocità angolare costante $\Omega$, attorno a un asse ortogonale al suo piano di giacitura e passante per il centro dell'anello circolare. Supponendo verso di rotazione orario, si ha che il fascio CW deve percorrere un cammino $2\pi\rho + \rho\Omega t^+ > 2\pi\rho$ per poter completare un round-trip. Analogamente il fascio CCW dovrà percorrere un cammino $2\pi\rho - \rho\Omega t^- < 2\pi\rho$.

Se indichiamo con $t^+$ e $t^-$ il tempo che impiegano rispettivamente i fasci CW e CCW per completare un rond-trip, valgono le seguenti relazioni:

$$t^+ = \frac{2\pi\rho + \rho\Omega t^+}{c}, \; t^- = \frac{2\pi\rho - \rho\Omega t^-}{c}$$

da cui:

$$t^{\pm} = \frac{2\pi\rho}{c \mp \rho\Omega} \tag{2.2}$$

Pertanto la differenza tra i due tempi di round-trip vale:

$$\Delta t \equiv t^+ - t^- = \frac{4\pi\rho^2\Omega}{c^2 - \rho^2\Omega^2} \tag{2.3}$$

Poiché nel limite non relativistico (che è il limite in cui vale questa dimostrazione) si ha: $\rho\Omega << c$, pertanto:

$$\Delta t \cong \frac{4\pi\rho^2\Omega}{c^2} \tag{2.4}$$

e la differenza di cammino ottico $\Delta L$ è data da:

$$\Delta L = c\Delta t = \frac{4\pi\rho^2\Omega}{c} \tag{2.5}$$

Una formula più generale per una forma arbitraria dell'interferometro è data da (si veda [13]):

$$\Delta L = \frac{4A\left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}}\right)}{c} \tag{2.6}$$

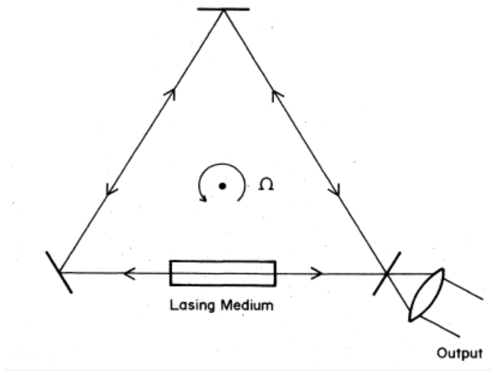



Figura 2.2: Esempio di giroscopio laser attivo con cavità ottica costituita da tre specchi

dove $A$ è l'area racchiusa dal percorso ottico, $\mathbf{\Omega}$ è il vettore velocità angolare e $\hat{\boldsymbol{Z}}$ è un vettore unitario normale al piano in cui giace l'interferometro.

Ciò implica che la differenza di fase tra i due fasci contropropaganti è data da:

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} = \frac{8\pi A\left(\mathbf{\Omega}\cdot\hat{\boldsymbol{Z}}\right)}{c\lambda} \tag{2.7}$$

e risulta essere proporzionale al rate di rotazione dell'interferometro.

## 2.2 Giroscopi laser attivi

Poiché i fasci arrivano nel punto di ricombinazione con una differenza di fase, è possibile in linea di principio estrarre informazioni sul rate di rotazione $\Omega$ andando ad osservare lo spostamento delle frange di interferenza rispetto alla loro posizione nel caso di apparato non rotante.

Questo approccio viene utilizzato nel caso di risonatori ad anello passivi le cui cavità sono costituite da fibre ottiche avvolte più volte su se stesse.

Purtroppo quello che si riscontra è che la sensibilità di un apparato di questo tipo risulta d'altro canto fortemente limitata dal minimo spostamento delle frange rilevabile, che a sua volta è fortemente ridotto a causa della potenza dissipata all'interno della fibra stessa [12].

Un metodo per aumentare la sensibilità dell'apparato, che non risenta delle problematiche di cui sopra, consiste nel misurare in uscita, non una differenza di fase tra i fasci contropropaganti, ma una differenza di frequenza. Nel caso descritto sopra di risonatore ad anello passivo, tale differenza di frequenze risulta essere nulla in quanto le frequenze dei fasci laser CW e CCW sono forzatamente identiche alla frequenza della sorgente posta all'esterno della cavità. Quindi, nel caso di dispositivo passivo, tale differenza di frequenze dovrebbe essere indotta tramite particolari tecniche (per una discussione si veda [12]).

Emerge in modo naturale uno shift in frequenza tra i fasci contropropaganti nel caso di un giroscopio ad *anello laser attivo*, ovvero il caso in cui il mezzo laser sia presente all'interno della cavità ottica (si veda Figura 2.2).

In questo caso si deve imporre come condizione al contorno che ciascun fascio debba interferire con se stesso costruttivamente dopo un round-trip. Pertanto devono valere le seguenti condizioni di risonanza:

$$q\lambda_{\pm} = L_{\pm} \tag{2.8}$$

dove $q$ è un intero positivo, $\lambda_+$ e $\lambda_-$ sono rispettivamente le lunghezze d'onda del fascio CW e CCW, mentre $L_+$ e $L_-$ sono i cammini ottici visti dagli stessi.

In termini delle frequenze di risonanza abbiamo:

$$\omega_{\pm} = \frac{qc}{L_{\pm}} \tag{2.9}$$

da cui:

$$\Delta\omega \equiv \omega_- - \omega_+ = qc\left(\frac{1}{L_-} - \frac{1}{L_+}\right)$$

Se indichiamo con $L$ la lunghezza del cammino percorso da ciascuno dei due fasci nel caso di interferometro non rotante, nell'approssimazione in cui $L_-L_+ \cong L^2$, si ha:

$$\Delta\omega \cong qc\frac{\Delta L}{L^2} = \frac{\omega}{L}\Delta L \tag{2.10}$$

dove $\Delta L = L_+ - L_-$ e $\omega = \frac{qc}{L}$ è la frequenza di risonanza (corrispondente al modo $q$) nel caso di apparato non rotante.

Introducendo nell'espressione (2.10) la (2.6), si ottiene la seguente formula, valida per una forma arbitraria dell'interferometro:

$$\Delta\omega = \frac{8\pi A\left(\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}}\right)}{\lambda P} \tag{2.11}$$

dove $P \equiv L$ è il perimetro del percorso seguito dai fasci di luce.

Vediamo che in generale lo shift in frequenza fornisce direttamente informazioni solo sulla *proiezione* della velocità angolare di rotazione sull'asse ortogonale al piano dell'interferometro. Pertanto, per ricavare informazioni complete sulla rotazione del sistema, bisogna avere a disposizione in generale più giroscopi.

Ponendo $\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} = \Omega$ , il rate di rotazione risulta quindi proporzionale allo shift in frequenza:

$$\Delta\omega = S\Omega \tag{2.12}$$

dove $S = \frac{8\pi A}{\lambda P}$ è il cosiddetto *fattore di scala.*

Osserviamo che il fattore di scala non cresce con l'aumentare della lunghezza totale del cammino percorso dai fasci luminosi, quindi, ad esempio, costruire cavità costituite da lunghi cavi di fibra ottica non è utile ad aumentare la sensibilità di giroscopi laser attivi. Pertanto solitamente si costruiscono cavità ottiche che abbiano un buon rapporto $A/P$ realizzate tramite specchi.

In particolare, per un anello circolare di raggio $\rho$ e asse di rotazione passante per il centro di tale anello e ortogonale ad esso, si ha:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi\rho\Omega}{\lambda} \tag{2.13}$$

L'impiego di giroscopi laser attivi presenta diversi vantaggi rispetto all'utilizzo di giroscopi passivi. In primo luogo, dal punto di vista sperimentale è relativamente più semplice misurare piccole differenze di frequenza tra fasci in uscita, rispetto a differenze di fase.

## 2.3 Effetto Sagnac in Relatività Generale

Vogliamo ora presentare una generalizzazione dell'effetto Sagnac nel contesto della Relatività Generale.

Per ottenere l'espressione dello shift in frequenza si dovrebbe preliminarmente ricavare l'equazione delle onde per il campo elettrico nella cavità in presenza di campo gravitazionale. Queste equazioni andrebbero poi risolte fissate le condizioni al contorno. Il punto di partenza sarebbero le equazioni di Maxwell nello spaziotempo curvo (si veda [17]), che sono molto più difficili da maneggiare rispetto alle loro versioni su spaziotempo piatto.

Un modo per semplificare il calcolo consiste nello scrivere le equazioni di Maxwell in uno spaziotempo qualsiasi adottando una forma che ricorda le equazioni classiche. Tale risultato, ottenuto nel 1960 da Plebanski (si veda [20]), mostra che l'effetto di un campo gravitazionale è analogo a quello di un mezzo dielettrico e consente di trovare l'equazione delle onde e risolverla tramite le usuali tecniche. Trovata l'espressione del campo elettrico nella cavità, una volta specificata la metrica, è possibile ottenere l'espressione per lo shift di frequenze (si veda [12]).

Noi non utilizzeremo però questo approccio. Ricaveremo invece lo shift in frequenza a partire dalla differenza tra i tempi di roundtrip dei fasci contropropaganti [21, 22].

Consideriamo un segnale luminoso che si propaga tra due punti infinitesimamente vicini nello spazio. Esso individua due eventi infinitesimamente vicini dello spaziotempo (partenza/arrivo segnale luminoso) separati dall'intervallo invariante:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.14}$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico dello spaziotempo considerato, scritto nel sistema di riferimento del laboratorio. Tale sistema di riferimento è costruito in modo tale da essere, istante per istante, comovente con il rivelatore tramite il quale si vuole osservare lo shift in frequenza (pertanto $g_{\mu\nu}$ descrive una metrica "rotante").

Nel caso di propagazione di raggi luminosi, l'elemento di linea (2.14) si annulla e di conseguenza vale:

$$g_{00} \left(dx^0\right)^2 + 2g_{0k} dx^0 dx^k + g_{ik} dx^i dx^k = 0 \tag{2.15}$$

Ricordando che $x^0 = ct$, risolvendo rispetto a $dx^0$ l'equazione (2.15), si ottiene la separazione temporale infinitesima tra gli eventi:

$$dt = \frac{-g_{0k} dx^k \pm \sqrt{(g_{0k} dx^k)^2 - g_{00} g_{ik} dx^i dx^k}}{c g_{00}} \tag{2.16}$$

Poiché siamo interessati solo al caso $dt > 0$, allora nella (2.16) scegliamo solo il segno $+$.

Per ottenere i tempi di roundtrip per entrambi i segnali luminosi, bisogna integrare la (2.16) lungo i percorsi compiuti da ciascuno di essi. Indicando con $t^+$e $t^-$ i tempi di roundtrip, rispettivamente del fascio CW e quello CCW, si ha:

$$\begin{aligned} t^+ &= \oint \frac{-g_{0k} dx^k + \sqrt{(g_{0k} dx^k)^2 - g_{00} g_{ik} dx^i dx^k}}{c g_{00}} \\ &= -\frac{1}{c} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} + \frac{1}{c} \oint \frac{\sqrt{(g_{0k} dx^k)^2 - g_{00} g_{ik} dx^i dx^k}}{g_{00}} \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} t^- &= \oint \frac{-g_{0k} dx^k + \sqrt{(g_{0k} dx^k)^2 - g_{00} g_{ik} dx^i dx^k}}{c g_{00}} \\ &= +\frac{1}{c} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} + \frac{1}{c} \oint \frac{\sqrt{(g_{0k} dx^k)^2 - g_{00} g_{ik} dx^i dx^k}}{g_{00}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

La differenza fra i tempi di roundtrip è quindi data da:

$$\Delta t = t^+ - t^- = -\frac{2}{c} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} \tag{2.19}$$

La separazione temporale tra i due fasci nel sistema di riferimento proprio (localmente inerziale) del rivelatore è:

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}} \Delta t = -2 \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} \tag{2.20}$$

e lo shift in frequenza sarà quindi dato da (vedi [12]):

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega^- - \omega^+ = \frac{2\pi c^2}{\lambda P} \Delta\tau \\ &= -\frac{4\pi c}{\lambda P} \sqrt{g_{00}} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Lo shift in frequenza generalizzato può essere sempre scritto in una forma analoga alla (2.11):

$$\Delta\omega = \frac{8\pi A\tilde{\Omega}}{\lambda P} \tag{2.22}$$

dove:

$$\tilde{\Omega} \equiv \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} = -\frac{c}{2A}\sqrt{g_{00}} \oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} \tag{2.23}$$

è un rate di rotazione "generalizzato".

Vediamo quindi che il fatto di avere una metrica spaziotemporale non piatta, e in particolare termini tempo-spazio non nulli, implicano effetti sul sistema che influenzano il segnale in uscita dell'interferometro analogamente a delle rotazioni. Lo studio dello shift in frequenza permette, in linea di principio, di ottenere informazioni sulla metrica.

La formula (2.23) racchiude sia i termini di rotazione "classici", sia effetti puramente gravitazionali, che ci aspettiamo essere di diversi ordini di grandezza meno significativi rispetto ai primi.

### 2.3.1 Effetto Sagnac generalizzato nel caso di piccole rotazioni

Vogliamo esplicitare la connessione fra effetto Sagnac "classico" (si veda (2.23)) e la sua versione generalizzata. Ci aspettiamo che nel caso semplice di interferometro circolare rotante con velocità angolare non relativistica, una volta specializzata la metrica, la (2.21) coincida con la (2.13) a meno di termini del secondo ordine in $\rho\Omega/c$.

Innanzitutto ricaviamo la metrica $g_{\mu\nu}$ nel caso di interferometro rotante.

In un sistema di riferimento inerziale (come può esserlo quello di un osservatore che non partecipi alla rotazione dell'interferometro), l'elemento metrico in coordinate cilindriche si scrive:

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - d\bar{z}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\varphi}^2$$

Consideriamo ora la seguente trasformazione di coordinate, la quale consente di passare ad un sistema di riferimento rotante rispetto al primo:

$$\bar{t} = t,\ \bar{r} = r,\ \bar{z} = z,\ \bar{\varphi} = \varphi + \Omega t$$

La metrica in questo nuovo riferimento assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2\Omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - 2r^2\Omega d\varphi dt$$

In questo riferimento, gli elementi del tensore metrico non nulli sono:

$$g_{00} = 1 - \frac{r^2\Omega^2}{c^2},\ g_{11} = g_{22} = -1,\ g_{33} = -r^2,\ g_{03} = -\frac{r^2\Omega}{c} \tag{2.24}$$

Per ottenere lo shift in frequenza bisogna sostituire l'espressione degli elementi del tensore metrico (2.24) nella formula (2.21) e poi integrare sul percorso individuato dalla cavità ottica, ovvero una circonferenza di raggio $\rho$. Si ottiene:

$$\Delta\omega = -\frac{4\pi c}{\lambda P}\sqrt{1 - \frac{\rho^2\Omega^2}{c^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{-\frac{\rho^2\Omega}{c}}{1 - \frac{\rho^2\Omega^2}{c^2}}$$

che integrata restituisce ($P = 2\pi\rho$):

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\lambda}\rho\Omega \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2\Omega^2}{c^2}}}$$

che al primo ordine in $\rho\omega/c$ coincide con l'espressione (2.13) ricavata classicamente.

## 2.4 Contributi gravitoelettromagnetici allo shift in frequenza di un giroscopio laser

La formula (2.21) è quella su cui si basa il meccanismo di rivelazione degli effetti gravitazionali tramite l'impiego di un giroscopio laser.

Vogliamo ora ottenere una stima del contributo degli effetti gravitoelettromagnetici allo shift in frequenza misurato da un giroscopio situato sulla superficie terrestre.

La metrica (1.8) descrive in modo abbastanza accurato lo spaziotempo all'esterno della Terra.

Ricordiamo l'espressione (2.21) per lo shift in frequenza:

$$\Delta\omega = -\frac{4\pi c}{\lambda P}\sqrt{g_{00}}\oint dx^k \frac{g_{0k}}{g_{00}} \tag{2.25}$$

Per ottenere l'espressione dello shift in frequenza, bisogna sostituire nella (2.25) la metrica nel sistema di riferimento proprio del laboratorio, ovvero bisogna partire dalla metrica (1.8) e trasformarla tenendo conto della rotazione terrestre. Successivamente, ottenuta l'espressione del nuovo potenziale vettore, si utilizza il formalismo GEM per ricavare il rate di precessione giroscopica nel sistema del laboratorio.

Si può far vedere ([23]) che al primo ordine perturbativo la (2.25) si riduce, come atteso, a una espressione analoga alla (2.22), in cui la quantità $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ è la velocità angolare complessiva "avvertita" dall'interferometro, data dalla somma della velocità angolare di rotazione terrestre e quelle dovuta agli effetti gravitoelettromagnetici:

$$\Delta\omega = \frac{8\pi S}{\lambda P}\left(\mathbf{\Omega}_{\oplus} + \mathbf{\Omega}^{LT}_{(GR)} + \mathbf{\Omega}^{G}_{(GR)}\right)\cdot\mathbf{n} = \Delta\omega_{\oplus} + \Delta\omega^{LT}_{(GR)} + \Delta\omega^{G}_{(GR)} \tag{2.26}$$

con $S$ l'area della superficie racchiusa dal percorso chiuso della cavità ottica e $\mathbf{n}$ vettore ortogonale a tale superficie.

Nel caso di un giroscopio contenuto nel piano equatoriale:

$$\left|\frac{\Delta\omega^{LT}_{(GR)}}{\Delta\omega_{\oplus}}\right|, \left|\frac{\Delta\omega^{G}_{(GR)}}{\Delta\omega_{\oplus}}\right| \simeq \frac{r_S}{R_{\oplus}}$$

Poiché per la Terra $r_S/R_{\oplus} \sim 10^{-8}$, vediamo quindi che gli effetti gravitoelettromagnetici contribuiscono solo a circa un miliardesimo dello shift in frequenza totale. Ciò rende ragione dell'elevata sensibilità richiesta ai giroscopi laser per rivelare gli effetti LT e geodetico.

# Capitolo 3

# Rivelazione degli effetti gravitoelettromagnetici tramite GINGER

Nel corso dei capitoli precedenti abbiamo presentato gli effetti gravitoelettromagnetici che vogliamo investigare e presentato le caratteristiche di base dei dispositivi che si intendono utilizzare per rivelarli.

In questo capitolo presenteremo il progetto GINGER e le caratteristiche del suo apparato sperimentale, confrontandolo con i dispositivi dello stesso tipo già esistenti.

Inoltre descriveremo le tecniche generali di analisi del segnale in uscita di un giroscopio laser. Mostreremo innanzitutto come possa essere ricavato lo shift in frequenza (e il rate di rotazione ad esso collegato) a partire dall'analisi dei fasci ricombinati, illustrando, in un secondo momento, come tale ricombinazione possa essere realizzata impiegando prismi di ricombinazione al posto di specchi e *beam splitter*. Infine, con lo scopo di illustrare l'importanza fondamentale del controllo della geomtria del dispositivo di rivelazione, analizzeremo il rapporto di contrasto del segnale in uscita al variare di alcuni parametri significativi dei fasci.

## 3.1 Descrizione dell'apparato sperimentale di GINGER

Il progetto GINGER (Gyroscopes IN GEneral Relativity) [15, 24, 25], come già anticipato, nasce dalla volontà di voler testare le attuali teorie sull'interazione gravitazionale tramite esperimenti a terra che misurino la velocità di rotazione terrestre con sensibilità opportuna.

GINGER è un insieme di giroscopi laser in grado di determinare il vettore rotazione terrestre.

L'apparato sperimentale di GINGER è ispirato a dispositivi già esistenti, quali l'anello laser "G" (Grossring), situato presso il Geodetic Observatory Wettzell in Germania [26].

Quest'ultimo consiste in una cavità ottica quadrata, di 4 metri di lato, montata su una tavola monolitica realizzata in zerodur, un materiale vetro-ceramico estremamente rigido e termicamente inestensibile.

Nonostante le eccellenti performance di G, questo presenta un punto debole: esso consiste di un solo anello laser e i differenti contributi allo shift in frequenza provengono da effettivi *vettori di rotazione* lungo direzioni differenti e incognite. In pratica, come già evidenziato nel precedente capitolo, è necessario avere un array tridimensionale di anelli laser per misurare le componenti nelle tre direzioni spaziali dei vettori di rotazione. La struttura monolitica di G non può essere facilmente estesa a un sistema tri-assiale di giroscopi laser, sia per ragioni di difficoltà meccanica di realizzazione, che di costo.

GINGER mira a superare questa difficoltà, puntando anche a superare i precedenti giroscopi in termini di sensibilità. L'idea è quella di costruire un sistema tridimensionale di giroscopi ad anello, montato su una struttura costituita da più parti meccaniche. Tale struttura, invece di fare affidamento sulla rigidità che caratterizza G, perseguirebbe la stabilità e il controllo della geometria richiesti attraverso un sistema di controllo dinamico attivo.

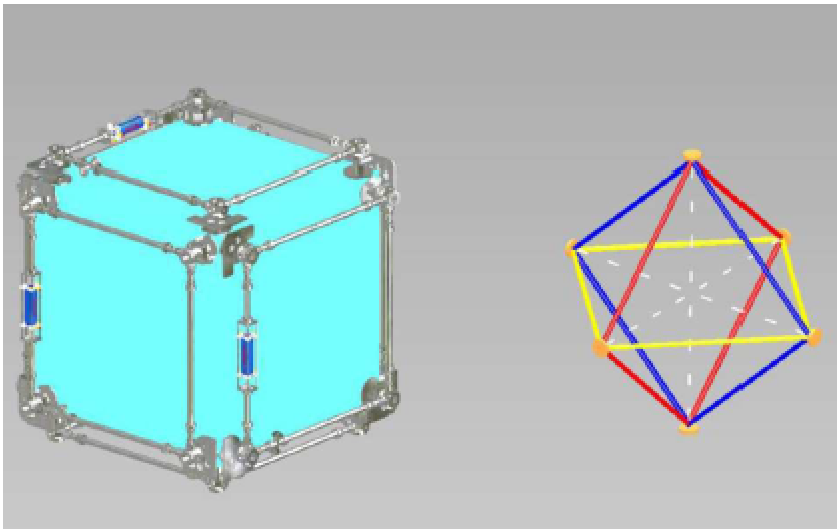


Figura 3.1: Configurazioni cubica e ottaedrica di GINGER

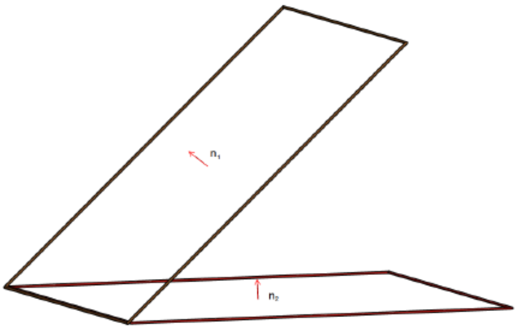


Figura 3.2: Rappresentazione dei giroscopi laser in configurazione minimale. Il giroscopio 1 è inclinato al massimo del segnale (in figura latitudine 45°); il giroscopio 2 è orizzontale.

Le configurazioni inizialmente proposte per GINGER sono state quella cubica e quella ottaedrica (Figura (3.1)).

La prima prevedeva l'utilizzo di 24 specchi, costituenti 6 cavità ad anello indipendenti che rendevano la struttura ridondante (benché potessero essere impiegati per lo studio di errori sistematici).

La seconda configurazione, più compatta della precedente, prevedeva l'utilizzo di 6 specchi in configurazione ottaedrica, per un totale di 3 cavità ad anello quadrate.

In realtà, studi recenti, hanno dimostrato la possibilità di poter misurare gli effetti gravitoelettromagnetici tramite l'utilizzo di soli due giroscopi laser [15].

Infatti, dalle relazioni (1.23) e (1.24), vediamo che i vettori $\mathbf{\Omega}_{\oplus}, \mathbf{\Omega}^{LT}_{(GR)}$ e $\mathbf{\Omega}^{G}_{(GR)}$ (che compaiono nell'espressione (2.26) per lo shift in frequenza totale) sono tutti contenuti nel piano meridiano (il piano contenente l'asse di rotazione terrestre passante per la posizione in cui si trova il laboratorio). Ciò implica che la configurazione minimale in grado di misurare gli effetti gravitazionali è data da un primo giroscopio con vettore area parallelo all'asse di rotazione terrestre (che è l'orientazione che massimizza il segnale), mentre il secondo giroscopio è parallelo al suolo (vettore area verticale rispetto al suolo) (si veda Figura (3.2)).

Le misure della velocità angolare di rotazione totale fornite da ciascun giroscopio, vengono poi confrontate con i dati sul rate di rotazione terrestre forniti dal sistema internazionale IERS (International Earth Rotation System Service) per ricavare i contributi gravitazionali. Inoltre, poiché le misure effettuate da ciascun anello laser sono indipendenti, l'accordo tra i due risultati è una verifica del test.

La geometria dell'intero sistema è monitorata in tempo reale e tenuta sotto controllo per mezzo di attuatori piezoelettrici.

L'intero apparato sarà situato sottoterra presso i Laboratori del Gran Sasso, sotto uno strato di roccia di oltre 1400 m di spessore, che assicura una buona schermatura da ogni tipo di rumore causato dalle attività in superficie.

I segnali luminosi che si propagano in versi opposti all'interno delle cavità anulari costituenti i giroscopi laser, vengono prelevati presso un *corner mirror* (semi-riflettente) e fatti ricombinare su un fotodiodo, al fine di rivelare lo shift in frequenza dei due fasci.

L'analisi prevista del segnale in uscita è quella standard e la descriveremo nella sezione successiva. La ricombinazione dei fasci, in dispositivi simili attualmente esistenti, viene realizzata per mezzo di specchi e *beam splitter*. Nel seguito presenteremo un'alternativa a tale modalità di ricombinazione, basata sull'utilizzo di prismi.

## 3.2 Readout in un giroscopio laser attivo

Come precedentemente discusso, un giroscopio laser attivo permette di ricavare informazioni sul rate di rotazione di un riferimento (o più in generale sulla forma della metrica spaziotemporale) nella forma di uno shift fra le frequenze dei segnali che si propagano nella cavità.

Il modo più semplice per misurare lo shift in frequenza, è quello di far ricombinare i due fasci e misurare la frequenza di battimento del segnale risultante.

Prima di analizzare il modo in cui questa ricombinazione possa avvenire, vogliamo discutere del modo in cui tale frequenza possa essere sfruttata per ricavare informazioni sul rate di rotazione.

Supponiamo, per semplicità, che i fasci laser possano essere approssimati da onde piane monocromatiche di uguale intensità, stessa polarizzazione e stessa lunghezza d'onda nel vuoto.

In generale, i due fasci interferendo tra loro danno luogo a un sistema di frange spaziali su uno schermo oltre ad un termine dipendente dal tempo che conterrà le informazioni sul rate di rotazione. Difatti, l'intensità della luce sarà data da:

$$I = I_0 \left[1 + \cos\left(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + 2\pi\Delta\nu t + \varphi\right)\right] \tag{3.1}$$

dove $\varphi$ è un fattore di fase costante e $\Delta\omega = \omega_- - \omega_+ = 2\pi\Delta\nu$ e $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_-$. Per onde piane quasi parallele, è possibile eseguire la seguente approssimazione:

$$\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \simeq \frac{2\pi}{\lambda}\epsilon x \tag{3.2}$$

dove $x$ è la posizione misurata lungo lo schermo e nel piano di incidenza dei fasci, mentre $\epsilon$ è un piccolo parametro adimensionale che si annulla per un allineamento perfetto dei fasci. Pertanto, in questa approssimazione, la (3.1) si riscrive nel seguente modo:

$$I = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\epsilon x}{\lambda} + 2\pi\Delta\nu t + \varphi\right)\right] \tag{3.3}$$

Lo spessore di ogni frangia è $\lambda/\epsilon$ (per $\epsilon = 0$ non c'è sistema d frange e l'intensità dipende unicamente dal tempo). Vediamo che se il dispositivo è in rotazione $\Delta\nu \neq 0$, per cui eventuali frange si spostano in una direzione che dipende dal verso di rotazione.

Quello che si osserva in posizione $x$ fissata (anche nel caso di $\epsilon = 0$) è una oscillazione dell'intensità $I$, con frequenza $\Delta\nu$, tra il suo valore minimo 0 e il suo valore massimo $2I_0$.

È possibile utilizzare un detector che conti il numero $N$ di massimi di intensità del segnale pulsante in una certa posizione fissata entro un certo intervallo di tempo $t$. Vale:

$$N = \int_0^t dt'\Delta\nu = \frac{4A}{\lambda P}\int_0^t dt'\Omega = \frac{4A}{\lambda P}\theta \tag{3.4}$$

La formula (3.4) collega il numero di massimi di intensità rilevati dal detector a $\theta$, l'angolo totale di rotazione dell'interferometro intorno alla direzione ortogonale al piano che lo contiene.

Nel caso in cui si volesse tenere conto di un possibile cambio di segno per $\Delta\nu$ (inversione del verso di rotazione), è necessario impiegare due detector, uno dei quali sia sensibile alla direzione in cui le frange si spostano al fine di tenerne conto nel calcolo dell'integrale (3.4).

Nel caso in cui $\Omega$ sia costante nel tempo, si ha semplicemente:

$$N = \frac{4At}{\lambda P}\Omega \tag{3.5}$$

Abbiamo quindi visto che è possibile ottenere informazioni sulla velocità angolare di rotazione sotto forma della quantità intrinsecamente discreta $N$ e che può essere memorizzata eventualmente come informazione digitale.

Sebbene la tecnica di base di analisi del segnale resti la stessa, in generale ad interferire non saranno delle onde piane.

Si può far vedere (si veda A) che l'intensità (integrata nelle direzioni x e y) del campo totale, ottenuto a partire dalla sovrapposizione di campi nella forma[1]: $E_i\left(x,y,z,t\right) \equiv E_i\left(x,y,z\right) e^{-i\omega_i t + i\varphi_i}$, è data da:

$$I\left(z,t\right) = I_1\left(z\right) + I_2\left(z\right) + 2\mathrm{Re}\left\{\left(\iint_S E_1\left(x,y,z\right) E_2^*\left(x,y,z\right) dxdy\right) e^{i\Delta\omega t + i\varphi}\right\} \tag{3.6}$$

dove:

$$I_i\left(z\right) = \iint_S \left|E_1\left(x,y,z\right)\right|^2 dxdy \tag{3.7}$$

Vediamo che l'intensità ha un comportamento oscillante nel tempo, analogo a quanto evidenziato nel caso di sovrapposizione di onde piane, caratterizzato dalla frequenza di beat $\Delta\omega$.

Possiamo definire la seguente grandezza, detta *rapporto di contrasto* o *visibilità:*

$$\mathrm{VIS} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{3.8}$$

Poiché abbiamo considerato un detector in grado di contare i massimi di intensità, è importante che essi siano ben distinguibili. Pertanto è auspicabile avere un buon rapporto di contrasto, in quanto risulta essere legato all'escursione massima dell'intensità al variare del tempo.

Nel nostro caso:

$$\mathrm{VIS} \propto \left|\mathrm{Re}\left\{\iint_S E_1\left(x,y,z\right) E_2^*\left(x,y,z\right) dxdy\right\}\right| \tag{3.9}$$

## 3.3 Uso di un prisma di ricombinazione in output a un *corner mirror*

Attualmente la ricombinazione tra i fasci del girolaser in output ad uno dei *corner mirror* della cavità è ottenuta mediante specchi e *beam splitter*, ma l'uso di un prisma consentirebbe di avere un ingombro minore a prezzo di un minor grado di libertà per l'allineamento.

In generale un prisma di ricombinazione viene usato in modo tale che, dei due fasci uscenti dalla stessa superficie semiriflettente, uno dei due vada incontro a riflessioni multiple e si ricombini poi con l'altro che viaggia pressoché "indisturbato".

Esistono almeno due schemi possibili per un prisma di ricombinazione: doppio prisma, singolo prisma.

Studieremo queste due configurazioni nell'approssimazione dell'ottica geometrica (ovvero trascurando le dimensioni finite dei fasci luminosi e trattandoli come raggi) e supponendo che la maggiore fonte di errore provenga dal mancato allineamento specchio-prisma. Inoltre supporremo che la luce abbia lunghezza d'onda con valore $\lambda = 632.8nm$ (lunghezza d'onda del laser He-Ne).

[1] Poiché siamo interessati unicamente a interferenza fra fasci con stessa polarizzazione, ci riferiremo ai campi elettrici indicandone solo l'ampiezza e sottintendendo che i versi di polarizzazione siano identici e ortogonali alle direzioni di propagazione.

Nel seguito sottintenderemo che gli angoli sono assegnati in radianti, salvo dove specificamente indicato il contrario.

## Prisma singolo

Consideriamo un prisma retto a base triangolare, per cui uno degli angoli sia retto.

Iniziamo con il supporre che la faccia corrispondente al lato più lungo del triangolo di base sia perfettamente allineata allo specchio di uscita, come in Figura 3.3:

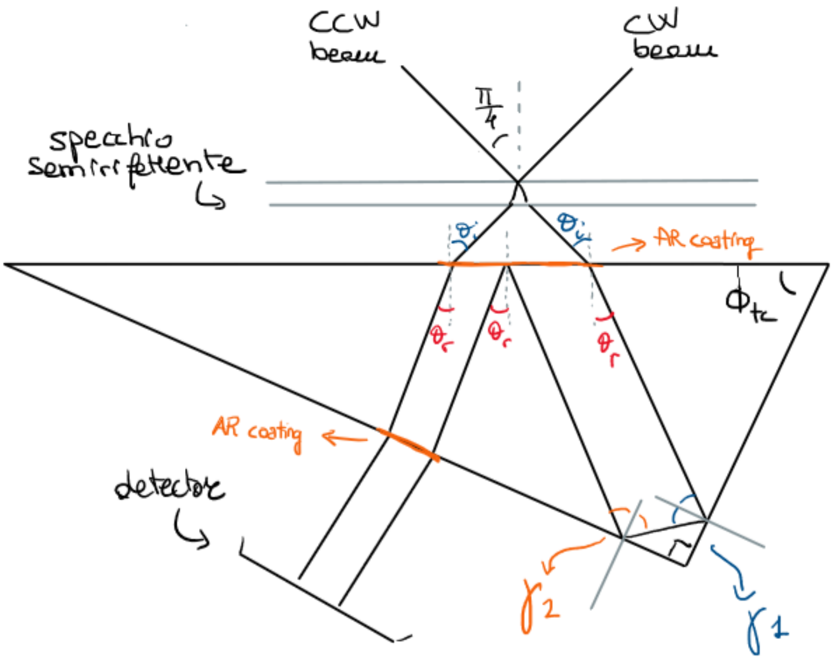



Figura 3.3: Schema di un prisma singolo nel caso di errore nullo sull'allineamento specchio prisma. In figura vengono evidenziati due coating anti-riflesso sulle interafacce di ingresso e uscita del prisma.

Dallo studio del sistema in ottica geometrica, si vede che i raggi uscenti dal prisma sono sempre paralleli se si assume nullo l'errore sull'ampiezza dell'angolo retto (spigolo più in basso nella Figura 3.3). L'unica accortezza da avere è scegliere un prisma per cui $\phi_{tc}$ (top corner angle) sia tale che: $\gamma_1, \gamma_2 > \theta_{cr}$, con $\theta_{cr}$ angolo critico del prisma; ovvero vogliamo che il raggio CCW subisca due riflessioni totali prima di uscire dal prisma.

Osserviamo che gli angoli $\gamma_1$ e $\gamma_2$ non sono tra loro indipendenti, ma vale:

$$\gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 \tag{3.10}$$

Inoltre[2]:

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n}\right) \tag{3.11}$$

$$\phi_{tc} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) = \theta_r + \gamma_1 \tag{3.12}$$

dove $n$ è l'indice di rifrazione del prisma.

Ricordiamo che l'angolo critico è legato all'indice di rifrazione del prisma $n$ dalla relazione:

$$\theta_{cr} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.13}$$

[2]Stiamo approssimando l'indice di rifrazione dell'aria a $n_0 \simeq 1$.

Nel caso di prisma in *fused silica* (FS) o BK7, gli indici di rifrazione (per $\lambda = 632.8nm$), valgono rispettivamente $n_{fs} = 1.4570$ e $n_{BK7} = 1.5151$, per cui dalla formula (3.13) otteniamo rispettivamente rispettivamente i due angoli critici: $\theta_{cr,fs} = 43.3412°$, $\theta_{cr,BK7} = 41.3016°$.

Pertanto, in entrambi i casi considerati, per avere doppia riflessione totale possiamo imporre: $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} \equiv \gamma_2$ e ottenere il valore di $\phi_{tc}$ corrispondente.

Poiché vogliamo considerare cavità ad anello quadrate, supporremo che gli angoli di incidenza sullo specchio di ciascun fascio valgano $\pi/4$. Per cui dalle formule (3.11) e (3.12) si ottengono i valori dell'angolo $\phi_{tc}$ nei casi di prisma in FS e BK7:

$$\phi_{tc,fs}(°) = 74.0332 \tag{3.14}$$

$$\phi_{tc,BK7}(°) = 72.8207 \tag{3.15}$$

Osserviamo che i raggi escono dal prisma paralleli, ma non necessariamente sovrapposti. La distanza tra i due fasci dipende dalla distanza prisma-specchio, oltre che dalle effettive dimensioni del prisma.

Vogliamo ora prendere in considerazione la possibilità di allineamento non perfetto prisma-specchio. Considereremo lo schema rappresentato in Figura 3.4:

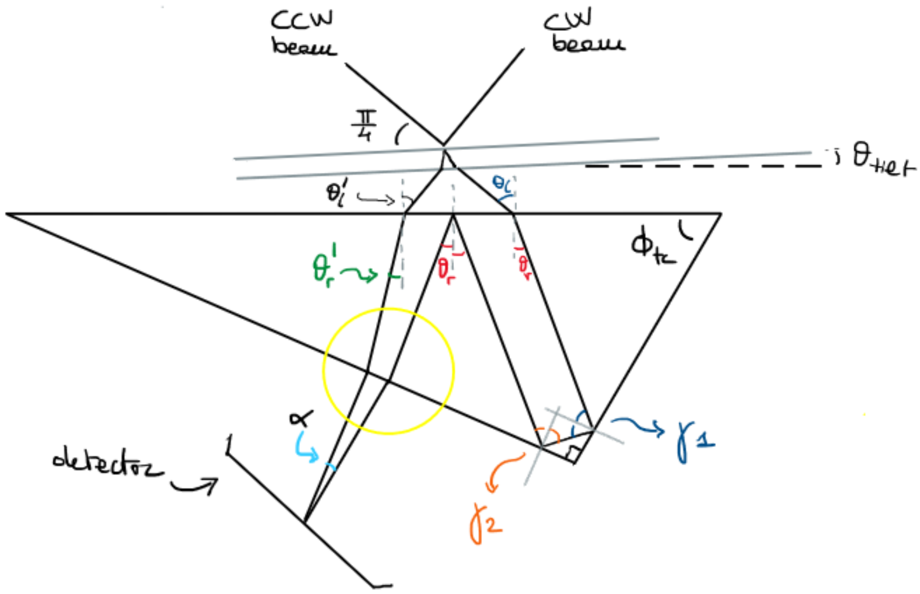



Figura 3.4: Schema di prisma singolo in caso di allineamento non perfetto. Per un ingrandimento dell'area evidenziata in giallo (zona di uscita dei fasci) si veda Figura (3.5).

Questa volta:

$$\theta_i = \frac{\pi}{4} + \theta_{tilt},\ \theta_i' = \frac{\pi}{4} - \theta_{tilt} = \theta_i - 2\theta_{tilt} \tag{3.16}$$

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n}\right),\ \theta_r' = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i'}{n}\right) \tag{3.17}$$

Le relazioni (3.10) e (3.12)continuano a valere.
Inoltre (si veda Figura (3.5)):

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \phi_{tc} - \theta_r,\ \beta' = \frac{\pi}{2} - \phi_{tc} - \theta_r' \tag{3.18}$$

$$\beta_{out} = \arcsin\left(n\sin\beta\right),\ \beta_{out}' = \arcsin\left(n\sin\beta'\right) \tag{3.19}$$

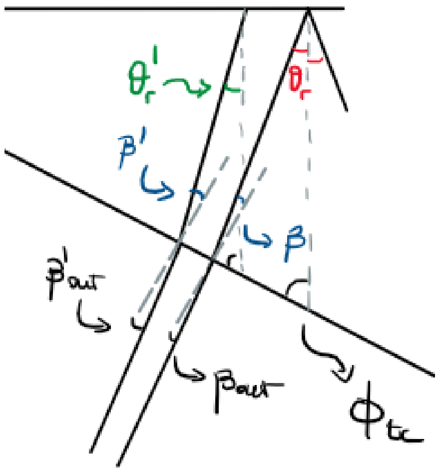



Figura 3.5: Ingrandimento della zona di uscita.

L'angolo di deviazione tra i due fasci in uscita è:

$$\alpha = \beta'_{out} - \beta_{out} \tag{3.20}$$

In questo caso vogliamo considerare l'angolo $\phi_{tc}$ noto a priori, in particolare coincidente con i valori (3.14) e (3.15) trovati in precedenza.

Vogliamo trovare la massima e la minima ampiezza di $\theta_{tilt}$ tali per cui $\gamma_1, \gamma_2 > \theta_{cr}$. Tali valori saranno dati da:

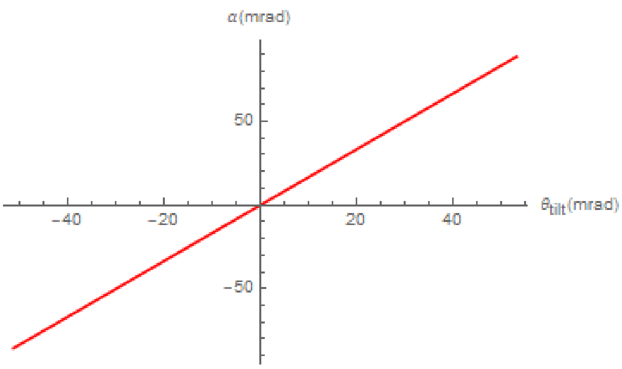
$$l_+ = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left\{n \sin\left[\phi_{tc} - \theta_{cr}\right]\right\}, \; l_- = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left\{n \sin\left[\phi_{tc} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{cr}\right)\right]\right\}$$

che nel nostro caso diventano:

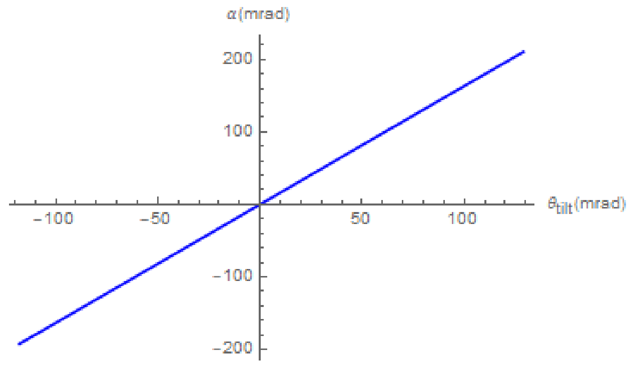
$$l_\pm = -\frac{\pi}{4} \pm \arcsin\left\{n \sin\left[\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{n} \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}n}\right]\right\}$$

Vediamo quindi che:

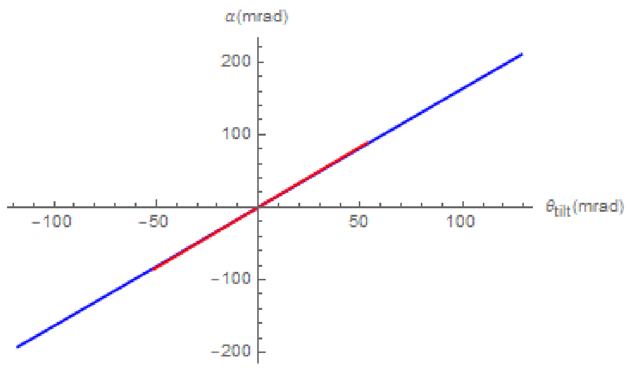
1. Per un prisma in *fused silica* il fascio CCW subisce due riflessioni totali fintanto che $\theta_{tilt}(mrad) \in [-51.28, 53.17]$.
   Volendo rappresentare la relazione tra l'angolo di deviazione $\alpha$ e $\theta_{tilt}$ otteniamo:



2. Per un prisma in BK7 il fascio CCW subisce due riflessioni totali fintanto che $\theta_{tilt}(mrad) \in [-117.68, 128.79]$.
   Volendo rappresentare la relazione tra l'angolo di deviazione $\alpha$ e $\theta_{tilt}$ otteniamo:




Confrontiamo i due grafici ottenuti:




Osserviamo quindi che in entrambi i casi l'angolo di deviazione $\alpha$ varia in modo circa lineare con $\theta_{tilt}$, in particolare $\alpha \simeq 1.67\theta_{tilt}$ nel caso di prisma in *fused silica* e $\alpha \simeq 1.64\theta_{tilt}$ per BK7 (dove è stato considerato il valore della derivata in $\theta_{tilt} = 0$ per fornire una stima del coefficiente angolare). La principale differenza tra i due casi, è l'intervallo di valori per l'angolo di disallineamento che consente due riflessioni totali per uno dei due fasci. Risulta essere più ampio nel caso di prisma in BK7.

## Prisma di Koester o doppio prisma

Consideriamo ora un prisma di Koester o doppio prisma. Esso è costituito da due prismi singoli trapezioidali retti identici incollati in modo speculare per la loro altezza, come illustrato in Figura 3.6:

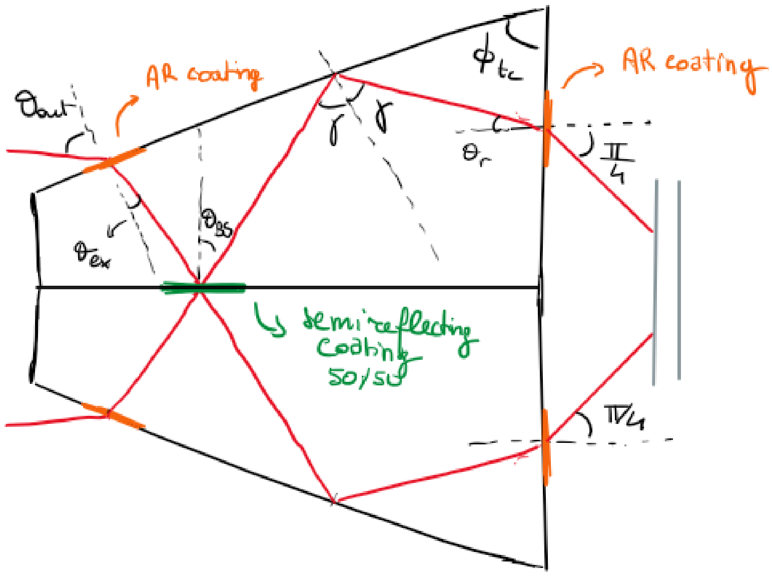



Figura 3.6: Schema di un prisma di Koester per angolo di disallineamento specchio-prisma nullo. Un coating all'interfaccia tra i due prismi singoli realizza un *beam splitter*.

Consideriamo inizialmente il caso di allineamento perfetto specchio-prisma. In questo caso, si vede immediatamente che i percorsi dei due raggi sono del tutto equivalenti.

Consideriamo (come nel caso di prisma singolo) $\theta_i = \frac{\pi}{4}$.

Dallo studio in ottica geometrica, purché $\phi_{tc}$ per costruzione sia tale che $\gamma > \theta_{cr}$, abbiamo:

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n}\right) \tag{3.21}$$

$$\phi_{tc} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \theta_r + \gamma \tag{3.22}$$

$$\theta_{BS} = \pi - (\pi - \gamma - \theta_r) - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\gamma + \theta_r \tag{3.23}$$

$$\theta_{ex} = \frac{\pi}{2} - [\pi - (\phi_{tc} + \theta_{BS})] = -\frac{\pi}{2} + \phi_{tc} + \theta_{BS} = 2\theta_r + 3\gamma - \pi \tag{3.24}$$

$$\theta_{out} = \arcsin\left[n \sin\theta_{ex}\right] \tag{3.25}$$

Scegliendo $\gamma = \pi/4 > \theta_{cr,fs}, \theta_{cr,BK7}$, si ha:

$$\theta_{BS} = \theta_r,\ \theta_{ex} = 2\theta_r - \frac{\pi}{4} \tag{3.26}$$

Inoltre:

1. Per un prisma in *fused silica*:

$$\phi_{tc,fs}(^\circ) = 74.0332^\circ,\ \theta_{out}(^\circ) = 19.2324^\circ \tag{3.27}$$

2. Per un prisma in BK7:

$$\phi_{tc,BK7}(^\circ) = 72.8207^\circ,\ \theta_{out}(^\circ) = 16.2471^\circ \tag{3.28}$$

Consideriamo ora il caso di allineamento specchio prisma non perfetto. In questo caso i percorsi dei due raggi luminosi non sono equivalenti.

Consideriamo lo schema in Figura 3.7:

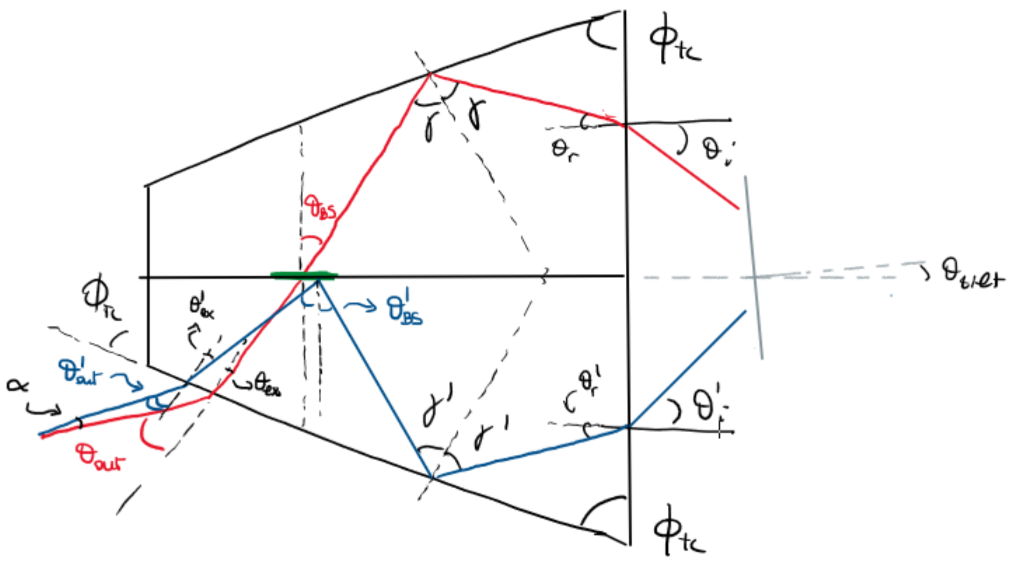



Figura 3.7: Schema di un prisma di Koester per angolo di disallineamento specchio-prisma non nullo. Sono evidenziati unicamente i raggi che emergono dall'interfaccia di uscita inferiore.

Vogliamo analizzare unicamente l'angolo di deviazione tra le direzioni dei raggi emergenti dall'interfaccia inferiore.

Questa volta abbiamo:

$$\theta_i = \frac{\pi}{4} - \theta_{tilt},\ \theta_i = \frac{\pi}{4} + \theta_{tilt} \tag{3.29}$$

Le relazioni tra gli angoli sono analoghe a quelle del caso di allineamento perfetto (l'apice è usato per indicare le grandezze angolari riferite al raggio inferiore):

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n}\right),\ \theta'_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta'_i}{n}\right) \tag{3.30}$$

$$\phi_{tc} = \theta_r + \gamma = \theta'_r + \gamma' \tag{3.31}$$

$$\theta_{BS} = -\frac{\pi}{2} + 2\gamma + \theta_r,\ \theta'_{BS} = -\frac{\pi}{2} + 2\gamma' + \theta'_r \tag{3.32}$$

$$\theta_{ex} = 2\theta_r + 3\gamma - \pi,\ \theta'_{ex} = 2\theta'_r + 3\gamma' - \pi \tag{3.33}$$

$$\theta_{out} = \arcsin\left[n\sin\theta_{ex}\right],\ \theta'_{out} = \arcsin\left[n\sin\theta'_{ex}\right] \tag{3.34}$$

$$\alpha = \theta_{out} - \theta'_{out} \tag{3.35}$$

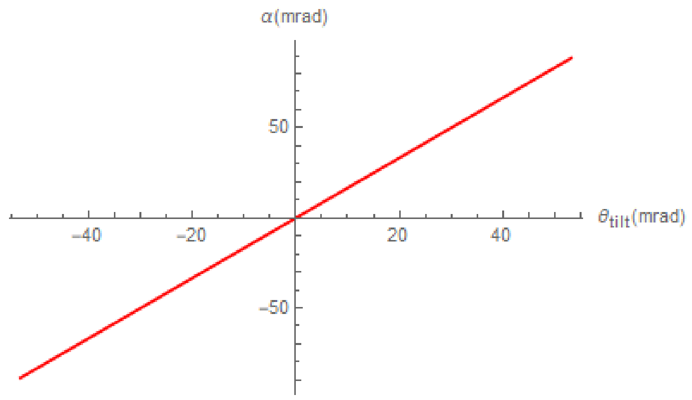
Questa volta vogliamo fissare l'angolo $\phi_{tc}$.

Quindi:

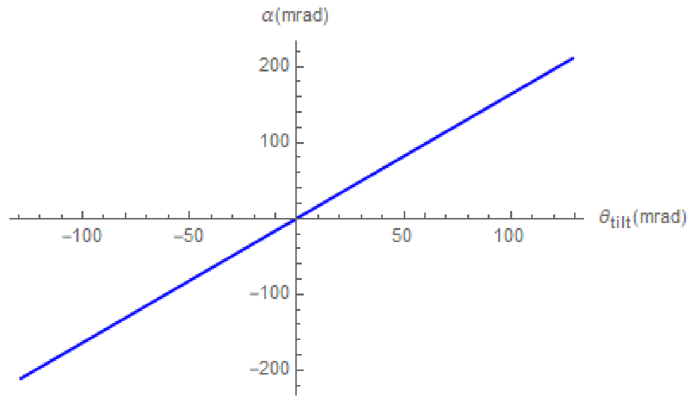
$$\theta_{ex} = 3\phi_{tc} - \theta_r - \pi,\ \theta'_{ex} = 3\phi'_{tc} - \theta'_r - \pi, \tag{3.36}$$

Scegliamo per esso i valori trovati in precedenza nel caso di prisma di Koester in *fused silica* e BK7 (vedi (3.27) e (3.28)). Gli angoli $\gamma$ e $\gamma'$ devono in ogni caso essere contemporaneamente maggiori dell'angolo critico.

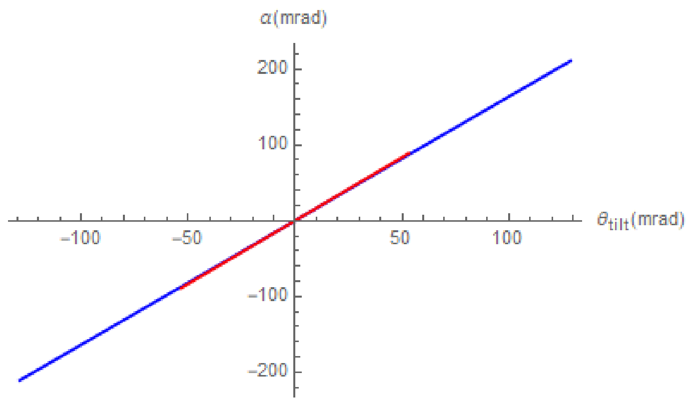
1. Per un prisma in *fused silica* la condizione di riflessione totale è soddisfatta per $\theta_{tilt}(mrad) \in [-53.17, 53.17]$.
   Volendo rappresentare la relazione tra l'angolo di deviazione $\alpha$ e $\theta_{tilt}$ otteniamo:




2. Per un prisma in *fused silica* la condizione di riflessione totale è soddisfatta per $\theta_{tilt}(mrad) \in [-128.79, 128.79]$.
   Volendo rappresentare la relazione tra l'angolo di deviazione $\alpha$ e $\theta_{tilt}$ otteniamo:




Confrontiamo i due grafici ottenuti:




Osserviamo quindi che in entrambi i casi l'angolo di deviazione $\alpha$ varia in modo circa lineare con $\theta_{tilt}$, in particolare $\alpha \simeq 1.67\theta_{tilt}$ nel caso di prisma in *fused silica* e $\alpha \simeq 1.64\theta_{tilt}$ per BK7 (dove è stato considerato il valore della derivata in $\theta_{tilt} = 0$ per fornire una stima del coefficiente angolare), quindi in modo del tutto analogo al caso di singolo prisma.

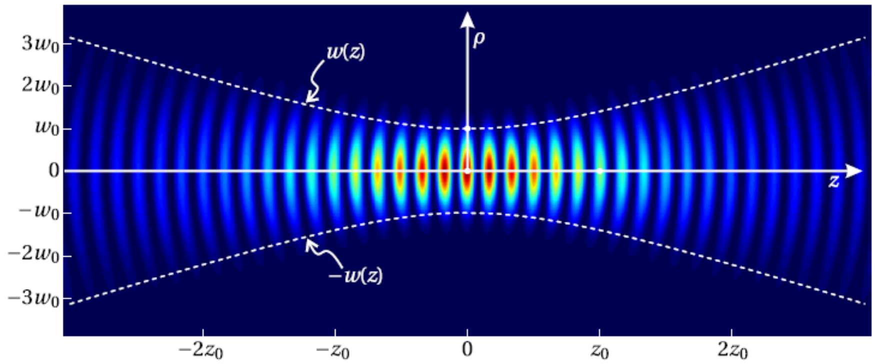



Figura 3.8: Parte reale del campo di un fascio laser gaussiano a un istante di tempo fissato. Immagine reperibile in [27].

## 3.4 Sovrapposizione di fasci gaussiani

Vogliamo ora abbandonare l'approssimazione dell'ottica geometrica e considerare le dimensioni fisiche dei fasci al fine di analizzare il rapporto di contrasto del segnale in uscita.

Sono detti fasci o *modi gaussiani* quei fasci di radiazione elettromagnetica il cui inviluppo dell'ampiezza nel piano trasversale alla direzione di propagazione ha un profilo gaussiano [27].

Il modo trasversale fondamentale ($\mathrm{TEM}_{00}$)[3] è il profilo più comune per i fasci laser.

Assunto $z$ come asse di propagazione, la generica espressione per il campo elettrico di un modo gaussiano $\mathrm{TEM}_{00}$ è:

$$\mathbf{E}(x,y,z) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \exp\left(-ikz - i\frac{k\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z)\right) \tag{3.37}$$

dove $\mathbf{A}_0$ è un vettore costante ortogonale all'asse $z$, $k = 2\pi/\lambda$ è il modulo del vettore d'onda e i restanti parametri, non tutti indipendenti, sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$w^2(z) = w_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right),\ z_0 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2$$
$$R(z) = z\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right),\ \xi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$w(z)$ è un parametro detto *beam waist* e coincide con la distanza dall'asse $z$ per la quale l'ampiezza si riduce di un fattore $e^{-1}$; $z_0$ è detto *distanza di Rayleigh*; $R(z)$ è il raggio di curvatura dei fronti d'onda del fascio; $\xi(z)$ è detto *fase di Guoy.* Si ha: $w(0) = w_0$, $w(z_0) = \sqrt{2}w_0$.

Il parametro $w_0$ è solitamente dell'ordine dei millimetri. Inoltre, GINGER è un giroscopio laser ad He-Ne, la cui lunghezza d'onda è $\lambda$ =632.8 nm.

É utile, al fine di calcolare la visibilità, introdurre il seguente campo normalizzato rispetto all'integrazione nelle direzioni $x$ e $y$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} w^{-1}(z) e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \exp\left(-ikz - i\frac{k\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z)\right) \tag{3.38}$$

Nella sezione precedente abbiamo visto come la distanza dei prismi dagli specchi e l'allineamento non perfetto di questi ultimi. possano comportare una separazioni nelle direzioni in cui si propagano i fasci da far ricombinare. Nel corso di questa sezione analizzeremo la grandezza *visibilità* definita dalla formula (3.8) al variare dell'angolo relativo tra le direzioni dei fasci

[3]Per modo trasversale si intende un fascio di radiazione in cui i campi elettrici e magnetici sono entrambi ortogonali alla direzione di propagazione.

o al variare della distanza tra di essi nel caso in cui abbiano stessa direzione. Faremo uso in particolare della relazione (3.9).

## Sovrapposizione di fasci gaussiani non paralleli

Vogliamo considerare il caso di due fasci $\mathrm{TEM}_{00}$ identici, ma con vettori d'onda, entrambi contenuti nel piano zy, le cui direzioni formano tra loro un angolo $\theta$ non nullo. Supponiamo, per semplicità, che le rette di propagazione si intersechino in un punto di coordinate $z^*$ sull'asse $z$ (coincidente con la retta di propagazione del primo fascio).

Consideriamo la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\theta - (z - z^*)\sin\theta \\ z' = y\sin\theta + (z - z^*)\cos\theta + z^* \end{cases} \tag{3.39}$$

Allora l'espressione del campo elettrico per un fascio $\mathrm{TEM}_{00}$ ruotato rispetto al primo (che si propaga in direzione z), si ottiene sostituendo la trasformazione di coordinate (3.39) nella formula (3.38).

Per semplificare ulteriormente l'analisi, vogliamo calcolare l'integrale di sovrapposizione fra i due fasci nel piano $z = z^*$. Ciò corrisponde alla situazione fisica di un fotorivelatore la cui superficie sia ortogonale alla direzione di propagazione del primo fascio.

Quindi l'espressione della visibilità si riduce a:

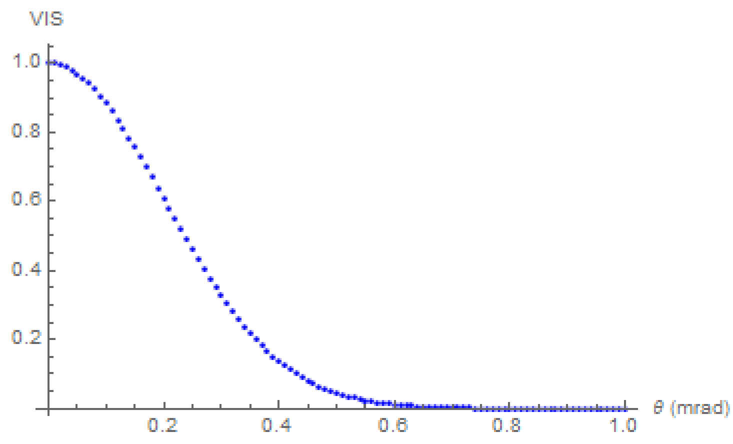
$$\mathrm{VIS}\,(\theta, z) = \left|\mathrm{Re}\left\{\iint_S E\,(x, y, z)\,E^*\,(x, y\cos\theta, y\sin\theta + z)\,dxdy\right\}\right| \tag{3.40}$$

dove abbiamo effettuato il cambio di notazione $z^* \equiv z$.

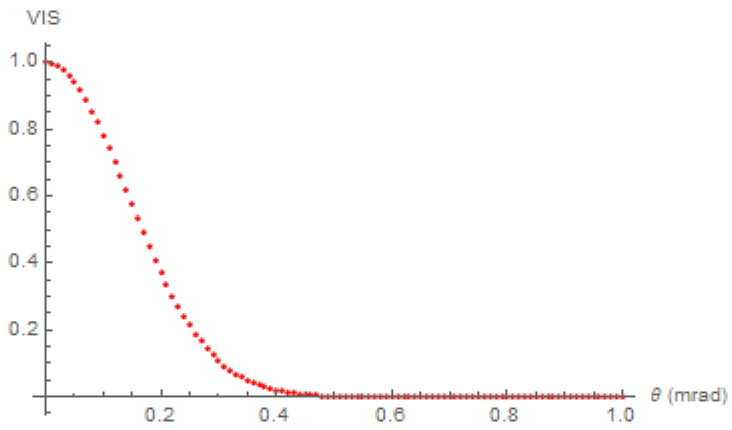
Studiamo il comportamento della funzione (3.40) al variare di alcuni dei suoi parametri. In ognuno dei casi analizzati considereremo costante la lunghezza d'onda e pari alla lunghezza d'onda del laser He-Ne $\lambda = 632.8$ nm. Inoltre considereremo gli integrali calcolati su una regione quadrata di 60 cm di lato centrata sull'asse $z$ e ortogonale a quest'ultimo.

**Visibilità al variare dell'angolo $\theta$:**

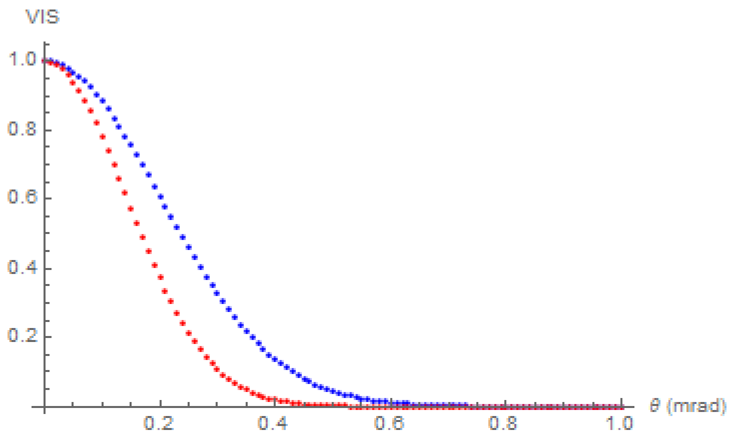
Per $w_0 = 0.71\,mm$ e $z = z_0 \simeq 2.5\,m$, si ha:




Per $w_0 = 1\,mm$ e $z = z_0 \simeq 5\,m$ si ha:

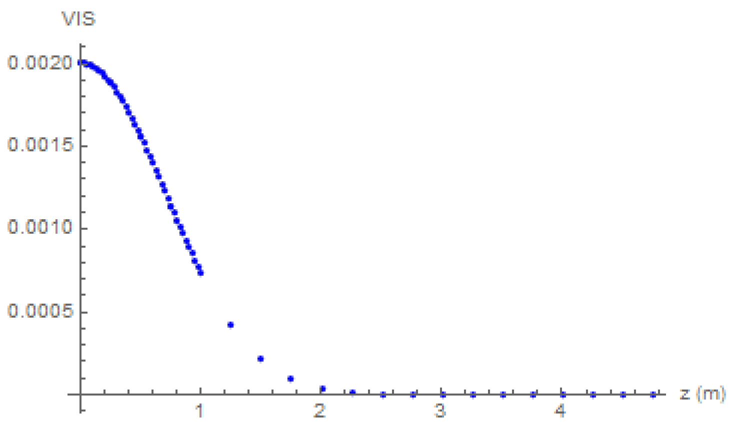



Confrontiamo i due grafici:




Dal confronto tra i due grafici osserviamo che in questo caso il fascio con $w_0$ minore è migliore. In entrambi i casi la visibilità va rapidamente a zero, annullandosi praticamente già per $\theta \simeq 0.5\,mrad$ . Ciò implica che, ad esempio, per avere un rapporto di contrasto inferiore a VIS $= 0.5$ bisogna avere fasci in uscita con deviazioni non superiori a $\theta = 0.2$, che alla luce dell'analisi in ottica geometrica, implica un angolo di disallineamento specchio-prisma dell'ordine del decimo di mrad.

Per valori dell'angolo $\theta$ maggiori del decimo di mrad, la visibilità risulta essere praticamente nulla indipendentemente da $z$. Possiamo vederlo ad esempio nel caso in cui $\theta = 1\,mrad$ e $w_0 = 0.71\,mm$ ($z_0 =\simeq 2.5\,m$):



### Sovrapposizione di fasci gaussiani paralleli

Vogliamo considerare ora due fasci $\mathrm{TEM}_{00}$ identici che si propagano nella stessa direzione ($z$), ma i cui centri siano traslati di una quantità $x_0$ nella direzione $x$.

Assumendo che il primo fascio ("non traslato") abbia il centro coincidente con l'origine delle coordinate, allora l'espressione per i due campi sarà:

$$\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}\left(x, y, z\right), \; \mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}\left(x - x_0, y, z\right) \tag{3.41}$$

In questo caso la formula (3.38) per la visibilità si riduce a:

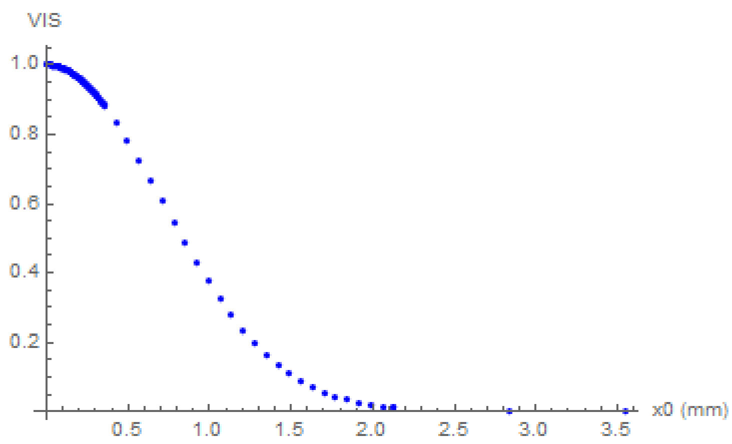
$$\mathrm{VIS}\left(x_0, z\right) = \left| \mathrm{Re}\left\{ \iint_S E\left(x, y, z\right) E^*\left(x - x_0, y, z\right) dxdy \right\} \right| \tag{3.42}$$

dove ancora una volta calcoliamo l'integrale di sovrapposizione a $z$ fissato.

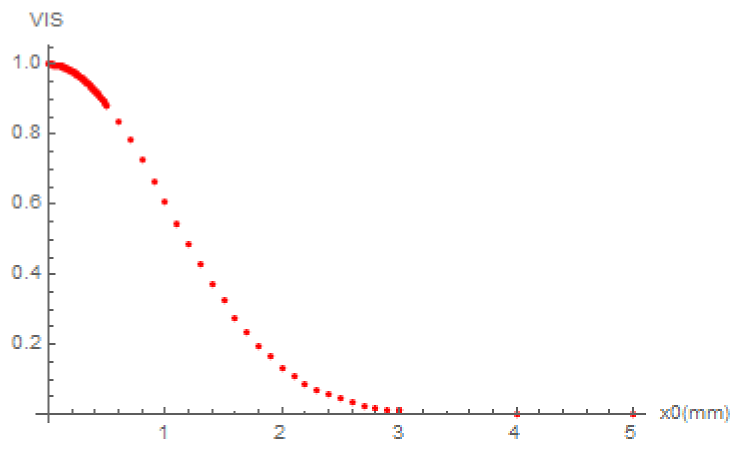
Studiamo il comportamento della funzione (3.42) al variare di alcuni dei suoi parametri. In ognuno dei casi analizzati considereremo costante la lunghezza d'onda e pari alla lunghezza d'onda del laser He-Ne $\lambda = 632.8$ nm. Inoltre considereremo gli integrali calcolati su una regione quadrata di 60 cm di lato centrata sull'asse $z$ e ortogonale a quest'ultimo.

**Visibilità al variare della separazione $x_0$:**

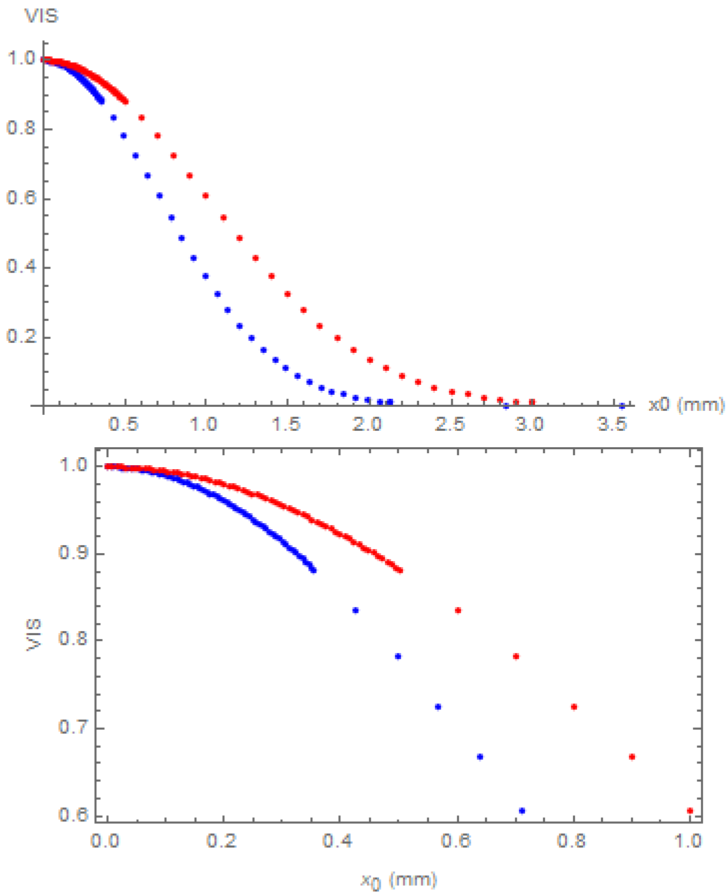
Per $w_0 = 0.71\,mm$ e $z = z_0 \simeq 2.5\,m$ si ha:




Per $w_0 = 1\,mm$ e $z = z_0 \simeq 5\,m$ si ha:




Confrontiamo i due grafici:




Dal confronto tra i due grafici osserviamo che in questo caso il fascio con $w_0$ maggiore è migliore. In entrambi i casi per avere un buon rapporto di contrasto è necessario che i fasci abbiano separazioni dei centri dell'ordine dei loro *beam waist* o inferiori.

Dagli esempi di cui sopra, vediamo quindi la necessità di avere fasci quanto più sovrapposti possibili al fine di avere un buon rapporto di contrasto. Abbiamo visto infatti che, per avere buoni valori della visibilità, bisogna richiedere deviazioni angolari delle direzioni dei fasci dell'ordine dei decimi di mrad e separazioni fra i centri non superiori al millimetro. Ciò implica un elevato grado di controllo della geometria del sistema.

# Conclusioni

Nel corso di questa tesi abbiamo illustrato le principali caratteristiche degli effetti gravitoelettromagnetici e la possibilità di investigarli tramite l'impiego di giroscopi laser.

In particolare abbiamo presentato il progetto GINGER, un esperimento *earth-based*, attualmente in fase di approvazione, il cui scopo è la misurazione degli effetti sopracitati generati dalla rotazione terrestre.

Recenti studi condotti sul suo prototipo, GINGERino, situato nei Laboratori del Gran Sasso [14], indicano che GINGER sarebbe in grado di misurare l'effetto geodetico e l'effetto Lense-Thirring con un'incertezza, rispettivamente, di una parte su $10^4$e $10^3$ del loro valore previsto nel framework della Relatività Generale.

Pertanto sarebbe possibile limitare i parametri delle teorie estese/alternative della gravitazione comparando le predizioni dei loro limiti PPN con i risultati forniti da GINGER.

Il principale vantaggio di poter investigare le teorie estese per mezzo di esperimenti a terra, consiste principalmente nel fatto che questi, in linea di principio, possono essere perfezionati e controllati più facilmente. Inoltre, permetterebbe di evitare alcune difficoltà tipiche degli esperimenti spaziali. Ad esempio vengono evitate le problematiche legate alla sincronizzazione tra differenti sistemi di riferimento (es. la Terra e il satellite), in quanto la misura e l'analisi, in un esperimento a terra, vengono entrambe eseguite all'interno del sistema di laboratorio.

Per concludere, GINGER potrebbe quindi limitare i parametri delle teorie estese con un livello di accuratezza tale da poter competere con esperimenti spaziali come LARES e GP-B. Se si riuscirà a raggiungere tale obiettivo, questo potrebbe diventare il segnale di avvio per un nuovo tipo di investigazione dell'interazione gravitazionale basato su esperimenti a terra.

# Appendice A

# Interferenza tra onde non piane

Considereremo due onde trasversali, con stessa polarizzazione, con ampiezza la cui forma è data da:

$$E_i(x,y,z,t) \equiv E_i(x,y,z)\, e^{-i\omega_i t + i\varphi_i},\ i = 1,2 \tag{A.1}$$

Il campo totale è dato da:

$$E(x,y,z,t) = E_1(x,y,z)\, e^{-i\omega_1 t + i\varphi_1} + E_2(x,y,z)\, e^{-i\omega_2 t + i\varphi_2} \tag{A.2}$$

Poiché si può far vedere che l'intensità è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza del campo, scriviamo:

$$I(x,y,z,t) = |E(x,y,z,t)|^2 = \left|E_1(x,y,z)\, e^{-i\omega_1 t + i\varphi_1} + E_2(x,y,z)\, e^{-i\omega_2 t + i\varphi_2}\right|^2$$

dove abbiamo incluso le costanti nella definizione di $I$.

Per definizione: $|a|^2 \equiv aa^*, a \in \mathbb{C}$, dove $^*$ indica l'operazione di coniugazione complessa. Pertanto:

$$|E(x,y,z,t)|^2 = |E_1(x,y,z)|^2 + |E_2(x,y,z)|^2 + 2\mathrm{Re}\left[E_1(x,y,z)\, E_2^*(x,y,z)\, e^{i\Delta\omega t + i\varphi}\right] \tag{A.3}$$

Dove: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Poiché siamo interessati all'intensità integrata lungo le direzioni x,y (possiamo supporre ad esempio che la direzione z sia quella di propagazione di uno dei due fasci), scriviamo:

$$I(z,t) \equiv \iint_S I(x,y,z,t)\, dxdy \tag{A.4}$$

dove $S$ è la superficie del detector (contenuta nel piano x,y).

Pertanto:

$$I(z,t) = I_1(z) + I_2(z) + 2\mathrm{Re}\left\{\left(\iint_S E_1(x,y,z)\, E_2^*(x,y,z)\, dxdy\right) e^{i\Delta\omega t + i\varphi}\right\} \tag{A.5}$$

dove:

$$I_i(z) = \iint_S |E_1(x,y,z)|^2\, dxdy \tag{A.6}$$

# Bibliografia


[1] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientic and Virgo], ”Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102

[2] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientic and Virgo], ”GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral," Phys. Rev. Lett. **119** (2017) no.16, 161101

[3] K. Akiyama et al. [Event Horizon Telescope], ”First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole," Astrophys. J. **875** (2019) no.1, L1

[4] Hartle, J. B. *Gravity : An Introduction to Einstein's General Relativity.* Pearson New International ed. 2014. Print. Always Learning.

[5] Capozziello S., De Laurentis M., *Phyisics Reports* **509**, 167 (2011).

[6] https://www.asi.it/scienze-della-terra/lares/

[7] https://www.nasa.gov/mission_pages/gpb/index.html

[8] http://einstein.stanford.edu/

[9] S. Capozziello, G. Lambiase, M. Sakellariadou, A. Stabile, and An. Stabile, ”Constraining models of extended gravity using Gravity Probe B and LARES experiments,” Phys. Rev. D 91, 044012

[10] https://web.infn.it/GINGER/index.php/it/home

[11] https://web.infn.it/GINGER/index.php/it/all

[12] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich, and M. O. Scully Rev. Mod. Phys. 57, 61

[13] Post, E. J., 1967, Rev. Mod. Phys. 39, 475.

[14] A. D. V. Di Virgilio, U. Giacomelli, A. Simonelli, G. Terreni, A. Basti, N. Beverini, G. Carelli, D. Ciampini, F. Fuso and E. Maccioni, et al. ”Reaching the sensitivity limit of a Sagnac gyroscope through linear regression analysis," [arXiv:2101.08179 [gr-qc]].

[15] Di Virgilio, A.D.V., Belfi, J., Ni, WT. et al. GINGER: A feasibility study. Eur. Phys. J. Plus 132, 157 (2017). https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11452-6

[16] Capozziello, S., Altucci, C., Bajardi, F. et al. ”Constraining theories of gravity by GINGER experiment”. Eur. Phys. J. Plus 136, 394 (2021). https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01373-4

[17] Misner, C. W., K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, 1973, *Gravitation* (Freeman, San Francisco)

[18] V. Barone. *Relatività. Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, (2004).

[19] Bouyer, P. The centenary of Sagnac effect and its applications: From electromagnetic to matter waves. Gyroscopy Navig. 5, 20–26 (2014). https://doi.org/10.1134/S2075108714010039

[20] Plebanski, J., 1960, Phys. Rev. 118, 1396

[21] S.Capozziello, M.Funaro. *Introduzione alla relatività generale: con applicazione all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*, Liguori, (2006), Napoli.

[22] American Journal of Physics 83, 427 (2015); https://doi.org/10.1119/1.4904319

[23] F. Bosi, G. Cella, A. Di Virgilio, A. Ortolan, A. Porzio, S. Solimeno, M. Cerdonio, J. P. Zendri, M. Allegrini, J. Belfi, N. Beverini, B. Bouhadef, G. Carelli, I. Ferrante, E. Maccioni, R. Passaquieti, F. Stefani, M. L. Ruggiero, A. Tartaglia, K. U. Schreiber, A. Gebauer, and J-P. R. Wells Phys. Rev. D 84, 122002; https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.122002

[24] A. Di Virgilio, M. Allegrini, A. Beghi, J. Belfi, N. Beverini, F. Bosi, B. Bouhadef, M. Calamai, G. Carelli, D. Cuccato, E. Maccioni, A. Ortolan, G. Passeggio, A. Porzio, M. L. Ruggiero, R. Santagata, A. Tartaglia, *A ring lasers array for fundamental physics*, *Comptes Rendu Physique* **15**:866 (2014); https://doi.org/10.1016/j.crhy.2014.10.005

[25] A. Tartaglia (2015). *Testing General Relativity.* arXiv:1503.00920

[26] K.U. Schreiber, et al., Pure Appl. Geophys. 166 (2009) 1485–1498

[27] J. Peatross and M. Ware, Physics of Light and Optics, 2015 edition, available at optics.byu.edu

[28] Zangwill, A. (2012). Modern Electrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139034777

[29] http://www.fs.wettzell.de/LKREISEL/G/LaserGyros.html