Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea triennale in Fisica

L'energia oscura e il problema dell'entanglement quantistico

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Francesco Bajardi

Candidato:
Luigi Granato
Matricola: N85001339

Anno Accademico 2020-2021

Indice

Introduzione

8 febbraio 1917: nacque la Cosmologia Moderna, una disciplina da sempre considerata "metafisica", che assunse quel giorno piena dignità scientifica. In tale data l'Accademia Prussiana delle Scienze di Berlino pubblicò un articolo di Albert Einstein, intitolato *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie* (Considerazioni Cosmologiche sulla teoria generale della Relatività), in cui, impiegando la teoria della Relatività Generale, egli fornì un'idea di Universo descritto come un sistema dinamico, governato dalle equazioni relativistiche del moto e non da considerazioni di tipo filosofico [1, 2]. Egli riteneva che l'assunzione di Universo isotropo e omogeneo, il cosiddetto *principio cosmologico*, si sposasse alla perfezione con la Relatività, restituendo soluzioni di Universo non stabile. Per renderlo statico, in linea con il pensiero dell'epoca, introdusse una costante cosmologica nella sua equazione di campo. Tale scelta si rivelò sbagliata non molto tempo dopo: negli anni '20 l'espansione dell'Universo fu scoperta grazie ai contributi di Vesto Slipher, Carl Wirtz, Knut Lundmark, Georges Lemaître ed Edwin Hubble. Nello stesso periodo il fisico e matematico russo Alexander Friedmann elaborò le sue equazioni di Universo isotropo e omogeneo, non ricevendo particolare attenzione dalla comunità scientifica, in quel momento "distratta" dalla rivoluzione quantistica della Fisica. Anche Lemaître raggiunse in maniera indipendente risultati simili a quelli di Friedmann, ma solo nel decennio successivo il loro lavoro fu ripreso da Howard Robertson e Arthur Walker e divenne ben conosciuto. Il 1998 è un'altra data importante per la Cosmologia: due gruppi indipendenti di ricerca, guidati rispettivamente da Saul Perlmutter e da Brian Schmidt e Adam Riess, scoprirono, grazie all'analisi delle supernovae distanti, che l'espansione è accelerata [3, 4]. Ciò spinse a riprendere l'ormai abbandonata idea di costante cosmologica, ora considerata positiva, per spiegare tale fenomeno. Essa si ritiene associata ad un'energia, definita *oscura* perché non ancora interpretata in maniera definitiva. Questo approccio non riesce a chiarire il valore anomalo della densità di energia oscura, ben evidenziato dalla *coincidenza cosmica* e dall'*Universo finemente regolato*. Considerata tale apparente inadeguatezza della Cosmologia Relativistica, nasce la necessità di cercare teorie diverse.

Per tali ragioni l'intento di questa trattazione è fronteggiare il problema dell'energia oscura con un approccio quanto-cosmologico, senza introdurre *a priori* un'energia del vuoto o una costante cosmologica. Per riuscire in questo obiettivo si è scelto di utilizzare un *toy model*, un modello semplificato di una teoria completa. Questa strada risulta essere estremamente conveniente: in mancanza di un formalismo definitivo della Gravità Quantistica, i cosmologi sono costretti ad adoperare metodologie alternative come questa, le quali presentano alcuni aspetti delicati e controversi, che saranno analizzati nel seguito della dissertazione.

Nel primo capitolo si sono discussi in maniera sintetica le equazioni di Friedmann e i problemi che affliggono la descrizione relativistica dell'energia oscura.
Nel secondo capitolo è analizzato il legame che esiste tra entanglement e informazione, probabilmente capace di aggiungere nuovi tasselli alla storia termodinamica dell'Universo. Viene anche sviluppato il formalismo dell'operatore densità e dell'entropia in Meccanica Quantistica, strumenti indispensabili per quantificare il grado di entanglement di un sistema.
Nel terzo capitolo viene trattato l'approccio quanto-cosmologico vero e proprio: qui emerge il ruolo della teoria della *decoerenza*. In essa ogni stato quantistico è entangled con l'ambiente circostante, per cui, come si vedrà, esso può essere immaginato in correlazione quantistica con se stesso. È possibile allora sfruttare questa condizione per fare delle supposizioni sulle funzioni d'onda dell'Universo e sugli stati cosmologici, assunti essere entangled in diversi modi che saranno meglio specificati nel seguito. Così facendo è possibile ricavare dei vincoli dinamici, grazie ai quali l'energia oscura emerge "spontaneamente", come conseguenza della mancanza di informazione causata dall'entropia di entanglement. Tale approccio risolverebbe anche la coincidenza cosmica, uno dei punti più dolenti dell'attuale descrizione.

Capitolo 1

Il problema dell'energia oscura

In questo breve capitolo introduttivo, dopo aver discusso delle equazioni di Friedmann, viene esaminato il problema dell'energia oscura, della coincidenza cosmica e dell'Universo finemente regolato. Nell'ultimo paragrafo vi è inoltre una discussione sulle parametrizzazioni del fattore barotropico, utilizzate nelle teorie alternative alla Cosmologia Relativistica.

1.1 Richiami di Cosmologia Relativistica

Nella teoria della Relatività Generale la gravità è descritta dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ [2, 5], con μ e ν indici che variano da 0 a 3 (per una coordinata temporale e tre spaziali). L'elemento metrico ds^2 è dato da:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{1.1}$$

Attraverso l'azione di Hilbert-Einstein si giunge alle seguenti equazioni di campo (con c=1)[1]:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}Rg_{\mu v} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

dove $R_{\mu v}$ è il tensore di Ricci, R è lo scalare di Ricci, G è la costante di gravitazione universale e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso. Le equazioni (1.2) sono dieci equazioni differenziali accoppiate. Il *principio cosmologico* afferma che a grandi scale l'Universo risulta essere isotropo e omogeneo, grazie a tale principio è possibile riscrivere la (1.1) come:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right\}, \tag{1.3}$$

indicata col nome di metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), o di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Nella (1.3) $a(t)$ è il fattore di scala e k è una costante che descrive la curvatura dello spaziotempo. Le variabili r, θ e φ sono definite *coordinate comoventi*, nelle quali una galassia di dimensioni standard rappresenta un punto materiale con coordinate fisse nel tempo. Il principio cosmologico garantisce che il tensore energia-impulso possa essere scritto, nelle coordinate comoventi, come

[1] D'ora in avanti verrà sempre utilizzato c=1, a meno che non sia indicato diversamente.

quello di un fluido perfetto, ossia un tensore diagonale del tipo $diag(\rho, \mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{P})$, dove ρ è la densità di energia e $\mathcal{P}$ è la pressione. Sostituendo tale tensore e la (1.3) all'interno della (1.2), si ottengono le *equazioni di Friedmann*:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \tag{1.4a}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}), \tag{1.4b}$$

dove H è il parametro di Hubble, il cui valore attuale è indicato con H_0. Si definisce denisità critica ρ_c:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{1.5}$$

A questo punto è possibile introdurre le densità normalizzata Ω_i, definita in questo modo:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \tag{1.6}$$

dove il pedice i indica una generica componente dell'Universo. Essendo quest'ultimo in espansione, le onde elettromagnetiche delle sorgenti, che si allontanano da un osservatore, subiscono uno spostamento verso il rosso della lunghezza d'onda osservata rispetto a quella emessa alla sorgente. Per questo motivo è utile introdurre il redshift z:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \tag{1.7}$$

nella quale λ_0 è la lunghezza d'onda osservata al tempo t_0 e λ_1 è la lunghezza d'onda emessa alla sorgente, al tempo $t_1 < t_0$. Dalla (1.3) è possibile dimostrare:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \tag{1.8}$$

Supponendo t_0 il tempo corrispondente all'attuale epoca cosmologica, si pone per semplicità $a(t_0) = 1$, in maniera tale che:

$$a(t) = \frac{1}{z+1}. \tag{1.9}$$

1.2 Il modello ΛCDM e il valore anomalo della densità di energia oscura

La scoperta dell'espansione accelerata dell'universo risale al 1998, grazie all'analisi delle supernovae distanti [3, 4]. Questo fenomeno fu interpretato come un effetto causato da un'energia, definita oscura, capace di "generare" l'accelerazione. Come prima possibile spiegazione teorica, fu introdotta all'interno delle equazioni di Einstein una costante capace di controbilanciare l'attrazione gravitazionale e causare l'espansione accelerata: la costante cosmologica Λ [5, 6]. Per cui si ha:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}Rg_{\mu v} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.10}$$

che causa la modifica della (1.4a) e della (1.4b). Le equazioni di Friedmann diventano:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{1.11a}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{1.11b}$$

Nella (1.11a) è possibile riconoscere una densità di energia oscura data da

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{1.12}$$

e analogamente nella (1.11b) una pressione di energia oscura

$$\mathcal{P}_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{1.13}$$

La costante cosmologia può allora essere interpretata come un fluido perfetto non interagente, con un'equazione di stato (EoS) data da:

$$\rho_\Lambda = -\mathcal{P}_\Lambda. \tag{1.14}$$

Dalla (1.14) si ricava che il fattore barotropico $\omega = \frac{\mathcal{P}_\Lambda}{\rho_\Lambda}$ è uguale a -1. Recenti osservazioni hanno stabilito che circa il 70% dell'universo è costituito da energia oscura, la quale, anche per questa ragione, rappresenta una delle sfide principali degli studi cosmologici odierni.
La costante Λ fa in realtà parte di un modello più ampio chiamato *modello* Λ*CDM*, che comprende anche la materia oscura: per ulteriori approfondimenti a riguardo si rimanda a [6, 7].
Il modello ΛCDM soffre purtroppo di due spinose complicazioni: la coincidenza cosmica e l'Universo finemente regolato; uno degli obiettivi dei capitoli successivi è proprio cercare di superare questi due interrogativi con un approccio quanto-cosmologico, per giungere ad un risultato più generale, di cui la costante cosmologica possa rappresentare solamente un caso limite.

1.2.1 La coincidenza cosmica

Uno dei problemi riguardanti la costante cosmologica Λ è dovuto al valore attuale della densità normalizzata (1.6) di energia oscura $\Omega_{\Lambda 0}$, la quale coincide, a meno di un fattore di proporzionalità, con la densità normalizzata di energia di materia[2] $\Omega_{\rm m0}$, dove il pedice 0 indica che essa è valutata al tempo presente t_0. In generale è possibile esprimere la densità di materia in funzione del redshift z:

$$\rho_m = \rho_{m0}(1+z)^3, \tag{1.15}$$

[2] D'ora in avanti per semplicità ρ_m sarà chiamata densità di materia.

con ρ_{m0} densità di materia al tempo presente. La densità di energia oscura è una costante per cui si pone:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0}. \tag{1.16}$$

Eguagliando la (1.15) e la (1.16) si ottiene il redshift z_c in cui ρ_m e ρ_Λ hanno lo stesso valore:

$$z_c = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} - 1, \tag{1.17}$$

dove si è usato $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\mathrm{m}0} \simeq 1$, approssimazione valida se si assume un universo a curvatura quasi nulla[3]. Osserviamo che, se nella (1.17) inseriamo $\Omega_{\Lambda 0} = 0{,}7$ (che corrisponde al valore del 70% indicato prima), otteniamo $z_{\mathrm{c}} \simeq 0{,}3$: questa casualità è denominata *coincidenza cosmologica*. Se ad esempio $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{\mathrm{m}0}$ fosse stato dieci volte più piccolo, non si sarebbe osservata nessuna accelerazione. Le classi di ipotesi più gettonate nella letteratura scientifica per interpretare questa stranezza sono quattro:

- la prima considera modelli in cui Ω_Λ è fisso mentre le altre densità normalizzate sono funzioni del redshift: in questo caso l'accelerazione sarebbe iniziata da un tempo relativamente breve e quindi emergerebbe un'altra coincidenza;
- la seconda afferma che $\Omega_{\Lambda 0}$ e Ω_{m} sono sempre stati più o meno simili: in questo caso però l'accelerazione sarebbe sempre esistita e ciò non è in accordo con le osservazioni sperimentali, in particolare con quelle riguardanti la crescita delle strutture a larga scala;
- la terza classe è definita antropica: in questa visione il nostro Universo è quello con il valore di densità di energia oscura più alto, tale da permettere la formazione di strutture e di conseguenza la vita, in accordo con il principio antropico [8];
- la quarta è quella riguardante i modelli di "backreaction", cioè quelli descriventi la coincidenza tra ρ_Λ e ρ_m come una conseguenza di un'altra coincidenza, ossia quella tra l'accelerazione e la formazione delle strutture [9].

1.2.2 L'Universo finemente regolato

Un altro problema che affligge la densità di energia ρ_Λ è la sua grandezza limitata rispetto alle previsioni teoriche. Prendendo in considerazione l'equazione di Friedmann (1.11a) e considerando un universo a curvatura quasi nulla e in espansione accelerata, ci si aspetta un valore della costante cosmologica pari al quadrato del valore attuale della costante di Hubble:

$$\Lambda \approx H_0^2 = \left(1.4924 \times 10^{-42}\mathrm{Gev}\right)^2. \tag{1.18}$$

Da cui si ottiene:

$$\rho_\Lambda \simeq 10^{-47}\mathrm{GeV}^4. \tag{1.19}$$

[3]Si consulti la (3.13) e la (3.15) per capire come ricavare quest'approssimazione.

Si supponga che la densità (1.19) provenga dalla densità $\langle\rho\rangle$ di energia del vuoto. In generale l'energia di punto zero di un campo di massa m, con un impulso di modulo p e frequenza ω, è data ovviamente da $E = \omega/2 = \sqrt{p^2+m^2}/2$ (in unità naturali). Per ricavare la densità di energia del vuoto è necessario integrare le energie di punto zero (di un campo che genericamente si associa al vuoto) fino ad un valore di taglio $p_{\max}$:

$$\rho_{\mathrm{vac}} = \int_0^{p_{\max}} \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sqrt{p^2+m^2}. \tag{1.20}$$

Poiché il contributo principale all'integrale è dato dai modi con $p \gg m$, allora[4]:

$$\rho_{\mathrm{vac}} = \int_0^{p_{\max}} \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sqrt{p^2+m^2} \approx \frac{p_{\max}}{16\pi^2}. \tag{1.21}$$

La Relatività Generale funziona fino alla scala di Planck, per cui risulta naturale usare l'impulso corrispondente all'energia di Planck come valore di $p_{\max}$, ricavando:

$$\rho_{\mathrm{vac}} \simeq 10^{74}\mathrm{GeV}, \tag{1.22}$$

che risulta essere 10^{121} volte più grande della (1.19): emerge in questo modo il problema dell'Universo finemente regolato, in cui la densità di energia oscura, come già accennato, sembra essere "disegnata" per permettere la vita. In letteratura spesso si adoperano le teorie supersimmetriche per risolvere il problema dell'Universo finemente regolato: per una trattazione dettagliata di questo aspetto si veda [10] per il formalismo teorico e [6] per l'applicazione cosmologica.

1.3 Energia oscura e costante cosmologica

Nei precedenti paragrafi non è mai stata fatta particolare distinzione tra il concetto di energia oscura e costante cosmologica, poichè in Cosmologia Relativistica la densità di energia oscura coincide con la densità associata alla costante cosmologica. In teorie più avanzate l'energia oscura rappresenta però un aspetto più ampio, di cui la costante cosmologica può rappresentare un caso limite; banalmente, in modelli più sofisticati, l'energia oscura, pur essendo responsabile dell'espansione accelerata, non è affatto costante e può essere funzione del redshift.
Nei prossimi capitoli, seguendo una convenzione adottata anche in letteratura, si continuerà ad usare anche il pedice Λ (o in alternativa DE, che sta per dark energy) per indicare quantità associate all'energia oscura (a meno che non sia specificato diversamente).

1.3.1 Parametrizzazioni del fattore barotropico

Le alternative proposte al modello ΛCDM sono molteplici e spaziano dall'aggiunta di termini fenomenologici di energia oscura alla modifica dell'azione di Hilbert-Einstein. Un'estensione naturale risulta certamente essere il modello ωCDM, in cui è introdotto un campo scalare ϕ, chiamato "quintessenza", che interagisce con tutte le

[4] $p^2 \gg m^2$.

altre componenti dell'Universo solo attraverso la gravità standard. Anche in questo caso sorgono delle questioni non risolte: l'origine di questo campo non è specificata e quindi non può rappresentare una risposta definitiva. Per affinare il modello con un'energia oscura che evolva nel tempo, si considera un fattore barotropico $\omega(\mathrm{z}) = \mathcal{P}/\rho$ dipendente da z; questo approccio ha però un aspetto da non trascurare: non è possibile definire *a priori* $\omega(\mathrm{z})$, che deve essere necessariamente ricostruito a partire dalle osservazioni. Risultano efficaci in questa direzione alcune parametrizzazioni di ω; un primo possibile esempio è quella CPL [11] (da Chevallier, Polarsky, Linderin), in cui $\omega(\mathrm{z})$ è espanso in serie di a(t) al primo ordine[5]:

$$\omega_{\mathrm{DE}}(z) = \omega_0 + \omega_1(1-a) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}. \tag{1.23}$$

Si noti che $\omega_{DE}(z) \to \omega_0 + \omega_1$ per $z \to \infty$ e $\omega_{DE}(z) \to \omega_0$ per $z \to 0$.
Jasal *et al.* [12] estesero la (1.23) ad una forma più generale:

$$\omega_{\mathrm{DE}}(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{(1+z)^p}. \tag{1.24}$$

Esistono ulteriori parametrizzazioni, che possono brevemente essere riassunte grazie a

$$\omega_{\mathrm{DE}}(z) = \sum_{n=1} \omega_n x_n(z), \tag{1.25}$$

dove le espansioni possono essere date da:

- $x_n(z) = \mathrm{z}^{\mathrm{n}}$, introdotta da Huterer e Turner [13] e da Weller e Albrecht [14] con $n \leq 1$;
- $x_n(z) = [ln(1+z)]^n$, introdotta da Efstathiou con $n \leq 1$ [15].

In tutti i casi si tratta di parametrizzazioni puramente fenomenologiche, comunemente utilizzate per analizzare dati, comparare risultati e fare simulazioni.

[5] con $\mathrm{a(t)} = (z+1)^{-1}$.

Capitolo 2

L'entanglement quantistico e l'informazione

L'entanglement rappresenta uno degli effetti più consolidati della teoria quantistica, con innumerevoli applicazioni. Il proposito di questo capitolo è inquadrare il fenomeno sia da un punto di vista generale sia da un punto di vita particolare. In questo senso diviene necessario introdurre dei quantificatori del grado di correlazione quantistica, il cosiddetto *peso dell'entanglement*, collegando questi aspetti al concetto di informazione [16] e quindi di entropia. Così facendo ne viene fuori una visione che risulta essere più moderna e completa dal punto di vista interpretativo, anche se non definitivamente risolutiva per un effetto che mostra ancora delle prospettive estremamente peculiari. L'obiettivo dei prossimi paragrafi è quindi costruire la struttura formale ed esegetica per poter affrontare al meglio il capitolo successivo, in cui l'entanglement diventerà il cardine dell'approccio quanto-cosmologico adoperato.

2.1 L'entanglement quantistico

Si supponga di avere un sistema quantistico $\mathcal{S}$, descritto da un vettore di stato $|\Psi\rangle$, composto da due sottosistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ ($\mathcal{S}$ è detto sistema *bipartito*). Lo stato $|\Psi\rangle$ è detto entangled rispetto a $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ se esso non può essere scritto come prodotto tensoriale di questi due sottosistemi, cioè se non esiste nessun vettore di stato $|\psi\rangle_1$ di $\mathcal{S}_1$ e $|\phi\rangle_2$ di $\mathcal{S}_2$ tale che $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$. Questa definizione è immediatamente generalizzabile ad un sistema $\mathcal{P}$ composto da N sottosistemi $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_N$, in tal caso esso è denominato *multipartito*. D'ora in avanti per semplicità di notazione, secondo un usuale convenzione, il prodotto tensoriale $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$ sarà sottinteso come $|\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$.
Esempi classici di stato puri entangled sono i cosiddetti *stati di Bell*, sistemi massimamente entangled formati da due qubit (nel paragrafo 2.1.2 sarà specificato cosa vuol dire "massimamente entagled"). Il qubit rappresenta l'analogo in informazione quantistica del bit classico, oggetto matematico che può assumere valore 0 o 1 [17]. Anche il qubit è caratterizzato da due stati, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ma a differenza del corrispondente classico esso può trovarsi in generale in una sovrapposizione di stati del tipo:

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

che segue le leggi della meccanica quantistica per uno stato definito su uno spazio di Hilbert a dimensione due. Se infatti nell'ambito della teoria dell'informazione sia i bit che i qubit sono trattati come oggetti puramente matematici, essi hanno naturalmente delle applicazioni fisiche: nel caso di primi si tratta in genere della presenza di un potenziale elettrico alto-basso, a cui, in logica positiva, corrispondono rispettivamente i numeri 1 e 0 [18]; per i secondi vi sono numerosi esempi, ma quello più "noto" è senza dubbio un sistema di due particelle entangled di spin 1/2. Di quest'ultimo sono indicati i corrispondenti stati di Bell:

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2\right), \tag{2.2a}$$

$$\left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2 \pm |1\rangle_1|0\rangle_2\right), \tag{2.2b}$$

dove i pedici 1 e 2 indicano il sottosistema associato rispettivamente allo spazio di Hilbert di una delle due particelle, mentre 0 e 1 indicano ovviamente gli stati di spin up e spin down. Risulta evidente che non è possibile riscrivere questi stati come prodotti tensoriali di due vettori: in questo senso $|\Phi^{\pm}\rangle$ e $|\Psi^{\pm}\rangle$ devono necessariamente essere trattati nella loro "globalità".
Si abbia uno stato non entangled generico $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 |\Phi\rangle_2$, in questo caso una misura su uno dei due sottosistemi sarà totalmente indipendente dall'altro. Al contrario nelle (2.2a) e (2.2b) una misura su un sottosistema determina, non a caso, una e una sola misura possibile sull'altro.

2.1.1 Entanglement e trasmissione di informazione

Si potrebbe pensare che grazie all'entanglement sia possibile trasmettere un'informazione in maniera istantanea, tramite una "azione fantasma a distanza" (secondo l'espressione di Einstein), rendendo improbabile l'esistenza dell'entanglement a causa della violazione del fondamentale assunto che nessun tipo di segnale può propagarsi ad una velocità maggiore della luce. Non sarebbe comunque possibile in alcun modo "sfruttare" tale fenomeno per recapitare un messaggio: si discuterà ora nel dettaglio tale affermazione e vari altri aspetti utili ad introdurre il concetto di stati massimamente entanlged .
Un pione π neutro decade emettendo un elettrone e un positrone: $\pi^0 \to e^- + e^+$. Il pione è inizialmente fermo per cui l'elettrone e il positrone proseguono in direzioni opposte. Per la conservazione del momento angolare lo stato del sistema deve essere quello di singoletto, per cui: $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2)$, dove 1 e 2 indicano i sottosistemi delle due particelle [19]. Bob e Alice sono due osservatori che si trovano ad una certa distanza dal luogo in cui avviene il decadimento del pione, si supponga Alice a cinque anni luce e Bob a sette (ovviamente è un esperimento mentale in cui esistono solamente i due osservatori e le due particelle). Ad un certo istante Alice effettua una misura sull'elettrone e trova uno spin up: la funzione d'onda è collassata e quindi lei è già consapevole che Bob, il quale misurerà in seguito il positrone, troverà uno spin down. A questo punto è facile rendersi conto che nessuna informazione utile è trasportata dal positrone a Bob, difatti seguendo l'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica Alice non poteva prevedere che l'elettrone si

trovasse in uno stato di spin up, poiché esso assume quello stato solo al momento della misura e perciò risulta impossibile, attraverso questo fenomeno, inviare dei segnali preparati *ad hoc* tra due osservatori. Per una prova più rigorosa di ciò si veda il teorema di non-comunicazione [17]. Si potrebbe ribattere che se Bob riuscisse a clonare tantissime volte lo stato del positrone, sarebbe in grado di determinare se Alice abbia misurato o meno in precedenza l'elettrone: nel primo caso Bob otterrebbe sempre uno spin down, mentre nel secondo (se il numero di cloni è abbastanza elevato, idealmente infinito) otterrebbe il 50% delle volte up e il restante down. Ciò non è però possibile (se si ritiene valida la meccanica quantistica) grazie al teorema di no-cloning, per i dettagli si veda [20].
Nell'interpretazione odierna più condivisa, per spiegare la complessità di queste situazioni, si sostiene che uno stato entangled è dovuto ad un'interazione avvenuta *localmente* in un certo istante tra due (o più) sottosistemi, dopodiché quando questi ultimi si separano lo stato totale del sistema risulta *delocalizzato*. Quest'ultimo rappresenta la più completa descrizione dei due sottosistemi (che ormai sono diventati fisicamente una "cosa sola") e deve essere considerato nella sua "globalità", ma, in un'accezione assai lontana dalla meccanica classica, "dislocato" in più posti nello spazio.

2.1.2 Il peso dell'entanglement come misura dell'informazione

Non potendo "sfruttare" l'entanglement per trasmettere informazioni in maniera istantanea, ci si potrebbe allora chiedere se esso possa avere in qualche modo a che fare con la quantità di informazione che è possibile ricavare dal sistema fisico che si vuole misurare. Si consideri nuovamente l'esempio di Alice: quando ella trova l'elettrone in uno stato di spin up, allora sa già che il positrone sarà in uno stato di spin down. In questo senso la conoscenza da parte di Alice del sistema è massima: quando ciò accade lo stato totale del sistema delle due particelle è detto *massimamente entangled*. Naturalmente questa condizione è immediatamente generalizzabile ad un sistema $\mathcal{S}$ formato da N sottosistemi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_N$: esso si dirà *massimamente entangled* quando, effettuata una misura su uno solo dei suoi N sottosistemi, gli altri N-1 esiti di misura dell'osservabile considerato, sugli altri N-1 sottosistemi, risulteranno univocamente determinati. Questa particolare situazione si verifica per due ragioni:

- naturalmente lo stato del sistema deve essere in una forma tale che ogni sottostato ,di un generico sottosistema, deve essere correlato con N-1 sottostati appartenenti ad ognuno degli altri N-1 sottosistemi;
- i sottostati di un sottosistema devono essere tra loro ortogonali, quindi perfettamente distinguibili.

Questi due aspetti sono ben evidenti nel caso di Bob e Alice. Prendendo nuovamente in considerazione il singoletto $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2)$ si vede infatti che $|0\rangle_1$ è correlato con $|1\rangle_2$ e lo stesso vale per $|1\rangle_1$ e $|0\rangle_2$; inoltre $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$ è una base ortogonale, come del resto $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$. Per chiarire la seconda ragione si consideri il seguente stato:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_1\rangle_1 |\phi_1\rangle_2 \pm |\psi_2\rangle_1 |\phi_2\rangle_2 \right), \tag{2.3}$$

dove $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ sono quasi indistinguibili ($\langle\phi_1|\phi_2\rangle \simeq 1$). Per questa ragione, se un osservatore effettuasse una misura su $\mathcal{S}_2$, non sarebbe in grado di ricavare molte informazioni su $\mathcal{S}_1$, proprio perché non può ben distinguere gli stati in $\mathcal{S}_2$. Nel caso limite $|\phi_1\rangle = |\phi_2\rangle = |\phi\rangle$ si ha:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_1\rangle_1 + |\psi_2\rangle_1 \right) |\phi\rangle, \tag{2.4}$$

in cui non esiste più nessuna correlazione e nessuna conoscenza sul sistema $\mathcal{S}_1$ misurando in $\mathcal{S}_2$. Alla luce di questa breve discussione dovrebbe essere chiaro che è possibile distinguere diversi gradi di entanglement. Da una prospettiva qualitativa la domanda da porsi è: "quanta informazione può ricavare un osservatore sugli altri sistemi misurandone uno solo?". Per quanto appena scritto, maggiore è il cosiddetto *peso dell'entanglement*, maggiore sarà l'informazione che è possibile ricavare. Bisogna però fare attenzione, poiché, pur essendo vera l'ultima affermazione, deve essere ben inquadrata. Nei prossimi paragrafi infatti si vedrà che è possibile collegare il grado di entanglement di un sottosistema alla sua entropia: la crescita dell'entanglement comporta la crescita dell'entropia. Quest'ultimo fatto potrebbe sembrare in contrasto con tutto ciò che è stato detto precedentemente, poiché ad una crescita di entropia è associata una diminuzione dell'informazione sul sistema considerato. In realtà la domanda si riferisce alla quantità di informazione che è possibile estrapolare riguardo gli altri sistemi misurandone uno, e non alla quantità di informazione su quel particolare sottosistema.
Segue adesso una descrizione formale e quantitativa dei concetti espressi in questo sottoparagrafo.

2.2 L'operatore densità

Il formalismo dell'operatore densità è indispensabile per affrontare il prossimo capitolo: maggiore attenzione è dedicata a quegli aspetti necessari ad introdurre il concetto di entropia lineare.
Di solito, quando si ha una conoscenza incompleta di un sistema, ci si affida al concetto di probabilità. Ciò può avvenire in meccanica quantistica se ad esempio lo stato di un sistema ha probabilità p_1 di trovarsi nello stato $|\psi_1\rangle$, probabilità p_2 di trovarsi in $|\psi_2\rangle$ e così via (con $\sum_k^N p_k = 1$). Si dice allora che il sistema è descritto da una *miscela statistica* di stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_N\rangle$ con probabilità p_1, p_2,..., p_N. Si sottolinea che i vari stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_N\rangle$ non devono necessariamente essere tra di loro ortogonali. Le probabilità p_k sono classiche e non vanno assolutamente confuse con quelle quantistiche[21]. Si considerino due stati ortonormali $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, autostati di un certo operatore $\hat{B}$:

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1, \tag{2.5a}$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0, \tag{2.5b}$$

$$\hat{B}\,|\psi_1\rangle = b_1\,|\psi_1\rangle\,, \tag{2.5c}$$

$$\hat{B}\,|\psi_2\rangle = b_2\,|\psi_2\rangle\,. \tag{2.5d}$$

Se il sistema è nello stato $|\psi_1\rangle$ si possono calcolare tutte le probabilità inerenti gli esiti di misura per un dato osservabile $\hat{A}$. Si indichino con $|u_n\rangle$ gli autostati normalizzati di $\hat{A}$, supposti per semplicità non degeneri, a cui sono associati gli autovalori a_n. La probabilità $P_1(a_n)$ di trovare a_n effettuando la misura su $|\psi_1\rangle$ è:

$$P_1(a_n) = |\,\langle u_n|\psi_1\rangle\,|^2. \tag{2.6}$$

Analogamente per $|\psi_2\rangle$:

$$P_2(a_n) = |\,\langle u_n|\psi_2\rangle\,|^2. \tag{2.7}$$

Una sovrapposizione lineare di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ è data da:

$$|\Psi\rangle = \lambda_1\,|\psi_2\rangle + \lambda_2\,|\psi_2\rangle\,, \tag{2.8}$$

con $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$. Lo stato $|\Psi\rangle$ ha probabilità $|\lambda_1|^2$ di trovarsi nello stato $|\psi_1\rangle$ e probabilità $|\lambda_2|^2$ di trovarsi in $|\psi_2\rangle$: ciò potrebbe erroneamente portare a pensare che il sistema sia una miscela statistica. In realtà risulta più corretto affermare che, essendo $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ autostati di $\hat{B}$, si ha probabilità $|\lambda_1|^2$ di trovare l'autovalore b_1 quando si misura l'osservabile $\hat{B}$ (ugualmente per b_2 e $|\lambda_2|^2$). La differenza è sottile ma sostanziale. Questo perché se si interpretasse $|\Psi\rangle$ come una *miscela statistica*, allora la probabilità di trovare l'autovalore a_n effettuando una misura sulla miscela sarebbe pari a:

$$P(a_n) \stackrel{?}{=} |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n), \tag{2.9}$$

cioè una classica somma pesata. La meccanica quantistica fornisce come ricetta per calcolare $P(a_n)$:

$$P(a_n) = |\,\langle u_n|\psi\rangle\,|^2. \tag{2.10}$$

Si ottiene con pochi e brevi calcoli:

$$P(a_n) = |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) + 2Re\{\lambda_1\lambda_1^*\,\langle u_n|\psi_1\rangle\,\langle u_n|\psi_2\rangle^*\}, \tag{2.11}$$

che è evidentemente diversa dalla (2.9) a causa di $2Re\{\lambda_1\lambda_1^*\,\langle u_n|\psi_1\rangle\,\langle u_n|\psi_2\rangle^*\}$. Quest'ultimo è detto termine di *interferenza* ed è riconducibile ad un fenomeno tipicamente quantistico, a causa del quale le probabilità interferiscono tra loro. A questo punto emerge la diversità di p_k da $|\lambda_k|^2$, che permette di poter affermare con tranquillità che uno stato del tipo $\sum_k c_k\,|\psi_k\rangle$ *non è una miscela statistica*.
Per realizzare quest'ultima basta tenere a mente che si sta avendo a che fare con una

situazione in parte classica. Una possibile implementazione può essere una macchina capace di preparare in maniera deterministica uno stato con probabilità del 50% di essere in $|\psi_1\rangle$ e del 50% in $|\psi_2\rangle$, come ad esempio un apparato di Stern-Gerlach che misura particelle a spin 1/2. Se nella macchina il processo è puramente quantistico, un osservatore esterno, che non si preoccupa di ciò che avviene all'interno, avrà a che fare con un apparecchio che è in grado di emettere uno stato o un altro con probabilità 1/2.
Una miscela statistica in cui $p_i = 1$ e $p_k = 0\ \forall k \neq i$ è detto stato *puro*, che non è altro che l'usuale stato quantistico utilizzato normalmente in tutte quelle situazioni non descritte da misture statistiche deterministiche. Esso è per questo motivo lo stato che per definizione contiene la massima informazione del sistema fisico.

2.2.1 L'operatore densità per gli stati puri

Sia $|\Psi\rangle$ uno stato puro, si definisce *operatore densità* corrispondente al suddetto stato l'operatore:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi| \,, \tag{2.12}$$

che non è altro che l'operatore proiezione su $|\Psi\rangle$. In letteratura l'operatore densità è anche chiamato *matrice densità*, termine che si riferisce sia alla rappresentazione matriciale dell'operatore sia all'operatore stesso. Se si esprime lo stato $|\Psi\rangle$ nella base $\{|\psi_i\rangle\}$ come:

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_i \,|\psi_i\rangle \,, \tag{2.13}$$

il corrispondente operatore densità è

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j} c_i c_j^* \,|\psi_i\rangle \langle\psi_j| \,, \tag{2.14}$$

dove i termini della sommatoria con $i \neq j$ sono i *termini di interferenza*, o *termini fuori diagonale*, che incorporano la coerenza quantistica delle differenti componenti $|\psi_i\rangle$. Questi sono termini fuori diagonale nella base $\{|\psi_i\rangle\}$, ma esisterà sempre una base in cui l'operatore è diagonale: ciò non vuol dire che, a causa della scomparsa dei termini di interferenza tipici della meccanica quantistica, il sistema si comporta in maniera "classica" . Difatti a quella base potrebbe non corrispondere un osservabile familiare, e inoltre i termini off-diagonal in generale continueranno ad essere presenti nelle altre basi.
Si consideri un operatore hermitiano $\hat{O}$ con spettro discreto non degenere, autovalori o_i e autostati $|o_i\rangle$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) &= \sum_i \langle o_i|\hat{\rho}\hat{O}|o_i\rangle \\ &= \sum_i \langle o_i|\Psi\rangle \langle\Psi|\hat{O}|o_i\rangle \\ &= \sum_i o_i \langle o_i|\Psi\rangle \langle\Psi|o_i\rangle \,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Utilizzando $\hat{O} = \sum_i o_i |o_i\rangle \langle o_i|$ (che si dimostra facilmente proiettando un generico stato sulla base $\{|o_i\rangle\}$ e facendovi agire $\hat{O}$) si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) &= \sum_i o_i \langle\Psi|o_i\rangle \langle o_i|\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle\,,\end{aligned} \tag{2.16}$$

in definitiva:

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = \langle\hat{O}\rangle. \tag{2.17}$$

Questa proprietà risulta praticamente inutile per uno stato puro ma, quando generalizzata alle miscele statistiche, diventa di fondamentale importanza. Si osservino le seguenti altre due proprietà ottenute utilizzando in particolare la (2.14) e supponendo $\{|\psi_i\rangle\}$ una base ortonormale:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) &= \sum_{i,j,k} c_i c_j^* \langle\psi_k| (|\psi_i\rangle \langle\psi_j|) |\psi_k\rangle \\ &= \sum_k |c_k|^2 \\ &= 1\end{aligned} \tag{2.18a}$$

$$\hat{\rho}^2 = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Psi\rangle \langle\Psi| = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \hat{\rho} \tag{2.18b}$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1. \tag{2.18c}$$

2.2.2 L'operatore densità per le miscele statistiche

Si consideri *miscela statistica* di stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots$ con probabilità p_1, p_2,.... In questo caso il valore medio di un osservabile $\hat{Q}$ sarà pari alla somma pesata (con le probabilità) dei valori medi dell'operatore stesso sui singoli stati $|\psi_i\rangle$:

$$\langle\hat{Q}\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i| \hat{Q} |\psi_i\rangle\,. \tag{2.19}$$

Sfruttando la (2.17) è possibile scrivere

$$\langle\hat{Q}\rangle = \sum_i p_i \,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_i\hat{Q}), \tag{2.20}$$

dove si è indicato $p_i = |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$. Utilizzando le note proprietà dell'operatore traccia si ottiene:

$$\langle\hat{Q}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\sum_i p_i\hat{\rho}_i\hat{Q}\right). \tag{2.21}$$

Si definisce quindi l'operatore densità per le miscele statistiche

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i\hat{\rho}_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\,, \tag{2.22}$$

da cui si ricava (analogamente al caso puro):

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{Q}) = \langle \hat{Q} \rangle. \tag{2.23}$$

Sussiste inoltre la seguente proprietà:

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = \mathrm{Tr}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \,\mathrm{Tr}(\rho_i) \stackrel{(2.18a)}{=} \sum_i p_i = 1. \tag{2.24}$$

Una differenza rilevante col caso puro sta nel fatto che

$$\rho^2 = \sum_{i,j} p_i p_j \langle \psi_i | \psi_j \rangle \, |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \neq \hat{\rho}, \tag{2.25}$$

valida anche se sussiste la condizione $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = 0$ per $i \neq j$, poiché per una miscela statistica $p_i^2 \neq p_i$.

2.2.3 La purezza: misura del grado di mescolamento

La (2.25) è utile a introdurre il *grado di mescolamento* della miscela statistica, concetto che sarà in seguito ricollegato a quello di peso dell'entanglement. Nel caso in cui la conoscenza del sistema è massima lo stato è puro, per cui come visto $\rho^2 = \rho$, mentre per le miscele vale la (2.25). Questa caratteristica rappresenta un discriminante tra le due situazioni, l'ideale sarebbe però riuscire non solo a distinguere stati puri e misti (d'ora in poi ci si riferirà anche così ad una miscela statistica), ma anche quantificare la conoscenza del sistema fisico in questione. In questa direzione è vantaggioso introdurre la *purezza* μ, definita come:

$$\mu = \mathrm{Tr}(\rho^2). \tag{2.26}$$

Nel caso di stati misti

$$\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1 \tag{2.27}$$

e assumendo che $\{|\psi_i\rangle\}$ sia una base ortonormale sullo spazio di Hilbert N-dimensionale del sistema si ottiene:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{2.28}$$

La somma ha un limite inferiore dato da 1/N (si ricordi che la traccia è invariante per cambiamento di base), condizione che si verifica nel caso in cui il grado di mescolamento è massimo, cioè quando $p_i = 1/N \ \forall i$ e il grado di conoscenza del sistema è minimo. Dimostrarlo è immediato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, avvalendosi del vincolo $\sum_i^N p_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \lambda \left(\sum_i^N p_i - 1 \right) \equiv g(p_1, \ldots, p_N) \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial g(p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_j} = 0 \implies p_j = p = costante \quad \forall j \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = Np = 1 \implies p = \frac{1}{N} \tag{2.31}$$

Se si fosse scelto $p = 1$ per una sola probabilità (e tutte le altre uguali a zero), si sarebbe ottenuto il caso opposto con $\mu = 1$, ossia la condizione di stato puro. La purezza è un ottimo quantificatore del grado di mescolamento, e quindi di informazione del sistema: ciò suggerisce un possibile collegamento con l'entropia.
Si definisce, attraverso l'operatore densità, l'*entropia di Von Neumann*:

$$S \equiv -\operatorname{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \tag{2.32}$$

Essa è una misura del disordine e della mancanza di informazione nella matrice densità [22]. Più stati contiene quest'ultima, più piccolo sarà il peso di ogni singolo stato $|\psi_i\rangle$, e minore sarà anche l'informazione sul sistema. Difatti maggiore disordine vuol dire maggiore entropia, fatto che indica che il sistema può assumere un maggiore numero di configurazioni e quindi la conoscenza da parte dell'osservatore diminuisce poiché potrà trovare una grande varietà di stati; nella condizione opposta, in cui il numero di configurazioni si abbassa, la conoscenza è maggiore dato che si riducono le possibilità di esiti. Ad esempio se un osservatore deve misurare una miscela statistica composta da due stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, con delle probabilità rispettivamente del 90% e del 10%, la sua conoscenza del sistema è buona: ha buone possibilità di trovare $|\psi_1\rangle$, in questo senso l'informazione sul sistema è alta.
Si osservi che anche la (2.32) è un quantificatore del grado di mescolamento: riscrivendo S come $-\sum_k \lambda_k \ln \lambda_k$, dove i λ_k sono gli autovalori di $\hat{\rho}$, si trova, agendo come nella (2.30), che essa è massima quando $\lambda_k = 1/N \quad \forall k$ [23].

Miscela statistica ed ensemble

Il concetto di miscela statistica e quello di ensemble sono intrinsecamente diversi:

- il primo è un singolo stato che può trovarsi in uno solo di un certo numero di stati, ad ognuno dei quali è associata una probabilità (come visto formalmente nel paragrafo 2.2);
- il secondo invece è un insieme in cui sono presenti una pluralità di stati con una certa frequenza f_{i}.

La trattazione per l'ensemble (considerato non entangled) è identica a quella della miscela per ciò che riguarda gli osservabili misurati su uno solo degli stati dell'insieme: basta utilizzare le f_i al posto delle p_i.

2.2.4 Matrice densità ridotta

Si immagini un sistema $\mathcal{S}$ formato da due sottosistemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ entangled: in questo caso lo stato associato a $\mathcal{S}$ è puro, poiché non vi è nessuna probabilità collegata a qualche ignoranza sul sistema. Teoricamente è possibile utilizzare il formalismo della matrice densità per gli stati puri, ma ciò non è realizzabile nella maggior parte dei casi. Come già ampiamente dibattuto in 2.1.1 la meccanica quantistica è una teoria *non locale*, cioè $\mathcal{S}$ è delocalizzato e nella maggior parte dei casi l'osservatore è in grado di effettuare una misura solo su uno dei due sottosistemi. Nasce di conseguenza l'esigenza di costruire un oggetto matematico capace di descrivere tutta l'informazione che l'osservatore può ricavare da un sottosistema; tale oggetto è denominato *matrice densità ridotta*:

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\,\hat{\rho}, \tag{2.33}$$

in cui si è considerato l'osservatore che misura in $\mathcal{A}$. Il pedice $\mathcal{B}$ indica che la traccia è svolta su una base ortonormale dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ associato a $\mathcal{B}$. L'operatore $\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}$ è la traccia parziale su $\mathcal{B}$ e deve essere interpretato come "media" sui gradi di libertà di $\mathcal{B}$. Segue ora una spiegazione della costruzione di $\rho_{\mathcal{A}}$.
Si considerino due sistemi entangled $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, descritti da:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle\,|b_1\rangle + |a_2\rangle\,|b_2\rangle), \tag{2.34}$$

dove per semplicità di notazione $|a_i\rangle \in \mathcal{A}$ e $|b_i\rangle \in \mathcal{B}$, con $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$ stati normalizzati arbitrari. Essendo $|\Psi\rangle$ uno stato puro, l'operatore densità si scrive:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\,\langle\Psi| = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2} |a_i\rangle\,\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\,\langle b_j|\,. \tag{2.35}$$

Siano $|\psi_k\rangle$ e $|\phi_l\rangle$ delle basi ortonormali rispettivamente degli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. Quando un operatore agisce solo su $\mathcal{A}$ allora esso potrà essere scritto nel seguente modo:

$$\hat{O} = \hat{O}_{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{B}}, \tag{2.36}$$

con $\hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{B}}$ operatore identità agente in $\mathcal{B}$ e $\hat{O}_{\mathcal{A}}$ agente in $\mathcal{A}$. Come già discusso nel dettaglio, per qualsiasi operatore $\hat{O}$ sussiste $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = \langle\hat{O}\rangle$, per cui sfruttando questa proprietà e la (2.36) si deduce:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{O}\rangle &= \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) \\
&= \sum_{k,l} \langle\phi_l|\,\langle\psi_k|\hat{\rho}\left(\hat{O}_{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{B}}\right)|\psi_k\rangle\,|\phi_l\rangle \\
&= \sum_{k} \langle\psi_k|\left(\sum_{l=1} \langle\phi_l|\hat{\rho}|\phi_l\rangle\right)\hat{O}_{\mathcal{A}}|\psi_k\rangle \\
&= \sum_{k} \langle\psi_k|\,(\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}\,\hat{\rho})\,\hat{O}_{\mathcal{A}}|\psi_k\rangle \\
&= \sum_{k} \langle\psi_k|\hat{\rho}_{\mathcal{A}}\hat{O}_{\mathcal{A}}|\psi_k\rangle \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\left(\hat{\rho}_{\mathcal{A}}\hat{O}_{\mathcal{A}}\right),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

dove $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ è dato dalla (2.33).
La definizione di matrice ridotta è immediatamente generalizzabile al caso di N

sottosistemi entangled $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,...,$\mathcal{A}_N$: se un operatore agisce solamente su $\mathcal{A}_i$ allora può essere scritto come:

$$\hat{O} = \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{A}_1} \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{A}_2} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{A}_{i-1}} \otimes \hat{O}_{\mathcal{A}_1} \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{A}_{i+1}} \cdots \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{A}_N}, \tag{2.38}$$

con la matrice densità ridotta (corrispondente ad $\mathcal{A}_1$)

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}_i} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_{i-1},\mathcal{A}_{i+1},\ldots\mathcal{A}_N}(\hat{\rho}). \tag{2.39}$$

2.3 Entropia ed entanglement

Avendo fornito l'apparato formale necessario, in questo paragrafo verrà completata la discussione lasciata in sospeso nel sottoparagrafo (2.2.3).

2.3.1 L'entropia lineare

Si prenda in considerazione nuovamente il sistema bipartito analizzato in 2.2.4. Effettuando l'espansione degli stati $|b_i\rangle$ della (2.34) nella base ortonormale $|\phi_l\rangle$ dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{B}$

$$|b_i\rangle = \sum_l c_l^{(i)} |\phi_l\rangle\,, \tag{2.40}$$

e usando la (2.33) e la (2.35) è possibile ricavare con pochi semplici passaggi:

$$\hat{\rho}_\mathcal{A} = \frac{1}{2}(|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| + |a_1\rangle\langle a_2|\langle b_2 \mid b_1\rangle + |a_2\rangle\langle a_1|\langle b_1 \mid b_2\rangle). \tag{2.41}$$

Si osservi nella (2.41) la presenza dei prodotti scalari $\langle b_1|b_2\rangle$ e $\langle b_2|b_1\rangle$, i quali determinano un'interferenza tra $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$, causata dalla correlazione quantistica con $\mathcal{B}$. Se $\langle b_1|b_2\rangle$ e $\langle b_2|b_1\rangle$ sono uguali a zero (si immagini i vettori tra loro ortonormali) allora

$$\hat{\rho}_\mathcal{A} = \frac{1}{2}(|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2|)\,, \tag{2.42}$$

che, almeno nella forma, è identica ad una miscela. Ciò vuol dire che non esiste un operatore che agisce solo in $\mathcal{A}$ (un operatore del genere è detto *locale*) capace di rivelare un'interferenza tra $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$. Bisogna però specificare che la matrice ridotta è solo uno strumento formale e che un sistema entangled è intrinsecamente diverso da una miscela: lo stato totale non è descritto da $\hat{\rho}_\mathcal{A}$ e nessuno stato individuale è associabile ad $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$. Per tutte queste ragioni in generale le matrici densità dei sottosistemi entangled sono dette essere associate a *miscele improprie*. La descrizione delle miscele improprie e statistiche è la stessa da un punto di vista matematico, ciò permette di fare alcune considerazioni. In (2.2.3) sono state introdotte la purezza e l'entropia di Von Neumann come misura del grado di mescolamento; ora esse possono essere viste come una misure del grado di entanglement: il cosiddetto *peso dell'entanglement*. Il limite inferiore della purezza, corrispondente al massimo peso, è dato da 1/N, dove questa volta N è il numero di sottosistemi entangled. Un esempio immediato può essere dato dagli stati di Bell, descritti nel corso del primo paragrafo di questo capitolo. Ad esempio dalla $|\Psi^-\rangle$ della (2.2b) si ottiene:

$$\hat{\rho}_1 = |0\rangle_1 \langle 0|_1 + |1\rangle_1 \langle 1|_1 \,, \tag{2.43}$$

dove il pedice 1 indica il sottosistema della particella 1. Per cui nella base dello spin 1/2 si ricava immediatamente:

$$\hat{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{2.44a}$$

$$\hat{\rho}_1^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \tag{2.44b}$$

$$\mu = \mathrm{Tr}\, \rho_1^2 = \frac{1}{2}, \tag{2.44c}$$

proprio come ci si aspettava, essendo i sottosistemi solamente due. A questo punto è possibile mostrare il collegamento tra purezza ed entropia, solamente intuito in precedenza.
L'entropia di Von Neumann (2.32)

$$S_{VN} \equiv -\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}),$$

può essere espansa grazie alla serie di Mercator [24] di $\ln \hat{\rho} = \ln(1 + (\hat{\rho} - 1))$, per trovare l'*entropia lineare* [25]

$$\begin{aligned} S_L &= -\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}(\hat{\rho} - 1)) \\ &= -\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2 - \hat{\rho}) \\ &\overset{(2.24)}{=} 1 - \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Ricordando che il minimo valore di $\mu = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2)$ è 1/N, è possibile normalizzare S_L per far sì che valga 1 per stati massimamente entangled e zero per stati non entangled[1] (quando $\mu = 1$) [26]:

$$S_L = \frac{N}{N-1}(1 - \mu).$$

Finalmente i concetti di informazione, entanglement, entropia e mescolamento sono stati "unificati" come da intento.

2.3.2 Termodinamica ed entropia di entanglement

La validità della termodinamica standard è ormai appurata, per cui la cosmologia deve essere compatibile con essa [26, 27].

[1] Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due sottosistemi entangled di un sistema $\mathcal{S}$. La purezza associata allo stato totale di $\mathcal{S}$ sarà ovviamente 1, poiché esso è per definizione puro. Una purezza minore di 1 si osserva quando si ha a che fare con le matrici ridotte.

La densità di energia dell'Universo ρ (da non confondere con la matrice densità) è una componente del tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \mathcal{P})u^\mu u^\nu - \mathcal{P}g^{\mu\nu}, \tag{2.46}$$

qui scritto in forma di fluido perfetto e soddisfacente la legge di conservazione:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \tag{2.47}$$

dove "$;\mu$" indica la derivata covariante rispetto all'indice μ. Si vuole ora cercare di "inserire" nella teoria classica il concetto di entropia di entanglement illustrato in (2.3.1). Dalla (2.47) si ricava la nota *equazione di continuità*

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\rho + \mathcal{P}}{a}\right) = 0 \tag{2.48}$$

che, utilizzando la relazione

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z) \tag{2.49}$$

ottenuta da $a(t) = \frac{1}{z+1}$, può essere scritta in funzione del redshift come:

$$\frac{d\rho}{dz} = 3\frac{\mathcal{P} + \rho}{1+z}. \tag{2.50}$$

La notazione utilizzata è quella della Cosmologia Relativistica: $z(t)$ è il redshift (1.7), $a(t)$ è il fattore di scala (1.9), $H(z)$ è il parametro di Hubble (1.11a).
Il termine di energia oscura è spesso inserito "a mano" nella (2.46), ma si può considerare anche un approccio diverso. Si può supporre ad esempio che il termine ρ sia la somma dei diversi contributi dati da materia, energia oscura e tutte le altre componenti dell'Universo.
Grazie alle relazioni termodinamiche di Maxwell, si può utilizzare

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{1}{\mathrm{T}}, \tag{2.51}$$

dove s è la densità di entropia e T la temperatura.
Sostituendo l'EoS generica $\rho = \omega\mathcal{P}$ all'interno della (2.50) si ottiene l'equazione

$$\frac{d\rho}{dz} = 3\frac{\omega + 1}{1+z}dz, \tag{2.52}$$

integrando quest'ultima di deduce:

$$\rho \propto \exp\left(3\int\frac{\omega(z)}{z+1}dz\right). \tag{2.53}$$

Grazie alla (2.51) si ottiene:

$$\mathrm{T} \propto \exp\left(3\int\frac{\omega(z)}{z+1}dz\right). \tag{2.54}$$

Come si è visto l'entropia di Von Neumann S_{VN} è strettamente collegata al concetto di entanglement, fenomeno che non ha analogo classico. S_{VN} risulta quindi fondamentale nel descrivere l'energia oscura da un punto di vista quantistico. Difatti i concetti di entropia, densità di energia, informazione e temperatura sono strettamente intrecciati: è necessario perciò utilizzare l'entropia di Von Neumann anche nelle equazioni di derivazione classica mostrate in questo paragrafo, solo in questo modo si può tenere conto della correlazione quantistica.

Capitolo 3

Energia oscura da un toy model cosmologico

In questo capitolo si descriverà un approccio in cui l'energia oscura emerge in maniera "spontanea" dalla mancanza di informazione, causata dalla correlazione quantistica. L'ipotesi fondamentale sarà quella dell'entanglement tra le funzioni d'onda dell'Universo in diverse ere cosmologiche, manifestazione del fenomeno della decoerenza.

3.1 La funzione d'onda dell'Universo

Il risultato principale della cosiddetta quantizzazione canonica della gravità è l'equazione di Wheeler–DeWitt. Una trattazione formale dell'argomento esula dagli obiettivi di questa disamina: per i dettagli si veda allora [5]. La soluzione di quest'equazione, con opportune condizioni al contorno, è detta *funzione d'onda dell'Universo*. Lo spazio delle configurazioni associato (lo spazio delle configurazioni dell'Universo) è detto *superspazio*. L'interpretazione della funzione d'onda dell'universo è assai complicata e concettualmente lontana da quella della Meccanica Quantistica. Nella teoria quantistica vi è sempre un osservatore esterno che effettua una misura e interagisce con lo stato quantistico facendolo collassare: pur non essendo ancora chiaro questo processo, il meccanismo è ben conosciuto e consolidato. Quando però si considera una funzione d'onda che descrive l'intero Universo nascono delle difficoltà: per definizione esso è tutto ciò che esiste e non vi può essere un osservatore esterno. In questo senso diventa impossibile dare un'interpretazione probabilistica simile a quella di Copenaghen: sono nate quindi nel corso dei decenni diverse interpretazioni. La più nota è probabilmente quella a *multi mondi* per la Meccanica Quantistica [28], che si tenta oggi di conciliare con i più recenti risultati in Gravità Quantistica. Essa presenta alcuni aspetti controversi per la sua condizione di non-verificabilità. Altri tentativi sono stati fatti da Hawking [29], Hartle [30] e Vilenkin [31].

3.1.1 Il minisuperspazio

Oltre alle difficoltà di tipo interpretativo, l'equazione di Wheeler–DeWitt presenta anche difficoltà formali. Il superspazio infatti è infinito dimensionale e ciò rappresenta un grande ostacolo alla Gravità Quantistica. Per aggirare il problema si diminuiscono i gradi di libertà del sistema, in modo da ottenere uno spazio delle configurazioni che è detto *minisuperspazio*. In pratica si riduce il numero di variabili dinamiche per semplificare l'equazione. Questo metodo presenta degli enormi vantaggi ma anche delle criticità. Sicuramente esso può essere visto almeno come un *toy model*, cioè un modello capace di preservare degli aspetti della teoria tralasciandone altri. Non è pero chiaro se questo approccio possa rappresentare una vera e propria approssimazione sistematica della Gravità Quantistica, teoria che è tutt'altro che compiuta. Altre questioni irrisolte nascono dal fatto che congelare dei gradi di libertà in una teoria quantistica è un'operazione assai delicata. Bisogna infatti fare i conti con il principio di indeterminazione: fissando la maggior parte dei modi dei campi si sopprimono le inevitabili fluttuazioni di stato fondamentale.
Nonostante questi lati ancora irrisolti, il concetto di minisuperspazio trova molte proficue applicazioni in Cosmologia, con risultati interessanti che lo rendono fisicamente rilevante. Nelle pagine successive verrà adottato tale modello.

3.2 Stati cosmologici in un toy model

Uno stato cosmologico classico, in grado di descrivere la dinamica dell'Universo, è definito da un insieme di osservabili del tipo [26, 32]:

$$\Upsilon = \{H(z), a(z), q(z), j(z), \Omega_m(z), \Omega_k(z), \Omega_\Lambda(z), \mathrm{T}(z)\dots\}\,. \tag{3.1}$$

$q(z)$ e $j(z)$ sono rispettivamente il parametro di accelerazione e di variazione di accelerazione. Quest'ultimo ha un ruolo chiave nella cosmografia: è appurato che l'universo è in espansione accelerata ed è fondamentale per la teoria capire quando questa accelerazione è iniziata. Ω_m e Ω_k sono rispettivamente la densità normalizzata di materia e la densità normalizzata di curvatura e saranno caratterizzate in seguito. T è la temperatura, già vista nella (2.54). Si osservi che tutte le quantità sono supposte dipendere da z, ricordando però che nella Cosmologia Relativistica la densità di energia oscura è costante. Presupponiamo valido il principio cosmologico e che la metrica FRW (1.3) sia in grado di descrivere ogni toy model. In questo modo possiamo fare una *scelta minima* dei gradi gradi di libertà dello stato cosmologico e poi considerare tutti gli altri parametri ricavabili da questi. Si vada a considerare quindi un minisuperspazio in cui lo stato è descritto solamente da Ω_m e Ω_k (scelta non casuale, si vedrà che da questi sarà possibile ricavare anche Ω_Λ):

$$|\phi_i\rangle \equiv \begin{pmatrix} \Omega_{mi} \\ \Omega_{ki} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

dove l'indice $i = 1, 2\dots$ indica una certa era cosmologica i.
Verranno ora presi in considerazione due stati cosmologici normalizzati, corrispondenti a due diverse ere cosmologiche, tra di loro ortogonali. Essi serviranno per la

trattazione formale svolta in 3.2.1. Il primo vettore è

$$|e_1\rangle = N_1 \begin{pmatrix} \Omega_{m1} \\ \Omega_{k1} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

dove

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m1}^2 + \Omega_{m2}^2}}$$

è la costante di normalizzazione. Attraverso il metodo di Gram-Schmidt è possibile costruire un vettore indipendente e ortogonale rispetto al primo:

$$|\tilde{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} \Omega_{m2} \\ \Omega_{k2} \end{pmatrix} - N_1^2 \left(\Omega_{m1}\Omega_{k1}\right) \cdot \begin{pmatrix} \Omega_{m2} \\ \Omega_{k2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{m1} \\ \Omega_{k1} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

il quale può essere normalizzato come

$$|e_2\rangle = N_2 \begin{pmatrix} \Omega_{m2} - N_1^2 \left(\Omega_{m1}^2\Omega_{m2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{k2}\right) \\ \Omega_{k2} - N_1^2 \left(\Omega_{k1}^2\Omega_{k2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

dove N_2 è dato da

$$N_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\left\{\Omega_{m2} - N_1^2 \left(\Omega_{m1}^2\Omega_{m2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{k2}\right)\right\}^2 + \left\{\Omega_{k2} - N_1^2 \left(\Omega_{k1}^2\Omega_{k2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\right)\right\}^2}}.$$

.

3.2.1 Entanglement tra stati cosmologici

Nella teoria della *decoerenza* ogni sistema quantistico non è isolato ma interagente con l'*ambiente* circostante, il quale è descritto da un'enorme quantità di gradi di libertà. I due sistemi non sono *separabili* e per descriverli bisogna tenere in considerazione l'entanglement tra essi. Ovviamente tale discorso può essere fatto per ogni stato quantistico e ciò conduce all'idea che l'ambiente è entangled con se stesso. Questo approccio ha risvolti significativi in Cosmologia Quantistica, un legame tra essa e l'informazione può essere difatti assunto per spiegare in maniera alternativa alcune delle questioni cosmologiche ancora oggetto di grande dibattito. Ad esempio nella teoria dell'*inflazione* si suppone che regioni casualmente connesse siano in relazione tra loro attraverso fasi inflazionarie, grazie all'introduzione di campi scalari. In un modello in cui invece si tenga conto della decoerenza è ragionevole assumere che, considerate anche le dimensioni iniziali ridotte dell'Universo, queste regioni siano in relazione grazie all'entanglement. In quest'ottica la Cosmologia Quantistica emerge dalla correlazione tra i gradi di libertà microscopici nelle prime fasi del Cosmo.

3.2.2 Ansatz di stato entangled (ESA)

Grazie a queste riflessioni è possibile assumere due regioni dell'Universo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ entangled in due ere cosmologiche diverse 1 e 2. Per tale ragione si scrive il seguente *ansatz* che prende "ispirazione" dagli stati di Bell (2.2a):

$$|\Psi_\pm\rangle = \alpha\, |e_1\rangle_{\mathcal{A}}\, |e_1\rangle_{\mathcal{B}} \pm \beta\, |e_2\rangle_{\mathcal{A}}\, |e_2\rangle_{\mathcal{B}}, \tag{3.6}$$

per semplicità riscritto come

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \alpha\,|e_1e_1\rangle \pm \beta\,|e_2e_2\rangle\,. \tag{3.7}$$

$|e_1\rangle$ e $|e_2\rangle$ sono rispettivamente la (3.3) e la (3.5). Questa peculiare scrittura è determinata dall'assunto:

$$\Omega_{m_i\mathcal{A}} = \Omega_{m_i\mathcal{B}} \qquad \Omega_{k_i\mathcal{A}} = \Omega_{k_i\mathcal{B}}, \tag{3.8}$$

ossia le densità normalizzate delle regioni sono uguali nella stessa era cosmologica. Naturalmente sussiste

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{3.9}$$

inoltre facilmente si ricava:

$$|e_ie_i\rangle = N_i^2 \begin{pmatrix} \Omega_{mi}^2 \\ \Omega_{mi}\Omega_{ki} \\ \Omega_{mi}\Omega_{ki} \\ \Omega_{ki}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Per semplificare i prossimi calcoli è bene ridefinire Ω_{m2} e Ω_{k2} in funzione di Ω_{m1} e Ω_{k1} come

$$\Omega_{m2}^* = \Omega_{m2} - N_1^2\left(\Omega_{m1}^2\Omega_{m2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{k2}\right) \to \Omega_{m2}, \tag{3.11a}$$

$$\Omega_{k2}^* = \Omega_{k2} - N_1^2\left(\Omega_{k1}^2\Omega_{k2} + \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\right) \to \Omega_{k2}, \tag{3.11b}$$

così da poter usare la (3.10) anche per $|e_2\rangle$ (3.5).

3.2.3 Energia oscura da ESA

Si consideri una miscela statistica di $|\Psi_+\rangle$ e $|\Psi_-\rangle$ con probabilità p_+ e p_- ($p_+ + p_- = 1$). Il significato fisico di p_+ e p_- non sarà indagato in questa disamina: la loro interpretazione è infatti indissolubilmente legata a quella della Gravità Quantistica, come accennato all'inizio di questo capitolo. In una teoria a multi mondi esse potrebbero essere interpretate come frequenze di universi[1], in altro modo invece negli altri tentativi di comprensione. Non ci addentrerà oltre per la mancanza di una spiegazione definitiva e convincente dal punto di vista scientifico. Usando la definizione (2.2.2) di operatore densità per miscele statistiche si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\alpha|^2(p_+ + p_-)\,|e_1e_1\rangle\langle e_1e_1| + 2(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)(p_+ - p_-)\,|e_1e_1\rangle\langle e_2e_2| + \\ &\quad + |\beta|^2(p_+ + p_-)\,|e_2e_2\rangle\langle e_2e_2| \\ &= |\alpha|^2\,|e_1e_1\rangle\langle e_1e_1| + |\beta|^2\,|e_2e_2\rangle\langle e_2e_2| + 2(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)(p_+ - p_-)\,|e_1e_1\rangle\langle e_2e_2|\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\hat{\rho} \equiv |\alpha|^2 N_1^2 \begin{pmatrix} \Omega_{m1}^4 & \Omega_{m1}^3\Omega_{k1} & \Omega_{m1}^3\Omega_{k1} & \Omega_{m1}^2\Omega_{k1}^2 \\ \Omega_{m1}^3\Omega_{k1} & \Omega_{m1}^2\Omega_{k1}^2 & \Omega_{m1}^2\Omega_{k1}^2 & \Omega_{m1}\Omega_{k1}^3 \\ \Omega_{m1}^3\Omega_{k1} & \Omega_{m1}^2\Omega_{k1}^2 & \Omega_{m1}^2\Omega_{k1}^2 & \Omega_{m1}\Omega_{k1}^3 \\ \Omega_{k1}^2\Omega_{m1}^2 & \Omega_{k1}^3\Omega_{m1} & \Omega_{k1}^3\Omega_{m1} & \Omega_{k1}^4 \end{pmatrix} +$$

[1] In questo caso è più corretto parlare di ensemble e non di miscela statistica, si veda la nota a pagina 18.

$$+\Xi N_1 N_2 \begin{pmatrix} \Omega_{m1}^2\Omega_{m2}^2 & \Omega_{m1}^2\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}^2\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}^2\Omega_{k2}^2 \\ \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}^2 & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{k2}^2 \\ \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}^2 & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{m1}\Omega_{k1}\Omega_{k2}^2 \\ \Omega_{k1}^2\Omega_{m2}^2 & \Omega_{k1}^2\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{k1}^2\Omega_{m2}\Omega_{k2} & \Omega_{k1}^2\Omega_{k2}^2 \end{pmatrix} +$$

$$+\,|\beta|^2 N_2^2 \begin{pmatrix} \Omega_{m2}^4 & \Omega_{m2}^3\Omega_{k2} & \Omega_{m2}^3\Omega_{k2} & \Omega_{m2}^2\Omega_{k2}^2 \\ \Omega_{m2}^3\Omega_{k2} & \Omega_{m2}^2\Omega_{k2}^2 & \Omega_{m2}^2\Omega_{k2}^2 & \Omega_{m2}\Omega_{k2}^3 \\ \Omega_{m2}^3\Omega_{k2} & \Omega_{m2}^2\Omega_{k2}^2 & \Omega_{m2}^2\Omega_{k2}^2 & \Omega_{m2}\Omega_{k2}^3 \\ \Omega_{k2}^2\Omega_{m2}^2 & \Omega_{k2}^3\Omega_{m2} & \Omega_{k2}^3\Omega_{m2} & \Omega_{k2}^4 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

con $\Xi = (\alpha\beta^* + \beta\alpha^*)(p_+ - p_-)$. Si faccia attenzione al fatto che si è qui considerata una miscela statistica di due stati entangled, cosa naturalmente lecita ma che necessita sia del formalismo della matrice densità ridotta sia di quella per le miscele statistiche. Difatti in questo caso ogni sottostato è descritto dalla matrice ridotta della (3.12). L'equazione di Friedmann (1.11a) può essere scritta nella forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \sum_i \Lambda_{xi}(z), \tag{3.13}$$

dove il termine $\sum_i \Lambda_{xi}(z)$ è un insieme di contributi sconosciuti dipendenti da z, inseriti per giustificare l'evoluzione dell'universo in una teoria non quantistica. Con un semplice passaggio algebrico si ricava

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{K}{a^2H^2} + \frac{\sum_i \Lambda_{xi}(z)}{H^2}, \tag{3.14}$$

ed è immediato riconoscere nei tre addendi le densità normalizzate[2], in modo da esplicitare il seguente vincolo:

$$\Omega_m(z) + \Omega_k(z) + \sum_i \Omega_{xi}(z) = 1. \tag{3.15}$$

Di conseguenza per la prima e la seconda era cosmologiche utilizzate nell'ESA:

$$\Omega_{m1} + \Omega_{k1} + \sum_i \Omega_{xi1} = 1, \tag{3.16a}$$

$$\Omega_{m2} + \Omega_{k2} + \sum_i \Omega_{xi2} = 1. \tag{3.16b}$$

Questi vincoli possono essere collegati ad un altro trovato nel capitolo precedente: si ricorda infatti che $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$ per definizione. Allora è possibile uguagliare la (3.16a) e la (3.16b) con la $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}$, interpretando le sommatorie delle Ω_{xi} come

$$\sum_i \Omega_{xi}(z) = \Omega_\Lambda(z), \tag{3.17}$$

[2]Tutte i termini dipendono da z, quella nella sommatoria è stata esplicitata per non confonderla con la costante Λ.

dove con $\Omega_\Lambda(z)$ si è indicata la densità normalizzata di energia oscura. $\Omega_\Lambda(z)$ è quindi direttamente collegata alla mancanza di informazione causata dall'entanglement, che ovviamente può essere collegata all'entropia di Von Neumann (2.32) come già ampiamente discusso:

$$S_{VN} = -\operatorname{Tr}\hat{\rho}\ln\hat{\rho} = -\sum_k \lambda_k \ln \lambda_k, \tag{3.18}$$

in cui con λ_k si indicando gli autovalori della (3.12). In generale l'espressione della densità normalizzata di energia oscura è quindi una funzione assai complicata di Ω_{m1}, Ω_{k1}, Ω_{m2} e Ω_{k2}, ricavabile uguagliando le relazioni di questo paragrafo. Ciò fa capire come la teoria sia complessa: l'*ansatz* utilizzato è con solo due ere cosmologiche, quando nella realtà tutte risulterebbero entangled; eppure anche in questo caso la trattazione non è poi così semplice. Questo approccio è un'ipersemplificazione molto "grossolana", ma che porta ad un risultato rilevante. A causa del fatto che necessariamente $0 < \Omega_\Lambda < 1$, il problema della coincidenza cosmica può essere spiegato come conseguenza "obbligata". Ricapitolando, l'energia oscura può essere immaginata derivare da fenomeni di entanglement tra regioni in determinate ere cosmologiche, in particolare dal processo di sovrapposizione lineare di stati cosmologici, determinando così gli attuali valori osservativi di Ω_Λ.

3.3 L'entropia di Von Neumann come "fonte" dell'energia oscura

Nel momento in cui la teoria della decoerenza è assunta valida, l'Universo può essere immaginato in termini di funzioni d'onda entangled: l'ambiente e lo stato quantistico dato sono tra loro correlati, determinando l'emergere degli osservabili classici [16, 25]. Ci si può chiedere allora se questi effetti causino anche l'emergere degli osservabili cosmologici. In questo senso, come visto, l'entropia di Von Neumann potrebbe portare un contributo dato dalla decoerenza, osservata ad esempio con l'ESA [26, 27]. Collegando quindi l'entropia quantistica suddetta con quella classica, è possibile ricavare il fattore barotropico dell'energia oscura.
Un modello molto semplice di universo può essere descritto da un volume

$$V \propto a^3. \tag{3.19}$$

La (3.18) può essere riscritta in maniera equivalente come

$$S_{VN} = \rho \ln \rho, \tag{3.20}$$

interpretando ρ come una sorta di densità effettiva di energia oscura. Derivando la (3.3) rispetto a z si ha

$$\frac{dS_{VN}}{dz} = -\frac{d\rho}{dz}(\ln\rho + 1). \tag{3.21}$$

Nella termodinamica standard invece (indichiamo con S l'entropia classica):

$$TdS = d(\rho V) + \mathcal{P}dV = d[(\rho + \mathcal{P})V] - Vd\mathcal{P}, \tag{3.22}$$

in cui si è utilizzato $E = \rho V$, supponendo di scegliere un volume V tale che $\rho\big|_V \sim$ *costante*. Differenziando rispetto a dV e utilizzando le relazioni di Maxwell facilmente si perviene a

$$s = \frac{\mathcal{P} + \rho}{T}, \tag{3.23}$$

con s densità di entropia. Perciò

$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{T}\frac{d[(P + \rho)V]}{dz}. \tag{3.24}$$

Ora, assumendo come anticipato $S_{VN} \sim S$, si possono eguagliare in questo modo le derivate rispetto a z:

$$\frac{dS_{VN}}{dz}\bigg|_{z>0} = \frac{dS}{dz}\bigg|_{z>0}$$

$$-\frac{d\rho}{dz}(\log \rho + 1) = \frac{1}{T}\frac{d[(P + \rho)V]}{dz} \tag{3.25}$$

Infine sostituendo la (3.19):

$$3\frac{\log(e\rho)}{a^3} + \frac{1}{T}\left[3\omega(a) + \frac{1}{a}\frac{d\log(1 + \omega(a))}{dz}\right] = 0. \tag{3.26}$$

Integrando con un analisi numerica [27] ω in funzione di z si ottengono risultati significativi: in particolare per alti redshift si recupera la costante cosmologica come caso limite poiché

$$\omega(z \to \infty) \to -1, \tag{3.27}$$

mentre a bassi redshift il fattore barotropico può essere approssimato con

$$\omega^{(1)} \sim \alpha + \beta\frac{1}{\beta + \gamma(1 + z)^n}, \tag{3.28}$$

dove α e β devono essere determinate dalle osservazioni. La (3.28) è incredibilmente simile alla parametrizzazione (1.23), possibile sintomo della rilevanza fisica di questa trattazione, grazie alla quale si è recuperata la ω di energia oscura senza introdurre a priori nessuna costante cosmologica o campo particolare. Si può affermare allora che l'entropia di Von Neumann, la quale è in grado di tenere conto degli effetti di entanglement, può essere vista come "fonte" della dark energy.

3.4 La negatività in Cosmologia

In questo paragrafo finale sarà analizzata un'applicazione alla Cosmologia della negatività, la quale rappresenta un'altra misura del peso dell'entanglement. L'obiettivo è sempre quello di ricavare l'energia oscura tramite un processo di correlazione quantistica, ma con un *ansatz* diverso da quello adoperato finora: questa volta l'entanglement sarà tra due sottosistemi che descrivono l'Universo in una certa era cosmologica [26, 33].

3.4.1 Il criterio di Peres–Horodecki e la negatività

Criterio di Peres–Horodecki 1 *Sia $\hat{\rho}$ l'operatore densità*[3] *che agisce su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ di dimensione 2×2 o 2×3*

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j,k,l} p_{ij}^{kl} \left|i\right\rangle \left\langle j\right| \otimes \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \tag{3.29}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{T_B} &= \sum_{i,j,k,l} p_{ij}^{kl} \left|i\right\rangle \left\langle j\right| \otimes (\left|k\right\rangle \left\langle l\right|)^T \\ &= \sum_{i,j,k,l} p_{ij}^{kl} \left|i\right\rangle \left\langle j\right| \otimes \left|l\right\rangle \left\langle k\right| \\ &= \sum_{i,j,k,l} p_{ij}^{lk} \left|i\right\rangle \left\langle j\right| \otimes \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \end{aligned} \tag{3.30}$$

la matrice parzialmente trasposta rispetto a $\mathcal{B}$, allora $\hat{\rho}$ è separabile (non entangled) se e solo se tutti gli autovalori di $\hat{\rho}^{T_B}$ sono non negativi.

Tale criterio è valido solamente per spazi 2×2 o 2×3 [34] e risulta fondamentale nel definire la negatività. La matrice parzialmente trasposta infatti preserva la traccia, allora $\operatorname{Tr} \hat{\rho}^{T_B} = 1$ (si ricordi essere uguale allo somma degli autovalori). Sfruttando il fatto che la norma matriciale è uguale alla somma dei valori assoluti degli autovalori è possibile scrivere [35]:

$$\left\|\hat{\rho}^{T_B}\right\| = \operatorname{Tr} \hat{\rho}^{T_B} + 2|\sum_i \eta_i| = 1 + 2|\sum_i \eta_i|, \tag{3.31}$$

dove con η_i si sono indicati gli autovalori minori di zero di $\hat{\rho}^{T_B}$. Poiché il principio di Peres–Horodecki suggerisce che gli autovalori negativi siano una misura del grado di entanglement, si definisce la *negatività* $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} \equiv |\sum_i \eta_i|, \tag{3.32}$$

da cui

$$\mathcal{N} \equiv \frac{\left\|\hat{\rho}^{T_B}\right\| - 1}{2}. \tag{3.33}$$

Nel seguito sarà però usata la convenzione secondo cui [33]

$$\mathcal{N} \equiv (\left\|\hat{\rho}^{T_B}\right\| - 1), \tag{3.34}$$

grazie alla quale è possibile definire in maniera equivalente alla (3.32)

$$\mathcal{N} = 2 \sum_k \max\left(0, -\lambda_k\right), \tag{3.35}$$

dove i λ_k sono gli autovalori di $\hat{\rho}^{T_B}$. La negatività è quindi in grado di misurare il peso dell'entanglement e verrà utilizzata nel seguito per caratterizzare la correlazione quantistica tra ere cosmologiche.

[3] Ottenuto generalizzando (2.35).

3.4.2 Entanglement tra ere cosmologiche

Il più semplice sistema multipartito è definito su uno spazio di Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ dalla base

$$|e_A\rangle_1 |e_A\rangle_2 \quad |e_A\rangle_1 |e_B\rangle_2 \quad |e_B\rangle_1 |e_A\rangle_2 \quad |e_B\rangle_1 |e_B\rangle_2 \,, \tag{3.36}$$

dove 1 e 2 indicano in questi caso due ere cosmologiche date. Come già discusso l'ambiente può essere pensato entangled con se stesso, perciò sembra lecito supporre la presenza di entanglement tra le funzioni d'onda dell'universo in due determinate ere cosmologiche. Facendo questa assunzione si può scrivere il seguente ansatz:

$$|\Psi\rangle = \alpha\, |e_A\rangle_1 |e_B\rangle_2 + \beta\, |e_B\rangle_1 |e_A\rangle_2 \,, \tag{3.37}$$

in cui ovviamente $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. L'obiettivo è lo stesso del paragrafo 3.2, ossia caratterizzare l'energia oscura come conseguenza della correlazione quantistica, ma tra ere cosmologiche e nel formalismo della negatività.
Scrivendo la matrice densità nella base (3.36) si ricava:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & 0 \\ 0 & \alpha^*\beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

la cui trasposta parziale è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & |\alpha|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 & 0 \\ \alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Per utilizzare la (3.35) è necessario avere gli autovalori della (3.39):

$$\lambda_1 = |\alpha|^2, \quad \lambda_2 = |\beta|^2, \quad \lambda_3 = |\alpha\beta|, \quad \lambda_4 = -|\alpha\beta|, \tag{3.40}$$

con l'aiuto dei quali la negatività si trova essere

$$\mathcal{N} = 2|\alpha\beta|. \tag{3.41}$$

Facendo l'assunzione che la negatività dipenda dal tempo è possibile porla in funzione di $a = \frac{1}{z+1}$ e fare un'espansione del tipo:

$$\mathcal{N} = N_0 + N_1(1+z)^2, \tag{3.42}$$

dove non è stato considerato il termine $\frac{1}{a} = z + 1$, poiché, dalle parametrizzazioni fenomenologiche di $\omega(z)$, sembrerebbe non avere particolare significato fisico [36]. Essendo $\mathcal{N} \geq 0$, si scelgono N_0, $N_1 \geq 0$. La (3.42) rappresenta l'informazione fisica contenuta nell'universo quando si considera l'*ansatz* (3.37), quindi dal punto di vista concettuale la situazione è molto simile a quella vista nella prima derivazione di energia oscura.
Inserendo la (3.42) nella (3.41) si ha:

$$|\alpha| = \frac{N_0 + N_1(1+z)^2}{2|\beta|}. \tag{3.43}$$

Si può ora ricollegare il concetto di energia oscura, riprendendo infatti la (3.15) e la (3.17) è possibile porle in relazione con α e β tramite l'equazione

$$\Omega_m(z) + \Omega_k(z) + \Omega_\Lambda(z) = 1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2. \tag{3.44}$$

In un universo quasi piatto $\Omega_k \approx 0$, mentre in generale $\Omega_m = \Omega_{m0}(1+z)^3$ (con Ω_{m0} costante), relazione che facilmente si ricava integrando l'equazione di continuità (2.48) con $\omega = 0$. Usando queste espressioni e inserendo la (3.43) nella (3.44), si deduce la densità normalizzata di energia oscura in funzione di N_0 e N_1:

$$\Omega_\Lambda(z) = |\beta|^2 + \frac{\left(N_0 + N_1(1+z)^2\right)^2}{4|\beta|^2} - \Omega_{m0}(1+z)^3. \tag{3.45}$$

Il lavoro non è finito perché β è ancora un parametro sconosciuto, per trovarlo è possibile utilizzare l'equazione ($\Omega_k \approx 0$)

$$\Omega_{totale} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda; \tag{3.46}$$

ricordando poi che in generale $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, con $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ densità critica, dopo un passaggio immediato si ha

$$\rho_{totale} = \rho_0(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda). \tag{3.47}$$

Sostituendo quindi la (3.45) nella (3.47) si giunge a (per semplicità $\rho \equiv \rho_{totale}$)

$$\rho = \rho_c \left(\Omega_{m0}(1+z)^3 + |\beta|^2 + \frac{\left(N_0 + N_1(1+z)^2\right)^2}{4|\beta|^2} - \Omega_{m0}(1+z)^3 \right). \tag{3.48}$$

Naturalmente Ω_k implica $k \approx 0$, l'equazione di Friedmann (1.11a) in questo caso più generale e sotto queste ipotesi si scrive:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{3.49}$$

dalla quale, inserendo la (3.48), si deriva:

$$H(z) = H_0 \left[|\beta|^2 + \frac{\left(N_0 + N_1(1+z)^2\right)^2}{4|\beta|^2} \right]^{1/2}. \tag{3.50}$$

Risolvendo l'equazione algebrica ottenuta imponendo la condizione $H(0) = H_0$:

$$|\beta| = \left[\frac{1 + \sqrt{(1 - N_0 - N_1)(1 + N_0 + N_1)}}{2} \right]^{1/2}. \tag{3.51}$$

Dall'equazione di continuità (2.50) si deduce (con $\rho = \omega \mathcal{P}$):

$$\frac{d\Omega_X}{dz} = 3\left(\frac{1+w}{1+z}\right)\Omega_X, \tag{3.52}$$

in cui si può sostituire la (3.45) per derivare la relazione

$$w = \frac{-3N_0^2 - 2N_0N_1(1+z)^2 + N_1^2(1+z)^4 - 12|\beta|^4}{3\left(N_0 + N_1(1+z)^2\right)^2 - 12\Omega_{m0}(1+z)^3|\beta|^2 + 12|\beta|^4}. \tag{3.53}$$

Inserendo la scrittura esplicita di β (3.51), si ha che $\omega(z=0) = \omega_0$ in funzione dei parametri dell'espansione della negatività è uguale a:

$$w_0 = \frac{-2N_1\left(N_0+N_1\right) + 3\left(1 + \sqrt{1-\left(N_0+N_1\right)^2}\right)}{3\left(\Omega_{m0}-1\right)\left(1+\sqrt{1-\left(N_0+N_1\right)^2}\right)}. \tag{3.54}$$

Inoltre è possibile trattare anche il parametro di accelerazione

$$q = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)}\frac{d}{dz}H(z), \tag{3.55}$$

infatti con la (3.50) e la (3.51) per $z = 0$:

$$q_0 = -1 + \frac{N_1\left(N_0+N_1\right)}{1+\sqrt{1-\left(N_0+N_1\right)^2}}. \tag{3.56}$$

A questo punto, visti i vincoli imposti dalle osservazioni cosmologiche [33]:

$$-1 < w_0 < 0, \tag{3.57a}$$

$$q_0 > -1, \tag{3.57b}$$

si ottengono degli intervalli per N_1 e N_2:

$$\begin{aligned} N_0 &\in [0, 0.5], \\ N_1 &\in [0, 0.5]. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Ciò mostra che l'entanglement deve essere "piccolo". Evidentemente però, se pur piccolo, esso porta a risultati non trascurabili: tramite questa nuova prospettiva il problema della coincidenza cosmica potrebbe essere spiegato e l'energia oscura emergerebbe in maniera "spontanea", in quanto mancanza di informazione causata dall'entanglement.

Conclusioni

Entanglement, informazione ed entropia sono strettamente legati e rappresentano aspetti non trascurabili nello studio dell'evoluzione dell'Universo: difatti i risultati raggiunti hanno rilevanza fisica, considerati gli effetti significativi che questi comportano.
Segue una breve ricapitolazione dell'approccio quanto-cosmologico utilizzato. Grazie al "supporto" della teoria della decoerenza si è assunto un *ansatz*, dato dalla sovrapposizione lineare di due regioni entangled in due ere cosmologiche differenti. Sfruttando poi le proprietà dell'operatore densità e i vincoli ricavabili dalla prima equazione di Friedmann, è stato possibile interpretare l'energia oscura come conseguenza della mancanza di informazione data dall'entropia di entanglement. Successivamente, legando l'entropia classica a quella di Von Neumann, considerata fonte dell'energia oscura in un modello in cui il volume è proporzionale ad a^3, si è visto che è possibile ricavare il fattore barotropico $\omega(z)$, ottenendo la situazione di costante cosmologica come caso limite per redshift molto alti. Nella situazione opposta, per redshift bassi, si è trovata una delle parametrizzazioni standard viste nel primo capitolo. In seguito si è preso in considerazione un altro *ansatz*: grazie alla decoerenza e al concetto di entanglement dell'ambiente con se stesso, si è immaginata una situazione in cui funzioni d'onda dell'Universo, corrispondenti ad ere cosmologiche diverse, siano in correlazione quantistica. In questo modo è stato possibile esprimere la densità normalizzata di energia oscura in funzione dei parametri con cui si è deciso di scrivere la negatività. Si è infine concluso, paragonando i risultati teorici con quelli osservativi, che l'entanglement deve essere "lieve".
Tutta questa disquisizione è stata realizzata grazie al concetto di minisuperspazio, che ha reso possibile una trattazione semplificata della Gravità Quantistica. Non pochi aspetti controversi sono stati sollevati: la difficile interpretazione della funzione d'onda dell'Universo e i limiti e il significato dell'applicabilità dei toy model sono questioni ancora aperte, che attendono una risposta dalla Cosmologia Moderna.

Bibliografia

[1] Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti e dell'Accademia Pontaniana, *La Relatività Generale a cento anni dalla sua formulazione-Convegno tenuto nell'ambito delle attività congiunte della Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti e dell'Accademia Pontaniana* **21**, Giannini Editore (2018), societanazionalescienzeletterearti.it/pdf/Convegno%20Relativita.pdf.

[2] Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences, *Scientifc Background on the Nobel Prize in Physics 2011-The accelerating Universe*, The Royal Swedish Academy of Sciences (2011), nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-physicsprize2011.pdf.

[3] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116** (1998), 1009-1038, doi:10.1086/300499 [arXiv:astro-ph/9805201 [astro-ph]].

[4] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project], *Measurements of* Ω *and* Λ *from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517** (1999), 565-586 doi:10.1086/307221 [arXiv:astro-ph/9812133 [astro-ph]].

[5] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla relatività generale. Con applicazioni all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*, Liguori Editore (2006).

[6] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations*, Cambridge: Cambridge University Press (2010), doi.org/10.1017/CBO9780511750823.

[7] S. Dodelson, F. Schmidt, *Modern Cosmology* 2nd edition, Academic Press (2020), doi.org/10.1016/C2017-0-01943-2.

[8] B. Carter, *Large number coincidences and the anthropic principle in cosmology*, IAU Symposium 63, in Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data, Kluwer , 291 (1974).

[9] S. Rasanen, *Dark energy from backreaction*, JCAP **02** (2004), 003 doi:10.1088/1475-7516/2004/02/003 [arXiv:astro-ph/0311257 [astro-ph]].

[10] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge University Press (2000), doi.org/10.1017/CBO9781139644198.

[11] M. Chevallier and D. Polarski, *Accelerating universes with scaling dark matter*, Int. J. Mod. Phys. D **10** (2001), 213-224 doi:10.1142/S0218271801000822 [arXiv:gr-qc/0009008 [gr-qc]].

[12] H. K. Jassal, J. S. Bagla, T. Padmanabhan, *WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, Volume 356, Issue 1, Pages **L11–L16** (2005), doi.org/10.1111/j.1745-3933.2005.08577.x.

[13] D. Huterer and M. S. Turner, *Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements*, Phys. Rev. D **60** (1999), doi.org/10.1103/PhysRevD.60.081301.

[14] J. Weller and A. Albrecht, *Future supernovae observations as a probe of dark energy*, Phys. Rev. D **65** (2002), 103512 doi:10.1103/PhysRevD.65.103512 [arXiv:astro-ph/0106079 [astro-ph]].

[15] G. Efstathiou, *Constraining the equation of state of the universe from distant type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **310** (1999), 842-850 doi:10.1046/j.1365-8711.1999.02997.x [arXiv:astro-ph/9904356 [astro-ph]].

[16] M. A. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition*, Springer (2007), doi:10.1007/978-3-540-35775-9.

[17] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition.* Cambridge: Cambridge University Press (2010), doi:10.1017/CBO9780511976667.

[18] Thomas L. Floyd, *Digital Fundamentals, 11th Edition*, Pearson (2015).

[19] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*, Pearson Prentice Hall (2005).

[20] W. K. Wootters and W. H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature **299** (1982), 802-803 doi:10.1038/299802a0.

[21] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics Volume I*, WILEY-VCH (2020).

[22] F. Schwabl, *Statistical Mechanics*, Springer (2006), doi:10.1007/3-540-36217-7.

[23] J. Sakurai, J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics (1st ed)*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1985).

[24] Lin Chien-Hao, K. Yew Ho, *Quantum Entanglement and Shannon Information Entropy for the Doubly Excited Resonance State in Positronium Negative Ion* Atoms 3, no. 3: **422** (2015), doi.org/10.3390/atoms3030422.

[25] D. Giulini, C. Kiefer, E. Joos, J. Kupsch, I. O. Stamatescu and H. D. Zeh *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*, Springer (2003), doi:10.1007/978-3-662-05328-7.

[26] S. Capozziello and O. Luongo, *Decoherence, Entanglement and Cosmic Evolution* (2013), [arXiv:1306.1897 [gr-qc]].

[27] S. Capozziello, O.Luongo, *Dark energy from entanglement entropy*, Int. J. Theor. Phys. **52** (2013), 2698-2704 doi:10.1007/s10773-013-1562-y [arXiv:1303.1311 [gr-qc]].

[28] H. Everett, *Theory of the Universal Wavefunction*, Ph.D. Thesis, Princeton University (1956, 1973).

[29] S. W. Hawking, *The Quantum State of the Universe*, Nucl. Phys. B **239** (1984), 257 doi:10.1016/0550-3213(84)90093-2.

[30] J. B. Hartle (1986). *Gravitation in Astrophysics, Cargese, 1886* eds. B. Carter and J. B. Hartle, Plenum, New York.

[31] A. Vilenkin, *Boundary Conditions in Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **33** (1986), 3560 PhysRevD33.3560 doi.org/10.1103/PhysRevD.33.3560.

[32] S. Capozziello and O. Luongo, *Entangled states in quantum cosmology and the interpretation of Lambda*, Entropy **13** (2011), 528 doi:10.3390/e13020528 [arXiv:1010.3347 [gr-qc]].

[33] S. Capozziello, O. Luongo and S. Mancini, *Cosmological dark energy effects from entanglement*, Phys. Lett. A **377** (2013), 1061-1064 doi:10.1016/j.physleta.2013.02.038 [arXiv:1302.5884 [gr-qc]].

[34] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki (1996), *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Physics Letters A, Volume 223, Issues 1–2, Pages **1-8**, doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2, [arxiv.org/pdf/quant-ph/9605038].

[35] G. Vidal and R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65** (2002), 032314 doi:10.1103/PhysRevA.65.032314 [arXiv:quant-ph/0102117 [quant-ph]].

[36] M. Kunz, *The phenomenological approach to modeling the dark energy*, Comptes Rendus Physique **13** (2012), 539-565 doi:10.1016/j.crhy.2012.04.007 [arXiv:1204.5482 [astro-ph.CO]].