

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Il Teorema di Weinberg

Relatori:
Massimo Taronna

Candidato:
Davide Zarrilli
N85001393

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	3
1 Gruppo di Poincaré	5
1.1 Gruppi di Lie e rappresentazioni	5
1.2 Algebra del gruppo di Poincaré	7
1.3 Stati di singola particella	10
1.4 Gruppo piccolo per particelle di massa nulla	12
2 Invarianza della matrice S	16
2.1 Stati "in" e "out" e proprietà di trasformazione	16
2.2 Vettori polarizzazione	18
2.3 Condizione di Lorentz-invarianza	22
3 Causalità e propagatore	24
3.1 Propagatore in meccanica quantistica	24
3.2 Propagatore libero non relativistico	27
3.3 Propagatore di Klein-Gordon	29

4 Teorema di Weinberg	32
4.1 Causalità in teoria della matrice S	32
4.2 Carica elettrica e massa gravitazionale	34
4.3 Conservazione di e e universalità di f	36
Conclusione	40
Appendici	42
A. Normalizzazione degli stati	42
B. Propagatore di Feynman	43
C. Potenziale di Coulomb	44

Introduzione

Vi sono delle evidenze sperimentali che vengono solitamente assunte come principi della fisica, e in quanto tali poste come assiomi nelle teorie. Ogni teoria fisica si fonda inevitabilmente su una serie di principi o postulati, e quanto più ampio è il dominio di applicazione di tale teoria, tanto più universali dovranno essere i principi. Viene naturale chiedersi, dunque, quali di quelle che attualmente sono considerate affermazioni indimostrabili assumono effettivamente un carattere fondamentale, e quali sono invece derivabili a partire dalle altre, e in che tipo di teoria.

Nel presente lavoro di tesi ripercorreremo i passi di Steven Weinberg nel dimostrare che due di quelli che venivano precedentemente considerati principi fondamentali della fisica possono in realtà essere derivati sulla base di altri nell'ambito di una teoria quantistica delle particelle: la conservazione della carica elettrica in tutte le interazioni e il principio di equivalenza di Einstein, ovvero l'uguaglianza tra massa gravitazionale e massa inerziale per tutti i corpi. Tale è il risultato noto come teorema di Weinberg, tra le cui implicazioni vi è anche l'impossibilità di avere campi macroscopici di particelle prive di massa e spin intero maggiore di due.

Al fine di dimostrarlo, sebbene non in modo rigoroso, adotteremo per prima cosa il quadro teorico della meccanica quantistica: supporremo che gli stati fisici di un sistema siano raggi in un opportuno spazio di Hilbert e che gli osservabili siano rappresentati da operatori autoaggiunti sullo stesso spazio il cui spettro fornisce i valori che l'osservabile può assumere (mentre non ci occorreranno affermazioni riguardanti gli effetti di una misura sul sistema). Inoltre supporremo che la fisica sia invariante per trasformazioni del gruppo proprio ortocrono non omogeneo di Lorentz, formalizzando tale affermazione nell'ambito della meccanica quantistica. Il nostro obiettivo sarà derivare le implicazioni dell'invarianza di Lorentz di cui sopra sulla forma della matrice S , che definiremo e tratteremo

in maniera indipendente sia dalla teoria dei campi che da qualsiasi approccio perturbativo, sebbene prenderemo in prestito alcune intuizioni in merito per giustificare determinati passaggi. Considereremo a tal proposito il principio di causalità, il cui significato è chiaro dal punto di vista concettuale, ma la cui attualizzazione in teoria della matrice S risulta ad oggi difficile da rendere in modo rigoroso, per cui lo sostituiremo con un postulato differente, di tipo matematico. Infine adotteremo l'ipotesi che processi fisici molto distanti l'uno dall'altro non possano influenzarsi a vicenda, cosa che prende il nome di principio di decomposizione in cluster. Ciò ci porterà ad una specifica forma per gli elementi della matrice S relativi ai processi in cui viene emessa una particella a bassissima energia, priva di massa e di elicità ± 1 o ± 2 , che supporremo essere rispettivamente il fotone (mediatore dell'interazione elettromagnetica) e il gravitone (mediatore dell'interazione gravitazionale). Sottoponendo il risultato trovato alle condizioni di Lorentz-invarianza, infine, giungeremo all'asserto del teorema.

Capitolo 1

Gruppo di Poincaré

1.1 Gruppi di Lie e rappresentazioni

In questa prima sezione introdurremo alcuni elementi di base a partire dai quali sarà possibile dimostrare il teorema di Weinberg: attribuiremo alle trasformazioni di simmetria su un sistema fisico la struttura algebrica di gruppo e discuteremo i risultati principali e le difficoltà che si incontrano nel tradurre tale affermazione in un formalismo quantomeccanico.

Come prescritto dal primo postulato della meccanica quantistica, gli stati di un sistema fisico sono rappresentati da raggi in un corrispondente spazio di Hilbert \mathcal{H} . Le trasformazioni tra raggi $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ formano un gruppo: se la trasformazione T_1 agisce sul raggio \mathcal{R} restituendo il raggio \mathcal{R}' , e se la trasformazione T_2 agisce su \mathcal{R}' restituendo \mathcal{R}'' , allora esiste la trasformazione T_2T_1 , ottenuta applicando prima T_1 e poi T_2 , che porta il raggio \mathcal{R} in \mathcal{R}'' .

Di speciale importanza in fisica sono i *gruppi di Lie connessi*, ovvero quelli i cui elementi sono individuati da un numero finito di parametri reali continui: $T \equiv T(\theta)$, e per i quali ogni elemento può essere mandato nell'identità mediante una variazione continua di tali parametri. Allora la struttura del gruppo è specificata dalla particolare regola di prodotto che i suoi elementi soddisfano:

$$T(\theta_2)T(\theta_1) = T(f(\theta_2, \theta_1)) \quad (1.1.1)$$

Ora, un gruppo di trasformazioni si dice *di simmetria* per il sistema fisico rappresentato dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} se i suoi elementi, agendo sui raggi, non modificano gli esiti di eventuali esperimenti. Ciò si traduce nella seguente richiesta: se $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ sono vettori appartenenti ai raggi \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , e $|\Psi'_1\rangle$ e $|\Psi'_2\rangle$ appartengono ai raggi trasformati \mathcal{R}'_1 ed \mathcal{R}'_2 ,

$$\left| \langle \Psi'_1 | \Psi'_2 \rangle \right|^2 = |\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2 \quad (1.1.2)$$

E. P. Wigner dimostrò [1, pp. 251-3] che, sotto tale ipotesi, per ogni trasformazione di simmetria è possibile definire un operatore U su \mathcal{H} tale che, se $|\Psi\rangle$ è nel raggio \mathcal{R} e $|\Psi'\rangle$ nel raggio trasformato \mathcal{R}' , $U|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$, che sia unitario e lineare

$$\langle U\Phi | U\Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle \quad (1.1.3)$$

$$U(\xi|\Phi\rangle + \eta|\Psi\rangle) = \xi U|\Phi\rangle + \eta U|\Psi\rangle \quad (1.1.4)$$

oppure antiunitario e antilineare

$$\langle U\Phi | U\Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle^* \quad (1.1.5)$$

$$U(\xi|\Phi\rangle + \eta|\Psi\rangle) = \xi^* U|\Phi\rangle + \eta^* U|\Psi\rangle \quad (1.1.6)$$

Diciamo quindi che è possibile trovare una *rappresentazione unitaria* di un gruppo di trasformazioni se esso rappresenta una simmetria per il sistema. Gli operatori che costituiscono tale rappresentazione rifletteranno quindi la struttura del gruppo agendo sui vettori di \mathcal{H} , ma con una complicazione dovuta al fatto che uno stato fisico è descritto da un raggio di \mathcal{H} piuttosto che da un vettore. In generale vale perciò la seguente regola di prodotto:

$$U(T_2)U(T_1)|\Psi\rangle = e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2 T_1)|\Psi\rangle \quad (1.1.7)$$

Non ci preoccuperemo del problema della fase $\phi(T_2, T_1)$, che si dimostra essere indipendente dal vettore [6, pp. 52-53], per due ragioni: dato un certo gruppo, essa potrebbe essere uguale a zero, nel qual caso si parla propriamente di rappresentazione del gruppo, oppure diversa da zero, e la rappresentazione si chiama *proiettiva*. Ma ogni gruppo che ammette rappresentazioni proiettive può sempre essere esteso affinché queste diventino rappresentazioni vere e proprie, e per giunta ciò non è necessario nel caso di nostro interesse, ovvero quello del gruppo di Poincaré.¹

¹ Può essere interessante precisare che esistono determinate classi di vettori, distinte dal fatto che non è possibile preparare un sistema in una combinazione lineare di vettori appartenenti a classi diverse, ed è solo all'interno di ciascuna di queste che la fase è indipendente dal particolare vettore. Tale è l'origine, per esempio, del diverso comportamento degli stati a spin intero e semintero sotto rotazioni.

Gli operatori che costituiscono una rappresentazione di un gruppo di Lie dipendono a loro volta dai parametri reali continui θ^a , e possono essere mandati con continuità nell'identità $U(0) \equiv 1$. Essi possono essere espansi in serie di potenze, almeno in un intorno dell'identità:

$$U(\theta) = 1 + i\theta^a t_a + \dots \quad (1.1.8)$$

dove i t_a sono operatori Hermitiani, chiamati *generatori* del gruppo, e abbiamo utilizzato la notazione di Einstein per le somme su indici ripetuti. Si dimostra [6, §2.7] che conoscere le relazioni di commutazione tra i generatori equivale a determinare univocamente $U(\theta)$, e dunque la struttura del gruppo, almeno in un intorno dell'identità (ma tramite lo studio della topologia del dominio dei parametri θ^a è possibile ricostruire la struttura dell'intero gruppo [6, pp. 96-100]).

In particolare un gruppo si dice *abeliano* se il prodotto è commutativo, ad esempio se la regola di prodotto soddisfa

$$f^a(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a \quad (1.1.9)$$

Si dimostra [6, pp. 55-56] che ciò implica che tutti i generatori commutano tra di loro. In questo caso è possibile ricavare l'operatore associato a una trasformazione finita (individuata dai parametri θ^a) moltiplicando N volte tra loro quelli per una trasformazione infinitesima individuata dai parametri $\delta\theta^a \equiv \theta^a/N$ e facendo tendere N all'infinito:

$$U(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + i\frac{\theta^a}{N} t_a\right)^N = e^{i\theta^a t_a} \quad (1.1.10)$$

1.2 Algebra del gruppo di Poincaré

L'obiettivo di questa sezione è dunque quello di determinare l'algebra del gruppo di Poincaré, ovvero le relazioni di commutazione tra i suoi generatori. Consideriamo a tal fine la trasformazione di coordinate

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.2.1)$$

seguita dalla seconda trasformazione

$$x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu x'^\nu + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu + \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho a^\rho + \bar{a}^\mu \quad (1.2.2)$$

Notiamo pertanto che la regola di prodotto è

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a}) T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

e deve essere soddisfatta anche dagli operatori sullo spazio di Hilbert:

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \quad (1.2.3)$$

In particolare vale

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \quad (1.2.4)$$

Sarà utile per il seguito ricordare alcune proprietà delle matrici di Lorentz: se il tensore metrico è $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.2.5)$$

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \equiv \Lambda_\nu{}^\mu = \eta_{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \quad (1.2.6)$$

Si noti che nella nostra notazione sono scritte prima le tre variabili spaziali e poi quella temporale, cui sono associati rispettivamente gli indici 1, 2, 3, 0. Dalla [1.2.5] si ha anche che $\det(\Lambda) = \pm 1$, nonché

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = -1 \quad (1.2.7)$$

da cui si vede che $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oppure $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Le trasformazioni con $\det(\Lambda) = 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ formano un sottogruppo, detto *gruppo proprio ortocrono di Lorentz*. I suoi elementi, combinati con gli operatori di inversione spaziale e temporale, più le traslazioni di a^μ restituiscono l'intero gruppo di Poincaré, per cui nel seguito ci concentreremo su di essi e sulle traslazioni.

Per studiare l'algebra del gruppo è necessario considerare una trasformazione infinitesima:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \varepsilon^\mu \quad (1.2.8)$$

dove $\delta^\mu{}_\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Notiamo innanzitutto che, affinché sia soddisfatta la [1.2.5], deve essere

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho) (\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) = \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + o(\omega^2) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

da cui si vede che $\omega_{\mu\nu}$ deve essere antisimmetrica. Il corrispondente operatore sarà pertanto

$$U(1 + \omega, \varepsilon) = 1 + \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \varepsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (1.2.10)$$

dove $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$, mentre i segni e il fattore $1/2$ sono stati scelti in modo da riconoscere in questi generatori, alla fine della trattazione, alcuni operatori familiari. Adesso valutiamo il seguente prodotto:

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= & (1.2.11) \\
 &= U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = \\
 &= U(\Lambda, a)U((1 + \omega)\Lambda^{-1}, -(1 + \omega)\Lambda^{-1}a + \varepsilon) = \\
 &= U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, -\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}a + \Lambda\varepsilon + a) = \\
 &= U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a).
 \end{aligned}$$

Espandendo entrambi i membri al primo ordine otteniamo

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda, a)\left(1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_{\rho}P^{\rho}\right)U^{-1}(\Lambda, a) &= & (1.2.12) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}i(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i(\Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu}.
 \end{aligned}$$

Ricordando che il tensore metrico è responsabile dell'innalzamento e dell'abbassamento degli indici possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda, a)\left(\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \varepsilon_{\rho}P^{\rho}\right)U^{-1}(\Lambda, a) &= & (1.2.13) \\
 &= \frac{1}{2}(\Lambda^{\tau}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\rho}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma})\eta_{\tau\mu}J^{\mu\nu} - (\Lambda^{\tau}{}_{\beta}\eta^{\beta\rho}\varepsilon_{\rho} - \Lambda^{\tau}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\rho}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}a^{\nu})\eta_{\tau\mu}P^{\mu}.
 \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti di $\omega_{\rho\sigma}$ ed ε_{ρ} si ottiene infine

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}(J^{\mu\nu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}), \quad (1.2.14)$$

$$U(\Lambda, a)P^{\rho}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}. \quad (1.2.15)$$

Infine valutiamo le due equazioni di sopra per un'altra trasformazione infinitesima $\Lambda = 1 + \omega$ e $a = \varepsilon$, scorrelata dalla precedente. Dalla [1.2.14] si ha

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu}P^{\mu}\right)J^{\rho\sigma}\left(1 - \frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu}P^{\mu}\right) &= & (1.2.16) \\
 &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}{}^{\rho})(\delta_{\nu}^{\sigma} + \omega_{\nu}{}^{\sigma})(J^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu}P^{\nu} + \varepsilon^{\nu}P^{\mu}),
 \end{aligned}$$

o in altri termini

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma}\right] = -\varepsilon^{\rho}P^{\sigma} + \varepsilon^{\sigma}P^{\rho} + \omega_{\mu}{}^{\rho}J^{\mu\sigma} + \omega_{\nu}{}^{\sigma}J^{\rho\nu}. \quad (1.2.17)$$

Uguagliando i coefficienti di $\omega_{\mu\nu}$ ed ϵ_μ si trovano così le relazioni di commutazione

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \quad (1.2.18)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho. \quad (1.2.19)$$

Facendo lo stesso con la [1.2.15] si ottiene

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho\right] = (\delta_\mu^\rho + \omega_\mu{}^\rho)P^\mu \quad (1.2.20)$$

da cui

$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \quad (1.2.21)$$

Possiamo riscrivere le [1.2.18], [1.2.19], [1.2.21] definendo i generatori nella notazione tridimensionale: il generatore delle traslazioni temporali $P^0 \equiv H$, i generatori delle traslazioni spaziali $P^i \equiv P_i$, i generatori delle rotazioni $J^{ij} \equiv \varepsilon_{ijk}J_k$ e i generatori dei "boost" $J^{i0} \equiv K_i$. Allora

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (1.2.22)$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad (1.2.23)$$

$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, \quad (1.2.24)$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (1.2.25)$$

$$[K_i, P_j] = i\delta_{ij}H, \quad (1.2.26)$$

$$[K_i, H] = iP_i, \quad (1.2.27)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [P_i, P_j] = 0. \quad (1.2.28)$$

1.3 Stati di singola particella

Avendo individuato l'algebra del gruppo di Poincaré, possiamo ora definire gli stati che descrivono singole particelle e ricavarne le proprietà di trasformazione sotto l'azione degli elementi del gruppo. In particolare in questa tesi saremo interessati a determinare le regole di trasformazione degli stati associati a particelle prive di massa.

Sfruttiamo il fatto che le componenti del quadrimomento commutano tra di loro e definiamo gli stati di singola particella libera come loro autostati:

$$P^\mu |\Psi_{p,\sigma}\rangle = p^\mu |\Psi_{p,\sigma}\rangle \quad (1.3.1)$$

dove l'indice σ contiene tutti gli ulteriori gradi di libertà. Il comportamento di tali stati sotto traslazioni è triviale, dal momento che queste ultime formano un sottogruppo abeliano:

$$U(1, a) |\Psi_{p,\sigma}\rangle = e^{-ip \cdot a} |\Psi_{p,\sigma}\rangle. \quad (1.3.2)$$

Dobbiamo quindi ricavare l'azione di $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ su $|\Psi_{p,\sigma}\rangle$. Notiamo innanzitutto che, dalla [1.2.15],

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle &= U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle = \\ &= U(\Lambda) (\Lambda_\rho^\mu)^{-1} P^\rho |\Psi_{p,\sigma}\rangle = \Lambda^\mu_\rho p^\rho U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

ovvero $U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle$ è un vettore di momento Λp :

$$U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\Lambda p, \sigma'}\rangle. \quad (1.3.4)$$

In generale è possibile scegliere gli stati in modo che la matrice $C(\Lambda, p)$ sia a blocchi; si dice che gli stati che hanno σ entro ciascun blocco forniscono una particolare *rappresentazione irriducibile* del gruppo di Poincaré, e nel seguito chiameremo tali rappresentazioni semplicemente *particelle*.

Le uniche funzioni del quadrimomento invarianti sotto trasformazioni proprie ortocrone di Lorentz sono $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ e, se $p^2 \leq 0$, il segno di p^0 . Convienne pertanto definire un "momento standard" k^μ per ogni scelta di tali funzioni ed esprimere qualsiasi altro momento della stessa classe come

$$p^\mu = L(p)^\mu_\nu k^\nu \quad (1.3.5)$$

dove $L(p)$ è una opportuna trasformazione di Lorentz, che quindi lascerà p^μ nella stessa classe di k^μ . Nel caso di nostro interesse, ovvero $p^2 = 0$, $p^0 > 0$ (corrispondente a una particella di massa nulla ed energia positiva), scegliamo il momento standard

$$k^\mu \equiv (0, 0, k, k), \quad k > 0. \quad (1.3.6)$$

A questo punto conviene ridefinire gli stati di momento p come

$$|\Psi_{p,\sigma}\rangle \equiv N(p) U(L(p)) |\Psi_{k,\sigma}\rangle \quad (1.3.7)$$

dove $N(p)$ è un opportuno fattore di normalizzazione il cui valore, calcolato nell'appendice A, è

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}. \quad (1.3.8)$$

Vediamo quindi che

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle &= N(p) U(\Lambda L(p)) |\Psi_{k,\sigma}\rangle = \\ &= N(p) U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |\Psi_{k,\sigma}\rangle \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

ma $L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ è una trasformazione che porta k a $L(p)k = p$, poi a Λp e infine di nuovo a k , per cui appartiene al sottogruppo di trasformazioni W che lasciano k invariato, chiamato *gruppo piccolo*. In altre parole

$$U(W) |\Psi_{k,\sigma}\rangle \equiv \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W) |\Psi_{k,\sigma'}\rangle, \quad (1.3.10)$$

dove le $D(W)$ sono una rappresentazione del gruppo piccolo. Prendendo $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ abbiamo finalmente

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle &= N(p) U(L(\Lambda p)) U(W(\Lambda, p)) |\Psi_{k,\sigma}\rangle = \\ &= N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) U(L(\Lambda p)) |\Psi_{k,\sigma'}\rangle = \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\rangle. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Abbiamo quindi ridotto il problema di determinare le $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ a quello di trovare le rappresentazioni del gruppo piccolo.

1.4 Gruppo piccolo per particelle di massa nulla

Sia W un elemento del gruppo piccolo per particelle di massa nulla:

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu, \quad k^\mu = (0, 0, 1, 1). \quad (1.4.1)$$

Sia inoltre t il vettore di tipo tempo $t^\mu \equiv (0, 0, 0, 1)$. Il vettore Wt deve avere la stessa norma di t e il suo prodotto scalare con k deve essere lo stesso di quello di t , a causa dell'unitarietà di W :

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1, \quad (Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1. \quad (1.4.2)$$

La seconda condizione impone $(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \gamma, 1+\gamma)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, mentre la prima $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)/2$. È immediato notare che l'azione di W su k e t è la stessa della matrice

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1+\gamma \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

che è in effetti una trasformazione di Lorentz e forma un sottogruppo del gruppo di Poincaré. Ciò, tuttavia, non significa che $W^\mu{}_\nu = S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)$, ma che la trasformazione $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ lascia t e k invariati, e quindi deve essere una pura rotazione attorno all'asse z :

$$R^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.4)$$

In altre parole, $W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)R(\theta)$.

Per θ, α e β infinitesimi si ha

$$W^\mu{}_\nu(\theta, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (1.4.5)$$

dove

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.6)$$

Si può inoltre scrivere

$$U(1 + \omega) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3 + \dots \quad (1.4.7)$$

e dal confronto con la [1.2.10] si riconosce

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1, \quad (1.4.8)$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2. \quad (1.4.9)$$

L'algebra del gruppo piccolo è dunque la seguente:

$$[J_3, A] = iB, \quad (1.4.10)$$

$$[J_3, B] = -iA, \quad (1.4.11)$$

$$[A, B] = 0. \quad (1.4.12)$$

Dal confronto con le regole di commutazione trovate precedentemente si evince che si tratta del gruppo delle rotazioni attorno all'asse z più le traslazioni sul piano x, y . Siccome A e B commutano possiamo definire

$$A |\Psi_{k,a,b}\rangle = a |\Psi_{k,a,b}\rangle, \quad B |\Psi_{k,a,b}\rangle = b |\Psi_{k,a,b}\rangle, \quad (1.4.13)$$

ma ciò risulta in un problema: come si può facilmente verificare per via matriciale,

$$\begin{aligned} U(R(\theta))(1 + i\alpha A + i\beta B)U^{-1}(R(\theta)) &= \\ &= 1 + i(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)A + i(-\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)B \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

e pertanto

$$U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta)) = A \cos \theta - B \sin \theta, \quad (1.4.15)$$

$$U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta)) = A \sin \theta + B \cos \theta. \quad (1.4.16)$$

Ora, definendo

$$|\Psi_{k,a,b}^\theta\rangle \equiv U^{-1}(R(\theta)) |\Psi_{k,a,b}\rangle \quad (1.4.17)$$

si ha

$$A |\Psi_{k,a,b}^\theta\rangle = (a \cos \theta - b \sin \theta) |\Psi_{k,a,b}^\theta\rangle, \quad (1.4.18)$$

$$B |\Psi_{k,a,b}^\theta\rangle = (a \sin \theta + b \cos \theta) |\Psi_{k,a,b}^\theta\rangle. \quad (1.4.19)$$

Il problema riguarda l'emergere del grado di libertà continuo θ , che non si osserva nelle particelle fisiche, per cui dobbiamo eliminarlo imponendo che gli stati fisici siano quelli con $a = b = 0$.² Il grado di libertà rimasto è

²La necessità di eliminare tale grado di libertà non è puramente empirica, ma emerge in teoria dei campi come base concettuale dell'invarianza di gauge dei campi privi di massa al fine di garantire la Lorentz-invarianza della matrice S (solo eliminando questo grado di libertà per ogni punto dello spazio-tempo si ottiene un numero finito di componenti per il campo; si veda inoltre [6, pp.249-51]). Tale operazione si rivela pertanto essenziale per la dimostrazione del teorema di Weinberg.

l'autovalore di J_3 , che chiamiamo *elicità* σ e rappresenta la componente del momento angolare lungo la direzione del moto.

Possiamo finalmente determinare la rappresentazione del gruppo piccolo:

$$U(W) |\Psi_{k,\sigma}\rangle = e^{i\alpha A + i\beta B} e^{iJ_3\theta} |\Psi_{k,\sigma}\rangle = e^{i\sigma\theta} |\Psi_{k,\sigma}\rangle \quad (1.4.20)$$

ovvero

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = e^{i\sigma\theta} \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (1.4.21)$$

per cui infine

$$U(\Lambda) |\Psi_{p,\sigma}\rangle = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} e^{i\sigma\theta(\Lambda,p)} |\Psi_{\Lambda p,\sigma}\rangle \quad (1.4.22)$$

dove l'angolo $\theta(\Lambda, p)$ è definito dalla relazione

$$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p))R(\theta(\Lambda, p)). \quad (1.4.23)$$

Capitolo 2

Invarianza della matrice S

2.1 Stati "in" e "out" e proprietà di trasformazione

L'obiettivo di questo capitolo è definire la matrice S , i cui elementi sono le ampiezze di transizione da uno stato iniziale a uno finale in un processo di scattering, per poi determinarne il comportamento sotto trasformazioni di Lorentz. Il primo passo in tal senso è discutere cosa avviene in un tipico esperimento di scattering: alcune particelle vengono preparate a distanza macroscopica l'una dall'altra, per cui all'istante iniziale esse sono considerabili libere, per poi interagire su distanze microscopiche e tornare infine ad allontanarsi. Nell'ottica dell'interpretazione di Heisenberg, gli stati indipendenti dal tempo che descrivono il sistema devono "apparire" come prodotti tensoriali di stati di particelle libere per $t \rightarrow \pm\infty$. Con ciò si intende che due osservatori aventi l'origine dei tempi traslata di τ l'una rispetto all'altra non osserveranno lo stesso stato, e in particolare, qualunque sia l'origine dei tempi del primo osservatore, per $\tau \rightarrow \pm\infty$ il secondo vedrà lo stato libero sopra descritto.

Essendo un prodotto tensoriale, lo stato che descrive più particelle non interagenti soddisfa

$$U_0(\Lambda, a) |\Phi_{p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \dots}\rangle = e^{-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \times \quad (2.1.1)$$
$$\times \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots |\Phi_{\Lambda p_1 \sigma'_1 n_1, \Lambda p_2 \sigma'_2 n_2, \dots}\rangle,$$

dove $U_0(\Lambda, a)$ è appunto l'operatore che induce trasformazioni non omogenee di Lorentz sugli stati di particelle libere, e inoltre non abbiamo specificato la forma delle $D(W)$ per includere tutti i possibili tipi di particelle (indicati dal pedice n), non solo quelle prive di massa. D'ora in avanti, quando possibile, useremo la notazione abbreviata che indica la collezione dei numeri quantici di tutte le particelle in gioco con una singola lettera greca. Tali stati sono ovviamente autostati dell'Hamiltoniano libero:

$$H_0 |\Phi_\alpha\rangle = E_\alpha |\Phi_\alpha\rangle. \quad (2.1.2)$$

Definiamo gli stati "in" e "out" come autostati dell'Hamiltoniano completo $H = H_0 + V$ aventi la stessa energia dei corrispondenti stati liberi ¹

$$H |\Psi_\alpha^\pm\rangle = E_\alpha |\Psi_\alpha^\pm\rangle, \quad (2.1.3)$$

con la condizione che essi appaiano come stati liberi rispettivamente a $t \rightarrow \mp\infty$ nel senso spiegato prima. Tale condizione, tuttavia, se formulata direttamente sugli autostati di H sarebbe priva di contenuto, in quanto l'operatore di traslazione temporale e^{-iHt} non fa altro che introdurre una fase, anche nel limite considerato. Più propriamente richiediamo quindi che una sovrapposizione regolare di stati "in" o "out", con spettro di energie entro un certo intervallo, soddisfi

$$\int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) |\Psi_\alpha^\pm\rangle \rightarrow \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) |\Phi_\alpha\rangle \quad (2.1.4)$$

per $t \rightarrow \mp\infty$.

Possiamo a questo punto definire gli elementi della matrice S come

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \Psi_\beta^- | \Psi_\alpha^+ \rangle. \quad (2.1.5)$$

Per determinarne le proprietà di trasformazione sotto l'azione del gruppo di Poincaré possiamo definire due nuovi operatori, in generale diversi da $U_0(\Lambda, a)$, che inducano la nota trasformazione sugli stati "in" e "out":

$$U^\pm(\Lambda, a) |\Psi_{p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \dots}^\pm\rangle = e^{-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu + (\Lambda p_2)^\mu + \dots)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \times \quad (2.1.6)$$

$$\times \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots |\Psi_{\Lambda p_1 \sigma'_1 n_1, \Lambda p_2 \sigma'_2 n_2, \dots}^\pm\rangle.$$

¹Affinché H e H_0 abbiano lo stesso spettro è necessario definire H_0 in modo che in esso compaiano le masse effettivamente misurate e non quelle "nude", ovvero al netto dell'interazione, e inoltre che gli stati legati di H siano inclusi in H_0 come se fossero particelle fondamentali.

Siccome gli stati "in" e "out" appaiono come stati liberi rispettivamente molto tempo prima e molto tempo dopo l'interazione, tale definizione può sempre essere soddisfatta. Tuttavia, affinché la nostra teoria sia realmente Lorentz-invariante, dobbiamo richiedere che sia lo stesso operatore ad agire come nella [2.1.6] sia sugli stati "in" che su quelli "out". Chiamando tale operatore $U(\Lambda, a)$, a causa della sua unitarietà abbiamo quindi

$$S_{\beta\alpha} = \langle U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-} | U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+} \rangle, \quad (2.1.7)$$

il che ci fornisce la regola di trasformazione della matrice S :

$$\begin{aligned} S_{p'_1\sigma'_1 n'_1, p'_2\sigma'_2 n'_2, \dots; p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \dots} &= e^{ia_{\mu}((\Lambda p_1)^{\mu} + (\Lambda p_2)^{\mu} + \dots - (\Lambda p'_1)^{\mu} - (\Lambda p'_2)^{\mu} - \dots)} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots p'_1{}^0 p'_2{}^0 \dots}} \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} \sum_{\bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2 \dots} \times \\ &\times D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}(W(\Lambda, p_2)) \dots D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^*(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^*(W(\Lambda, p_2)) \dots \times \\ &\times S_{\Lambda p'_1 \bar{\sigma}'_1 n'_1, \Lambda p'_2 \bar{\sigma}'_2 n'_2, \dots; \Lambda p_1 \bar{\sigma}_1 n_1, \Lambda p_2 \bar{\sigma}_2 n_2, \dots} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

2.2 Vettori polarizzazione

In questa sezione considereremo l'elemento di matrice S per una generica reazione in cui viene emessa una particella senza massa di momento q ed elicità $\pm\sigma$, con le variabili di tutte le altre particelle riassunte dall'etichetta p . In particolare, semplificando la regola di trasformazione [2.1.8] come

$$\begin{aligned} S_{\pm\sigma}(q, p) &= \sqrt{\frac{(\Lambda q)^0}{q^0}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} S_{\pm\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) \\ &= \sqrt{\frac{|q_{\Lambda}|}{|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} S_{\pm\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

(dove q_{Λ} è la componente spaziale del momento Λq) e sottintendendo di aver applicato la trasformazione di Lorentz soltanto ai gradi di libertà della particella di momento q , potremo esprimere $S_{\pm\sigma}(q, p)$ in una forma tale da evidenziare le condizioni di invarianza su cui si basa la dimostrazione del teorema di Weinberg [3, Appendix B]:

$$S_{\pm\sigma}(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2|q|}} \epsilon_{\pm 1}^{\mu_*}(\hat{q}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma^*}}(\hat{q}) M_{\pm, \mu_1 \dots \mu_{\sigma}}(q, p). \quad (2.2.2)$$

Qui M è un tensore simmetrico, nel senso che

$$M_{\pm}^{\mu_1 \dots \mu_\sigma}(q, p) = \Lambda_{v_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{v_\sigma}^{\mu_\sigma} M_{\pm}^{v_1 \dots v_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p), \quad (2.2.3)$$

e gli ϵ sono noti come *vettori polarizzazione* e sono definiti da

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) \equiv R(\hat{q})^{\mu}_{\nu} \epsilon_{\pm}^{\nu} \quad (2.2.4)$$

dove $R(\hat{q})$ è una certa rotazione standard che porta l'asse z nella direzione di q , mentre

$$\epsilon_{\pm}^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0, 0). \quad (2.2.5)$$

Come abbiamo fatto con i momenti delle singole particelle, suddividiamo l'insieme di tutti i possibili $\{q, p\}$ in classi di equivalenza caratterizzate dal fatto che ogni elemento di una classe può essere trasformato in un altro elemento della stessa classe mediante una trasformazione di Lorentz. Scegliamo ad arbitrio per ogni classe un elemento standard $\{q_c, p_c\}$, sicché per ogni scelta di q e p si determina univocamente la trasformazione di Lorentz standard

$$q = Lq_c, \quad p = Lp_c. \quad (2.2.6)$$

In altre parole, vi è una relazione biunivoca tra gli elementi $\{q, p\}$ e la terna $\{q_c, p_c, L\}$.

Siccome, come si può facilmente verificare,

$$\epsilon_{\pm\mu}^*(\hat{q}) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) = 1, \quad (2.2.7)$$

è possibile definire la quantità

$$M_{\pm}^{\mu_1 \dots \mu_\sigma}(q_c, p_c) \equiv \sqrt{2|q_c|} \epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\hat{q}_c) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma}(\hat{q}_c) S_{\pm\sigma}(q_c, p_c) \quad (2.2.8)$$

che ovviamente soddisfa la [2.2.2] per ogni elemento standard $\{q_c, p_c\}$, ma che non è valida per ogni $\{q, p\}$ a causa del fatto che si annulla in qualsiasi sistema di riferimento ponendo $\mu_j = 0$, e non sarebbe quindi un tensore. Estendiamo pertanto nel seguente modo la definizione a generici $\{q, p\}$:

$$M_{\pm}^{\mu_1 \dots \mu_\sigma}(q, p) \equiv L^{\mu_1}_{v_1}(q, p) \dots L^{\mu_\sigma}_{v_\sigma}(q, p) M_{\pm}^{v_1 \dots v_\sigma}(q_c, p_c). \quad (2.2.9)$$

Dobbiamo verificare che tale quantità sia un tensore e che soddisfi la [2.2.2] per ogni $\{q, p\}$. Per quanto riguarda il primo punto basta osservare che

$L(q, p)L^{-1}(\Lambda q, \Lambda p)$ porta $\{\Lambda q, \Lambda p\}$ in $\{q_c, p_c\}$ e poi in $\{q, p\}$, e pertanto deve essere semplicemente uguale a Λ^{-1} , per cui

$$\begin{aligned} M_{\pm}^{\mu_1 \dots \mu_\sigma}(q, p) &= & (2.2.10) \\ &= L^{\mu_1}_{\nu_1}(q, p) \dots L^{\mu_\sigma}_{\nu_\sigma}(q, p) L_{\rho_1}^{\nu_1}(\Lambda q, \Lambda p) \dots L_{\rho_\sigma}^{\nu_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) M_{\pm}^{\rho_1 \dots \rho_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) = \\ &= \Lambda_{\rho_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\rho_\sigma}^{\mu_\sigma} M_{\pm}^{\rho_1 \dots \rho_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p). \end{aligned}$$

Per dimostrare il secondo punto dobbiamo ricavare la regola di trasformazione dei vettori polarizzazione. Se scegliamo di rappresentare le trasformazioni standard $L(q)$ (quelle che portano il momento standard $k^\mu = (0, 0, k, k)$ nel momento arbitrario q) come

$$L(q) = R(\hat{q})B(|q|), \quad (2.2.11)$$

dove $B(|q|)$ è un boost lungo l'asse z , possiamo anche scrivere $\epsilon_{\pm}(\hat{q}) = L(q)\epsilon_{\pm}$, dal momento che il boost non ha effetto sul vettore polarizzazione. Ricordiamo a questo punto l'elemento del gruppo piccolo

$$\begin{aligned} W(\Lambda, q) &= L^{-1}(q)\Lambda^{-1}L(\Lambda q) = & (2.2.12) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\alpha & \alpha \\ -\sin \theta & \cos \theta & -\beta & \beta \\ \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta & \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta & 1 - \gamma & \gamma \\ \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta & \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta & -\gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che agendo su ϵ_{\pm} restituisce

$$W^{\mu}_{\nu}(\Lambda, q)\epsilon_{\pm}^{\nu} = e^{\pm i\theta(\Lambda, q)}\epsilon_{\pm}^{\mu} + \frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}k}k^{\mu}, \quad (2.2.13)$$

come si verifica facilmente. Una immediata conseguenza è che ϵ_{\pm} , a scapito del nome, non è affatto un vettore, ed è questo il punto fondamentale. Se lo fosse, infatti, una volta che avremo dimostrato la [2.2.2], la condizione di Lorentz-invarianza per la matrice S [2.2.1] sarebbe automaticamente soddisfatta, senza bisogno delle ulteriori condizioni su cui si baserà il teorema. Ma tornando alla questione presente, possiamo riscrivere l'ultima equazione come

$$(L^{-1}(q)\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\epsilon_{\pm}^{\nu}(\Lambda \hat{q}) = e^{\pm i\theta(\Lambda, q)}\epsilon_{\pm}^{\mu} + X_{\pm}(\Lambda, q)k^{\mu} \quad (2.2.14)$$

dove

$$X_{\pm}(\Lambda, q) \equiv \frac{\alpha(L^{-1}(q)\Lambda^{-1}L(\Lambda q)) \pm i\beta(L^{-1}(q)\Lambda^{-1}L(\Lambda q))}{\sqrt{2}k}. \quad (2.2.15)$$

Moltiplicando per $L(q)$,

$$\Lambda_\nu^\mu \epsilon_\pm^\nu(\Lambda \hat{q}) = e^{\pm i\theta(\Lambda, q)} \epsilon_\pm^\mu(\hat{q}) + X_\pm(\Lambda, q) q^\mu. \quad (2.2.16)$$

Ponendo $\mu = 0$ si ottiene un'espressione di $X_\pm(\Lambda, q)$ in termini di $\epsilon_\pm(q)$:

$$X_\pm(\Lambda, q) |q| = \Lambda_\nu^0 \epsilon_\pm^\nu(\Lambda \hat{q}). \quad (2.2.17)$$

Possiamo quindi scrivere la regola di trasformazione dei vettori polarizzazione:

$$(\Lambda_\nu^\mu - \Lambda_\nu^0 q^\mu / |q|) \epsilon_\pm^\nu(\Lambda \hat{q}) = e^{\pm i\theta(\Lambda, q)} \epsilon_\pm^\mu(\hat{q}). \quad (2.2.18)$$

Reinseriamoci nella dimostrazione in corso ponendo $q = q_c$ e $\Lambda = L^{-1}(q, p)$:

$$\epsilon_\pm(\hat{q}) = e^{\mp i\theta(L^{-1}(q, p))} (L^\mu_\nu(q, p) - q^\mu L^0_\nu(q, p) / |q|) \epsilon_\pm^\nu(\hat{q}_c). \quad (2.2.19)$$

A questo punto, combinando la precedente equazione con la [2.2.9], con tutti gli indici abbassati e tenendo a mente che gli elementi della matrice $L^\mu_\nu(q, p)$ sono reali, otteniamo

$$\begin{aligned} \epsilon_\pm^{\mu_1*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_\pm^{\mu_\sigma*}(\hat{q}) M_{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p) &= e^{\pm i\sigma\theta(L^{-1}(q, p), q)} \times \\ &\times [\epsilon_\pm^{\mu_1}(\hat{q}_c) - q_c^{\mu_1} \epsilon_\pm^{\nu_1}(\hat{q}_c) L^0_{\nu_1}(q, p) / |q|]^* \cdots \times \\ &\times [\epsilon_\pm^{\mu_\sigma}(\hat{q}_c) - q_c^{\mu_\sigma} \epsilon_\pm^{\nu_\sigma}(\hat{q}_c) L^0_{\nu_\sigma}(q, p) / |q|]^* M_{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q_c, p_c). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Tuttavia notiamo che dalla definizione discende immediatamente

$$q_\mu \epsilon_\pm^\mu(\hat{q}) = 0 \quad (2.2.21)$$

per cui, a causa della [2.2.8], tutti i termini contenenti q_c sono nulli:

$$\begin{aligned} \epsilon_\pm^{\mu_1*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_\pm^{\mu_\sigma*}(\hat{q}) M_{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p) &= e^{\pm i\sigma\theta(L^{-1}(q, p), q)} \times \\ &\times \epsilon_\pm^{\mu_1*}(\hat{q}_c) \cdots \epsilon_\pm^{\mu_\sigma*}(\hat{q}_c) M_{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q_c, p_c) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

o anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2|q|}} \epsilon_\pm^{\mu_1*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_\pm^{\mu_\sigma*}(\hat{q}) M_{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p) &= \\ &= \sqrt{\frac{|q_c|}{|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(L^{-1}(q, p), q)} S_{\pm\sigma}(q_c, p_c). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Ma il secondo membro non è che la formula di trasformazione per $S_{\pm\sigma}(q, p)$ ottenuta ponendo $\Lambda = L^{-1}(q, p)$, e pertanto la dimostrazione è terminata.

2.3 Condizione di Lorentz-invarianza

Ricapitoliamo le formule fondamentali ottenute nelle sezioni precedenti:

$$S_{\pm\sigma}(q, p) = \sqrt{\frac{|q_\Lambda|}{|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} S_{\pm\sigma}(\Lambda q, \Lambda p), \quad (2.3.1)$$

$$S_{\pm\sigma}(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2|q|}} \epsilon_{\pm 1}^{\mu_*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma^*}}(\hat{q}) M_{\pm, \mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p), \quad (2.3.2)$$

$$M_{\pm}^{\mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p) = \Lambda_{v_1}^{\mu_1} \cdots \Lambda_{v_\sigma}^{\mu_\sigma} M_{\pm}^{v_1 \cdots v_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p), \quad (2.3.3)$$

$$(\Lambda_{v^\mu} - \Lambda_v^0 q^\mu / |q|) \epsilon_{\pm}^v(\Lambda \hat{q}) = e^{\pm i\theta(\Lambda, q)} \epsilon_{\pm}(\hat{q}). \quad (2.3.4)$$

Vogliamo a questo punto combinare le ultime tre e determinare le condizioni sotto le quali esse sono compatibili con la prima:

$$\begin{aligned} S_{\pm\sigma}(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} \times \\ &\times [\epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\Lambda \hat{q}) - (\Lambda q)^{\mu_1} \Lambda_v^0 \epsilon_{\pm}^v(\Lambda \hat{q}) / |q|]^* \cdots \times \\ &\times [\epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma}(\Lambda \hat{q}) - (\Lambda q)^{\mu_\sigma} \Lambda_v^0 \epsilon_{\pm}^v(\Lambda \hat{q}) / |q|]^* \times \\ &\times M_{\pm, \mu_1 \cdots \mu_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Possiamo rendere la condizione più trasparente considerando una trasformazione infinitesima $\Lambda_v^\mu = \delta_v^\mu + \omega_v^\mu$:

$$\begin{aligned} S_{\pm\sigma}(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} \times \\ &\times [\epsilon_{\pm}^{\mu_1}(\Lambda \hat{q}) - (q + \omega q)^{\mu_1} (\delta_v^0 + \omega_v^0) \epsilon_{\pm}^v(\Lambda \hat{q}) / |q|]^* \cdots \times \\ &\times [\epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma}(\Lambda \hat{q}) - (q + \omega q)^{\mu_\sigma} (\delta_v^0 + \omega_v^0) \epsilon_{\pm}^v(\Lambda \hat{q}) / |q|]^* \times \\ &\times M_{\pm, \mu_1 \cdots \mu_\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

ma le δ_v^0 danno contributo nullo in quanto $\epsilon_{\pm}^0(\hat{q}) = 0$. Distinguiamo quindi il termine in cui vengono moltiplicate tra loro solo le $\epsilon_{\pm}^{\mu_j}(\Lambda \hat{q})$, che restituisce semplicemente l'elemento trasformato, e i σ termini (identici a causa della simmetria del tensore M_{\pm}) ottenuti moltiplicando tra loro tutte le $\epsilon_{\pm}^{\mu_j}(\Lambda \hat{q})$ tranne una per q^{μ_1} :

$$\begin{aligned} S_{\pm\sigma}(q, p) &= \sqrt{\frac{|q_\Lambda|}{|q|}} e^{\pm i\sigma\theta(\Lambda, q)} S_{\pm\sigma}(\Lambda q, \Lambda p) + \\ &- \frac{\sigma}{\sqrt{2|q|}} (\omega_v^0 \epsilon_{\pm}^{v^*}(\hat{q})) q^{\mu_1} \epsilon_{\pm}^{\mu_2}(\hat{q}) \cdots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma^*}}(\hat{q}) M_{\pm, \mu_1 \cdots \mu_\sigma}(q, p) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

in quanto tutti gli altri termini contengono ordini superiori di ω . È evidente che la corretta formula di trasformazione per la matrice S si recupera se e solo se

$$q^{\mu_1} \epsilon_{\pm}^{\mu_2*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_{\pm}^{\mu_{\sigma}*}(\hat{q}) M_{\pm, \mu_1 \cdots \mu_{\sigma}}(q, p) = 0. \quad (2.3.8)$$

Per $\sigma = 1$ ciò significa semplicemente

$$q_{\mu} M_{\pm}^{\mu}(q, p) = 0, \quad (2.3.9)$$

mentre per $\sigma = 2$ si può scrivere, a causa del carattere tensoriale di M_{\pm} ,

$$q_{\mu} M_{\pm}^{\mu\nu}(q, p) \propto q^{\nu}, \quad (2.3.10)$$

in quanto tale quantità deve essere un vettore che, moltiplicato scalarmente per $\epsilon_{\pm}(\hat{q})$, dia zero. Tuttavia, poiché $\epsilon_{\pm, \mu}(\hat{q}) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) = \eta_{\mu\nu} \epsilon_{\pm}^{\nu}(\hat{q}) \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) = 0$, possiamo ridefinire $M_{\pm}^{\mu\nu}$ sottraendovi un termine proporzionale a $\eta^{\mu\nu}$ senza alterare la matrice S , per cui la condizione si può sempre riscrivere come

$$q_{\mu} M_{\pm}^{\mu\nu}(q, p) = 0. \quad (2.3.11)$$

Le condizioni [2.3.9] e [2.3.11] sono quelle da cui discendono, rispettivamente, la conservazione della carica e il principio di equivalenza, in un senso che sarà chiarito nei prossimi capitoli. Per concludere questa sezione notiamo brevemente che la prima condizione è legata all'*invarianza di gauge* nel senso che richiede che la matrice S sia invariante sotto la trasformazione di gauge

$$\epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) \rightarrow \epsilon_{\pm}^{\mu}(\hat{q}) + \lambda_{\pm}(q) q^{\mu} \quad (2.3.12)$$

con $\lambda_{\pm}(q)$ arbitrario.

Capitolo 3

Causalità e propagatore

3.1 Propagatore in meccanica quantistica

In questo capitolo introdurremo e analizzeremo un oggetto di fondamentale importanza per la teoria della matrice S e per il teorema di Weinberg: il *propagatore*. Lo definiremo per prima cosa in meccanica quantistica non relativistica, adottando l'approccio [4, §6.2] che fa uso del formalismo della meccanica ondulatoria, o in altre parole delle funzioni d'onda

$$\langle x|\psi(t)\rangle \equiv \psi(x, t), \quad (3.1.1)$$

in modo da rendere trasparente a ogni passaggio il significato fisico sottostante. Si noti che in regime relativistico il concetto di funzione d'onda di singola particella perde di significato, per cui nel prossimo capitolo torneremo a usare la notazione adoperata finora.

Sia $\psi(x, t)$ nota all'istante t ; per il principio di Huygens-Fresnel ogni punto x in tale istante è la sorgente di un'onda sferica di ampiezza proporzionale a $\psi(x, t)$, per cui l'ampiezza dell'onda risultante $\psi(x', t')$ a $t' > t$ sarà dovuta a infiniti contributi, uno per ogni punto del fronte d'onda al tempo t , e ciascuno proporzionale all'ampiezza dell'onda stessa tramite un fattore che chiamiamo $iG(x', t'; x, t)$. Tale fattore, a meno dell'unità immaginaria, è chiamato propagatore ed è definito dalla relazione

$$\psi(x', t') = i \int d^3x G(x', t'; x, t) \psi(x, t), \quad t' > t. \quad (3.1.2)$$

Tale oggetto dipende ovviamente dalla dinamica del sistema, e in particolare definiamo il propagatore libero G_0 come quello che descrive l'evoluzione temporale di una particella libera.

Vogliamo trovare la forma di un generico propagatore in termini di quello libero e del potenziale cui è sottoposto il sistema, al fine di ottenere l'intuizione di un approccio perturbativo che sarà possibile applicare anche alla matrice S relativistica. Supponiamo di accendere il potenziale $V(x_1, t_1)$ per un breve intervallo di tempo Δt_1 attorno all'istante t_1 . Per tempi $t < t_1$ la particella è descritta dall'equazione d'onda libera $\phi(x, t)$, mentre nell'intervallo Δt_1 l'equazione del moto è

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - H_0\right)\psi(x_1, t_1) = V(x_1, t_1)\psi(x_1, t_1) \quad (3.1.3)$$

dove H_0 è l'Hamiltoniana libera scritta nello spazio delle configurazioni. Si può dire che il potenziale aggiunga un contributo (al primo ordine in Δt_1) $\Delta\psi(x_1, t_1)$ all'onda libera

$$\psi(x_1, t_1) = \phi(x_1, t_1) + \Delta\psi(x_1, t_1) \quad (3.1.4)$$

che può essere calcolato integrando l'equazione del moto al primo ordine in Δt_1 :

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - H_0\right)[\phi(x_1, t_1) + \Delta\psi(x_1, t_1)] &= V(x_1, t_1)[\phi(x_1, t_1) + \Delta\psi(x_1, t_1)] \quad (3.1.5) \\ \implies \left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - H_0\right)\Delta\psi(x_1, t_1) &\simeq \frac{i}{\Delta t_1}\Delta\psi(x_1, t_1) = V(x_1, t_1)\phi(x_1, t_1) \\ \implies \Delta\psi(x_1, t_1) &= -iV(x_1, t_1)\phi(x_1, t_1)\Delta t_1 \end{aligned}$$

dato che $\phi(x_1, t_1)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger per particelle libere. A seguito dell'interazione, al tempo $t' > t_1$, il contributo aggiuntivo evolve liberamente e diventa

$$\Delta\psi(x', t') = \int d^3x_1 G_0(x', t'; x_1, t_1)V(x_1, t_1)\phi(x_1, t_1), \quad (3.1.6)$$

per cui

$$\begin{aligned} \psi(x', t') &= \phi(x', t') + \int d^3x_1 G_0(x', t'; x_1, t_1)V(x_1, t_1)\phi(x_1, t_1) = \quad (3.1.7) \\ &= i \int d^3x \left[G_0(x'; x) + \int d^3x_1 \Delta t_1 G_0(x'; x_1)V(x_1)G_0(x_1; x) \right] \phi(x), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la notazione abbreviata $x \equiv (\mathbf{x}, t)$. Se accendiamo un secondo potenziale $V(x_2, t_2)$ per il breve intervallo di tempo Δt_2 attorno a $t_2 > t_1$ si ha, al tempo $t' > t_2$, l'ulteriore onda aggiuntiva

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\mathbf{x}', t') &= \int d^3\mathbf{x}_2 G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_2)V(x_2)\psi(x_2)\Delta t_2 = \\ &= i \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}_2 \Delta t_2 G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_2)V(x_2) \left[G_0(x_2; \mathbf{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \int d^3\mathbf{x}_1 \Delta t_1 G_0(x_2; \mathbf{x}_1)V(x_1)G_0(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}) \right] \phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

per cui

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}', t') &= \phi(\mathbf{x}', t') + \int d^3\mathbf{x}_1 \Delta t_1 G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_1)V(x_1)\phi(x_1) + \\ &\quad + \int d^3\mathbf{x}_2 \Delta t_2 G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_2)V(x_2)\phi(x_2) + \\ &\quad + \int d^3\mathbf{x}_1 \Delta t_1 \int d^3\mathbf{x}_2 \Delta t_2 G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_2)V(x_2)G_0(x_2; \mathbf{x}_1)V(x_1)\phi(x_1) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

con $t' > t_2 > t_1$. Possiamo iterare il processo per un numero arbitrario di potenziali accesi per brevi intervalli di tempo attorno a istanti successivi $t_1 < t_2 < \dots < t'$, ottenendo

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}', t') &= \phi(\mathbf{x}', t') + \sum_i \int d^3\mathbf{x}_i \Delta t_i G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_i)V(x_i)\phi(x_i) + \\ &\quad + \sum_{\substack{ij \\ (t_i > t_j)}} \int d^3\mathbf{x}_i \Delta t_i \int d^3\mathbf{x}_j \Delta t_j G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_i)V(x_i)G_0(x_i; \mathbf{x}_j)V(x_j)\phi(x_j) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

dove i puntini sottintendono somme su più di due indici di integrali costruiti in modo analogo, sempre col vincolo di ordinamento temporale. Si riconosce quindi finalmente il propagatore completo:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) &= G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) + \\ &\quad + \sum_i \int d^3\mathbf{x}_i \Delta t_i G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_i)V(x_i)G_0(x_i; \mathbf{x}) + \\ &\quad + \sum_{\substack{ij \\ (t_i > t_j)}} \int d^3\mathbf{x}_i \Delta t_i \int d^3\mathbf{x}_j \Delta t_j G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_i)V(x_i)G_0(x_i; \mathbf{x}_j)V(x_j)G_0(x_j; \mathbf{x}) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Il vincolo di ordinamento temporale può essere rimosso se definiamo $G_0(x', t'; x, t)$ in modo che si annulli per $t' < t$, per cui la definizione di propagatore può essere riscritta come

$$\theta(t' - t)\psi(x', t') = i \int d^3x G(x', t'; x, t)\psi(x, t). \quad (3.1.12)$$

Inoltre, nel limite in cui l'interazione è continua, gli intervalli Δt_i diventano differenziali e le somme diventano integrali:

$$\begin{aligned} G(x'; x) = & G_0(x'; x) + \int d^4x_1 G_0(x'; x_1)V(x_1)G_0(x_1; x) + \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 G_0(x'; x_1)V(x_1)G_0(x_1; x_2)V(x_2)G_0(x_2; x) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Il significato fisico della precedente equazione è manifesto: il propagatore completo racchiude in sé la possibilità che la particella non interagisca con il potenziale, oppure che interagisca una volta al tempo t_1 , oppure due volte ai tempi t_2 e t_1 e così via, evolvendo in modo libero tra un'interazione e l'altra. Inoltre, questo sviluppo in serie ha senso se è possibile trattare il potenziale come una perturbazione. Tutto ciò varrà anche per il propagatore relativistico, e come vedremo si rifletterà direttamente sulla struttura della matrice S . Infine, la condizione su G_0 che sostituisce il vincolo di ordinamento temporale assicura che nessun contributo proveniente da onde nel futuro può influenzare le onde del presente, ed è quindi una condizione di causalità. Il suo corrispettivo relativistico non è, però, essenziale ai fini della dimostrazione del teorema di Weinberg, sebbene una diversa applicazione del concetto di causalità ci servirà per giustificare un passaggio fondamentale.

3.2 Propagatore libero non relativistico

A questo punto calcoleremo il propagatore libero non relativistico, così da poter successivamente procedere per analogia nel caso relativistico. Per prima cosa è opportuno notare che G è in effetti la funzione di Green per l'equazione di Schrödinger: basta infatti scrivere

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)\theta(t' - t)\psi(x', t) &= i\delta(t' - t)\psi(x', t') = \\ &= i \int d^3x \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G(x', t'; x, t)\psi(x, t) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

dove la prima uguaglianza sussiste in quanto ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger, mentre la seconda deve valere per ogni ψ facente parte della base di autostati di H , e pertanto

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G(x', t'; x, t) = \delta^3(x' - x)\delta(t' - t) \quad (3.2.2)$$

con la condizione al bordo

$$G(x', t'; x, t) = 0 \quad \text{per } t' < t. \quad (3.2.3)$$

Nel nostro caso $H = H_0 = -\nabla^2/2m$ e scriviamo il propagatore libero come trasformata di Fourier:

$$G_0(x' - x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{p} d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot(x'-x)} e^{-i\omega(t'-t)} \tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega) \quad (3.2.4)$$

avendo potuto scrivere in questo modo la dipendenza dalle coordinate in virtù dell'invarianza per traslazioni spaziali e temporali della [3.2.2]. Sfruttando la forma integrale della delta di Dirac l'equazione diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{p} d\omega \left(\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) \tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega) e^{i\mathbf{p}\cdot(x'-x)} e^{-i\omega(t'-t)} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{p} d\omega e^{i\mathbf{p}\cdot(x'-x)} e^{-i\omega(t'-t)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

per cui, banalmente,

$$\tilde{G}_0(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \mathbf{p}^2/2m} \quad (3.2.6)$$

per $\omega \neq \mathbf{p}^2/2m$. Per poter integrare \tilde{G}_0 , tuttavia, occorre scegliere un modo di trattare la singolarità che includa la condizione al bordo [3.2.3]. Una strategia che si adotta tipicamente è spostare la singolarità di una piccola quantità immaginaria $\pm i\varepsilon$, sottintendendo di star operando il limite $\varepsilon \rightarrow 0$, e la scelta del segno determina la condizione al bordo. Come ora mostreremo, il segno positivo fornisce il risultato cercato, corrispondente a un propagatore *ritardato*:

$$G_0(x' - x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(x'-x)} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t'-t)}}{\omega - \mathbf{p}^2/2m + i\varepsilon}. \quad (3.2.7)$$

Per $t' > t$ chiudiamo il cammino d'integrazione con un semicerchio nel semipiano inferiore, e il residuo al polo restituisce il fattore $-2\pi i e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t'-t)}$,

mentre se $t' < t$ chiudiamo il cammino d'integrazione nel semipiano superiore, dove non sono presenti poli, per cui l'integrale si annulla. Otteniamo pertanto

$$G_0(x' - x) = -i\theta(t' - t) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t'-t)}. \quad (3.2.8)$$

Notiamo che la funzione a gradino assicura la corretta condizione di causalità. Tale risultato può essere facilmente integrato, ma è più istruttivo per i nostri scopi esprimerlo nella forma

$$G_0(x' - x) = -i\theta(t' - t) \int d^3\mathbf{p} \phi_p(\mathbf{x}', t') \phi_p^*(\mathbf{x}, t), \quad (3.2.9)$$

dove $\phi_p(\mathbf{x}, t) \equiv e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t} \phi_p(\mathbf{x})$ e $\phi_p(\mathbf{x})$ sono le onde piane di momento \mathbf{p} , autofunzioni di H_0 . È infatti sempre possibile esprimere il propagatore in questo modo: se $\phi_n(\mathbf{x})$ sono le autofunzioni di H , che senza perdere di generalità assumiamo avere spettro discreto, sia

$$\psi(\mathbf{x}', t) = \sum_n c_n \phi_n(\mathbf{x}'). \quad (3.2.10)$$

Allora

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}', t') &= \sum_n e^{-iE_n(t'-t)} c_n \phi_n(\mathbf{x}') = \\ &= \int d^3\mathbf{x} \sum_n e^{-iE_n(t'-t)} \phi_n^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

e dal confronto con la [3.1.12] si trova

$$G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = -i\theta(t' - t) \sum_n e^{-iE_n(t'-t)} \phi_n^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}'). \quad (3.2.12)$$

3.3 Propagatore di Klein-Gordon

In questa sezione calcoleremo la funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\psi = 0. \quad (3.3.1)$$

Il nostro interesse in questa particolare equazione sarà motivato a breve. Vogliamo quindi risolvere

$$(\square - m^2)G_0(x' - x) = \delta^4(x' - x) \quad (3.3.2)$$

dove l'operatore di d'Alembert agisce rispetto alle coordinate x , definendo

$$G_0(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot (x' - x)} \tilde{G}_0(p). \quad (3.3.3)$$

L'equazione diventa così

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p^2 - m^2) e^{ip \cdot (x' - x)} \tilde{G}_0(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x' - x)} \quad (3.3.4)$$

per cui, al di fuori delle singolarità,

$$\tilde{G}_0(p) = -\frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - E^2}. \quad (3.3.5)$$

Per i nostri scopi non è necessario procedere al calcolo esplicito del propagatore nello spazio delle configurazioni, che richiede una prescrizione su come trattare le singolarità in $p^0 = \pm E$, ma dato l'interesse dell'argomento svolgiamo il calcolo nell'appendice B.

Nel seguito considereremo l'equazione di Klein-Gordon come una sorta di sostituto relativistico dell'equazione di Schrödinger libera.¹ Per dare una motivazione precisa di ciò sarebbe necessario addentrarsi nell'ambito della teoria quantistica dei campi, in quanto tutte le componenti di un campo quantistico libero obbediscono all'equazione di Klein-Gordon [6, p. 200]. Ciò, tuttavia, ci porterebbe molto lontano dagli scopi di questa tesi, soprattutto in virtù del fatto che il teorema di Weinberg prende volutamente le distanze dalle teorie di campo, basandosi unicamente sulla teoria della matrice S relativistica. La ragione principale per cui l'equazione di Klein-Gordon appare quella giusta per i nostri scopi è che essa è l'espressione della relazione energia-momento relativistica $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ nella stessa misura in cui quella di Schrödinger è l'espressione di quella non relativistica $E = \mathbf{p}^2/2m$. Ciò è evidenziato dalla posizione dei poli delle rispettive funzioni di Green, che sono appunto singolari laddove le corrispondenti relazioni energia-momento sono verificate (nel gergo delle teorie quantistiche relativistiche, sulla *mass-shell*). Esistono altre equazioni con questa stessa caratteristica? Come è noto, tentare di scrivere un'equazione del primo ordine conduce naturalmente all'equazione di Dirac, che però limita le proprie soluzioni a oggetti a più componenti con ben precise

¹Ciò non è esatto, dal momento che le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon non possono essere interpretate come funzioni d'onda. Infatti in tal caso darebbero luogo a densità di probabilità negative, e questo problema si risolve solo introducendo il concetto di creazione e distruzione di particelle, di cui non ci occuperemo.

proprietà di trasformazione, chiamati spinori (le cui componenti, peraltro, soddisfano anche l'equazione di Klein-Gordon). D'altra parte quella di introdurre derivate di ordine superiore non sembra un'operazione fruttuosa, in primo luogo perché ciò risulterebbe in relazioni energia-momento più generali (ad esempio, un'equazione del tipo $(\square^2 - m^4)\psi = 0$ prevederebbe la relazione $p^2 = \pm m^2$), e in secondo luogo perché è stato dimostrato che equazioni del moto di ordine superiore al secondo generano problemi di instabilità e non-causalità nel sistema che descrivono (si vedano, ad esempio, [9] e [5]).

Capitolo 4

Teorema di Weinberg

4.1 Causalità in teoria della matrice S

È possibile costruire una teoria assiomatica delle interazioni tra particelle che si basa unicamente sulle proprietà analitiche della matrice S . Non ci preoccuperemo di sviluppare una simile teoria, ma è importante discutere di come il concetto di causalità viene introdotto in tale contesto, e in effetti il capitolo precedente ha la funzione di giustificare il postulato che viene introdotto a tal proposito.

Una teoria della matrice S deve rispettare, tra le altre cose, i seguenti tre principi: l'*unitarietà* della matrice S , il *principio di decomposizione in cluster* e la *causalità*. Il primo risponde alla necessità che si conservi la probabilità totale dei possibili esiti di un esperimento di scattering, e segue naturalmente dall'ortonormalità degli stati "in" e "out"; il secondo assicura che esperimenti eseguiti a grande distanza l'uno dall'altro non si influenzino a vicenda, e si realizza, come vedremo meglio successivamente, nella fattorizzazione della matrice S nei contributi relativi a ciascuno di tali esperimenti; il terzo è un principio fisico generale, e risulta estremamente difficile da formalizzare in questo contesto. Per questo motivo esso è sostituito dal seguente postulato:

- Gli elementi della matrice S sono i valori al bordo sull'asse reale di funzioni analitiche.

In questa sezione ci occuperemo di giustificare la precedente affermazione sulla base di quanto detto nel capitolo precedente.

Non esiste ad oggi un modo rigoroso per dimostrare che il postulato di analiticità discende da condizioni di causalità analoghe a quelle che abbiamo imposto sul propagatore [7, §1.1], poiché condizioni siffatte richiedono sempre una localizzazione temporale precisa dei pacchetti d'onda incidenti, ma ciò è in contraddizione con la necessità di conoscere precisamente l'energia, che è la quantità conservata per eccellenza nei processi di scattering. Si deve pertanto procedere per analogia con la teoria dei campi, lasciandosi ispirare da esempi e da ragionamenti come quello sul propagatore. Intendiamo quindi suggerire il ruolo di quest'ultimo nella matrice S riprendendo il limite non relativistico e l'equazione [3.1.13] la quale, nell'ipotesi che la serie perturbativa converga, può essere scritta nella forma compatta

$$G(x'; x) = G_0(x'; x) + \int d^4x_1 G_0(x'; x_1)V(x_1)G(x_1; x). \quad (4.1.1)$$

Vediamo ora come costruire la matrice S a partire dal propagatore. Sia $\psi(x', t')$ l'onda diffusa a seguito dell'interazione con un potenziale $V(x', t')$. Per $t \rightarrow -\infty$ essa deve essere un'onda libera $\phi(x', t')$, per cui

$$\begin{aligned} \psi(x', t') &= \lim_{t \rightarrow -\infty} i \int d^3x G(x'; x)\phi(x) = \\ &= \phi(x', t') + \int d^4x_1 G_0(x'; x_1)V(x_1)\psi(x_1). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Si noti l'analogia con la definizione di stato "in" data nel secondo capitolo. Chiamiamo quindi $\psi_i^+(x', t')$ la funzione d'onda che corrisponde a un'onda piana di momento \mathbf{p}_i nel limite $t' \rightarrow -\infty$. Anche nel limite $t' \rightarrow +\infty$ essa deve tendere a un'altra onda piana, e possiamo calcolare l'ampiezza di probabilità che tale onda piana sia $\phi_f(x', t')$ di momento \mathbf{p}_f come

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t' \rightarrow +\infty} \int d^3x' \phi_f^*(x')\psi_i^+(x') = \\ &= \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) + \lim_{t' \rightarrow +\infty} \int d^3x' d^4x_1 \phi_f^*(x')G_0(x'; x_1)V(x_1)\psi_i^+(x_1). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

È possibile ottenere una serie perturbativa introducendo ricorsivamente la [4.1.2] nell'equazione precedente, e l'interpretazione dei vari termini è esattamente quella che abbiamo dato per il propagatore. È chiaro che la

funzione del propagatore libero come ampiezza di transizione di un'onda tra un'interazione e l'altra è incorporato nella matrice S , i cui elementi devono quindi esibire dei poli come quelli trovati nel terzo capitolo. Ciò continua ad essere vero nel caso relativistico, che abbiamo evitato di trattare esplicitamente in quanto non è possibile definire le funzioni d'onda come funzioni degli autovalori di un operatore posizione, essendo quest'ultimo un concetto che risulta non ben definito in tale regime.

Vale la pena di ripercorrere i passaggi con cui intendiamo motivare una delle assunzioni fondamentali del teorema di Weinberg, che esplicheremo a breve. L'ipotesi di causalità in teoria della matrice S è sostituita dall'ipotesi che essa sia il valore al bordo di una funzione analitica, per cui le sue eventuali singolarità devono essere dei poli. Abbiamo riconosciuto in tali poli l'impronta del propagatore libero, associato alle particelle che si propagano tra un'interazione e l'altra, e sulla base di ragionevoli considerazioni sull'equazione da cui esso deve provenire abbiamo stabilito che tali poli devono avere la forma

$$-\frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{(p^0 - E)(p^0 + E)} \quad (4.1.4)$$

ovvero in corrispondenza della mass-shell. Va precisato che i poli emergono solo laddove non viene effettuata un'integrazione sul momento trasportato dalle particelle "intermedie", ovvero che appunto si propagano liberamente connettendo due regioni in cui avvengono le interazioni. Vedremo meglio questo punto più avanti, mentre qui notiamo che laddove tale integrazione è presente il momento della particella in questione, che viene chiamata *virtuale*, non è in generale sulla mass-shell, e il polo dà origine a un residuo.

4.2 Carica elettrica e massa gravitazionale

In questa sezione definiremo la carica e la massa gravitazionale nell'ambito di una generica teoria della matrice S , facendo uso delle argomentazioni della sezione precedente. Abbiamo capito che negli elementi di matrice compaiono integrali di funzioni analitiche che presentano dei poli laddove vi sono delle particelle virtuali che scambiano momento tra due insiemi di particelle entranti e uscenti. Guardando la [4.1.3] ci si rende conto che i residui di tali poli vanno a fattore, per cui l'elemento di matrice S

relativo a un processo in cui è presente una particella virtuale di momento p ed energia $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ deve contenere un fattore $1/2E(p)$, come si vede dalla [4.1.4]. Inoltre, tenendo a mente la possibilità di uno sviluppo perturbativo, ogni volta che si verifica un'interazione il corrispondente contributo all'elemento di matrice S presenta un fattore proporzionale all'intensità dell'interazione stessa, chiamato *costante di accoppiamento*.

Consideriamo l'emissione di una particella priva di massa (se $\sigma = \pm 1$ sarà un fotone, se $\sigma = \pm 2$ un gravitone) di momento q e a bassissima energia, anche detta *soffice*, da parte di una particella virtuale di massa m (eventualmente nulla), momento p ed energia $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Scegliamo di considerare fotoni e gravitoni soffici in quanto intendiamo definire la carica elettrica e la massa gravitazionale come le costanti di accoppiamento in tale regime, mentre ignoriamo i momenti di multipolo di ordine superiore che interverrebbero a energie maggiori (come mostrato in [2]). Costruiamo il corrispondente elemento di matrice S considerando la [2.3.2] e notando che l'unico modo per costruire il tensore $M_{\pm, \mu_1 \dots \mu_\sigma}$ con i numeri quantici delle particelle a disposizione è il seguente:

$$M_{\pm, \mu_1 \dots \mu_\sigma} = p_{\mu_1} \dots p_{\mu_\sigma} \quad (4.2.1)$$

a meno di fattori moltiplicativi, tra cui eventuali delta di Kronecker dipendenti dallo spin delle particelle considerate (sono in ogni caso Lorentz-invarianti), nonché tutti i contributi che dipendono dai numeri quantici delle altre particelle di cui non ci stiamo interessando. L'elemento di matrice S sarà dunque

$$S_{\pm\sigma}(q, p) \propto \frac{1}{\sqrt{2|q|}} p_{\mu_1} \dots p_{\mu_\sigma} \epsilon_{\pm}^{\mu_1*}(\hat{q}) \dots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma*}(\hat{q}). \quad (4.2.2)$$

Quella scritta sopra, moltiplicata per il residuo $1/2E(p)$ e per la costante di accoppiamento relativa all'emissione della particella soffice, è la forma del contributo alla matrice S dovuto al solo processo considerato, che prende il nome di *ampiezza di vertice*.

È importante sottolineare il modo in cui le ampiezze di vertice compaiono nella matrice S . Ribadiamo che, nel caso considerato, in esse compaiono: la costante di accoppiamento legata all'emissione, il residuo dovuto al polo rappresentato dalla particella virtuale che emette la particella soffice e una serie di fattori legati ai numeri quantici di queste ultime. Ripetiamo anche che in generale la matrice S può essere scritta come la somma di infiniti termini con un numero via via crescente di interazioni, e ogni interazione

del tipo che stiamo considerando porterà a fattore un'ampiezza di vertice proporzionale a

$$\frac{C p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_\sigma} \epsilon_{\pm}^{\mu_1*}(\hat{q}) \cdots \epsilon_{\pm}^{\mu_\sigma*}(\hat{q})}{2E(\mathbf{p}) \sqrt{|\mathbf{q}|}} \quad (4.2.3)$$

dove C contiene, a meno di fattori numerici, la costante di accoppiamento.

Definiamo quindi la carica elettrica e di una particella che emette un fotone soffice tramite l'affermazione che l'ampiezza di vertice corrispondente è, a meno di fattori numerici ed eventuali delta di Kronecker,

$$\frac{e p_{\mu} \epsilon_{\pm}^{\mu*}(\hat{q})}{2E(\mathbf{p}) \sqrt{|\mathbf{q}|}}. \quad (4.2.4)$$

Allo stesso modo, la massa gravitazionale di una particella che emette un gravitone soffice è legata all'ampiezza di vertice

$$\frac{f (p_{\mu} \epsilon_{\pm}^{\mu*}(\hat{q}))^2}{2E(\mathbf{p}) \sqrt{|\mathbf{q}|}}. \quad (4.2.5)$$

Ci riferiremo alla quantità f come massa gravitazionale, mentre in realtà è più propriamente il rapporto di proporzionalità tra massa inerziale e massa gravitazionale, ed è proprio questa la quantità che definisce l'intensità dell'interazione gravitazionale. Un esempio che aiuta a chiarire la motivazione delle presenti definizioni è proposto nell'appendice C.

4.3 Conservazione di e e universalità di f

Siamo finalmente nella posizione di dimostrare l'asserto del teorema di Weinberg, ma prima occorre fare un'osservazione. La [4.1.3] suggerisce che ogni termine della serie che fornisce la matrice S possa essere calcolato come un integrale nelle coordinate spaziotemporali, ma è possibile mostrare ([6, p.280]) che essi possono essere calcolati come integrali nello spazio dei momenti. Ciò non è difficile da credere: se, come abbiamo visto, la matrice S è data dalla somma su tutti i possibili modi attraverso cui uno stato iniziale può transire a uno stato finale, ci aspettiamo che tale somma includa integrali sui momenti di tutte le particelle intermedie. Inoltre ogni termine, associato a uno specifico processo, deve rispettare la conservazione del momento totale e di quello in corrispondenza di ogni interazione, e

ciò viene naturalmente realizzato grazie alla presenza di opportune delta di Dirac all'interno degli integrali suddetti.

Sia dunque $S_{\beta\alpha}$ la matrice S per una certa reazione $\alpha \rightarrow \beta$, e $S_{\beta\alpha}^{\pm\sigma}(q)$ la matrice S per la stessa reazione con in aggiunta l'emissione di una particella priva di massa di elicità $\pm\sigma$ e momento q . Se la particella che emette, indicata con l'etichetta n , è una di quelle uscenti, il suo momento p_n è fissato. Pertanto la delta di conservazione del momento nell'emissione produce il termine singolare [4.1.4], il che fornisce un fattore

$$\frac{1}{(p_n + q)^2 + m_n^2} = \frac{1}{2p_n \cdot q}. \quad (4.3.1)$$

Analogamente, se la particella che emette è una di quelle entranti, si ha il fattore (scalare)

$$\frac{1}{(p_n - q)^2 + m_n^2} = -\frac{1}{2p_n \cdot q}. \quad (4.3.2)$$

La matrice S presenta dunque dei poli nel *limite soffice* $|q| \rightarrow 0$, e di conseguenza i termini dominanti sono quelli corrispondenti all'emissione di fotoni e gravitoni soffici da parte di particelle entranti o uscenti.

Manca solo un ultimo ingrediente per determinare la forma della matrice S nel limite soffice, che infine sottoporremo alle condizioni di Lorentz-invarianza trovate nella sezione 2.3: il principio di decomposizione in cluster. Esso afferma, come abbiamo accennato, che la matrice S relativa a una reazione formata da due processi molto lontani fra di loro è il prodotto delle due matrici S relative a tali processi. Si dimostra ([8, p. 392]) che una conseguenza di ciò è la decomposizione di $S_{\beta\alpha}^{\pm\sigma}(q)$ in due fattori: $S_{\beta\alpha}$ e quello dovuto al processo di emissione. Senza ricorrere alla teoria dei campi, ciò si può comprendere alla luce del principio di indeterminazione posizione-momento: più è piccolo il momento trasferito q , maggiore è la precisione con cui è noto il momento della particella virtuale (tende a p_n), e pertanto la distanza percorsa da quest'ultima prima dell'emissione è fortemente indeterminata e può anche essere molto grande.

Le ampiezze di vertice relative all'emissione di un fotone o di un gravitone da parte della particella n sono, rispettivamente,

$$\frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2|q|}} \frac{e p_\mu \epsilon_\pm^{\mu*}(\hat{q})}{p_n \cdot q}, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2|q|}} \frac{f(p_\mu \epsilon_\pm^{\mu*}(\hat{q}))^2}{p_n \cdot q}, \quad (4.3.4)$$

dove \mathcal{N} e \mathcal{C} sono costanti moltiplicative (nel secondo caso con le dimensioni della costante di Newton). La matrice S relativa al processo di emissione si ottiene sommando su tutte le possibili particelle entranti e uscenti (contando un segno meno per queste ultime), per cui nel limite sofficie si ha

$$S_{\beta\alpha}^{\pm 1}(q) \rightarrow \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2|q|}} \left[\sum_n \eta_n e_n \frac{p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{q})}{p_n \cdot q} \right] S_{\beta\alpha}, \quad (4.3.5)$$

$$S_{\beta\alpha}^{\pm 2}(q) \rightarrow \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2|q|}} \left[\sum_n \eta_n f_n \frac{(p_n \cdot \epsilon_{\pm}^*(\hat{q}))^2}{p_n \cdot q} \right] S_{\beta\alpha}, \quad (4.3.6)$$

dove gli η_n sono segni che dipendono dal fatto che la particella sia entrante o uscente. Dal confronto con la [2.3.2] riconosciamo le grandezze tensoriali

$$M_{\mu}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{N} \sum_n \eta_n e_n \frac{p_{n,\mu}}{p_n \cdot q} S_{\beta\alpha}, \quad (4.3.7)$$

$$M_{\mu\nu}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{C} \sum_n \eta_n f_n \frac{p_{n,\mu} p_{n,\nu}}{p_n \cdot q} S_{\beta\alpha}. \quad (4.3.8)$$

Possiamo finalmente imporre le condizioni di Lorentz-invarianza. La [2.3.9] richiede che

$$0 = q^{\mu} M_{\mu}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{N} \sum_n \eta_n e_n S_{\beta\alpha} \quad (4.3.9)$$

che vale se e solo se

$$\sum_n \eta_n e_n = 0 \quad (4.3.10)$$

ovvero se la carica elettrica totale viene conservata nella transizione $\alpha \rightarrow \beta$. La [2.3.11] richiede che

$$0 = q^{\mu} M_{\mu\nu}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{C} \sum_n \eta_n f_n p_{n,\nu} S_{\beta\alpha}, \quad (4.3.11)$$

ma i p_n sono momenti arbitrari soggetti alla condizione di conservazione

$$\sum_n \eta_n p_{n,\mu} = 0, \quad (4.3.12)$$

per cui la Lorentz-invarianza della matrice S può essere verificata in generale se e solo se tutte le particelle coinvolte nella reazione $\alpha \rightarrow \beta$ hanno la stessa massa gravitazionale f .

Ricapitolando, una volta trovata la forma della matrice S per una reazione in cui viene emesso un fotone o un gravitone sofficie, abbiamo imposto le condizioni di Lorentz-invarianza trovate nel secondo capitolo. Abbiamo in questo modo stabilito che, se esistono particelle di elicità ± 1 e ± 2 in grado di interagire con la materia a bassissime energie, le rispettive costanti di accoppiamento devono soddisfare determinate condizioni, nelle quali abbiamo riconosciuto la conservazione della carica elettrica e il principio di equivalenza.

Conclusione

Il teorema di Weinberg è uno dei risultati ascrivibili alla tendenza scientifica all'unificazione e alla riduzione, in quanto declassa due importanti capisaldi della fisica moderna dal ruolo di principi a quello di teoremi. Incidentalmente, la dimostrazione svolta ci permette di giungere a un'ulteriore conclusione: supponendo che esistano particelle prive di massa di elicità ± 3 , se g è la costante di accoppiamento dell'interazione da esse mediata nel limite sofficie, si ha

$$M_{\mu\nu\rho}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{M} \sum_n \eta_n g_n \frac{p_{n,\mu} p_{n,\nu} p_{n,\rho}}{p_n \cdot q} S_{\beta\alpha}$$

nello stesso senso della sezione precedente. In questo caso, tuttavia, la condizione

$$0 = q^\mu M_{\mu\nu\rho}(q, \alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{M} \sum_n \eta_n g_n p_{n,\nu} p_{n,\rho} S_{\beta\alpha}$$

non può essere realizzata per momenti arbitrari per nessun valore dei g_n che non sia zero, e lo stesso vale per elicità superiori. In altre parole, è impossibile che particelle prive di massa e di elicità intera maggiore di due interagiscano a bassa energia con la materia, il che fornisce una spiegazione del perché non siano mai state osservate.

È opportuno tirare le fila del discorso e ripercorrere brevemente il contenuto dei capitoli di questa tesi. Nel primo abbiamo ricavato l'algebra del gruppo di Poincaré, per poi concentrarci sulle trasformazioni proprie ortocrone non omogenee di Lorentz e ricavare le regole di trasformazione sotto tale gruppo degli stati che descrivono singole particelle. Nel secondo abbiamo definito la matrice S e fornito un metodo formale non perturbativo per calcolarne gli elementi, grazie al quale è stato possibile esplicitare il contenuto delle condizioni di Lorentz-invarianza sulla matrice stessa. Nel terzo abbiamo voluto riprendere i concetti di propagatore e causalità,

esplorandoli in regime relativistico e non, al fine di giustificare euristica-mente l'ipotesi della struttura a poli della matrice S e la forma di questi ultimi. Nel quarto abbiamo finalmente dimostrato il teorema di Weinberg, definendo la carica elettrica e la massa gravitazionale come costanti di accoppiamento dell'interazione mediata rispettivamente dai fotoni e dai gravitoni, e derivando una forma esplicita della matrice S relativa all'emissione di un fotone o di un gravitone sofficte sulla base di considerazioni suggerite dalla teoria delle perturbazioni.

È chiaro che molte delle considerazioni fatte non si avvicinano neanche a una trattazione rigorosa del problema, e a tal proposito è necessario fare una precisazione: ad oggi non è ancora stata formulata una teoria analitica della matrice S per particelle prive di massa, in quanto i poli di cui ci siamo serviti risultano in questi casi sempre accompagnati da infiniti punti di diramazione [3]. Dobbiamo quindi riconoscere di aver operato una ulteriore assunzione, e cioè che esista una teoria della matrice S in cui questi problemi possano essere risolti.

Appendici

A. Normalizzazione degli stati

Possiamo definire gli stati di singola particella in modo che

$$\langle \Psi_{k',\sigma'} | \Psi_{k,\sigma} \rangle = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta_{\sigma'\sigma},$$

dove non è necessaria una delta nell'energia in quanto quest'ultima è determinata dalla componente spaziale del momento e dalla massa, e stiamo supponendo che entrambi gli stati descrivano lo stesso tipo di particella, ragion per cui omettiamo il pedice n . Segue che

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{p',\sigma'} | \Psi_{p,\sigma} \rangle &= N(p) \langle U^{-1}(L(p)) \Psi_{p',\sigma'} | \Psi_{k,\sigma} \rangle = \\ &= N(p) N^*(p') \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W(L^{-1}(p), p')) \langle \Psi_{k',\sigma'} | \Psi_{k,\sigma} \rangle = \\ &= N(p) N^*(p') D_{\sigma\sigma'}^*(W(L^{-1}(p), p')) \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \end{aligned}$$

dove $k' \equiv L^{-1}(p)p'$. Nel caso $p' = p$, si ha semplicemente $W(L^{-1}(p), p) = 1$ e pertanto

$$\langle \Psi_{p',\sigma'} | \Psi_{p,\sigma} \rangle = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}).$$

Siccome k e k' sono legati rispettivamente a p e p' dalla stessa trasformazione di Lorentz, deve essere $\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \propto \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, e non ci resta che determinare la costante di proporzionalità.

A tal fine dobbiamo notare che un integrale Lorentz-invariante di una qualsiasi funzione scalare di p , $f(p)$, sui quadrimomenti con $p^2 = -M^2 \leq 0$

e $p^0 > 0$ si può scrivere

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 + M^2) \theta(p^0) f(p) &= \\ &= \int d^3\mathbf{p} dp^0 \delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - M^2) \theta(p^0) f(\mathbf{p}, p^0) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} f(\mathbf{p}, p^0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0} f(\mathbf{p}, p^0), \end{aligned}$$

ovvero l'elemento di volume invariante sulla *mass-shell* è $d^3\mathbf{p}/p^0$. Scrivendo la definizione della delta di Dirac,

$$f(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{p}' \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) f(\mathbf{p}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'^0} (p'^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})) f(\mathbf{p}'),$$

ci accorgiamo che la delta invariante è $p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, per cui

$$p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

e di conseguenza

$$\langle \Psi_{p',\sigma'} | \Psi_{p,\sigma} \rangle = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \frac{p^0}{k^0} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}).$$

Scegliamo pertanto

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$$

in modo da avere gli stati di momento arbitrario p normalizzati nella maniera convenzionale.

B. Propagatore di Feynman

Riprendiamo la trasformata di Fourier della funzione di Green per l'equazione di Klein-Gordon:

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{1}{(p^0)^2 - E^2} = \frac{1}{(p^0 - E)(p^0 + E)}.$$

A seconda di come decidiamo di trattare i due poli, aggiungendo o sottraendo a ciascuna delle E una piccola quantità immaginaria $i\epsilon$, avremo

quattro propagatori diversi, ma solo uno rispetta una condizione di causalità analoga alla [3.2.3]. Daremo quindi la prescrizione corretta per poi motivarne la scelta a conti fatti: essa prevede di scegliere il segno meno in entrambi i casi, per cui

$$\begin{aligned}
 G_0(x' - x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x' - x)} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0(t' - t)}}{(p^0 - E + i\varepsilon)(p^0 + E - i\varepsilon)} = \quad (4.3.13) \\
 &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x' - x)} \left[-i\theta(t' - t) \frac{e^{-iE(t' - t)}}{2E} - i\theta(t - t') \frac{e^{iE(t' - t)}}{2E} \right] = \\
 &= -\frac{i\theta(t' - t)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E} e^{ip \cdot (x' - x)} e^{-iE(t' - t)} - \frac{i\theta(t - t')}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E} e^{ip \cdot (x' - x)} e^{iE(t' - t)}.
 \end{aligned}$$

Tale oggetto prende il nome di *propagatore di Feynman*, e una rapida ispezione consente di intuire perché esibisce il comportamento causale corretto: con la [3.2.12] in mente, notiamo che il primo termine propaga le onde con energia positiva avanti nel tempo, mentre il secondo propaga quelle con energia negativa indietro nel tempo, coerentemente con l'interpretazione di Feynman-Stückelberg. Qualsiasi altra scelta di segni per le quantità $i\varepsilon$ avrebbe evidentemente portato a risultati inaccettabili sotto questo punto di vista.

C. Potenziale di Coulomb

Si può recuperare il potenziale di Coulomb, e in generale un potenziale con andamento $1/r$, dall'ampiezza di transizione di due particelle che interagiscono scambiandosi un fotone. Per prima cosa dobbiamo dimostrare una forma alternativa della matrice S : data la definizione di stati "in", è facile vedere che essi soddisfano l'equazione

$$|\psi_\alpha^+\rangle = |\phi_\alpha\rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\varepsilon} V |\psi_\alpha^+\rangle,$$

nota come *equazione di Lippmann-Schwinger*. L'aggiunta della piccola quantità immaginaria $i\varepsilon$ serve a dare senso all'inverso dell'operatore $(E_\alpha - H_0)$, e il segno positivo, come si può vedere facilmente [6, p. 112], assicura la condizione asintotica che definisce lo stato "in". Si può anche espandere in una base di stati di particella libera:

$$|\psi_\alpha^+\rangle = |\phi_\alpha\rangle + \int d\beta \frac{\langle\phi_\beta|V|\psi_\alpha^+\rangle}{E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon} |\phi_\beta\rangle.$$

Considerata una generica sovrapposizione regolare di stati "in",

$$\begin{aligned} |\psi_g^+(t)\rangle &= \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) |\psi_\alpha^+\rangle = \\ &= |\phi_g(t)\rangle + \int d\alpha d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)}{E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon} \langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle |\phi_\beta\rangle, \end{aligned}$$

dove

$$|\phi_g(t)\rangle = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) |\phi_\alpha\rangle,$$

possiamo svolgere l'integrale in $d\alpha$ e considerare il limite per $t \rightarrow +\infty$, che si può valutare mediante il metodo dei residui:

$$\int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle}{E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon} \rightarrow -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) \langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle.$$

In altre parole, nel limite considerato l'operatore $(E_\alpha - H_0 + i\varepsilon)^{-1}$ agisce sui bra $\langle \phi_\beta |$ come la funzione $-2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)$. Data l'unitarietà dell'operatore di evoluzione temporale, la [2.1.5] si può riscrivere come

$$S_{\beta\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle.$$

Ciò ci permette di introdurre l'approssimazione di Born al primo ordine, che prevede

$$\langle \phi_\beta | V | \psi_\alpha^+ \rangle \simeq \langle \phi_\beta | V | \phi_\alpha \rangle$$

al primo ordine nell'intensità dell'interazione, che quindi va considerata debole. A meno di fattori numerici e di una delta di conservazione dell'energia, dunque, la parte della matrice S relativa all'interazione è in prima approssimazione l'elemento di matrice del potenziale tra due autostati dell'Hamiltoniano libero. Nel limite non relativistico quest'ultimo non è altro che la trasformata di Fourier del potenziale:

$$\langle \phi_\beta | V | \phi_\alpha \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \langle \phi_\beta | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | V | \phi_\alpha \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta) \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}).$$

Consideriamo il caso in cui due particelle, di momenti iniziali \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , interagiscono scambiandosi un fotone soffice. Questa è l'unica reazione possibile all'interno dell'approssimazione di Born al primo ordine, in quanto altri processi comporterebbero un numero maggiore di interazioni col potenziale. Nell'elemento di matrice S corrispondente compariranno

quattro fattori dipendenti dal momento scambiato q : due ampiezze di vertice della forma

$$\frac{e}{2E(\mathbf{p}_{1,2})\sqrt{|q|}},$$

un propagatore $1/q^2$ relativo al fotone scambiato e una delta invariante di conservazione del momento in uno dei due vertici (la conservazione nel secondo vertice è già fissata da una delta complessiva che lega i momenti iniziali e finali delle particelle), il tutto integrato in d^4q . I momenti finali delle due particelle, come abbiamo detto, sono fissati, essendo legati al momento iniziale e a quello scambiato. Tuttavia, nel limite di basse energie si può trascurare la dipendenza da q nell'espressione delle $E(\mathbf{p}_{1,2})$, che pertanto escono dall'integrale. Rimane pertanto solo la funzione $1/q^3$ integrata in d^4q insieme alla delta invariante $q\delta^4(q + p_f - p_i)$, dove stiamo considerando indifferentemente il momento iniziale e finale di una delle due particelle interagenti. Concludiamo che l'elemento di matrice S è semplicemente proporzionale a

$$\frac{e^2}{q^2}, \quad q = p_f - p_i.$$

Se tale espressione deve essere la trasformata di Fourier del potenziale $V(x)$ rispetto al momento scambiato, possiamo ricavare il potenziale come

$$\begin{aligned} V(x) &\propto \int d^3q e^{-iq \cdot x} \frac{e^2}{q^2} = 2\pi e^2 \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{-iqr \cos\theta} = \\ &= \frac{2\pi i e^2}{r} \int_0^\infty dq \frac{e^{-iqr} - e^{iqr}}{q} = \frac{2\pi i e^2}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{e^{-iqr}}{q} = \frac{(2\pi e)^2}{r} \end{aligned}$$

che è evidentemente quello di Coulomb, a meno di fattori numerici. Notiamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prescrizione di Feynman, ma avremmo potuto equivalentemente usare quella opposta. Viceversa, il risultato sarebbe stato diverso se avessimo spostato entrambi i poli di una quantità positiva o negativa.

Bibliografia

- [1] Eugene Paul Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Springer, 1931.
- [2] F. E. Low. «Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions». In: *Phys. Rev.* 110 (4 mag. 1958), pp. 974–977.
- [3] Steven Weinberg. «Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass». In: *Physical Review* 135.4B (1964), B1049.
- [4] James D Bjorken, Sidney D Drell e JE Mansfield. *Relativistic quantum mechanics*. Vol. 18. 3. 1965, p. 81.
- [5] Sidney Coleman. *ACAUSALITY*. Rapp. tecn. Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1970.
- [6] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields—Foundations (Volume 1)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [7] Richard John Eden et al. *The analytic S-matrix*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] Josef M Jauch e Fritz Rohrlich. *The theory of photons and electrons: the relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Noel Swanson. «On the Ostrogradski Instability; or, Why Physics Really Uses Second Derivatives». In: *The British Journal for the Philosophy of Science* (2020).