

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

## **Modelli di compensazione isostatica**

**Relatori:**

Dott. Guido Russo

**Candidato:**

Vincenzo Di Nardo

Matricola N85000937

A.A. 2020/2021

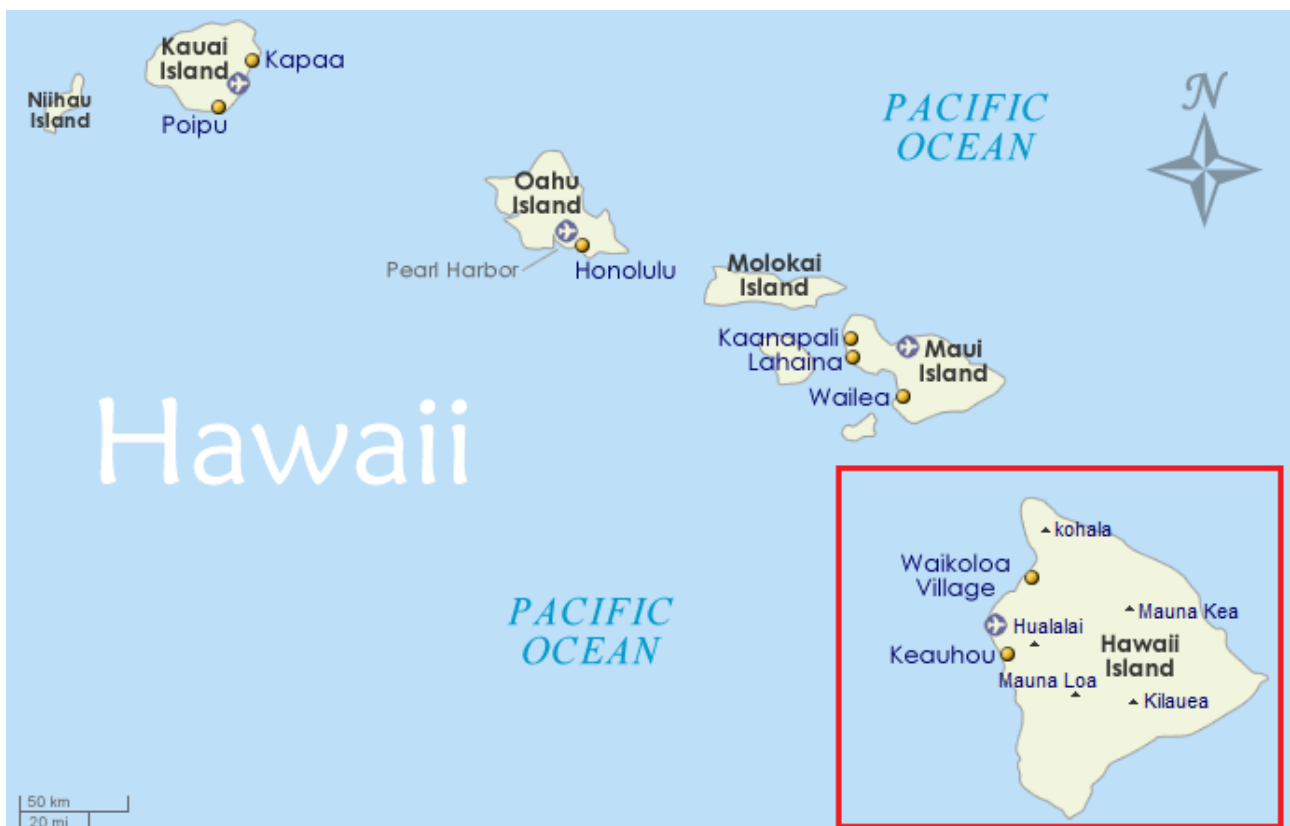


# Indice

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione.....</b>                                  | <b>4</b>  |
| <b>1 Isostasia e modelli isostatici</b>                   | <b>6</b>  |
| 1.1 Isostasia.....                                        | 6         |
| 1.2 Origine della teoria: l'esperimento di Bouguer.....   | 7         |
| 1.3 Modelli isostatici.....                               | 9         |
| 1.3.1 Modello isostatico di Airy.....                     | 9         |
| 1.3.2 Modello isostatico di Pratt.....                    | 11        |
| 1.4 Correzioni sulle misure della gravità.....            | 12        |
| 1.4.1 Correzione di aria libera.....                      | 12        |
| 1.4.2 Anomalia di aria libera.....                        | 13        |
| <br>                                                      |           |
| <b>2 Interpretazione isostatica per l'isola di Hawaii</b> | <b>14</b> |
| 2.1 Calcolo dell'anomalia di aria libera.....             | 14        |
| 2.2 Analisi dell'anomalia simulata.....                   | 17        |
| <br>                                                      |           |
| <b>Conclusioni.....</b>                                   | <b>22</b> |
| <b>Bibliografia.....</b>                                  | <b>24</b> |
| <b>Ringraziamenti.....</b>                                | <b>25</b> |

## Introduzione

L'isola di Hawaii è la più grande delle isole che formano l'omonimo arcipelago situato nel centro dell'Oceano Pacifico. Essa ha una superficie di circa 10.432,5 km<sup>2</sup> ed è costantemente in crescita a causa delle continue eruzioni da parte di vulcani presenti sull'isola; tre di questi, il Mauna Loa, il Kilauea e il Mauna Kea sono vulcani attivi mentre il Kohala e il Hualalai sono considerati ormai spenti (figura 1). Con un'altezza rispetto al fondo del mare di circa 8500 m i picchi dell'isola si annoverano di diritto tra le montagne più alte della Terra. L'attività vulcanica è alimentata da un flusso magmatico probabilmente generato alla frontiera nucleo - mantello corrispondente alla posizione dell'isola. Questo flusso è detto hot spot, e ha la caratteristica di non seguire il movimento delle placche sovrastanti. Questo spiega la forma dell'arcipelago e perché le isole hanno altezza decrescente man mano che ci si allontana da Hawaii. Infatti, quando la placca pacifica si sposta, sposta il centro eruttivo lontano dall'hot spot. Si crea quindi un nuovo vulcano ed il vecchio comincia a subire l'azione erosiva degli agenti atmosferici e del mare.



**Figura 1** L'arcipelago delle Hawaii. Nel riquadro l'omonima isola.

A causa del piccolo spessore della crosta oceanica sottostante (circa 10 km), l'isola di Hawaii è la principale candidata allo studio del fenomeno dell'isostasia, cioè della flessione della crosta sotto il peso dei carichi sovrastanti. Infatti, secondo la teoria dell'elasticità, più la crosta è spessa, meno sarà marcata la sua flessione. Vista l'entità della montagna sovrastante la crosta, è lecito aspettarsi di osservare una chiara deflessione. È anche interessante capire se il flusso magmatico dell'hot spot gioca un ruolo in questo bilancio.

In questa tesi vogliamo quindi analizzare come la flessione della crosta lasci una segnatura nei dati gravimetrici misurati sull'isola. La tesi è articolata in due capitoli: nel primo viene introdotta la teoria dell'isostasia e la sua modellazione, insieme al concetto di anomalia di aria libera che rappresenta il dato su cui abbiamo lavorato; nel secondo vengono presentati i dati analizzati e le procedure adottate per l'analisi. Seguono infine le conclusioni.

# Capitolo 1

## Isostasia e modelli isostatici

### 1.1 Isostasia

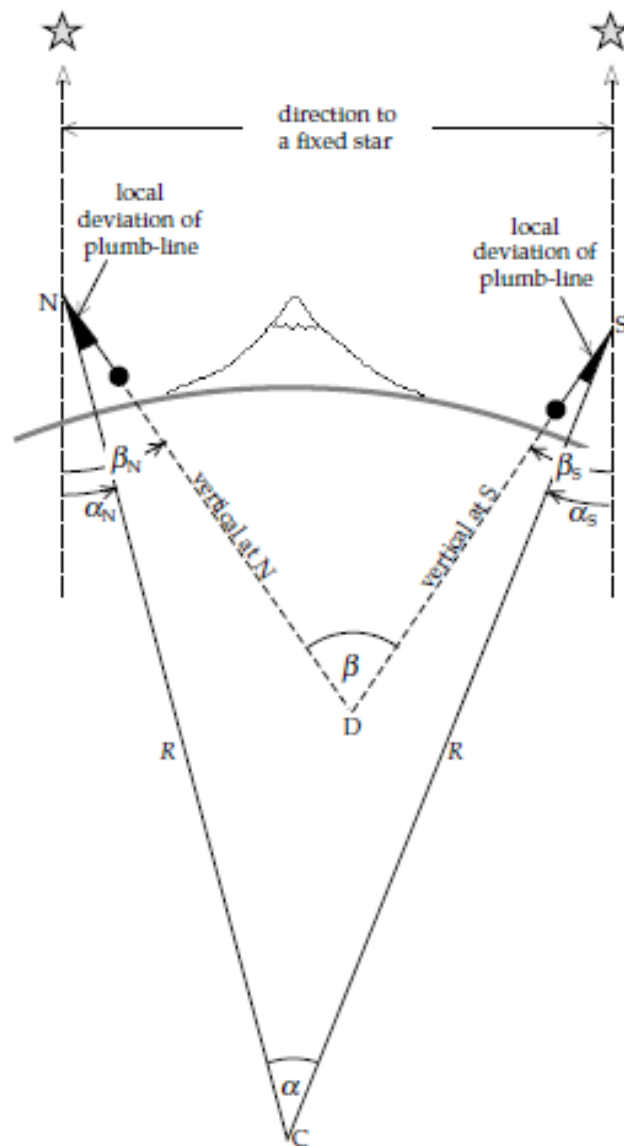
L'isostasia è un fenomeno di equilibrio gravitazionale secondo cui la crosta terrestre è in equilibrio idrostatico con mantello sottostante, che si comporta come un fluido molto viscoso. Essa è quindi una conseguenza della legge di Archimede. Il carico che la crosta esercita sul mantello varia, essendo minore in corrispondenza dei bacini oceanici e maggiore in corrispondenza delle grandi catene montuose. La parte di crosta che serve a compensare il carico sovrastante e che eccede il suo spessore medio prende il nome di radice.

Le condizioni di equilibrio isostatico in realtà possono cambiare nel tempo. Erosione e sedimentazione, per esempio, variano lo spessore della crosta e quindi cambiano la sua subsidenza nel mantello sottostante. Un noto esempio di questo fenomeno è l'innalzamento della penisola scandinava dovuto allo scioglimento dei ghiacci accumulatisi durante l'ultima glaciazione terminata circa 11000 anni fa (Lowrie, 2007). La grande viscosità del mantello superiore fa sì che la trasformazione verso la nuova condizione di equilibrio isostatico sia quasi statica.

### 1.2 Origine della teoria: l'esperimento di Bouguer

La teoria dell'isostasia nasce dall'esigenza di dare una spiegazione ai risultati contrastanti che si ottenevano negli esperimenti volti alla determinazione della densità media della Terra.

La tecnica che si usava è dovuta a Pierre Bouguer, un geografo francese del diciottesimo secolo, ed è schematizzata in figura 2. Due osservatori situati ad una certa distanza misurano ad un medesimo istante l'altezza sull'orizzonte di un determinato astro. Poiché la stella è molto distante, i due assi che congiungono l'osservatore ad essa possono considerarsi paralleli. Siano  $\alpha_N$  e  $\alpha_S$  gli angoli compresi tra gli assi stellari e il raggio terrestre (corrispondente alla verticale del luogo) e siano  $\beta_N$  e  $\beta_S$  gli angoli compresi tra gli assi stellari e la direzione verticale del filo a piombo.



**Figura 2** Schema dell'esperimento di Bouguer.

Con  $\alpha$  e  $\beta$  si indichino rispettivamente l'angolo compreso tra le due verticali del filo a piombo e l'angolo di apertura rispetto al centro della Terra.

È facile convincersi che:

$$\alpha_N + \alpha_S = \alpha$$

$$\beta_N + \beta_S = \beta$$

La forza peso agente sul filo a piombo si scompone in due componenti: la componente tangente  $F_t$  e quella normale  $F_g$ . Detto  $\delta$  l'angolo compreso tra il raggio terrestre (verticale geometrica del luogo) e la direzione del filo a piombo (verticale misurata del luogo) si ha:

$$\tan \delta = \frac{F_t}{F_g}$$

$F_g$  è la forza peso esercitata dalla Terra e vale:

$$F_g = mg$$

dove si è indicata con  $m$  la massa del corpo appeso al filo a piombo. Per la forza  $F_t$ , una stima può essere ottenuta approssimando la montagna tramite corone cilindriche omogenee di cui è possibile calcolare analiticamente l'attrazione gravitazionale. L'elemento  $i$ -esimo di corona risente di una forza orizzontale di attrazione verso il centro di massa della montagna uguale a:

$$F_i = m\rho G h_i$$

dove  $h_i$  è un fattore che dipende solo dalla geometria della corona cilindrica e  $\rho$  è la densità media del rilievo. In questo modo, sommando tutte le forze agenti sugli elementi, si ottiene la forza totale  $F_t$ :

$$F_t = m\rho G \sum_i h_i$$

Sostituendo questa quantità nell'equazione della tangente ed indicando con  $\rho_0$  la densità media della Terra si ottiene:

$$\tan \delta = \frac{\rho G \sum_i h_i}{g} = \frac{\rho G \sum_i h_i}{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 R} = \frac{3 \sum_i h_i}{4\pi R} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

Per ottenere il valore del rapporto  $\rho_0/\rho$ , Bouguer misurò i due angoli  $\beta$  e  $\alpha$ , e di conseguenza  $\delta$ , la deflessione totale in  $N$  e  $S$ , poiché:

$$\delta = \beta - \alpha$$

Il risultato che ottenne era molto dipendente dall'altezza del rilievo interposto tra  $N$  e  $S$ . Se il rilievo era basso (dell'ordine di 1000 m) il rapporto risultava dell'ordine di poche unità. Se il rilievo era alto (catene montuose come i Pirenei, le Ande e l'Himalaya) il rapporto era dell'ordine della decina.

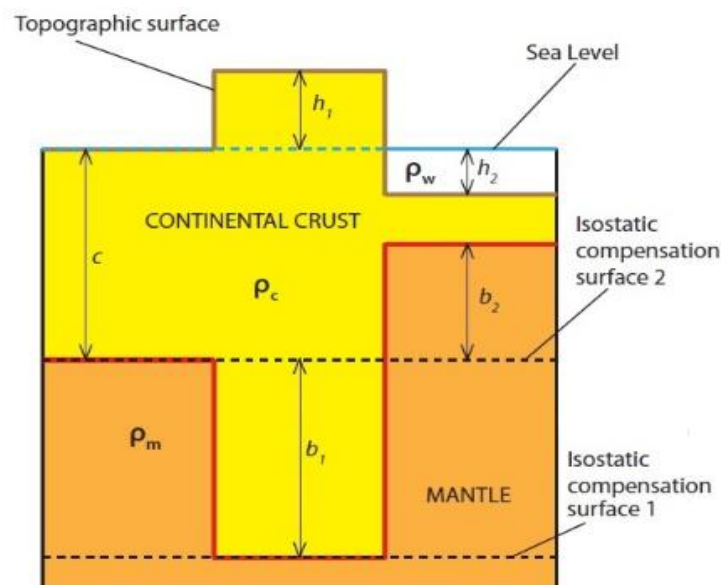
Una stima della deflessione attesa usando un valore di densità medio rispetto alle rocce prelevate sul rilievo mostrò che essa doveva essere il triplo di quella misurata, quindi sotto ai rilievi più grandi doveva esserci una zona a bassa densità.

## 1.3 Modelli isostatici

Furono sviluppati due modelli paralleli per spiegare la discrepanza osservata: uno dall'Astronomo Reale dell'Osservatorio di Greenwich G. B. Airy nel 1855, e un altro dallo scienziato e arcidiacono della chiesa anglicana di Calcutta J. H. Pratt, nel 1859. I due scienziati hanno in comune un modello basato sul bilanciamento della massa di una montagna al di sopra del livello del mare attraverso la regione meno densa della radice al di sotto del livello del mare. L'effetto viene tuttavia modellizzato in due maniere differenti.

### 1.3.1 Modello isostatico di Airy

Secondo il modello di Airy, lo strato superiore della Terra galleggia su un materiale più denso della superficie, il magma. Possiamo immaginare questo modello come un iceberg che galleggia sull'acqua. Infatti, la parte della montagna al di sopra del livello del mare rappresenta solo una piccola parte della struttura complessiva, gran parte della quale si trova al di sotto del livello del mare. Questo modello si può schematizzare come in figura 3:



**Figura 3** Il modello isostatico di Airy.

Nel suo modello, Airy suppose che la densità della crosta continentale e quella del mantello fossero costanti, e che lo spessore della radice variasse in proporzione all'elevazione della topografia: il maggior peso delle montagne tendeva a far sprofondare la crosta in prossimità dei rilievi, mentre per zone pianeggianti o oceaniche la crosta è più sottile.

La massa montana, oltre alla sua forza peso, è soggetta sia alla spinta di Archimede del mantello, sia alla pressione idrostatica da parte dello strato d'acqua oceanico. All'equilibrio, per la legge di Pascal, la pressione idrostatica sarà la stessa in tutti i punti ad uguale altezza: analizziamo le pressioni agenti sulle superfici  $S_1$  e  $S_2$  a diverse profondità dal suolo.

Sulla superficie  $S_1$  viene esercitata, dalla parte sinistra, la pressione dovuta alla crosta continentale:

$$P_c = \rho_c c g$$

a cui si aggiunge la pressione dovuta al mantello:

$$P_m = \rho_m b_1 g$$

La pressione, somma di questi due contributi, deve essere uguale alla pressione esercitata alla stessa altezza da parte della colonna costituita dalla montagna, cioè la quantità:

$$P_M = \rho_c g (b_1 + c + h_1)$$

Uguagliando le due quantità si ottiene:

$$\rho_c c g + \rho_m b_1 g = \rho_c g (b_1 + c + h_1)$$

da cui si ricava  $b_1$ :

$$b_1 = \frac{h_1 \rho_c}{\rho_m - \rho_c}$$

Lo spessore della radice  $b_1$  risulta quindi essere proporzionale all'altezza  $h_1$  e inversamente proporzionale al contrasto di densità tra mantello e crosta.

Sulla superficie  $S_2$  viene esercitata, dalla parte destra, la pressione del mantello  $\rho_m b_2 g$ , la pressione della zona oceanica  $\rho_w h_2 g$  e quella della zona continentale  $\rho_c (c - h_2 - b_2) g$ . Questa pressione deve essere uguale alla pressione esercitata dalla montagna, nella zona a sinistra, pari a  $\rho_c c g$  su  $S_2$ :

$$\rho_m b_2 g + \rho_w h_2 g + \rho_c g (c - h_2 - b_2) = \rho_c c g$$

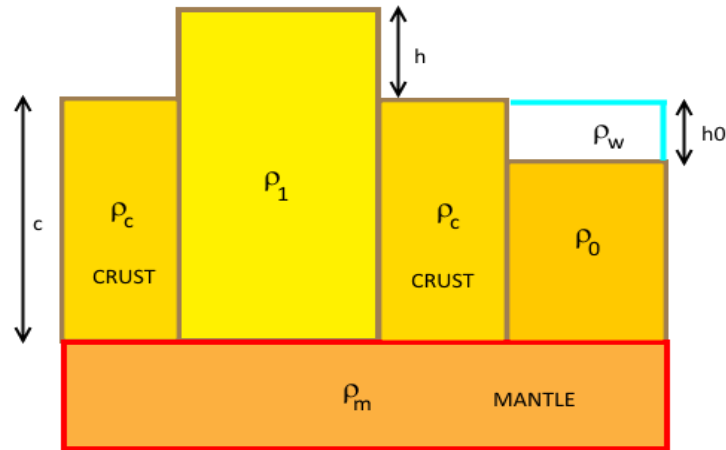
Da questa relazione ricaviamo lo spessore della cosiddetta antiradice  $b_2$ :

$$b_2 = h_2 \frac{(\rho_c - \rho_w)}{(\rho_m - \rho_c)}$$

Tale modello spiega i risultati di Bouguer: la presenza di rilievi determina una radice di densità  $\rho_c$  meno densa del mantello sottostante. Si ha quindi un deficit netto di massa.

### 1.3.2 Modello isostatico di Pratt

Secondo il modello di Pratt, le rocce della crosta formano uno strato non omogeneo e sono assimilabili a dei pilastri affiancati tra loro di diversa densità, come mostra la figura 4.



**Figura 4** Il modello isostatico di Pratt.

Come per il modello di Airy, anche nel modello di Pratt gli strati di roccia galleggiano su uno strato più denso costituito dal magma, ma in questo caso sono le densità a variare e non i volumi di roccia immersa, per questo tutti gli strati galleggiano tutti sullo stesso livello  $c$  detto profondità di compensazione. Sfruttando la legge di Stevino al livello della superficie di separazione tra crosta e mantello sovrastata dalla zona oceanica, otteniamo:

$$\rho_w h_0 + \rho_0 (c - h_0) = \rho_c c$$

In questo modo è possibile determinare la densità della crosta sotto il bacino oceanico:

$$\rho_0 = \frac{\rho_c c - \rho_w h_0}{(c - h_0)}$$

Sfruttando nuovamente la legge di Stevino alla base della montagna si ha:

$$\rho_1 (h + c) = \rho_c c$$

$$\rho_1 = \frac{c \rho_c}{h + c}$$

La densità  $\rho_1$  della montagna è dunque più bassa della densità della crosta circostante, proprio come rilevano le misurazioni di Bouguer.

## 1.4 Correzioni sulle misure della gravità

Per valutare il significato di variazioni di  $g$  è necessario confrontare i valori misurati con un valore teorico calcolato supponendo che la densità terrestre dipenda solo dal raggio. Questi valori sono detti gravità normale e sono riferiti ad una superficie ellissoidale ideale detta sferoide. Praticamente mai la stazione di misura è posizionata su questa superficie, ma piuttosto su quella reale, detta geoide. Il fatto che il punto di misura abbia una certa altezza sullo sferoide fa sì che il valore teorico debba essere corretto per questa distanza.

### 1.4.1 Correzione di aria libera

L'accelerazione di gravità decresce al crescere della distanza dalla Terra. Un corpo situato ad un'altezza  $h$  dalla superficie subisce un'accelerazione di gravità, pari a:

$$g(h) = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

dove si è fissato un sistema di riferimento avente l'asse  $z$  rivolto verso il basso,  $M$  è la massa della Terra e  $R$  il suo raggio. Una qualsiasi misurazione di  $g$  deve dunque tener conto dell'altezza a cui si sta effettuando la misura. Per valutare l'entità della correzione da apportare, scriviamo nella formula precedente il denominatore mettendo in evidenza la  $R$ :

$$(R + h)^2 = \left[ R \left( 1 + \frac{h}{R} \right) \right]^2 = R^2 \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^2$$

e quindi  $g(h)$  sarà:

$$g(R) = \frac{GM}{R^2} \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-2}$$

Osserviamo che il raggio della Terra  $R$  è molto più grande dell'altezza  $h$  per cui:

$$\frac{h}{R} \ll 1$$

È lecito dunque effettuare uno sviluppo al primo ordine in  $\frac{h}{R}$ . Ricordando che:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$$

quando  $x \rightarrow 0$ , si ha che:

$$g(h) = \frac{GM}{R^2} \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-2} \sim \frac{GM}{R^2} \left( 1 - 2 \frac{h}{R} \right)$$

Ma il termine  $\frac{GM}{R^2}$  descrive l'accelerazione di gravità  $g_0$  al livello della superficie. Possiamo allora scrivere:

$$g(h) = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) = g_0 - g_0 2 \frac{h}{R}$$

In prima approssimazione, la misura della gravità  $g_0$  deve essere corretta per un fattore:

$$g_{FA} = -g_0 2 \frac{h}{R}$$

Sostituendo i valori di  $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$  e  $R = 6371 * 10^3 \text{ m}$ , caratteristici della superficie terrestre, si ha che la correzione  $g_{FA}$  vale:

$$g_{FA} \sim -0.3086h \frac{\text{mgal}}{\text{m}}$$

Osserviamo che la correzione di aria libera è negativa al di sopra della superficie e positiva al di sotto<sup>1</sup>.

## 1.4.2 Anomalia di aria libera

L'anomalia è la differenza tra il valore reale di  $g$  misurato rispetto al geoide e il valore di  $g_0$  sullo sferoide corretto per la differenza di posizione della stazione di misura. L'anomalia di aria libera è definita come:

$$\Delta g_F = g - g_{teor} = g - [g_0 + g_{FA}]$$

L'anomalia di aria libera è nulla in zone isostaticamente in equilibrio (Turcotte e Schubert, 2002). Con riferimento al modello di Airy, se la radice è troppo piccola, l'anomalia di aria libera sarà positiva perché il difetto di massa al di sotto del rilievo sarà minore rispetto alla situazione di equilibrio e il rilievo si dirà sottocompensato. Sarà invece sovracompensato nel caso in cui la radice sia troppo grande rispetto alla situazione di equilibrio. In questo caso l'anomalia di aria libera risulta negativa.

---

<sup>1</sup> Il gal è l'unità di misura dell'accelerazione nel sistema CGS. Il suo sottomultiplo mgal è usato per quantificare le variazioni di  $g$  in corrispondenza delle strutture geologiche.

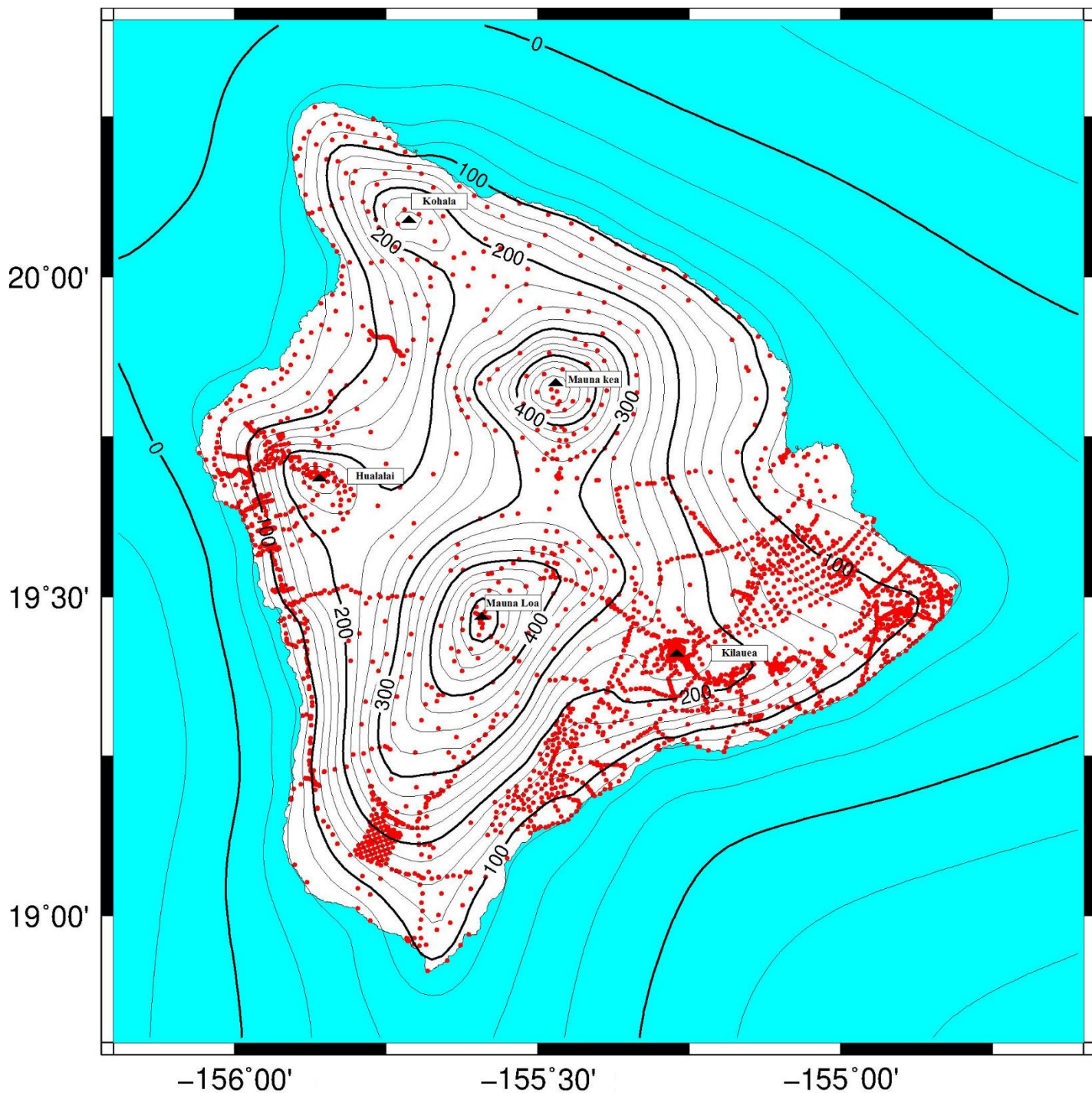
## Capitolo 2

### Interpretazione isostatica per l'isola di Hawaii

#### 2.1 Calcolo dell'anomalia di aria libera

Per lo studio finalizzato a caratterizzare le strutture vulcaniche dell'isola di Hawaii, sono stati raccolti da Kauahikaua et al. (2000) circa 3500 dati di misura di accelerazione di gravità in diversi punti di coordinate note, disposti in maniera non uniforme sulla superficie dell'isola. Per tale studio sono stati anche usati dati misurati sul fondo del mare e da satellite su un'area di  $1400 \times 1400$  km intorno all'isola, che però non sono disponibili. I dati a terra sono invece reperibili sul sito dell'USGS al link: <https://www.sciencebase.gov/catalog/item/589e087fe4b099f50d3a0673>.

Da questi dati abbiamo calcolato l'anomalia di aria libera usando come riferimento lo sferoide GRS80 (Moritz, 1980). In accordo con l'analisi di Kauahikaua et al. (2000) abbiamo anche sottratto un contributo regionale di 180 mgal. Tale contributo rappresenta l'effetto di sorgenti profonde che non danno variazioni apprezzabili di  $g$  sull'area considerata, ma che ne modificano il valore. In figura 5 viene mostrata l'anomalia di aria libera in mgal per i dati di Kauahikaua et al. (2000).

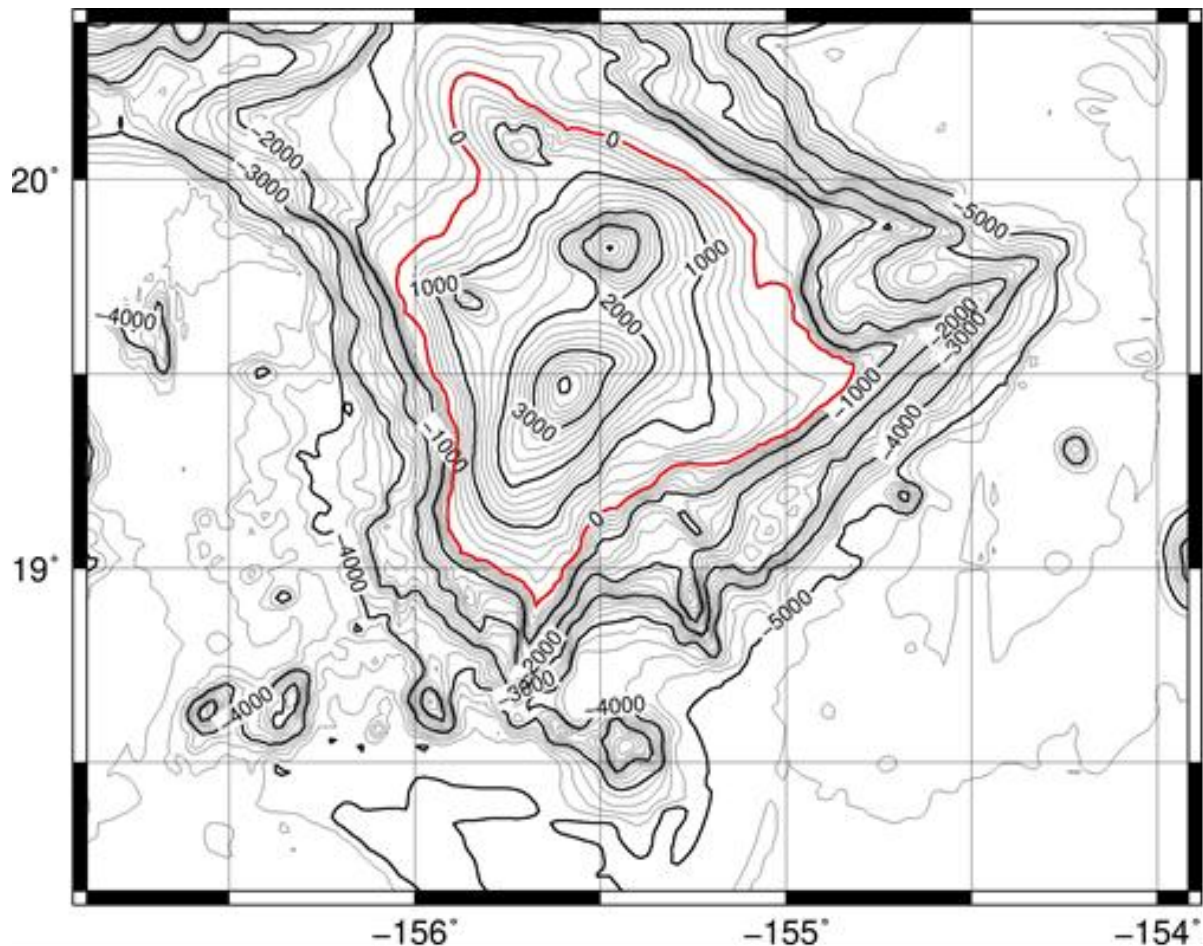


**Figura 5** Anomalia di aria libera in mgal per i dati di Kauahikaua et al. (2000). I punti rossi rappresentano le stazioni di misura.

Notiamo dalla figura 5 che la sottrazione del contributo regionale ha portato ad annullare l'anomalia di aria libera al di fuori dell'isola: l'effetto del mare è stato praticamente annullato, e quindi per l'analisi dei dati è lecito usare un modello che preveda il fondo del mare come riferimento per le quote. Inoltre, si può osservare che

l'anomalia non si annulla sull'isola: se, come affermato nel capitolo precedente, questo significa che non c'è equilibrio isostatico, ciò significa che l'isola è sottocompensata.

Usando i dati del modello ETOPO1, reperibile sul sito della NOAA al link <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/>, rappresentiamo la topografia (e batimetria) dell'isola (figura 6):



**Figura 6** Topografia dell'isola di Hawaii in metri rispetto al livello del mare. La linea rossa rappresenta la costa dell'isola.

Il fondo del mare non è perfettamente livellato. La figura mostra che a ovest dell'isola esso si trovi a  $-4000$  m, mentre a est risulti a  $-5000$  m, dunque più profondo. Una profondità di  $4500$  m, allora, rappresenta un buon compromesso.

Dato che la topografia è fornita su una griglia geografica regolare di passo  $1'$  (circa  $2$  km in latitudine), è possibile approssimarla come formata da tanti prismi, per cui al di sotto di ogni punto è presente un prisma di altezza variabile da punto a punto, e di sezione quadrangolare centrata sul punto con lato pari al passo di griglia. Per quanto questa approssimazione sia piuttosto semplicistica, essa è giustificata dal fatto che le dimensioni in pianta dei prismi sono due ordini di grandezza più piccole di quelle

dell'isola. Per specificare le dimensioni di ogni prisma convertiamo le coordinate geografiche in coordinate UTM chilometriche attraverso routine in ambiente MATLAB, reperibili in rete.

Per effettuare la modellazione è necessario conoscere la densità della crosta e quella del mantello sottostante: per la prima, Kauahikaua et al. (2000) utilizzano un valore di  $2600 \text{ kg/m}^3$ , mentre per il secondo un valore di  $3300 \text{ kg/m}^3$ . Lo spessore della crosta imperturbata è invece fissato da questi autori a 10.5 km sulla base di Watts e ten Brink (1989) che analizzano dati di sismica a riflessione.

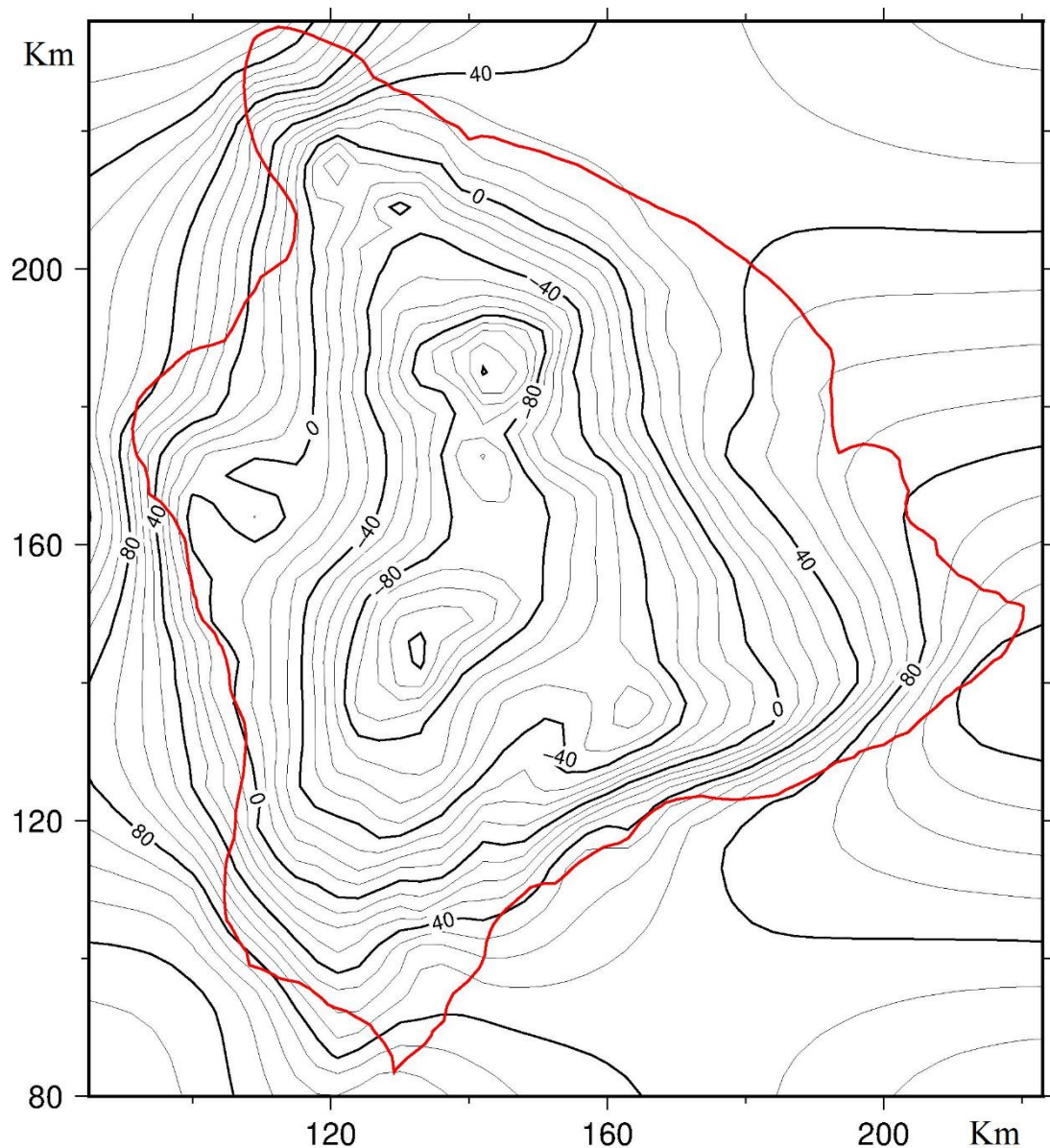
Con questi valori fissati, utilizziamo il modello isostatico di Airy. Per ogni prisma abbiamo calcolato la profondità del fondo in relazione all'altezza presa rispetto al fondo del mare sommando alla radice  $b_i$ , calcolata secondo la relazione:

$$b_i = \frac{h_i \rho_c}{\rho_m - \rho_c}$$

lo spessore della crosta imperturbata. Abbiamo poi calcolato iterativamente l'anomalia di aria libera generata da tutti i prismi in tutti i punti che hanno quota positiva, dunque al di sopra del livello del mare. La formula per il calcolo dell'anomalia di un prisma retto è determinabile analiticamente e si trova, per esempio, in Debeglia e Dupont (2002). La scelta di restringere l'analisi ai soli punti a terra deriva dal fatto che la mappa in figura 5 è frutto di una interpolazione dei dati su una griglia sovrapponibile a quella topografica. La parte meglio vincolata di questa mappa è, naturalmente, quella a terra.

## 2.2 Analisi dell'anomalia simulata

In figura 7 è riportato il residuo, cioè la differenza tra valori di anomalia calcolati e misurati:



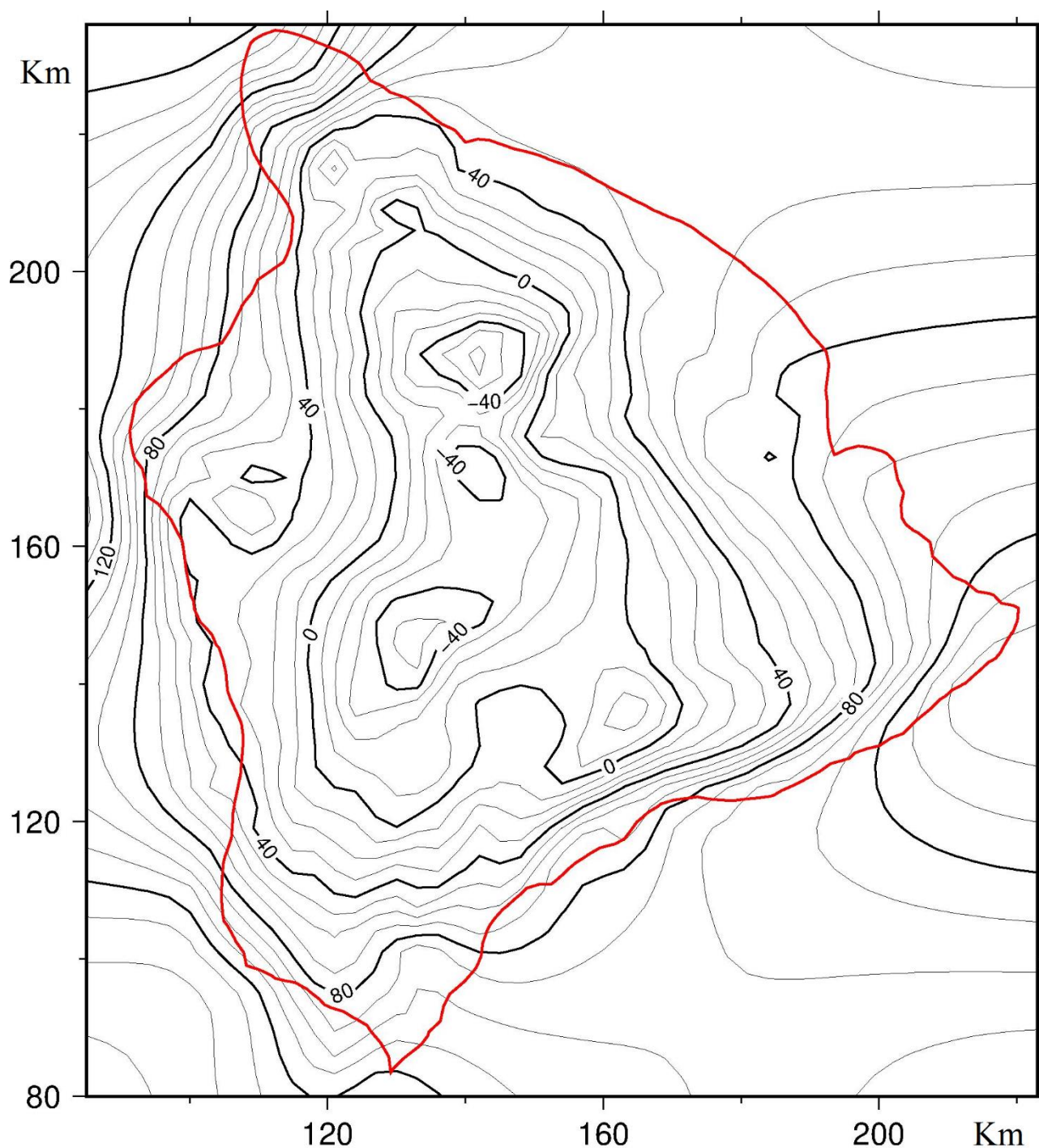
**Figura 7** Residuo in mgal dell'anomalia di aria libera calcolata rispetto a quella misurata. La linea rossa rappresenta la linea di costa.

Come spiegato da Turcotte e Schubert (2002), l'anomalia di aria libera ha un massimo in prossimità della costa. Al contrario, però, di come spiegano gli stessi autori, l'anomalia non si annulla al centro dell'isola. Infatti, possiamo notare dalla figura 5 che l'anomalia misurata raggiunge anche i 500 mgal mentre dalla figura 7 si ricava che l'anomalia calcolata arriva a 420 mgal, dunque cresce verso il centro dell'isola. Questo risultato mette in luce che l'affermazione che l'anomalia di aria libera si annulla in zone compensate isostaticamente fatta nel precedente capitolo vale soltanto per strutture bidimensionali analizzate lungo profili molto più corti rispetto alla dimensione della struttura in direzione ortogonale al profilo, come per esempio una

catena montuosa. Il risultato da noi trovato è dunque una manifestazione del carattere tridimensionale della struttura analizzata. Per dimostrare questa affermazione dobbiamo far vedere che l'isola è compensata isostaticamente, altrimenti, come detto, potremmo trovarci semplicemente di fronte ad una situazione di sottocompensazione.

Per valutare quantitativamente l'accordo del modello con i dati calcoliamo l'RMS, ovvero la radice quadrata dello scarto quadratico medio. Esso risulta circa 46 mgal. La massima profondità raggiunta dalle radici risulta invece essere 31 km. Quest'ultimo risultato però è in netto contrasto con quello riportato da Watts e ten Brink (1989) e ripreso da Kauahikaua et al. (2000) secondo cui l'isola ha un massimo approfondimento di solo circa 6 km. Per capire il perché di una tale differenza, abbiamo modificato il codice di calcolo dell'anomalia introducendo un fattore moltiplicativo per lo spessore della radice calcolata in approssimazione isostatica di Airy. In questo modo possiamo considerare radici percentualmente più piccole ipotizzando che il flusso di magma che alimenta l'hot spot compensi isostaticamente almeno in parte il peso del rilievo. la diminuzione delle radici porta ad una riduzione del volume a contrasto di densità negativo che compensa il contrasto positivo dovuto al rilievo. Ciò porta all'aumento del massimo dell'anomalia isostatica. Si noti che la scelta di usare un fattore moltiplicativo ha influenza assoluta maggiore sulle radici più profonde.

In figura 8 è mostrato il residuo per una diminuzione del 10% delle radici:



**Figura 8** Residuo in mgal dell'anomalia calcolata riducendo le radici del 10%.

In questo nuovo modello, lo spessore massimo della radice è effettivamente diminuito, ma l'RMS è peggiorato passando da 46 a 54 mgal. Abbiamo allora aumentato lo spessore delle radici del 10%, l'RMS ottenuto è di circa 55 mgal, indicando come la soluzione isostatica dia come risultato un valore minimo di RMS e che quindi l'isola sembri essere compensata isostaticamente.

Rimane tuttavia ancora da spiegare la discrepanza tra il massimo approfondimento trovato dal nostro modello e i valori trovati da Watts e ten Brink (1989). Una possibile spiegazione è rappresentata dal fatto che il rilievo dell'isola possa essere formato da materiale più leggero. Kauahikaua et al. (2000) usano per esso una densità  $\rho_M$  di 2300 kg/m<sup>3</sup>. Modifichiamo quindi l'espressione delle radici del modello di Airy per tenere conto di questa eventualità. Si ha che l'equilibrio isostatico implica:

$$\rho_c c g + \rho_m b_1 g = \rho_c (b_1 + c) g + \rho_M h_1 g$$

$$b_1 = \frac{h_1 \rho_M}{\rho_m - \rho_c}$$

Con il valore di  $\rho_M$  dato la radice massima si riduce a 28 km, mentre l'RMS nuovamente peggiora passando a 53 mgal. Quindi la disomogeneità del rilievo non è in grado di spiegare la discrepanza del massimo approfondimento, ed inoltre il valore di 2600 kg/m<sup>3</sup> per il rilievo sembra essere più appropriato.

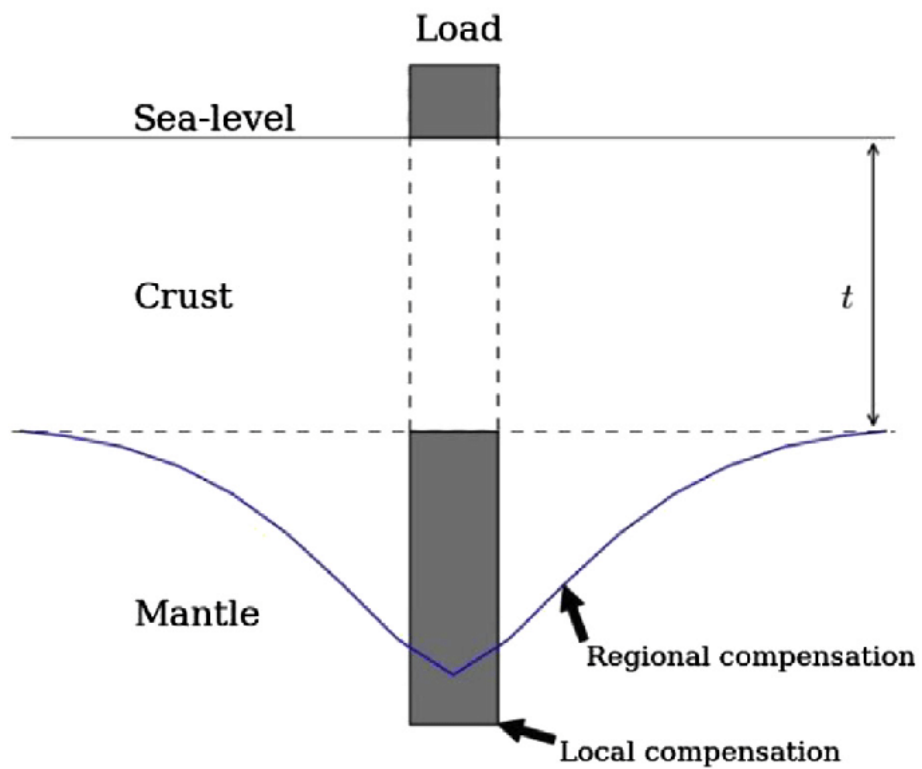
Abbiamo anche valutato il modello di Pratt per determinare il grado di compensazione dell'isola. Il modello ha come incognita la profondità di compensazione. Abbiamo variato il suo valore nell'intervallo 20 - 250 km di profondità e calcolato l'anomalia di aria libera risultante e il residuo corrispondente. L'RMS non mostra alcun minimo, per cui non esiste un valore ottimale della profondità di compensazione. Almeno per l'isola di Hawaii, il modello di Pratt non sembra essere fisicamente realistico.

## Conclusioni

Una prima conclusione metodologica interessante che possiamo trarre è che l'anomalia di aria libera si annulla in corrispondenza di strutture bidimensionali isostaticamente compensate. In corrispondenza di strutture tridimensionali come quella analizzata, questo può non essere vero ed è necessario conoscere la topografia del luogo con un certo dettaglio per poter analizzare il grado di compensazione della struttura, come fatto in questo lavoro di tesi. Fortunatamente, al giorno d'oggi DEM abbastanza dettagliati sono disponibili gratuitamente in rete. L'isola, quindi, è in equilibrio isostatico secondo il modello di Airy. Questo equilibrio come abbiamo visto non mostra segni di influenza da parte del flusso magmatico che alimenta l'hot spot. I massimi valori dell'RMS si ottengono in corrispondenza dei due vulcani attivi sull'isola, il Mauna Loa e il Mauna Kea.

Kauahikaua et al. (2000) concludono, con un'analisi diversa, che in corrispondenza dei due vulcani c'è una risalita di materiale più denso rispetto a quello del rilievo. Questa spiegazione è plausibile anche alla luce dei nostri risultati, in quanto in queste condizioni aumenterebbe l'anomalia di aria libera nella zona dei vulcani riducendo significativamente l'RMS.

La discrepanza osservata sul massimo valore dell'approfondimento delle radici può indicare che il meccanismo di compensazione non è di tipo locale, come quello di Airy, ma di tipo regionale, come quello di Veining Meinesz, schematicamente illustrato in figura 9. In questo modello la crosta si flette sotto il peso del rilievo, ma la crosta è trattata come una lamina sottile nell'ambito della teoria dell'elasticità. La flessione riguarda così una parte più grande della crosta, non limitata al volume immediatamente al di sotto alla montagna. Essendo più ampia la parte interessata all'affondamento, quindi alla spinta isostatica del mantello sottostante, lo spessore massimo della radice può essere minore.



**Figura 9** Modello isostatico di Veining Meinesz.

Infine, il modello di Pratt per la struttura considerata, non sembra fornire risultati fisicamente interpretabili. Questo probabilmente perché la situazione fisica prevista dal modello non si verifica nella realtà.

## **Bibliografia**

Debeglia, N., e Dupont, F. (2002) Some critical factors for engineering and environmental microgravity investigations. *J. Applied Geophys.*, 50, 435-454.

Lowrie (2007) *Fundamentals of Geophysics*, Cambridge University Press.

Kauahikaua, J., Hildebrand, T., e Webring, M. (2000) Deep magmatic structures of Hawaiian volcanoes, imaged by three-dimensional gravity models. *Geology*, 28, 883-886.

Moritz, H. (1980) Geodetic reference system. *B. Geod.*, 54, 395-405.

Turcotte, D., e Schubert, G. (2002) *Geodynamics*, Cambridge University Press.

Watts, A.B., e ten Brink, U.S. (1989) Crustal structure, flexure and subsidence history of the Hawaii Islands. *J. Geophys. Res.*, 94, 10039-10054.

## **Ringraziamenti**

A conclusione di questo elaborato, desidero menzionare tutte le persone che hanno contribuito al raggiungimento di questo mio traguardo, ognuno in maniera differente.

Un sentito grazie al mio relatore, il Dott. Russo, per la sua infinita disponibilità e pazienza, che in questi mesi ha saputo guidarmi, con suggerimenti pratici, nelle ricerche e nella stesura dell'elaborato.

Ringrazio di cuore mio padre per avermi sempre sostenuto e per avermi permesso di portare a termine gli studi universitari; ringrazio mia madre che con la sua pazienza mi ha dato sempre un grande supporto morale; ringrazio mia sorella Antonella che a volte mi ha aiutato a riflettere su errori commessi dandomi suggerimenti preziosi, so di poter contare sempre su di lei. Senza di loro non sarei mai potuto arrivare fin qui.

Ringrazio la mia fidanzata Michela per avermi trasmesso la sua forza e la sua determinazione. Ha sempre creduto in me fin dall'inizio e mi ha sempre spinto a continuare fino alla fine. Grazie per tutto il tempo che mi hai dedicato. Grazie perché ci sei sempre stata.

Grazie ai miei migliori amici Mattia, Gianluca e Luciano per essere stati sempre presenti anche durante quest'ultima fase del mio percorso di studi. Grazie per aver ascoltato i miei sfoghi, grazie per tutti i momenti di spensieratezza.

Ringrazio i miei amici e compagni di band Marco, Gennaro, Dario e Alessandro per tutti i loro consigli, per tutti i momenti di spensieratezza a suon di rock che hanno alleggerito le ansie vissute in questi anni di studio.

Dedico questo mio traguardo ai miei nonni, quelli che ho conosciuto che sono qui presenti e sin dalla nascita mi hanno aiutato a inseguire i miei sogni, e a quelli che purtroppo non ho avuto modo di conoscere, ma che attraverso i racconti di mio padre sono stati comunque da esempio per me.

Ringrazio i miei zii, le mie zie, i miei cugini e in modo particolare mio zio Nando, non in termini di affetto, ma per avermi dato suggerimenti pratici insegnandomi ad ottimizzare tempi ed attività.

Ringrazio tutte le altre persone presenti che oggi condividono con me la gioia di questo importante momento del mio percorso personale.

Infine, vorrei dedicare questo piccolo traguardo a me stesso, che possa essere l'inizio di una lunga e brillante carriera professionale.