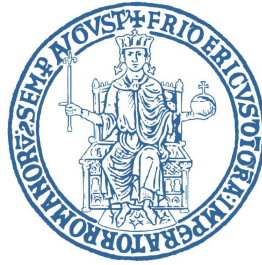


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Moto Browniano e applicazioni ai mercati finanziari

Relatori:

Prof. Mario Nicodemi

Candidato:

Davide Conte
Matr. N85001468

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	4
1 Teoria delle Probabilità	5
1.1 Probabilità	5
1.2 Variabili Casuali	6
1.3 Momenti e Funzione Caratteristica	7
1.4 Distribuzioni Di Probabilità Notevoli	8
1.4.1 Distribuzione Binomiale	8
1.4.2 Distribuzione Gaussiana	10
1.4.3 Distribuzione log-normale	11
1.4.4 Distribuzioni Stabili	12
2 Random Walk e Moto Browniano	13
2.1 Teoria Random Walk caso Unidimensionale	14
2.1.1 Caso discreto	14
2.1.2 Caso continuo	15
2.2 Teorema del limite centrale	15
2.3 Processi Stocastici	16
2.3.1 Processo Markoviano	17
2.3.2 Processo di Wiener	17
2.4 Calcolo Stocastico	18
2.4.1 Integrale Stocastico	18
2.4.2 Equazione Differenziale Stocastica	20
2.4.3 Formula di Itô	20
2.5 Moto Browniano Libero	21
3 Modelli Del Mercato Finanziario	25
3.1 Nozioni Basilari	25
3.1.1 Ipotesi Mercato Efficiente	26
3.2 Moto Browniano Geometrico	26
3.3 Derivati	28

<i>INDICE</i>	2
3.3.1 Futures	29
3.3.2 Options	29
3.4 Modello Di Black-Scholes	30
3.4.1 Ipotesi equazione Black-Scholes	30
3.4.2 Soluzione e Interpretazione	33
3.5 Opzioni in Mercati Reali	37
Conclusioni	39

Introduzione

La casualità nasce da una incompleta conoscenza della realtà, dalla mancanza di informazioni, di mezzi, che permetterebbero di avere una perfetta previsione del futuro. Per tale motivo si è abbandonata l'idea di una visione deterministica del futuro a favore di una statistica, in grado di accettare la casualità, e cercare di costruire modelli in grado di dare una descrizione sempre più fedele della realtà. I mercati finanziari offrono un terreno perfetto per poter applicare gli strumenti di cui si serve la statistica. Saranno proprio questi strumenti e le loro applicazioni nel campo finanziario, l'argomento principale della seguente tesi.

Sebbene nel 1905 A.Einstein teorizzò per primo il modello del Random Walk per spiegare il comportamento delle particelle immerse in un fluido, nel 1900, Louis Bachelier presentò una formalizzazione del modello nella sua tesi di dottorato "*Théorie de la spéculation*". Lo scopo era quello di descrivere l'andamento temporale dei prezzi dei titoli alla borsa di Parigi. Da un punto di vista matematico i due modelli presentano alcuni aspetti in comune: la variazione delle grandezze in esame sono indipendenti da quelle precedenti e che la distribuzione di probabilità di tali variazioni è gaussiana. Nel corso degli anni il modello è stato rivisitato in modo da poter descrivere sempre meglio l'andamento reale dei mercati finanziari. Nel 1973 Black e Scholes proposero un modello basato su una correzione del moto Browniano, detto *moto Browniano Geometrico*. Diversamente dal modello precedente, le variazioni aleatorie sono questa volta descritte da distribuzioni log-normali, in modo da eliminare il problema di assets con prezzi negativi, che emergevano nel lavoro di Bachelier. Questo modello rappresenta una prima approssimazione di ciò che realmente accade nei mercati finanziari. Per tale motivo, esistono numerosi modelli alternativi validi per diverse condizioni rispetto a quelle di Black-Scholes.

La tesi è articolata in 3 capitoli. Nel capitolo 1 sono stati richiamati alcuni dei concetti principali della teoria delle probabilità, in modo da poter definire tutte le variabili e, le rispettive proprietà, necessarie per definire le grandezze stocastiche

presenti nei capitoli successivi. In particolare, è stata definita la probabilità, le variabili aleatorie, momenti e funzione caratteristica e, infine, le distribuzioni di probabilità di rilievo nella finanza. Nel capitolo 2 sono stati discussi i modelli di random walk e moto Browniano, utilizzando i risultati ottenuti descrivendo un processo stocastico: integrale stocastico, EDS e la formula di Itô. Nel capitolo 3 sono stati definiti i principali elementi di un mercato finanziario ed è stato descritto, una volta analizzato il moto Browniano geometrico, il modello di Black-Scholes per prezzare le opzioni Europee in determinate condizioni di mercato. Sono state fornite le soluzioni e interpretazioni di tale equazione e anche i limiti in cui essa perde la sua funzionalità.

Capitolo 1

Teoria delle Probabilità

1.1 Probabilità

Definizione 1. Uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ è una terna composta da: Ω detto *spazio dei campioni*, $\mathcal{A}$ una σ -algebra e una *misura di probabilità* $\mathcal{P}$.

Lo spazio campionario Ω è l'insieme dei possibili outcomes di un esperimento casuale. Ciascuno di questi possibili esiti è detto *evento elementare*. Con il termine *evento*, si fa invece riferimento ad un qualsiasi sottoinsieme $A \subseteq \Omega$; dunque un evento è un insieme di uno o più eventi elementari.

Dato uno spazio campionario Ω non vuoto, una famiglia di eventi $\mathcal{A}$ è detta una σ -algebra se contiene Ω ed è chiusa rispetto le operazioni di complementazione e unione numerabile, ossia devono essere soddisfatte le seguenti proprietà:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Dalla prima proprietà discende che l'intero spazio campionario Ω è esso stesso un evento, in quanto insieme di eventi elementari; è detto evento certo perchè comprende tutti i possibili outcomes di un esperimento.

La seconda asserisce che la negazione di un evento è essa stessa un evento.

Infine, dalla terza proprietà, si ricava che qualsiasi unione di eventi è un evento.

La misura di probabilità è una funzione che assegna ad ogni evento $A \in \mathcal{A}$, un numero $\mathcal{P}(A) \in [0,1]$. In quanto misura $\mathcal{P}$ deve soddisfare le seguenti proprietà:

- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathcal{P}(A) \geq 0$ (assioma di non negatività);
- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$;

Se $A_1, A_2, A_3, \dots$, è una successione di eventi in $\mathcal{A}$, allora:

- $\mathcal{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$ (assioma di σ -additività);
- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ (Condizione di normalizzazione).

1.2 Variabili Casuali

Definizione 2. Una variabile casuale, X , è una funzione $\mathcal{P}$ -integrabile sullo spazio delle probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Il suo valore, al verificarsi di un evento A è:

$$X(A) = \int_A X(\omega) d\omega$$

Contrariamente al lancio di un dado, il cui risultato può variare da 1 a 6, la variazione di un asset finanziario, è arbitraria. Al fine di descrivere un processo casuale, il cui risultato è un numero reale, si utilizza la densità di probabilità $p_X(x)$, come la probabilità che X sia compreso in un intervallo di larghezza dx intorno a $X=x$ è uguale a $p_X(x)dx$. Più rigorosamente, si può affermare che:

Definizione 3. La funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria X è un'applicazione $p_X(x)$ non negativa integrabile secondo Lebesgue e reale di variabile reale, tale che la probabilità dell'insieme A sia:

$$P(X \in A) = \int_A p_X(x) dx \quad \forall A \in \Omega$$

Pertanto, la funzione è definita nel seguente modo:

$$p_X(\bar{x}) : \bar{x} \Rightarrow \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < \bar{x} < x + dx)}{dx}$$

Essa è una densità in quanto rapporto di una probabilità e una ampiezza. Essendo tale, dipende dall'unità scelta per misurare X : il valore numerico di $P(X)$ può cambiare se si cambiano unità di misura, ma la probabilità che X sia compreso tra due valori, è indipendente dall'unità. Per la condizione di normalizzazione si ha:

$$P(X) = \int_{X_m}^{X_M} p_X(x) dx = 1$$

e, di conseguenza:

$$P(X) \geq 0.$$

1.3 Momenti e Funzione Caratteristica

Definizione 4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria definita su tale spazio. Il valore atteso di X è:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathcal{P}$$

ossia l'integrale di X rispetto la misura di probabilità $\mathcal{P}$.

Nel caso di una variabile casuale discreta, con funzione di probabilità p_i , il valore atteso è definito come:

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Nel caso di una variabile continua la cui funzione di densità di probabilità è $p_X(x)$, le definizioni diventano:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx$$

Il valore atteso è dunque la somma dei possibili valori della variabile studiata, ciascuno moltiplicato per la propria probabilità di verificarsi, ossia la media ponderata dei risultati.

Definizione 5. La varianza della variabile aleatoria X è definita nel seguente modo:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

La varianza fornisce una misura di quanto i valori assunti dalla variabile stessa si discostino quadraticamente dal valore atteso $\mathbb{E}[X]$.

Più in generale, si può definire il *momento teorico* di origine m e ordine k di una variabile casuale, come il valore atteso della k -esima potenza dei valori:

$$\mu_{m,k} = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^k p_i .$$

Nel caso di una distribuzione continua, si ha:

$$\mu_{m,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k p_X(x) dx$$

dove $p_X(x)$ denota la funzione densità di probabilità della variabile casuale.

Definizione 6. Si definisce momento centrale un momento teorico con origine $\mathbb{E}[X]$ e di ordine k per cui:

$$m_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}[X])^k p_i,$$

e nel caso continuo:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^k p_X(x) dx.$$

Per scopi pratici è conveniente introdurre la *funzione caratteristica*:

$$\widehat{F}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} P(x) dx$$

la quale è proporzionale alla trasformata di Fourier della distribuzione di probabilità. Attraverso la funzione caratteristica è possibile generare tutti i momenti di ordine k di una variabile casuale x .

$$m_k = (-i)^k \frac{\partial^k \widehat{F}(z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}.$$

1.4 Distribuzioni Di Probabilità Notevoli

Nella seguente sezione verranno discusse tre distribuzioni di probabilità con le relative caratteristiche.

1.4.1 Distribuzione Binomiale

Sia p la probabilità che un certo evento si presenti, in un'unica prova, con una modalità p e sia $q = 1 - p$ la probabilità che esso non si verifichi.

Date n prove indipendenti:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

La distribuzione di probabilità discreta che descrive il numero k di successi su n prove è:

$$P(k) = P(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Vale la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Il valore atteso è:

$$\begin{aligned} m = \mathbb{E}[k] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!k}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!(k-1)!} p^{k-1} q^{n-k} = \end{aligned}$$

Posto $k-1=r$, si ha

$$= np \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} p^r q^{n-1-r} = np$$

Mentre il momento di secondo ordine:

$$\mathbb{E}[k^2] = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!k}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$

Posto $k-1=r$

$$np \sum_{r=0}^n \frac{(n-1)!(r+1)!}{(n-1-r)!} p^r q^{n-1-r} = np[(n-1)p + 1] = n(n-1)p^2$$

Da cui:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(k - \mathbb{E}(k))^2] = \mathbb{E}(k^2) - \mathbb{E}^2(k) = npq.$$

$$\sigma_n = \sqrt{npq}$$

La funzione caratteristica è:

$$F(z) = \langle z^n \rangle = (zp + q)^n$$

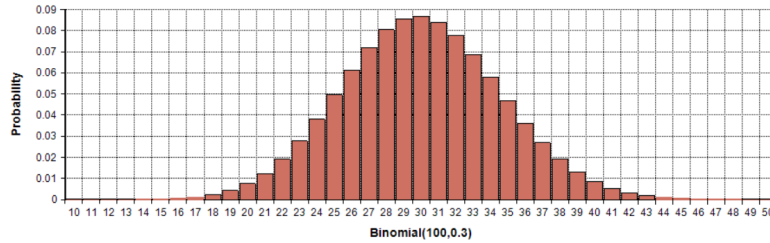


Figura 1.1: Esempio distribuzione binomiale con 100 conteggi, valore atteso 0 e varianza 3. *Fonte: wiki.analytica*

1.4.2 Distribuzione Gaussiana

La *distribuzione gaussiana* o *distribuzione normale* è una distribuzione di probabilità continua, la cui funzione di densità di probabilità è:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

dove m è il valore atteso e σ^2 la varianza. La distribuzione normale è certamente la più conosciuta dato che è strettamente legata al teorema del limite centrale che verrà discusso in seguito. Il numero di teste dopo n lanci di una moneta o il numero di molecole di ossigeno presenti nell'aria sono solo alcuni esempi di fenomeni che presentano una distribuzione gaussiana. Ci sono però una serie di eventi, tra cui le diverse velocità in un fluido e la fluttuazione dei prezzi in molti assets finanziari, che non presentano una distribuzione gaussiana.

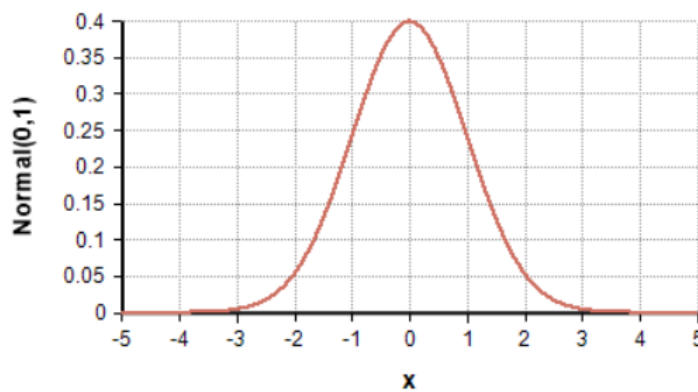


Figura 1.2: Esempio distribuzione normale con valore atteso 0 e varianza 1. *Fonte: wiki.analytica*

1.4.3 Distribuzione log-normale

La distribuzione log-normale è la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria x il cui $\log x$ segue una distribuzione normale.

Partendo da una distribuzione normale $P_G(x)$ e considerando solo i valori per cui $x \gg 1$ con $x > 0$, possiamo definire:

$$x = \ln y, \quad \ln x = \ln y_0 \quad dx = \frac{dy}{y}$$

ottenendo, così, la distribuzione log-normale:

$$P_G(x)dx = P_{LN}(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{[\ln \frac{y}{y_0}]^2}{2\sigma^2}\right] \frac{dy}{y}.$$

La distribuzione log-normale è normalizzata nel seguente modo:

$$\int_0^{+\infty} P_{LN}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x) dx = 1$$

I momenti sono dati da:

$$\langle y^n \rangle = \int_0^{+\infty} y^n P_{LN}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} P_G(x) dx = y_0^n e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - n\sigma^2) P_G(x) dx$$

Il cui risultato è :

$$\langle y^n \rangle = y_0^n e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}}$$

Nell'ambito della finanza matematica, si preferisce la distribuzione log-normale a quella gaussiana, per i seguenti motivi:

- L'esistenza di un tasso di rendimento aleatorio porta ad una statistica log-normale,
- dato che il prezzo di un asset finanziario non può essere negativo, la sua statistica non può essere gaussiana dal momento in cui, almeno in teoria, ammette valori negativi mentre una log-normale li esclude per costruzione.

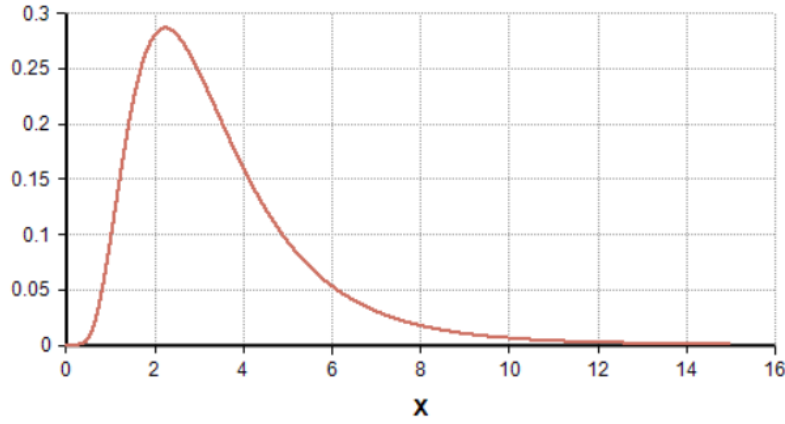


Figura 1.3: Esempio distribuzione log-normale. *Fonte: wiki.analytica*

1.4.4 Distribuzioni Stabili

Le distribuzioni finora presentate sono dette *stabili*, in quanto la composizione lineare di due variabili aleatorie indipendenti con la distribuzione, restituisce ancora la stessa distribuzione. Levy e Khintchine risolsero il problema generale nel determinare l'intera classe di distribuzioni stabili: trovarono la forma più generale della funzione caratteristica di un processo stabile:

$$\ln y(q) \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha [1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan(\frac{\pi}{2}\alpha)] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma|q|^\alpha [1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln |q|] & [\alpha = 1] \end{cases}$$

dove $0 < \alpha < 2$ è un fattore positivo, μ è un numero reale e β è il parametro di asimmetria che varia tra -1 e 1.

Per una distribuzione simmetrica ($\beta = 0$) e $\mu = 0$, la funzione caratteristica assume la seguente forma:

$$\phi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}$$

Si noti che per $\alpha = 2$ si ottiene la funzione caratteristica della distribuzione gaussiana. La distribuzione sarà:

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq.$$

Capitolo 2

Random Walk e Moto Browniano

Dato un set di N variabili casuali indipendenti S_i , ciascuna con una distribuzione di probabilità $P_i(S_i)$ di media finita μ_i e varianza σ_i^2 ; la variabile casuale ottenuta dalla loro somma

$$S(N) = S_1 + S_2 + \dots + S_N$$

è detta *Random Walk* di N elementi.

Si consideri il seguente esempio:

Si supponga che la variabile somma rappresenti la variazione del prezzo di un asset tra oggi e dopodomani (X), che è data dalla somma dell'incremento tra oggi e domani (X_1) e tra domani e dopodomani (X_2).

$$X = X_1 + X_2$$

dove X_1 e X_2 sono due variabili indipendenti aventi rispettivamente distribuzioni di probabilità $P(X_1)$ e $P(X_2)$. La probabilità che X sia uguale a x (all'interno di un intervallo di ampiezza dx) è data dalla somma su tutte le possibilità di avere $X = x$ (ossia tutte le combinazioni $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$, tali che $x_1 + x_2 = x$), pesate per le rispettive probabilità. Essendo le variabili X_1 e X_2 indipendenti, la probabilità congiunta che $X_1 = x_1$ e $X_2 = x - x_1$ è uguale a $P_1(x_1)P_2(x - x_1)$, da cui si può ottenere:

$$P(x, N = 2) = \int P_1(x'_1)P_2(x - x') dx'.$$

Questa equazione definisce la convoluzione tra $P_1(x)$ e $P_2(x)$.

Generalizzando quanto detto per una somma di N variabili indipendenti, si ha:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

e la distribuzione di probabilità è:

$$P(x, N) = \int P_1(x'_1) \dots P_{N-1}(x'_{N-1}) P_N(x - x'_1 - \dots - x'_{N-1}) \prod_{i=1}^{N-1} dx'_i.$$

Si deduce, dunque, che la densità di probabilità della somma di due variabili indipendenti è la convoluzione delle loro densità di probabilità individuali.

Segue che il valore medio della somma è la somma dei valori medi:

$$\langle y \rangle = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle,$$

la varianza della somma, è la somma delle varianze se le variabili sono indipendenti:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$$

mentre la funzione caratteristica è il prodotto delle rispettive funzioni caratteristiche:

$$\widehat{F}(z) = \widehat{F}_{x_1}(z) \widehat{F}_{x_2}(z)$$

2.1 Teoria Random Walk caso Unidimensionale

2.1.1 Caso discreto

L'esempio più facile è quello di un camminatore (*random walker*) che si trova sulla retta dei numeri interi e partendo da 0, può compiere un solo passo alla volta. Si supponga, inoltre, che tale spostamento avvenga in corrispondenza del lancio di una moneta e che a seconda del risultato, testa o croce, il camminatore si sposterà verso l'asse positivo dei numeri interi o verso l'asse negativo rispettivamente.

Dopo un primo lancio, dal momento in cui la probabilità che esca testa o croce è del 50%, segue che il camminatore, partendo da 0, occuperà la posizione ± 1 . Generalizzando quanto detto, si ha che la probabilità che il camminatore ha di spostarsi a destra è $p_+ = p$, mentre a sinistra è $p_- = q = 1 - p$. Quello che si ottiene dopo N passi è una distribuzione binomiale.

Avendo assunto che il camminatore parta da zero si ottiene:

$$\mathbb{E}[x_i] = 0 \quad \mathbb{E}[x_i^2] = s^2 \quad \mathbb{E}[x_i x_j] = \delta_{ij} s^2$$

Considerando:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_N = x(n\Delta t)$$

dove Δt è l'intervallo di tempo per effettuare un passo, si ha:

$$\mathbb{E}[x(n\Delta t)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[x_i] = 0$$

$$\mathbb{E}[x^2(n\Delta t)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[x_i x_j] = \mathbb{E}[x_i^2] = n s^2$$

2.1.2 Caso continuo

Il limite continuo lineare della varianza $x^2(t)$ per il random walk, può essere ottenuto considerando il limite per $n \rightarrow +\infty$ e $\Delta t \rightarrow 0$ in modo che $t = n\Delta t$ sia finito. Poi:

$$\mathbb{E}[x^2(t)] = ns^2 = \frac{s^2 t}{\Delta t}.$$

Posto $s^2 = D\Delta t \implies \mathbb{E}[x^2(t)] = Dt$.

La dipendenza lineare della varianza $x^2(t)$ con t è caratteristica di un processo diffusivo, infatti D è detto *coefficiente di diffusione*. Questo processo stocastico è noto come *Wiener process*.

2.2 Teorema del limite centrale

Molti fenomeni importanti, che possono essere affrontati con la teoria della probabilità e dei processi stocastici, sono descrivibili tramite l'effetto composto di piccole influenze casuali. Le quantità osservabili sono il più delle volte la somma di un numero molto grande di eventi casuali. Si consideri, per esempio, la pressione esercitata da un gas ideale su un pistone; essa è una variabile termodinamica composta da tutte le miriadi di collisioni delle particelle del gas contro il pistone. La questione centrale è trovare questa distribuzione di somma di variabili casuali.

Teorema 1. *La somma di una successione di N -variabili aleatorie X_i , indipendenti ed equidistribuite (iid) con media $\mu = \langle x \rangle$ e varianza σ^2 , converge in distribuzione alla variabile aleatoria gaussiana con media $N\mu$ e varianza $N\sigma^2$.*

Dimostrazione: Date X_N variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, la somma di esse è definita come:

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Per quanto visto con il modello del Random Walk, si ha:

$$\langle S_N \rangle = 0 \quad \sigma_N^2 = \sigma^2.$$

Ricordando che la densità di probabilità della somma è il prodotto delle densità di probabilità di ciascuna variabile, si ottiene:

$$p_N(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - S_N) p(X) d^N X.$$

Da cui si può ottenere la funzione caratteristica della somma:

$$\begin{aligned}\widehat{F}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} p_N(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - S_N) p(X) d^N X = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} \delta(z - S_N) dz \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) d^N X = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dX_N p(X_1) \dots p(X_N) e^{ikS_N} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dX_1 p(X_1) e^{\frac{ikX_1}{\sqrt{N}}} \right]^N\end{aligned}$$

dal momento in cui stiamo assumendo variabili casuali iid.

Si ottiene così :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(k) &= \left[\widehat{F}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \right]^N \\ \widehat{F}(k) &= \left[1 - \frac{1}{N} \frac{(k\sigma)^2}{2} + O\left(\frac{k^3}{N^{3/2}}\right) \right]^N,\end{aligned}$$

e per $N \gg 1$ si ottiene:

$$\widehat{F}(k) \approx \left[1 - \frac{1}{N} \frac{(k\sigma)^2}{2} \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{(k\sigma)^2}{2} \right].$$

Per $N \rightarrow \infty$, la funzione caratteristica tende a quella di una gaussiana, il che implica che anche la distribuzione di probabilità è gaussiana.

$$p_N(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \widehat{F}(k) dk \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right]$$

Tale risultato mostra l'importanza della distribuzione gaussiana nei fenomeni statistici. Qualunque sia la forma esatta della distribuzione delle singole variabili casuali e, finché esistono i primi due momenti, la variabile somma obbedisce sempre ad una distribuzione gaussiana nel limite di N grandi.

2.3 Processi Stocastici

Si definisce processo stocastico una famiglia di variabili aleatorie:

$\left\{ x(t), t \in T \subseteq R_+ \right\}$ dipendenti dal tempo, definite su uno spazio campione Ω e che assumono valori in un insieme definito *spazio degli stati del processo*. Un processo stocastico è un insieme di funzioni che evolvono nel tempo (*funzioni campione*), ognuna delle quali è associata ad un determinato elemento dello spazio campione, così che il risultato di un esperimento casuale corrisponda di fatto all'estrazione di una di queste funzioni.

2.3.1 Processo Markoviano

Un processo Markoviano è un processo aleatorio in cui la probabilità di transizione che determina il passaggio a uno stato di sistema dipende solo dallo stato del sistema immediatamente precedente e non da come si è giunti a questo stato.

Definizione 7. Per un processo markoviano, per tutti gli n e per tutti $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, si ha:

$$p|_{n-1}(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = p_1|_1(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}).$$

Per calcolare lo stato (x_n, t_n) è necessario consocere solo lo stato (x_{n-1}, t_{n-1}) ; in tal senso, un processo Markoviano è detto "non avere memoria".

Generalizzando quanto detto per il punto n -esimo della funzione, si ha:

$$p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{i=2}^n p_1|_1(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) p_1(x_1, t_1).$$

2.3.2 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è un processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti.

Indicando con W_t tale processo, esso è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

- Il processo parte da 0, ossia $W_0 = 0$ quasi certamente (Probabilità uguale a 1);
- le traiettorie, ovvero le funzioni $t \rightarrow W_t$ sono continue quasi certamente;
- il processo ha incrementi indipendenti, ossia, scelti quattro tempi $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$, allora $W_{t_1} - W_{s_1}$ e $W_{t_2} - W_{s_2}$ sono variabili casuali indipendenti.
- il processo ha incrementi gaussiani, ovvero scelti due tempi $s \leq t$ allora $W_t - W_s \rightarrow N(0, (t - s))$ dove quest'ultimo termine denota una distribuzione con valore medio 0 e varianza $(t-s)$.

Considerando il processo di Wiener in corrispondenza di un lasso di tempo sufficientemente piccolo si ottiene l'incremento infinitesimo di tale processo:

$$W_{t+dt} - W_t = \delta W_t = N\sqrt{dt} \quad (2.1)$$

Dato che quest'ultima espressione tende ad infinito al tendere a zero di dt , il processo non è a varianza limitata e per questo non risulta differenziabile da un punto di vista classico. Si può procedere comunque in senso stocastico. Essendo la varianza di tale processo $\mathbb{E}(W_t^2) - \mathbb{E}^2(W_t) = t$ ed essendo $\mathbb{E}(W_t) = 0$ per ipotesi, segue che $\mathbb{E}^2(W_t) = 0$, pertanto $\mathbb{E}(W_t^2) = t$.

In base a ciò si può definire il differenziale di un processo di Wiener come quel processo la cui media quadratica coincide con il differenziale della media quadratica del processo di Wiener da differenziare:

$$dW_t = N\sqrt{dt}.$$

2.4 Calcolo Stocastico

2.4.1 Integrale Stocastico

Sia data una funzione $G(t')$ su un intervallo $(t_0, t_n = t)$. Come visto per l'integrale di Riemann, si consideri una partizione di tale intervallo in vari sottointervalli $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ e un insieme di punti τ_i :

$t_{i-1} < \tau_i < t_i$ all'interno di ciascun intervallo.

L'integrale stocastico è definito nel seguente modo:

$$\int_{t_0}^{t_n} dW(t') = ms - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})].$$

La differenza con l'integrale di Riemann è nell'utilizzo del "mean square limit" come tipo di convergenza richiesta. Esso è definito nel seguente modo:

$$ms - \lim_{n \rightarrow \infty} X_N = X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle (X_N - X)^2 \right\rangle = 0$$

Bisogna ora definire univocamente l'integrale precedente, in quanto dipende dalla scelta del punto τ_i , in cui l'integrando è valutato. Per tal motivo si consideri il seguente esempio:

Sia $G(t') = W(t')$ e si calcoli:

$$\langle S_n \rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle W(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle$$

Ponendo:

$$\tau_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\left\langle S_n \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left[\left\langle W(\alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1})W(t_i) \right\rangle - \left\langle W(\alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1})W(t_{i-1}) \right\rangle \right] =$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\min \left[\alpha t_i + (1 - \alpha) t_{i-1} - 1, t_i \right] - \min \left[\alpha t_{i-1} + (1 - \alpha) t_{i-2}, t_{i-1} \right] \right)$$

Dove si è utilizzato il risultato ottenuto dal processo di Wiener. Si ottiene infine:

$$\left\langle S_n \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha (t_i - t_{i-1}) = \alpha (t - t_0)$$

Dove:

- $\alpha = 0$ (ossia $\tau_i = t_{i-1}$) $\Rightarrow$ Integrale stocastico di Itô,
- $\alpha = \frac{1}{2}$ (ossia $\tau_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$) $\Rightarrow$ Integrale stocastico di Stratonovich.

Ovviamente, per quanto detto in precedenza, si sceglierà il risultato per $\alpha = 0$.

Definizione 8. Una funzione $G(t)$ è detta *non-anticipativa* se $G(t)$ è statisticamente indipendente da $W(s) - W(t) \quad \forall t < s$.

Esempi di funzioni non-anticipative sono:

- $W(t)$
- $\int_{t_0}^t F[W(t')] dt'$ dove F è un funzionale del processo di Wiener,
- $\int_{t_0}^t F[W(t')] dW(t')$
- $\int_{t_0}^t G(t') dt'$ se G è essa stessa non-anticipativa
- $\int_{t_0}^t G(t') dW(t')$

Si possono scrivere le seguenti equazioni mnemoniche, le cui dimostrazioni verranno omesse.

$$[dW(t')]^n = 0 \quad \int_{t_0}^t [dW(t')]^n G(t') = 0 \quad n \geq 3$$

Il loro significato intuitivo è:

$$dW(t) = O((dt)^{\frac{1}{2}}),$$

ossia, si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al primo. Ciò giustifica la non derivabilità del processo di Wiener. Una conseguenza è la formula per il calcolo del differenziale totale di una funzione del processo di Wiener: data $f(W(t), t)$ e arrestandosi al primo ordine in dt si ha:

$$df(W(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} (dW)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W \partial t} dt dW + \dots$$

$$\Rightarrow df(W(t), t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW(t)$$

2.4.2 Equazione Differenziale Stocastica

Definizione 9. Un processo stocastico $x(t)$ obbedisce alla equazione differenziale stocastica (EDS):

$$dx(t) = a[x(t), t]dt + b[x(t), t]dW(t)$$

quando $\forall(t_0, t)$ si ha:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a[x(t'), t']dt' + \int_{t_0}^t b[x(t'), t']dW(t')$$

dove l'ultimo integrale è inteso nel senso stocastico di Itô.

Teorema 2. Per una data EDS esiste un'unica soluzione $x(t')$ non-anticipativa in $[(t_0, t)]$ se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- Condizione di Lipschitz:

$$\exists k > 0 : |a(x, t') - a(y, t')| + |b(x, t') - b(y, t')| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [t_0, t]$$

- Condizione di crescita:

$$\exists k > 0 : |a(x, t')|^2 + |b(x, t')|^2 \leq k(1 + |x|)^2 \quad \forall t' \in [t_0, t]$$

La soluzione $x(t)$ è un processo di Markov.

2.4.3 Formula di Itô

Sia $x(t)$ un processo stocastico che obbedisce alla EDS e sia f un funzionale di x e t . Allora:

$$df[x(t), t] = \left[\frac{\partial}{\partial t} f[x(t), t] + a[x(t), t] \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), t] + \frac{1}{2} b^2[x(t), t] \frac{\partial^2}{\partial x^2} f[x(t), t] \right] dt + b[x(t), t] \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), t] dW(t).$$

2.5 Moto Browniano Libero

Il termine *moto Browniano* deriva dal nome del botanico britannico Robert Brown, che per primo, nel 1827, osservò il moto totalmente caotico di granelli di polline immersi in un solvente.

Circa 80 anni dopo Einstein e Smoluchowski fornirono una spiegazione teorica del fenomeno che poteva essere provata anche sperimentalmente:

le particelle che costituiscono il solvente sono molto più leggere delle particelle del polline (dette particelle Browniane), causando un numero elevato di collisioni. L'effetto composto di queste collisioni è di impartire una forza casuale e una resistenza viscosa sulla particella Browniana.

Questi due aspetti possono essere modellizzati nel seguente modo:

- La viscosità del fluido porta ad una forza di trascinamento viscosa che ostacola il moto della particella Browniana. Dato che la velocità della particella è molto piccola, può essere considerata proporzionale alla differenza delle velocità tra particella e fluido. Supponendo che quest'ultimo sia a riposo, si ottiene:

$$\mathbf{f}_{Tr} = -\gamma M \mathbf{v}.$$

Dove γ è il coefficiente d'attrito della particella Browniana e M la sua massa.

- A causa della differenza di masse, le particelle del fluido, come già detto in precedenza, sono più veloci della particella Browniana che si vuole descrivere. Per tale motivo, si considereranno collisioni istantanee le quali impartiranno una velocità casuale alla particella. Si supporrà poi che le collisioni siano incorrelate e che le variazioni di velocità della particella Browniana, a causa delle collisioni stocastiche, siano descritte da un processo di Wiener con forza Γ .

Supponendo, inoltre, la presenza di una forza esterna $\mathbf{F}$ che agisce sulla particella Browniana, si ottengono le seguenti equazioni del moto:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt,$$

$$M d\mathbf{v} = (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \gamma M \mathbf{v}) dt + \Gamma d\mathbf{W}(t).$$

Questa coppia di equazioni differenziali stocastiche sono equivalenti alla seguente equazioni di Fokker-Plack, nota come equazione di Kramers:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{v} p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[\left(\gamma \mathbf{v} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{M} \right) p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{M}\right)^2 \Delta_v p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t).$$

I termini deterministici $\mathbf{v}$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \gamma M \mathbf{v}$, contribuiscono alle derivate del primo ordine nell'equazione di Fokker-Planck, mentre il termine stocastico porta ad una derivata del secondo ordine con ampiezza proporzionale a Γ^2 .

Si consideri ora il caso in cui $\mathbf{F} = 0$ e il moto sia unidimensionale. Il sistema di equazioni che si ottiene è:

$$dx = v dt \quad (2.2)$$

$$dv = -\gamma v dt + \frac{\Gamma}{M} dW(t). \quad (2.3)$$

Essendo le due equazioni disaccoppiate, dunque risolvibili separatamente, si partirà dall'ultima, con la condizione iniziale che $v(0) = v_0$. In questo modo si ricava la seguente equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(v, t) = \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v p(v, t)] + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{M} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} p(v, t). \quad (2.4)$$

Il processo stocastico delle velocità, detto *Ornstein Uhlenbeck* può essere risolto tramite quest'ultima equazione o studiandolo come EDS, ma avendo introdotto nei paragrafi precedenti il calcolo di Itô, si utilizzerà l'ultimo metodo.

Introducendo un processo ausiliario tramite la funzione $f(v, t) = v e^{\gamma t}$:

$$y(t) = f(v(t), t) = v(t) e^{\gamma t}, \quad y(0) = v_0$$

si ricava l'EDS soddisfatta da $y(t)$ utilizzando la formula di Itô e ponendo per $a(v, t)$ e $b(v, t)$ i seguenti valori:

$$a(v, t) = -\gamma v \quad b(v, t) = \frac{\Gamma}{M}.$$

si ha

$$\begin{aligned} f(v, t) &= v e^{\gamma t} & \frac{\partial f}{\partial v}(v, t) &= e^{\gamma t} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(v, t) &= \gamma v e^{\gamma t} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= 0. \end{aligned}$$

Dalla formula di Itô si ricava:

$$dy(t) = \frac{\Gamma}{M} e^{\gamma t} dW(t)$$

integrando tra $[0, t]$, si ottiene la seguente soluzione:

$$y(t) = v_0 + \frac{\Gamma}{M} \int_0^t e^{\gamma s} dW(s)$$

per cui

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{\gamma}{M} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} dW(s). \quad (2.5)$$

Se v_0 è gaussiana si tratta di un processo gaussiano in quanto sovrapposizioni di variabili aleatorie gaussiane, le cui distribuzioni sono determinate dai valori medi e covarianze. Pertanto:

$$\mathbb{E}(v(t)) = \mathbb{E}(v_0) e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma}{M} e^{-\gamma t} \mathbb{E} \left(\int_0^t e^{\gamma s} dW(s) \right) = \mathbb{E}(v_0) e^{-\gamma t}$$

e per $t \rightarrow \infty$ si ha che $\mathbb{E}(v(t)) \rightarrow 0$. Analogamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v^2(t)) &= \mathbb{E}(v_0^2) e^{-2\gamma t} + \left(\frac{\Gamma}{M} \right) e^{-2\gamma t} \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_0^t e^{\gamma(s+s')} dW(s) dW(s') \right) = \\ &= \mathbb{E}(v_0^2) e^{-2\gamma t} + \left(\frac{\Gamma}{M} \right) e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(s+s')} \delta(s-s') ds ds' = \\ &= \mathbb{E}(v_0^2) e^{-2\gamma t} + \left(\frac{\Gamma}{M} \right) e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{2\gamma s} ds = \\ &= \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2} + \left[\mathbb{E}(v_0^2) - \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2} \right] e^{-2\gamma t} \end{aligned}$$

e per $t \rightarrow \infty$ si ha:

$$\mathbb{E}(v^2(+\infty)) = \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2}.$$

Per il teorema di equipartizione dell'energia, quando la temperatura T è in equilibrio, si ha:

$$\frac{M}{2} \mathbb{E}(v^2(+\infty)) = \frac{1}{2} k_B T$$

dunque

$$\Gamma^2 = 2\gamma M k_B T.$$

Si può dimostrare che:

$$\mathbb{E}(v(t)v(s)) = \left[\mathbb{E}(v_0^2) - \frac{k_B T}{M} \right] e^{-\gamma(t+s)} + \frac{k_B T}{M} e^{-\gamma|t-s|}$$

e per $t, s \rightarrow \infty$ si ha un comportamento stazionario

$$\mathbb{E}(v(t)v(s)) \rightarrow \frac{k_B T}{M} e^{-\gamma|t-s|}.$$

La funzione del processo delle velocità di Ornstein-Uhlenbeck, può essere ora calcolata. Indicando il valore medio e la varianza nel seguente modo:

$$\mu(t) = v_0 e^{-\gamma t}, \quad \sigma^2(t) = \frac{k_B T}{M} (1 - e^{-2\gamma t})$$

si avrà:

$$p(v, t | v_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(v-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

Dal processo delle velocità si può ricavare quello delle posizioni $x(t)$ integrando la (2.1): ponendo $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$ e dalla (3.4) si ottiene:

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \sqrt{\frac{2\gamma k_B T}{M}} \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} \int_0^{t'} e^{\gamma s} dW(s)$$

da cui si ottengono tutte le proprietà del processo. Nel limite $t \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\mathbb{E}(x(t)) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \rightarrow \frac{v_0}{\gamma} \quad (2.6)$$

mentre per il momento di secondo ordine:

$$\mathbb{E}(X^2(t)) \rightarrow \frac{2k_B T}{M\gamma} t.$$

Tale risultato è coerente con il carattere diffusivo del moto browniano.

Il processo $x(t)$ è gaussiano, pertanto, noti i primi due momenti, si possono ricostruire tutte le sue distribuzioni finito-dimensionali.

Capitolo 3

Modelli Del Mercato Finanziario

3.1 Nozioni Basilari

Definizione 10. Per *mercato* si intende il "luogo" in cui compratori e venditori si incontrano per scambiare i propri prodotti.

Ad ogni istante di tempo t , i prodotti hanno un prezzo, detto *Spot Price* $S(t)$. Quest'ultimo è determinato dalla domanda e dall'offerta nel mercato libero. Se aumenta la domanda di un dato prodotto, la rispettiva offerta diminuisce e $S(t)$ aumenta. L'esempio inverso è del tutto equivalente.

Un particolare tipo di mercato è quello finanziario, in cui i prodotti scambiati sono soldi. Esistono due modi con cui un investimento può avvenire:

- *Stock Exchange (Borsa Valori)*: rappresenta il luogo in cui avviene la negoziazione di titoli, valute estere e alcuni tipi di merci. Il compito della borsa è quello di fornire in modo completo ai trader tutte le informazioni necessarie per promuovere transazioni affidabili tra di loro e determinare il prezzo delle attività negoziate sulla base della domanda e dell'offerta che ne derivano. Affinchè ciò possa avvenire, è necessario stabilire una serie di regole in modo che il mercato sia più efficiente e sicuro, limitandone, però, la libertà.
- *Over-the-counter*: individua un mercato in cui la negoziazione si svolge al di fuori dei circuiti borsistici ufficiali. Questo tipo di mercato è certamente più libero di quello precedente e, per tale motivo, presenta un rischio maggiore. Dato che il guadagno è l'obiettivo comune, risulta fondamentale elaborare modelli che permettano di ridurre al minimo tale rischio: *risk management*.

A tal proposito, si possono distinguere tre tipi di rischio:

- *Credit risk*: è il rischio che in una determinata operazione creditizia, il debitore non sia in grado di onorare gli impegni presi. Questo tipo di rischio è particolarmente presente nei mercati OTC;
- *Operational Risk*: le procedure di una ditta possono non essere completamente adeguate alle condizioni del mercato. Possibili fonti di rischio: transizioni inappropriate o non autorizzate, errori umani o errori presenti nei programmi di computer;
- *Market Risk*: dovuti alle fluttuazioni dei prezzi degli assets.

3.1.1 Ipotesi Mercato Efficiente

Un mercato è detto *efficiente* se:

- tutti i partecipanti possono ottenere tutte le informazioni relative al trading in modo veloce e completo;
- è liquido. Ciò significa che un investitore può comprare o vendere un prodotto finanziario in qualsiasi momento. Più un mercato è liquido, più è sicuro investire in esso. Su un mercato liquido "maturo", le miriadi di transazioni sono efficientemente bilanciate in modo che la decisione di un singolo investitore non può destabilizzare il mercato stesso;
- c'è una bassa *market friction*, ossia bassi costi delle transazioni.

In base a quanto detto, l'ipotesi di un mercato efficiente implica che tutta l'informazione rilevante sullo sviluppo del mercato è sempre completamente contenuta nei prezzi dell'istante presente. Ciò si traduce con un'assunzione che il processo stocastico sia Markoviano.

Dopo una attenta analisi dei mercati francesi, Bachelier suggerì un modello per studiare le serie storiche finanziarie: suppose che $S(t)$ fosse un processo di Wiener con un opportuno termine di drift che correggesse gli eventuali aumenti di $S(t)$. Una ipotesi del genere non vieta la possibilità di avere prezzi di assets negativi; proprietà certamente irrealistica dal momento in cui quest'ultimi sono definiti positivi. A tale scopo si definì una versione modificata del moto Browniano: *Moto Browniano Geometrico*.

3.2 Moto Browniano Geometrico

Per analizzare l'evoluzione di $S(t)$ si assuma che a $t = 0$ venga depositata una somma di denaro $S(0)$ in banca. Quest'ultima garantisce un tasso di interesse r

risk-free per il deposito. Se l'interesse viene pagato una volta alla fine di un tempo t , la somma iniziale è cresciuta nel seguente modo:

$$S(t) = S(0) + rtS(0) = S(0)(1 + rt).$$

Se è pagato due volte, si ha:

$$S(t) = \left(S(0) + \frac{rt}{2}S(0) \right) + \left(S(0) + \frac{rt}{2}S(0) \right) \frac{rt}{2} = S(0) \left(1 + \frac{rt}{2} \right)^2.$$

Dopo n pagamenti si ottiene:

$$S(t) = S(0) \left(1 + \frac{rt}{n} \right)^n,$$

quindi se $n \rightarrow +\infty$

$$S(t) = S(0)e^{rt}, \quad dS = rS(t)dt.$$

Si supponga ora, che il prezzo di un asset sia simile a quello di un deposito in banca, ma perturbato da fluttuazioni stocastiche. Il cambiamento del prezzo dS in un piccolo intervallo di tempo dt , è caratterizzato da due contributi: uno deterministico ed un altro casuale. Il termine deterministico è dato da:

$$dS = \mu S(t)dt.$$

dove μ è detto *drift* e misura il tasso di crescita medio del prezzo dell'asset. Ovviamente μ è più grande di r , dal momento in cui nessun investitore ragionevole si assumerebbe il rischio di perdere soldi sul mercato se un conto in banca rende lo stesso profitto o addirittura meglio.

Il secondo contributo ha una natura stocastica e in accordo con l'ipotesi di un mercato efficiente, deve essere un processo Markoviano:

$$dS = \sigma S(t)dt,$$

dove σ è detta *volatilità* e misura la forza delle fluttuazioni statistiche dei prezzi. Combinando entrambi i contributi si ottiene il seguente risultato:

$$dS = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad S(0) > 0. \quad (3.1)$$

Questa equazione definisce una variante del moto Browniano, che è detto moto Browniano geometrico. Esso è un caso specifico del processo di Itô, infatti:

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW(t).$$

L'equazione (3.1) suggerisce che la variabile rilevante in un intervallo di tempo dt non sia $dS = S(t + dt) - S(t)$, ma il ritorno $\frac{dS}{S(t)}$. Pertanto, utilizzando la formula di Itô

$$df(S, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(S, t) \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} b(S, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + b(S, t) \frac{\partial f}{\partial S} dW(t)$$

dove $f(S, t) = \ln S$, $a(S, t) = \mu S$ e $b(S, t) = \sigma S$, si ottiene:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t).$$

Dunque è il logaritmo del prezzo dell'asset e non il prezzo stesso (come invece ipotizzò Bachelier) a seguire un processo di Wiener con drift μ . Dunque $d \ln S$ è normalmente distribuito (quindi $S(t)$ ha una distribuzione log-normale) e presenta il seguente valore medio e varianza:

$$\mathbb{E}[d \ln S] = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt, \quad \text{Var}[d \ln S] = \sigma^2 dt,$$

e la probabilità di transizione da (S, t) a (S', t') è data da:

$$p(S', t' | S, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma S')^2(t' - t)}} \exp\left(\frac{[\ln(S'/S) - (\mu - \sigma^2/2)(t' - t)]^2}{2\sigma^2(t' - t)} \right). \quad (3.2)$$

Questa distribuzione e il moto Browniano geometrico saranno alla base dell'equazione di Black-Scholes che verrà trattata nelle prossime sezioni. Dato che il prezzo di un asset è legato alla volatilità σ , per arginare il rischio legata ad essa, si può pensare di investire non su un singolo asset, ma avere un *portfolio* (portafoglio), ossia un insieme di attività finanziarie su cui investire che siano tra loro incorrelate. In questo modo, se un'attività dovesse perdere valore, un'altra potrebbe aumentarlo, riducendo la volatilità totale del suo ritorno. La riduzione del rischio, sfruttando l'anticorrelazione tra gli assets di un portafoglio, è nota, in gergo finanziario, come *hedging* (copertura dal rischio). Esistono particolari strumenti finanziari che possono essere utilizzati per l'hedging, essi sono i *derivati*.

3.3 Derivati

Un derivato è un titolo finanziario il cui valore deriva da un altro asset finanziario oppure da un indice (azioni, indici finanziari, tassi d'interesse ...), detto *sottostante*. Da un punto di vista matematico, un derivato è una funzione dello *Spot Price* $S(t)$. Due esempi di derivati sono i *futures* e le *options* (opzioni).

3.3.1 Futures

L'idea alla base di un future è analoga a quella di un *forward contract*. Quando questo contratto viene stipulato, una parte, l'acquirente, che è detto avere una long-position, compra un dato asset ad un prezzo fissato K (*delivery price*) ad una specifica data futura T (*delivery date*). Il possessore dell'asset, ossia colui che vende il suo bene, che è detto avere una short position, accetta di vendere al T e al prezzo K l'asset. Dato che il prezzo è soggetto alla volatilità, alla *delivery date*, l'asset avrà un valore diverso da quello che aveva al momento dell'accordo, il che genera un vantaggio/svantaggio all'acquirente o venditore.

I futures sono contratti che vincolano entrambe le parti.

3.3.2 Options

Contrariamente ai Futures, le opzioni sono contratti in cui solo uno dei due partner ha un vincolo. Essa conferisce al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere il titolo sul quale l'opzione stessa è iscritta, ossia il sottostante, ad un determinato prezzo K (*strike price*) entro una determinata data T (*maturità*) a fronte di un premio pagato non rimborsabile. Dal momento in cui il possessore (detto anche *writer*) ha il diritto di vendere e non l'obbligo, venderà solo in corrispondenza di un guadagno certo.

Le opzioni possono essere caratterizzate dalla natura del periodo durante cui l'opzione può essere esercitata. Se questa può essere esercitata solo alla maturità, si parla di *opzione Europea*, altrimenti di *opzione Americana*. Nelle prossime sezioni si tratterà principalmente di opzioni Europee. In merito a ciò, si distinguono:

- *call options*: il compratore dell'opzione ha il diritto di comprare il sottostante finanziario ad un dato strike price K alla maturità T . Il diritto è ottenuto pagando al venditore dell'opzione, una certa quantità di denaro.
- *put option*: il compratore ha il diritto di vendere il sottostante al prezzo di strike K alla maturità T , al venditore dell'opzione.

Creare un modello che trovi il prezzo "corretto" delle opzioni è un problema aperto e molto importante. È indispensabile conoscere la struttura di questi strumenti finanziari e di valutare il rischio legato ad essi. Nella prossima sezione verrà introdotto un metodo per risolvere questo problema per un tipo di Opzione Europea.

3.4 Modello Di Black-Scholes

Indicando con O l'opzione, essa è una funzione del sottostante S e del temp t , pertanto: $O = O(S, t)$. In particolare, come già accennatto nelle sezioni precedenti, l'opzione dipende dallo strike price K e dalla maturità T . Alla maturità si può calcolare $O(S, T)$ attraverso il seguente ragionamento: Si consideri una call option. Se $S(T) < K$, il titolare non eserciterà l'opzione, in quanto aspetterà un prezzo migliore sul mercato. Dunque: $C(S, T) = 0$. In caso contrario sarebbe proficuo esercitare l'opzione. Pagando un importo K , il titolare riceve un asset di valore $S(T)$, che, se venduto immediatamente, genera un guadagno di $S(T) - K$. Questo è il prezzo massimo che il titolare sarebbe disposto a pagare. Dall'altro lato, l'acquirente richiede almeno $C(S, T) = S(T) - K$ dato che ha acquistato l'asset al mercato per un prezzo $S(T)$ e ne riceve solo un certo K . Pertanto, le due parti si accordano su un *fair price*, ossia un prezzo equo che possa dare benefici ad entrambi: $C(S, T) = S(T) - K$. Considerando sia il caso per $S(T) < K$ e $S(T) > K$, il prezzo della call option alla maturità è:

$$C(S, T) = \max\left(S(T) - K, 0\right),$$

il quale è detto *payoff*.

Ragionamento analogo per una put option:

$$P(S, T) = \max\left(K - S(T), 0\right).$$

Ci si chiede, avendo definito questi limiti, quale sia il prezzo equo per una opzione al tempo dell'accordo $t < T$. Nel 1973 Black-Scholes e, indipendentemente Merton, elaborarono un modello in risposta a tale richiesta. Nella sezione successiva verranno enunciate le ipotesi necessarie per poter poi ricavare l'equazione ricercata.

3.4.1 Ipotesi equazione Black-Scholes

- **Non c'è credit risk, solo market risk:** le parti sono sempre affidabili e i rischi dipendono solo dall'incertezza del mercato. Questa si dimostra essere una buona approssimazione per contrattazioni in un exchange.
- **Il mercato è un efficient market:** esso è infinitamente liquido, pertanto non ci sono attriti; tutta l'informazione è istantaneamente disponibile.

- **Gli scambi si svolgono in tempo continuo:** ciò implica che l'intervallo di tempo Δt , tra due successive quotazioni di prezzo del sottostante, tende a zero.
- **L'evoluzione temporale del prezzo dell'asset è un processo stocastico e segue un moto Browniano geometrico:**

$$dS = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad \left(S(0) > 0 \right). \quad (3.3)$$

Dato che il MBG è un processo di Markov, questa ipotesi può anche essere considerata come una conseguenza dell'ipotesi di mercato efficiente.

- **Il tasso di interesse risk-free r e la volatilità σ sono costanti:** si considera la seguente approssimazione dal momento in cui se r e σ fossero aleatori, il problema risulterebbe molto più complesso.
- **Il valore del sottostante è continuo**
- **Il mercato è arbitrage-free:** quella dell'*arbitrage* è l'opportunità di guadagnare una quantità infinita di denaro senza rischi. Tipicamente queste situazioni non si verificano perchè la competizione fra gli investitori condurrebbe rapidamente ad un riequilibrio, come nel caso del principio di conservazione dell'energia.

Con queste ipotesi è possibile ricavare l'equazione di Black-Scholes.

L'opzione $O(S,t)$ è una funzione della variabile stocastica S , la quale segue un processo di Itô. Pertanto, in un intervallo infinitesimo dt , la variazione dell'opzione è data dalla formula di Itô:

$$\begin{aligned} dO &= \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \mu S \frac{\partial O}{\partial S} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S(t) \frac{\partial O}{\partial S} dW(t) = \\ &= \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \right) dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove l'ultima equazione è stata ottenuta inserendo la (3.3).

L'idea del modello Black-Scholes è che il valore dell'option sia uguale a quello di un *self-financing portfolio*, ossia un portafoglio in cui l'acquisto di una attività è finanziato dalla vendita di una attività più vecchia; esso è descritto dalla seguente equazione:

$$O(t) = \Delta(t)S(t) + \Pi(t). \quad (3.5)$$

Mentre per i differenziali si ha:

$$dO = \Delta(t)dS + r\Pi dt. \quad (3.6)$$

Il primo termine al secondo membro assume che $\Delta(t)$ non vari nel tempo. Un'argomentazione euristica per giustificare questa affermazione è che un cambiamento di Δ dovrebbe essere interpretato come una reazione ad una fluttuazione dei prezzi. Pertanto, l'importo del sottostante può essere modificato solo dopo che si è verificata una variazione di prezzo. Il secondo termine Π individua la crescita di denaro, che riflette l'ipotesi che il mercato sia arbitrage-free.

Eguagliando le equazioni (3.4) e (3.6) si ottiene:

$$\Delta(t) = \frac{\partial O}{\partial S}$$

e

$$r\Pi = \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}[\sigma S(t)]^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2}.$$

Inserendo questi due risultati nella (3.5) si ottiene **l'equazione di Black-Scholes** per opzioni Europee:

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^2 S)^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} + rS \frac{\partial O}{\partial S} - rO = 0. \quad (3.7)$$

Questa equazione è valida sia per una put option che per una call option, la differenza sta nelle condizioni al bordo da imporre:

- call option:

$$\begin{aligned} t = T : \quad C(S, T) &= \max(S(T) - K, 0), \\ S = 0 : \quad C(0, t) &= 0, \\ S \rightarrow \infty : \quad C(S, t) &\rightarrow S. \end{aligned} \quad (3.8)$$

- put option

$$\begin{aligned} t = T : \quad P(S, T) &= \max(K - S(T), 0), \\ S = 0 : \quad P(0, t) &= K \exp[-r(T - t)], \\ S \rightarrow \infty : \quad P(S, t) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.4.2 Soluzione e Interpretazione

Si considere una call option, il cui prezzo $C(S,t)$ è soluzione della seguente equazione di Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (3.10)$$

soggetta alle condizioni al contorno (4.8).

La scala dei prezzi è K , mentre per il tempo si sceglie la volatilità e si può eliminare T supponendo che l'evoluzione del tempo sia inversa, ossia parti dalla maturità: in questo modo le condizioni finali diventano iniziali. In particolare, l'equazione di Black-Scholes suggerisce che il $\ln S$ è una variabile migliore di S , perchè rimuove la dipendenza dei coefficiente dal prezzo dell'asset. Mettendo insieme queste ipotesi, si ricava il seguente ansatz:

$$C = Kf(x, \tau), \quad S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{(\sigma^2/2)}. \quad (3.11)$$

L'equazione (3.10) e le relative condizioni al contorno possono essere così riscritte:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial f}{\partial x} - kf \quad \left(k = 2r/\sigma^2 \right), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tau = 0 : \quad & f(x, 0) = \max(e^x - 1, 0), \\ x \rightarrow -\infty : \quad & f(x, \tau) \rightarrow 0, \\ x \rightarrow +\infty : \quad & f(x, \tau) \rightarrow e^x. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dunque la teoria di Black-Scholes dipende dal singolo parametro k , in quanto tutti gli altri parametri sono stati assorbiti durante la trasformazione di variabili. Effettuando quest'altra sostituzione

$$f(x, \tau) = e^{ax+b\tau} g(x, \tau) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

e inserendola nella (4.12), si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + [2a + (k-1)] \frac{\partial g}{\partial x} + [a^2 + (k-1)a - k - b]g.$$

Scegliendo i seguenti valori per a e b

$$a = -\frac{1}{2}(k-1) \quad b = a^2 + (k-1)a - k = -\frac{1}{4}(k+1)^2, \quad (3.14)$$

si ottiene l'equazione:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

con condizioni al contorno

$$g(x, 0) = \max(e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2}, 0)$$

$$g(x, \tau) \rightarrow e^{(k+1)x/2 - (k+1)^2\tau/4} \quad |x| \rightarrow +\infty$$

L'equazione (3.15) coincide formalmente con un'equazione di diffusione, ma è sostanzialmente diversa perchè g non è una densità di probabilità, come lo si può notare dalle condizioni imposte su di essa. Nonostante questo, si può comunque utilizzare il metodo della funzione di Green per trovare la soluzione:

$$g(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau|y, 0)g(y, 0)dy$$

dove p è il propagatore

$$p(x, \tau|y, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau}.$$

L'utilizzo di questo propagatore gaussiano con le condizioni iniziali assegnate, produce il seguente risultato:

$$g(x, \tau) = g_1(x, \tau)\Phi(d_1(x, \tau)) - g_2(x, \tau)\Phi(d_2(x, \tau))$$

dove

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$$

$$g_1(x, \tau) = e^{(k+1)x/2 + (k+1)^2\tau/4}, \quad g_2(x, \tau) = e^{(k-1)x/2 + (k-1)^2\tau/4}$$

$$d_1(x, \tau) = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{k+1}{2}\sqrt{2\tau}, \quad d_2(x, \tau) = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{k-1}{2}\sqrt{2\tau}.$$

Ritornando alle variabili iniziali:

$$C(S, t) = S\Phi(C_1(S, t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(C_2(S, t)) \quad (3.16)$$

dove

$$C_1(S, t) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{T-t}} \left[\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) \right]$$

$$C_2(S, t) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{T-t}} \left[\ln \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right) \right].$$

Analogamente per una put options si ricava:

$$P(S, t) = -S \left[1 - \Phi(C_1(S, t)) \right] + Ke^{-r(T-t)} \left[1 - \Phi(C_2(S, t)) \right]. \quad (3.17)$$

Le equazioni (3.16) e (3.17) forniscono il prezzo delle call e put options al tempo t in base alle caratteristiche del contratto K e T , tenendo conto dei parametri del mercato r e σ .

I primi termini nelle due equazioni rappresentano la frazione di sottostante che il writer deve comprare (call) o vendere (put) per mantenere una posizione risk-less:

$$\Delta(S, t) = \begin{cases} \Phi(C_1(S, t)) \in [0, 1] & \text{call} \\ -[1 - \Phi(C_1(S, t))] \in [-1, 0] & \text{put} \end{cases} \quad (3.18)$$

Mentre i secondi termini rappresentano la quantità di denaro liquido del portafoglio:

$$\Pi(S, t) = \begin{cases} -Ke^{-r(T-t)}\Phi(C_2(S, t)) & \text{call} \\ Ke^{-r(T-t)}[1 - \Phi(C_2(S, t))] & \text{put} \end{cases} \quad (3.19)$$

La quantità $Ke^{-r(T-t)}$ è detto *present value* ed è lo strike price scontato al tempo t con il tasso di interesse r . Pertanto per una call option Π coincide con il present value dello strike price moltiplicato per la probabilità che l'option sia esercitata. Si può esaminare l'andamento C/K (prezzo di una call option) e della Δ in funzione della *moneyness* S/K . Dalla figura (3.1) si può osservare che le zone rilevanti sono tre: $S > K$ (*option in-the-money*), $S = K$ (*option at-the-money*) e $S < K$ (*option out-of-money*).

- Alla maturità $t = T$ una call option ha valore solo se è in-the-money e corrispondentemente il writer deve essere preparato a consegnare il sottostante non appena l'option è at-the-money, per cui la Δ ha una forma a scalino.
- A tempi $t < T$ il valore della call option è maggiore ed è diverso da zero se è ancora out-of-money; la Δ è non nulla ma minore di 1 in tutte le zone del grafico: per evitare rischi deve essere non nulla anche nella zona out-of-money, ma non è necessario possedere un sottostante nella zona in-the-money.

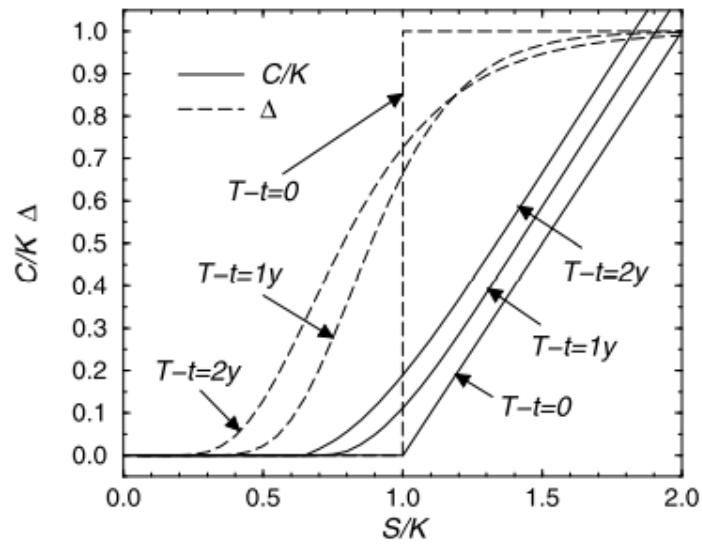


Figura 3.1: Soluzione dell'equazione di Black-Scholes per una call option. La linea continua individua C/K mentre la linea tratteggiata la Δ e sono rappresentate come una funzione di S/K per tre intervalli di tempo diversi: 0,1 e 2 anni. Le curve sono calcolate per un tasso di interesse pari a $r=10\%$ /anno e volatilità $\sigma=20\%/\sqrt{\text{anno}}$. Fonte *Stochastic Processes: from physics to finance*

3.5 Opzioni in Mercati Reali

Nelle sezioni precedenti è stata discussa l'equazione Black-Scholes, considerata una pietra miliare della finanza moderna. Tuttavia, alcuni aspetti descritti da quest'ultima, non corrispondono a ciò che avviene in un mercato reale. Di fatti, per ricavare il modello di Black-Scholes, sono state considerate una serie di condizioni, tali da semplificare la descrizione della realtà. Per questo motivo, quando alcune di tali ipotesi vengono rilassate o eliminate, il modello di Black-Scholes presenta alcuni problemi, tra cui:

- l'ipotesi che le variazioni del logaritmo dello stock price fossero Gaussiane è incorretta, soprattutto quando le variazioni presentano una frequenza elevata;
- per ricavare l'equazione di Black-Scholes è stato necessario considerare un self-financing portfolio, ma non è detto che questo esista sempre, come nel caso di un *jump-diffusion model*. Tale processo stocastico è caratterizzato da un coefficiente diffusivo come nel caso di un MBG, più un termine che esprime i salti che avvengono in tempi casuali con ampiezze casuali;
- i parametri che caratterizzano l'equazione di Black Scholes sono lo stock price, lo strike price, la maturità, il tasso di interesse e la volatilità. Lo strike price e la maturità sono definiti al momento dell'accordo, mentre lo stock price e il tasso di interesse dipendono dal mercato. L'unico parametro non determinato è la volatilità σ e stimare quest'ultima, in un mercato reale, è un procedimento molto complesso.

Nonostante queste problematiche, il modello di Black-Scholes è ancora fortemente utilizzato e dalla sua introduzione nel 1973, sono stati molti i lavori che hanno cercato di generalizzare il modello in modo che meglio descrivesse la realtà. Queste estensioni rilassano alcune ipotesi che si allontanano dalle condizioni di un mercato reale. A questi cambiamenti, però, l'equazione di Black-Scholes diventa sempre più complessa, tale da presentare non solo problemi tecnici ma anche concettuali.

In un mercato reale, la semplicità e l'efficacia della soluzione dell'equazione di Black-Scholes, si perde.

Conclusioni

Nella seguente tesi si è discusso dei processi stocastici e come questi possano essere applicati nell'ambito finanziario. In particolare, si è visto come il Moto Browniano, teorizzato per spiegare il comportamento caotico delle particelle in un fluido, possa essere utilizzato per prezzare le opzioni Europee in caso di un mercato efficiente (modello di Black-Scholes).

Grazie allo studio della teoria delle probabilità è stato possibile definire il modello del Random Walk, utilizzato per la prima volta da Bachelier, proprio per studiare gli andamenti delle azioni alla borsa di Parigi. Per un random walk 1D nel caso discreto, sono stati trovati i seguenti risultati:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = x(n\Delta t)$$

$$\mathbb{E}[x(n\Delta t)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[x_i] = 0$$

$$\mathbb{E}[x^2(n\Delta t)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[x_i x_j] = \mathbb{E}[x_i^2] = ns^2$$

Mentre nel caso continuo, mandando $n \rightarrow \infty$ si ha:

$$\mathbb{E}[x^2(t)] = ns^2 = \frac{s^2 t}{\Delta t} = Dt.$$

Quest'ultimo risultato mostra che il random walk nel caso continuo è analogo ad un processo diffusivo, noto come processo di Wiener, in cui gli incrementi sono indipendenti e gaussiani.

Per tale motivo si è approfondito lo studio dei processi stocastici, in particolare quello di Wiener stesso. Grazie a questi risultati è stato possibile ricavare l'equazione del Moto Browniano, osservando come, anche in questo caso, si trattasse di un processo diffusivo in cui gli spostamenti caotici a cui è soggetta una particella immersa in un fluido, fossero descritti da una distribuzione gaussiana:

$$p(v, t|v_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

$$\mathbb{E}(X^2(t)) \rightarrow \frac{2k_B T}{M\gamma} t.$$

Infine sono stati descritti i principali strumenti per comprendere un mercato finanziario. In particolare, attraverso il modello di Black-Scholes è stato possibile avere un modello tale da poter apprezzare le opzioni Europee. Il risultato di questo modello, valido in determinate condizioni che approssimano quello che è un mercato finanziario reale, è un'equazione dal carattere diffusivo, in cui la variazione dei logaritmi della variabile interessata sono gaussiani. Tale risultato rappresenta una generalizzazione del moto Browniano ed è detto moto Browniano Geometrico:

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma^2 S)^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} + rS \frac{\partial O}{\partial S} - rO = 0.$$

con le seguenti condizioni al bordo per una call option e put option

- call option:

$$t = T : \quad C(S, T) = \max\left(S(T) - K, 0\right),$$

$$S = 0 : \quad C(0, t) = 0,$$

$$S \rightarrow \infty : \quad C(S, t) \rightarrow S.$$

- put option

$$t = T : \quad P(S, T) = \max\left(K - S(T), 0\right),$$

$$S = 0 : \quad P(0, t) = K \exp[-r(T - t)],$$

$$S \rightarrow \infty : \quad P(S, t) \rightarrow 0.$$

Le soluzioni ottenute sono le seguenti:

$$C(S, t) = S\Phi(C_1(S, t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(C_2(S, t))$$

$$P(S, t) = -S\left[1 - \Phi(C_1(S, t))\right] + Ke^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(C_2(S, t))\right].$$

Sebbene l'equazione di Black-Scholes sia ampiamente utilizzata, nel momento in cui si vanno a rilassare le ipotesi che la caratterizzano, perde la sua incredibile funzionalità. Per tale motivo si stanno cercando sempre nuovi modelli in grado di avvicinarsi sempre più al caso di un mercato reale e non approssimato.

Bibliografia

- [1] W. Paul and J. Baschnagel, *Stochastic Processes: from physics to finance*, second edition, Springer, 2013.
- [2] R. N. Mantegna and H. E. Stanley *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*, Cambridge university press, 2000.
- [3] J. P Bouchaud and M. Potters, *Theory of financial risks: from statistical physics to risk management*, Cambridge university press, 2000.
- [4] J. C Hull, *Options, futures and other derivatives*, ninth edition, Pearson, 2015.
- [5] M Severi, *Introduzione alla sperimentazione fisica*, Zanichelli, 1985.
- [6] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, North-Holland person library, 2007.
- [7] N. C. Petroni, *Econofisica: finanza e processi stocastici*, Università degli studi di Bari, 2005