

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

# **La Generazione delle Onde Gravitazionali**

**Relatori:**

Prof. Salvatore Capozziello  
Dr. Francesco Bajardi

**Candidato:**

Simone Vilardi  
Matricola N85001379

A.A. 2020/2021

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ii</b>
<b>1 La relatività generale e il formalismo onde gravitazionali</b>	<b>1</b>
<b>2 Il problema della generazione delle onde gravitazionali</b>	<b>5</b>
2.1 La natura quadrupolare delle onde gravitazionali	5
2.2 La potenza irradiata dalle onde gravitazionali	7
2.3 La generazione di onde gravitazionali tramite le sorgenti astrofisiche	8
<b>3 Sorgenti deboli di onde gravitazionali</b>	<b>11</b>
3.1 La generazione di onde gravitazionali tramite sistemi binari	11
3.2 Le sorgenti in approssimazione Newtoniana	14
3.3 Il campo ed il potenziale di radiazione	17
<b>4 Sorgenti forti di onde gravitazionali</b>	<b>23</b>
4.1 La fusione di corpi celesti	23
4.2 Il collasso del nucleo di stelle pesanti	26
<b>5 Conferme sperimentali</b>	<b>27</b>
5.1 La conferma della teoria di Einstein	27
5.2 Un possibile scenario per la produzione di GW150914	28
<b>Conclusioni e Prospettive</b>	<b>32</b>
<b>Indice delle figure</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>34</b>

# Introduzione

Con la teoria della Relatività Generale, Einstein riscrive le regole dello spazio e del tempo, fondendoli in un'unica varietà quadridimensionale. La geometria di questo spazio-tempo viene trattata attraverso variabili dinamiche e, la forza, tra cui anche la gravità, diventa l'effetto della curvatura dello spazio-tempo stesso. Secondo la teoria di Einstein, in una varietà del genere, oggetti in accelerazione possono produrre variazioni nella geometria dello spazio-tempo. Questi cambiamenti della geometria della varietà si propagano a velocità della luce in maniera ondosa e rappresentano le onde gravitazionali. Einstein avanzò questa ipotesi: due stelle, orbitando insieme e risentendo della loro stessa accelerazione, avrebbero generato delle onde gravitazionali. In questo elaborato si cercherà di presentare quest'ultimo punto, ovvero quali fenomeni possano essere sorgenti di onde gravitazionali. La storia delle onde gravitazionali comincia nel 1865, quando James Clerk Maxwell scopre che i fenomeni elettromagnetici soddisfano delle equazioni d'onda e trova che la velocità di queste onde nel vuoto è uguale alla velocità della luce. Maxwell rimase colpito da questo risultato ed ipotizzò che la luce fosse una perturbazione elettromagnetica che si propaga nel campo in accordo con le leggi elettromagnetiche [1].

(*"Light is electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws"*) [2]. Nel 1916, un anno dopo la formulazione delle equazioni di campo della relatività generale, Einstein predice l'esistenza delle onde gravitazionali, spiegando come esse siano la propagazione delle oscillazioni del campo gravitazionale e possano essere il risultato di due corpi celesti in orbita. Egli trova che le equazioni di campo debole linearizzate hanno delle soluzioni d'onda, ovvero delle onde trasversali che viaggiano a velocità della luce, generate dalla variazione nel tempo del momento di quadrupolo di massa. Inoltre, Einstein, capisce anche che le ampiezze di queste onde sarebbero state molto deboli e quindi difficili da rilevare. [3] Nel 1959, grazie al lavoro di Bondi, Pirani e Robinson [4], fu provato che la soluzione d'onda non esiste solo nell'approssimazione di campo debole e che le onde gravitazionali trasportano momento angolare ed energia lontano dalla sorgente.

L'obiettivo di questo elaborato è dapprima quello di fare una breve introduzione alla relatività generale ed in particolare alla teoria delle onde gravitazionali. Successivamente si presenteranno gli strumenti iniziali per lo studio delle onde gravitazionali e si introdurranno le prime sorgenti. Nel capitolo seguente sarà discussa approfonditamente l'approssimazione di campo debole, analizzando i sistemi binari e

poi, attraverso l'approssimazione Newtoniana e la linearizzazione delle equazioni di Einstein, studiando il campo ed il potenziale di radiazione. In seguito, saranno presentate le più recenti sorgenti forti di onde, ovvero gli eventi di fusione e collasso di corpi celesti. Nell'ultimo capitolo presenteremo il risultato sperimentale cardine della teoria sulle onde gravitazionali con la prima rilevazione della storia, avvenuta nel 1915, grazie alle due postazioni Ligo a Livingston ed Hanford, che ha permesso di confermare la teoria di Einstein ben cento anni dopo la sua formulazione.

# Capitolo 1

## La relatività generale e il formalismo onde gravitazionali

Per introdurre le onde gravitazionali partiamo dall'ipotesi di Einstein di campo debole e successivamente presentiamo la linearizzazione delle equazioni di campo. L'approssimazione di campo debole consiste nel sostituire il limite newtoniano con un'ipotesi meno restrittiva: in pratica, il campo è ancora debole ma può variare nel tempo e non c'è nessuna restrizione sul moto delle particelle di prova. Questa approssimazione consente di separare la metrica  $g_{\mu\nu}$  in due parti: la metrica piatta di Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  più un termine perturbativo  $h_{\mu\nu}$ , assunto essere piccolo. [5] Questa versione linearizzata della Relatività Generale descrive la propagazione di un tensore simmetrico  $h_{\mu\nu}$  su uno spazio-tempo piatto. La metrica, quindi, si scrive

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.1)$$

Quando  $h$  è piccolo si possono trascurare, nella perturbazione di  $h_{\mu\nu}$ , i termini di ordine più elevato del primo; in particolare, è possibile innalzare o abbassare gli indici con  $\eta_{\mu\nu}$  e  $\eta^{\mu\nu}$  quando le correzioni sono di ordine più elevato nella perturbazione, cioè

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}. \quad (1.2)$$

Lo scopo è quello di determinare le equazioni del moto che vengono soddisfatte dalle perturbazioni  $h_{\mu\nu}$  a partire dalle equazioni di Einstein al primo ordine. Inserendo la metrica (1.1) nel tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.3)$$

si ottiene che

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu}h), \quad (1.4)$$

dove  $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu$  è la traccia della perturbazione e  $\frac{1}{2}\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz}$  è il d'alembertiano di uno spazio-tempo piatto. [6] Si tenga presente la costante  $c$  (velocità della luce) nella definizione.

Il tensore energia-impulso è calcolato all'ordine zero in  $h_{\mu\nu}$ : l'energia ed il momento devono essere piccoli in accordo con l'approssimazione usata, e l'ordine più basso, non nullo, in  $T_{\mu\nu}$ , è dello stesso ordine di grandezza della perturbazione. Pertanto, la legge di conservazione diventa  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , cioè con le ordinarie derivate parziali dello spazio-tempo piatto.

Le onde gravitazionali devono considerarsi deboli increspature dello spazio-tempo, prodotte dai movimenti della materia. Esse si propagano alla velocità della luce. Le equazioni di Einstein linearizzate ammettono soluzioni d'onda analoghe all'elettromagnetismo. Queste onde gravitazionali sono trasverse alla direzione di propagazione ed esibiscono due stati di polarizzazione indipendenti.

La nuova metrica (1.1) non fissa completamente il riferimento spazio-temporale. Per semplificare le equazioni di Einstein, possono essere utilizzate due possibili *gauge*. Utilizzando la *gauge* di Lorentz  $\partial_\mu h_\lambda^\mu$ , le equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad \text{con } \chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}, \quad (1.5)$$

vengono linearizzate e possono essere scritte come

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \square h = \frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

La perturbazione può essere definita come

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h. \quad (1.7)$$

È possibile scegliere un riferimento nel quale la condizione di *gauge* armonica  $\partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu = 0$ , è verificata. In tal caso, le equazioni di Einstein (1.5) diventano

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Nel vuoto, le (1.8) diventano

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

Queste equazioni sono simili a quelle del campo elettromagnetico e, per risolverle, è possibile usare gli stessi metodi. A dire il vero, guardando le equazioni di Einstein nel vuoto (1.9), notando che esse sono nella forma di un'equazione d'onda per  $h_{\mu\nu}$ , il d'alembertiano si riduce alla forma  $\square = \frac{1}{2}\partial_{tt} - \nabla^2$ . Pertanto, in assenza di materia, si cercano soluzioni di onda piana del tipo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (1.10)$$

dove  $C_{\mu\nu}$  è un tensore simmetrico di rango 2 e  $k$  è il vettore d'onda. L'onda piana della (1.10) è soluzione delle equazioni linearizzate nel vuoto (1.9), se il vettore d'onda  $k$  è di tipo nullo, cioè se soddisfa la condizione  $k_\sigma k^\sigma = 0$ ; questa proprietà mostra che le onde gravitazionali si propagano alla velocità della luce.

Le quattro condizioni della *gauge* armonica  $k_\mu C^{\mu\nu} = 0$  portano a sei componenti indipendenti per il tensore simmetrico  $C_{\mu\nu}$ . Poiché esistono alcuni gradi di libertà non utilizzati, è possibile fare un'altra scelta di *gauge* sul tensore  $C_{\mu\nu}$ :

$$C^\mu{}_\mu = 0 \quad \text{Traccia nulla;} \quad (1.11)$$

$$C^{0\mu} = 0 \quad \text{Transverso.} \quad (1.12)$$

In questo modo si determina la cosiddetta *gauge* a traccia nulla-trasversa. Queste cinque relazioni danno quattro nuovi vincoli su  $C_{\mu\nu}$ ; in aggiunta alla condizione di *gauge* armonica; pertanto, restano solo due componenti indipendenti in  $C_{\mu\nu}$ . Poiché l'onda ha traccia nulla, si può verificare, dalla (1.7), che  $\bar{h}^{TT}{}_{\mu\nu} = h^{TT}{}_{\mu\nu}$ .

Pertanto, la forma generica del tensore simmetrico  $C_{\mu\nu}$  è

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{11} & -C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Definiamo  $C_{11} = h_+$  e  $C_{12} = h_x$ ; le onde gravitazionali hanno così due stati di polarizzazione, "+" e "x", che modificano lo spazio-tempo in modi diversi.

Dopo aver trovato una soluzione per le equazioni di Einstein nel vuoto, risolviamo la (1.8) con un termine di sorgente non nullo. La soluzione è calcolata utilizzando la funzione di Green con ritardo

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G_N}{c^4} \int_{\vec{y} \in \text{sorgente}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3\vec{y}, \quad (1.14)$$

dove  $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)}$  (distanza euclidea) e  $t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$  (tempo di ritardo).

Si consideri una sorgente isolata con densità  $\rho$  e dimensione caratteristica  $\delta R$ , posizionata a distanza  $R$  dal punto di osservazione  $\vec{x}$ . Assumendo  $\delta R \ll R$ , l'approssimazione  $|\vec{x} - \vec{y}| \approx R$  è valida ed è possibile portare questo termine costante fuori dall'integrale (1.14). Poiché il tensore energia-impulso soddisfa la conservazione dell'energia  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , la condizione di *gauge* armonica  $\partial_\mu \bar{h}^\mu_\nu = 0$  è verificata. Inoltre, la radiazione è per lo più emessa a frequenze  $\omega/2\pi$ , in modo che  $\frac{\delta R}{R} \ll \frac{1}{\omega}$ . È possibile, quindi, dimostrare che solo le coordinate spaziali del tensore sono diverse da zero.

Definendo il tensore del momento di quadrupolo della densità di energia della sorgente, in unità geometriche ( $c = G_N = 1$ ), come

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3x, \quad (1.15)$$

dove  $\rho$  è la densità di massa; la perturbazione della metrica è data da

$$\bar{h}_{jk}(t, x) = \frac{2}{R} \ddot{I}_{jk}(t_r). \quad (1.16)$$

Le onde gravitazionali, quindi, sono proporzionali alla derivata seconda del momento di quadrupolo della densità di energia.

# Capitolo 2

## Il problema della generazione delle onde gravitazionali

In questo primo capitolo verranno introdotti i concetti basilari riguardo le onde gravitazionali, al fine di analizzarne le sorgenti e mostrarne i primi casi.

### 2.1 La natura quadrupolare delle onde gravitazionali

Per la prima analisi sulla natura delle onde si partirà dall'analogia  $e^2 \rightarrow -m^2$ , che permette di passare dalla legge di Coulomb statica alla legge di attrazione di Newton, trattando la gravità come un campo di spin 1 (vettoriale) anziché di spin 2 (tensoriale). In questo modo è possibile trattare le onde gravitazionali tramite il loro analogo elettromagnetico. [7] Viene introdotta la luminosità di dipolo elettrico come quella grandezza che indica la potenza emessa

$$L_{\text{dipolo}} = \frac{2}{3} e^2 a^2, \quad (2.1)$$

dove  $a$  è l'accelerazione. Se indichiamo il momento di dipolo con  $\vec{d} = e\vec{x} = ea$ , l'analogo gravitazionale del momento di dipolo elettrico è il dipolo di massa, definito come

$$d = \sum_A m_A x_A, \quad (2.2)$$

dove la somma è sulle particelle del sistema, con derivata prima pari a

$$\dot{d} = \sum_A m_A \dot{x}_A. \quad (2.3)$$

Per le leggi di conservazione  $\ddot{d} = \dot{p} = 0$ , ciò implica l'impossibilità di avere radiazione di dipolo di massa.

Si può quindi affermare che non sussisterà radiazione gravitazionale di dipolo di nessun tipo. In realtà questo poteva essere altresì inferito dall'analogia iniziale con l'elettromagnetismo. In tal caso, infatti, la radiazione di monopolo non è presente per

## 2.1 LA NATURA QUADRUPOLARE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI

la conservazione della carica, mentre vi è una radiazione di dipolo dovuta ai due segni della carica stessa; per le onde gravitazionali la radiazione di monopolo non avviene per la conservazione della massa, ma non avverrà nemmeno la radiazione di dipolo visto che la massa presenta un unico segno. [8]

Per il quadrupolo invece si ha un risultato non nullo

$$L_{quadrupolo} = \frac{1}{20} \ddot{Q} \equiv \frac{1}{20} \ddot{Q}_{jk} \ddot{Q}_{jk}, \quad (2.4)$$

$$Q_{jk} \equiv \sum_A e_A (x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r_A^2), \quad (2.5)$$

e controparte gravitazionale data da

$$L_{quadrupolo \text{ di massa}} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle, \quad (2.6)$$

$$\bar{I} \equiv \sum_A m_A (x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r_A^2) = \int \rho (x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x. \quad (2.7)$$

Il valore medio del quadrupolo di massa è calcolato sui vari periodi caratteristici. [9] Ricordando che con  $I_{jk}$  si è definito il secondo momento della distribuzione di massa come

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3 x, \quad (2.8)$$

mentre con  $\bar{I}_{jk}$  definiamo il momento di quadrupolo ridotto

$$\bar{I}_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr(I_{ab}) = \int \rho (x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x, \quad (2.9)$$

ovvero il secondo momento della distribuzione di massa privato di traccia.

## 2.2 La potenza irradiata dalle onde gravitazionali

In questo paragrafo verrà trattata la potenza irradiata attraverso le onde gravitazionali. Si può scrivere il momento di quadrupolo come

$$\ddot{I}_{jk} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{M\left(\frac{R}{T}\right)^2}{T} \sim L_{int}, \quad (2.10)$$

con  $M$  massa del sistema in movimento,  $R$  grandezza del sistema,  $T$  tempo impiegato dalla massa per muoversi da una parte all'altra del sistema,  $M\left(\frac{R}{T}\right)^2$  parte non sferica dell'energia cinetica ed  $L_{int}$  potenza interna.

Si può quindi affermare che la potenza emessa dalle onde gravitazionali è proporzionale al quadrato della potenza interna

$$L_{GW} \sim (L_{int})^2, \quad (2.11)$$

dove l'equazione è stata scritta in unità geometriche ( $c = G = 1$ ).

Viene definito infine il tempo di reazione come

$$\tau_{react} \sim \frac{L_{int}}{L_{GW}} T \sim \frac{L_0}{L_{int}} T. \quad (2.12)$$

Quindi la reazione di radiazione diventa preponderante in un tempo caratteristico solo se il sistema acquista una potenza interna dell'ordine

$$L_{int} \geq L_0. \quad (2.13)$$

Per studiare le prime sorgenti, consideriamo un sistema astrofisico altamente dinamico, se  $M$  è la sua massa e  $R$  il suo raggio, la sua energia cinetica sarà proporzionale a  $\sim \frac{M^2}{R}$ . Il tempo  $T$  caratteristico per muoversi da una parte all'altra del sistema è

$$T \sim \frac{R}{\left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \sim \left(\frac{R^3}{M}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

e si può calcolare la luminosità delle onde gravitazionali calcolando dapprima la potenza interna come

$$L_{int} \sim \left(\frac{M^2}{R}\right) \left(\frac{M}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad (2.15)$$

### 2.3 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI TRAMITE LE SORGENTI ASTROFISICHE

$$L_{GW} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5 L_0. \quad (2.16)$$

Ne segue che l'ampiezza dell'onda decade in proporzione alla frazione di massa in moto, mentre la potenza decade con il quadrato di tale frazione. Poiché al più si può avere  $M = R$ , il massimo output sarà proprio dell'ordine di  $L_0$ . Il tempo richiesto per avere forze di reazione di radiazione non trascurabili che influiscano sul sistema è

$$\tau_{react} \sim \frac{L_0}{L_{int}} T \sim \left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{5}{2}} T. \quad (2.17)$$

Da qui si può dire che, in un tempo caratteristico  $T$ , gli effetti non saranno preponderanti a meno che il sistema non si trovi vicino al suo raggio gravitazionale. Le migliori sorgenti di radiazione gravitazionale saranno quindi stelle che collassano in modo fortemente non-sferico nel raggio gravitazionale. Una stella di questo tipo terminerà la sua vita con un'esplosione di onde gravitazionali che porterà via una considerevole frazione della sua massa a riposo. Possiamo stimare l'energia irradiata  $E_i$  come

$$E_i = \int L_{GW} dt \sim L_0 M = M. \quad (2.18)$$

La radiazione dovrebbe essere bassa a basse frequenze, aumentare fino ad una frequenza leggermente inferiore a  $\frac{1}{M}$  e poi decadere velocemente per frequenze oltre  $\frac{1}{M}$ .

### 2.3 La generazione di onde gravitazionali tramite le sorgenti astrofisiche

Una prima sorgente di onde gravitazionali è data dalla caduta di materia in un buco nero. Se  $m$  è la massa della materia,  $M$  è la massa totale del buco nero e la massa si muove lungo l'asse  $z$  del sistema di riferimento, si ha che l'unica componente diversa da 0 di  $I_{jk}$  è  $I_{zz} = mz^2(t)$ . [10] Si può, a questo punto, calcolare

$$L \sim \langle \dot{I}_{zz}^2 \rangle \sim m^2 \langle (6\dot{z}\ddot{z} + 2z\ddot{\ddot{z}})^2 \rangle, \quad (2.19)$$

$$E_i \sim m^2 \int_{-\infty}^{t_{max}} dt (6\dot{z}\ddot{z} + 2z\ddot{\ddot{z}})^2 \sim \frac{m^2}{M}. \quad (2.20)$$

Nel limite in cui la materia è piccola sia in dimensioni che in massa, trattando la materia e le onde come perturbazioni della geometria di Schwarzschild, possiamo calcolare esattamente lo spettro e l'energia irradiata [11][12][13]:

### 2.3 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI TRAMITE LE SORGENTI ASTROFISICHE

$$E_i \sim 0,0104 \frac{m^2}{M}. \quad (2.21)$$

Un'ulteriore sorgente di onde gravitazionali è la cosiddetta radiazione cosmica di fondo. Poiché le onde gravitazionali sono prodotte da una grande varietà di sorgenti astrofisiche, fenomeni cosmologici e processi fondamentali come il Big Bang, l'Universo dovrebbe avere una sorta di insieme di onde gravitazionali di fondo che arriva dalla sovrapposizione di tutti questi fenomeni. [14]

Un'altra sorgente di media presenza (una ogni secolo per una galassia come la nostra), è l'esplosione di una supernova, che avviene quando il nucleo di una stella altamente evoluta (una nana bianca il cui nucleo oltrepassa il limite di Chandrasekhar di 1.4 masse solari oppure una stella con massa tra le 8-100 masse solari) collassa su sé stessa e produce una breve ma intensa emissione di onde gravitazionali, le cui caratteristiche sono

$$E_i \sim \frac{M^2}{R} \sim 0.1M \sim 10^8 \text{ erg}, \quad (2.22)$$

$$\bar{f} \sim \frac{1}{T} \sim \left(\frac{M}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 0,03M^{-1} \sim 3000 \text{ Hz}, \quad (2.23)$$

$$P \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5 L_0 \sim 10^{-5} L_0 \sim 3 \cdot 10^{54} \text{ erg/s}, \quad (2.24)$$

$$\tau \sim M \left(\frac{M}{R}\right)^{-4} \sim 0.1 \text{ s} \sim 300 \text{ periodi stellari}, \quad (2.25)$$

dove  $E_i$  è l'energia irradiata,  $\bar{f}$  è la frequenza media,  $P$  è la potenza emessa e  $\tau$  è il tempo impiegato dalla radiazione gravitazionale per rallentare il moto.

Un'altra possibile sorgente è rappresentata dalle stelle di neutroni, in particolare le pulsar. Le stelle di neutroni si formano quando una stella supergigante, con massa tra le 10 e le 25 masse solari, esaurisce gli elementi leggeri per la fusione ed il nucleo collassa. Questo collasso gravitazionale fonde ogni protone ed elettrone in un neutrone. Le pulsar sono stelle di neutroni rotanti che mostrano impulsi di radiazione a intervalli regolari, che in genere vanno dai millisecondi ai secondi. In un modello stellare in equilibrio, ovvero quando la forza esercitata dal gradiente di pressione interno della stella è perfettamente bilanciata dalla forza di gravità, possiamo calcolare, negli ultimi stati di una pulsazione stellare, le frequenze di pulsazione e i tempi  $\tau$  trattando le onde gravitazionali e i moti dei fluidi come piccole perturbazioni del modello.

### 2.3 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI TRAMITE LE SORGENTI ASTROFISICHE

Immaginando di avere una stella di neutroni di massa  $M$  e raggio  $R$  che ruota con frequenza  $f$  ed ha un'irregolarità identificabile come una massa  $m$  sulla sua superficie. Il momento d'inerzia della massa sarà  $mR^2$  e, di solito, viene trattata in termini dell'asimmetria frazionaria che crea nel tensore del momento di inerzia totale. Se si considera la nostra stella con densità uniforme, il momento di inerzia sferico sarà  $\frac{2}{5}MR^2$ , e l'asimmetria frazionaria la indichiamo come

$$\varepsilon = \frac{5m}{2M}, \quad m = 0.4\varepsilon M. \quad (2.26)$$

L'ampiezza di radiazione sarà

$$h \sim \frac{4}{5} \frac{(2\pi Rf)^2}{r} \varepsilon M, \quad (2.27)$$

e la luminosità sarà

$$L \sim \frac{16}{125} (2\pi f)^6 \varepsilon^2 M^2 R^4. \quad (2.28)$$

L'energia irradiata arriverà principalmente dall'energia rotazionale  $\frac{1}{5}Mv^2$ , quindi il tempo di *spindown* (rallentamento della rotazione) della stella sarà dell'ordine di

$$\tau_{spindown} \sim \frac{\frac{1}{5}Mv^2}{L} \sim \frac{25}{32\pi} \varepsilon^{-1} f^{-2} \left(\frac{M}{R}\right)^{-1} v^{-3}. \quad (2.29)$$

Si pensa che le stelle di neutroni non riescano a sopportare un'asimmetria frazionaria maggiore di  $\varepsilon \sim 10^{-6}$ , e le asimmetrie reali potrebbero essere molto minori. [8] In questo modo sono state calcolate le caratteristiche delle onde gravitazionali emesse da oscillazioni di quadrupolo di vari modelli tipici di stelle di neutroni e nei modelli stellari più massivi sono state calcolate frequenze di  $3000 \text{ Hz}$ , una durata delle onde di  $\sim \frac{1}{3} \text{ s}$ , un tempo di *spindown* di  $\sim 1000$  oscillazioni e un'energia totale di  $\sim (10^{54} \text{ ergs}) \cdot \varepsilon^2$ .

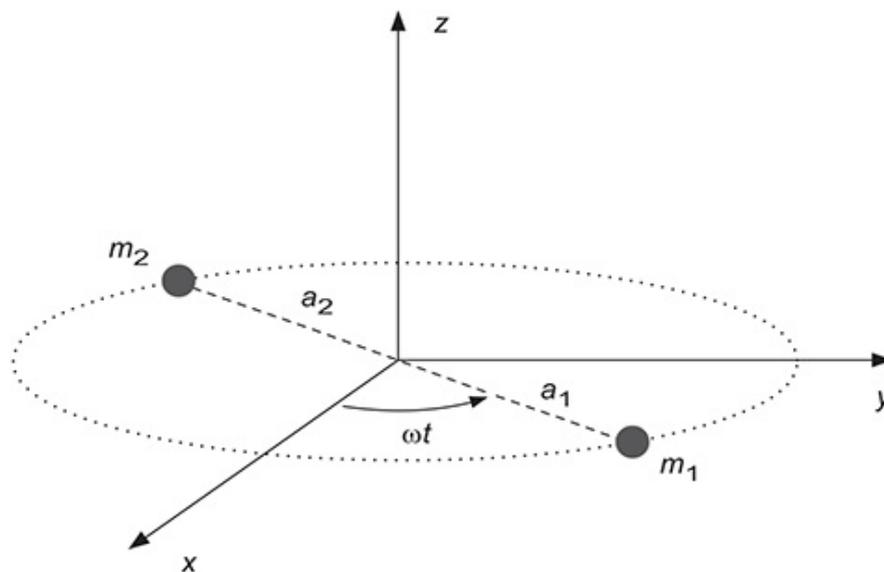
# Capitolo 3

## Sorgenti deboli di onde gravitazionali

In questo capitolo sarà trattato uno dei sistemi più importanti nella produzione di onde gravitazionali: i sistemi binari. Inoltre si vedrà come trattare le sorgenti in approssimazione Newtoniana e ci si concentrerà sul calcolo del potenziale e del campo di radiazione, usando la linearizzazione delle equazioni di Einstein.

### 3.1 La generazione di onde gravitazionali tramite sistemi binari

Le sorgenti più numerose di onde gravitazionali deboli sono i sistemi di stelle binarie. Un sistema del genere con orbite circolari è presentato in **figura 3.1**



**Figura 3.1:** Sistema di coordinate per il sistema di stella binaria in orbite circolari. L'origine è nel centro di massa. Vale l'uguaglianza  $m_1 a_1 = m_2 a_2$ . Immagine presa da [15].

### 3.1 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI TRAMITE SISTEMI BINARI

Con  $a_1$  e  $a_2$  si indicano le distanze delle due masse  $m_1$  e  $m_2$ , rispettivamente, dal centro di massa e  $\varphi = \omega t$  è l'angolo azimutale tra la linea che unisce le stelle e l'asse  $x$ . Le componenti del secondo momento di massa sono date da

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3x = m_1 x_j x_k + m_2 x_j x_k. \quad (3.1)$$

Sono introdotte le coordinate polari per ogni stella  $i$

$$x_i(t) = a_i \cos \omega t, \quad (3.2)$$

$$y_i(t) = a_i \sin \omega t, \quad (3.3)$$

$$z_i(t) = 0, \quad (3.4)$$

e sono sostituite in  $I_{jk}$ . Ad esempio, per la componente  $11$ , si ha

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_{11} &= m_1 a_1^2 (\cos \omega t)^2 + m_2 a_2^2 (\cos \omega t)^2 \\ &= (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) (\cos \omega t)^2 \\ &= \mu a^2 (\cos \omega t)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu a^2 (1 + \cos 2\omega t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  è la massa ridotta,  $a \equiv a_1 + a_2$  e  $m_1 a_1 = m_2 a_2$ . Facendo lo stesso ragionamento per le altre componenti si ottengono

$$I_{xy} = I_{12} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\omega t, \quad (3.6)$$

$$I_{yy} = I_{22} = \frac{1}{2} \mu a^2 (1 - \cos 2\omega t). \quad (3.7)$$

Ma ricordando che

$$L_{\text{quadrupolo di massa}} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle, \quad (3.8)$$

e poiché la quantità  $\text{Tr } I = I_{xx} + I_{yy} = \mu a^2$  è indipendente dal tempo, si può scrivere  $I_{jk} = \bar{I}_{jk}$ .

Calcolando quindi le derivate terze si ottengono

$$\ddot{\bar{I}}_{xx}(t) = 4\omega^3 \mu a^2 \sin 2\omega t, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\bar{I}}_{yy}(t) = -4\omega^3 \mu a^2 \sin 2\omega t, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\bar{I}}_{xy}(t) = \ddot{\bar{I}}_{yx}(t) = -4\omega^3 \mu a^2 \cos 2\omega t. \quad (3.11)$$

### 3.1 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI TRAMITE SISTEMI BINARI

Successivamente, calcolando la luminosità, si perviene a

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{5} \langle (\ddot{I}_{xx})^2 + 2(\ddot{I}_{xy})^2 + (\ddot{I}_{yy})^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{P} \int_0^P ((\ddot{I}_{xx})^2 + 2(\ddot{I}_{xy})^2 + (\ddot{I}_{yy})^2) dt \right] \\
 &= \frac{16\omega^6 \mu^2 a^4}{5P} \int_0^P ((\sin 2\omega t)^2 + 2(\cos 2\omega t)^2 + (\sin 2\omega t)^2) dt \\
 &= \frac{32}{5} \omega^6 \mu^2 a^4 = \frac{32 M^3 \mu^2}{5 a^5}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nel secondo passaggio si è fatta la media su un periodo  $P$  e nell'ultimo passaggio si è usata la terza legge di Keplero per il periodo  $P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{M}$  con  $M = m_1 + m_2$ . [15]

Per estendere il calcolo che ha portato alla (3.12) ad un'orbita generica con eccentricità  $\varepsilon$ , si moltiplica la (3.12) stessa per una funzione di correzione  $f(\varepsilon)$  [16]:

$$L_\varepsilon = f(\varepsilon)L, \tag{3.13}$$

$$f(\varepsilon) = \left[ 1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4 \right] [1 - \varepsilon^2]^{-\frac{7}{2}}. \tag{3.14}$$

L'emissione di onde gravitazionali porta ad un abbassamento di energia e quindi una diminuzione del periodo  $P$ , che può essere calcolato tramite l'energia orbitale del sistema data da

$$E = -\frac{G\mu M}{2a}. \tag{3.15}$$

Usando questa equazione e la terza legge di Keplero per il periodo e assumendo  $L = -\frac{dE}{dt}$ , si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{96 G^3 M^2 \mu}{5 c^5 a^4} P. \tag{3.16}$$

Usando la legge di Keplero si sostituisce  $a$  e si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi G^{\frac{5}{3}} m_1 m_2}{5 c^5 M^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{\frac{5}{3}}. \tag{3.17}$$

Anche qui, per orbite con un'eccentricità  $\varepsilon$ , si ha

$$\left( \frac{dP}{dt} \right)_\varepsilon = f(\varepsilon) \frac{dP}{dt}. \tag{3.18}$$

### 3.2 LE SORGENTI IN APPROSSIMAZIONE NEWTONIANA

La perdita di energia ha anche un'altra conseguenza, quella di rendere l'orbita circolare nel tempo. Nel caso in cui l'orbita fosse ellittica, si avrebbe una correzione pari a:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.19)$$

con  $a_0 = a_{oggi}$  e  $\tau_0$  è il tempo in cui le due stelle spiraleggiano se nessuna forza esterna interviene ed è pari a

$$\tau_0 = \frac{5}{256} \frac{a_0^4}{\mu M^2}. \quad (3.20)$$

La radiazione è emessa principalmente al periastro, ovvero dove le due stelle del sistema si trovano alla minima distanza. In questo punto, dopo l'azione delle forze di radiazione, si perde una parte di energia cinetica e l'orbita comincia a diventare più circolare.

Per sistemi del genere, nei casi più ottimistici, i periodi durano poche ore, il *damping time* è dell'ordine dell'età dell'universo, la potenza emessa sottoforma di onde gravitazionali è dell'ordine di  $\sim 10^{30} - 10^{32} \text{ ergs/s}$  (quella del sole è di  $\sim 10^{33} \text{ ergs/s}$ ) ed il flusso calcolato sulla terra è di  $\sim 10^{-10} - 10^{-12} \text{ ergs/s}$ . [7]

## 3.2 Le sorgenti in approssimazione Newtoniana

Per calcolare la radiazione di una sorgente abbiamo già ricavato la formula

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle. \quad (3.21)$$

Questa è valida per sorgenti in approssimazione Newtoniana, ovvero quando le velocità dei moti in gioco, sono molto più piccole della velocità della luce ed il campo gravitazionale è debole. Le ulteriori condizioni che si hanno in approssimazione Newtoniana sono

$$\frac{R}{\lambda} \ll 1; \quad \phi \ll \frac{R}{\lambda}; \quad \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \ll \frac{R}{\lambda}.$$

Per ogni sorgente di grandezza  $R$  e velocità interna media  $v$ , la lunghezza d'onda ridotta ( $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$ ) della radiazione emessa è  $\sim \frac{R'}{v} \leq \frac{R}{v}$ , con  $R'$  ampiezza dei moti.

### 3.2 LE SORGENTI IN APPROSSIMAZIONE NEWTONIANA

Quindi la condizione  $\frac{R}{\lambda} \ll 1$  (ovvero che la sorgente sia confinata ad una piccola regione di spazio all'interno della *near (nonradiation) zone*), porta alla condizione di *slow-motion* data da

$$v \ll 1. \quad (3.22)$$

Per un sistema di massa  $M$ , la condizione sul legame gravitazionale  $\frac{1}{2}Mv^2 \leq \frac{M^2}{R}$  garantisce che  $v \leq \left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \ll 1$ . Le condizioni  $\frac{M}{R} \ll \frac{R}{\lambda}$  e  $\frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \ll \frac{R}{\lambda}$  sono soddisfatte da tutte le sorgenti in approssimazione Newtoniana. Per le sorgenti tipiche sussiste la relazione:

$$\frac{M}{R} \sim \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \ll \frac{R}{\lambda}. \quad (3.23)$$

Per  $T^{jk}$  si prendono le componenti spaziali del tensore stress-energia. Per ogni sistema in queste condizioni esiste una regione di spazio all'interno della *near zone* ( $r \ll \bar{\lambda}$ ), in cui vale la teoria Newtoniana gravitazionale nel vuoto ed un osservatore può misurare il potenziale Newtoniano  $\phi$  ed espanderlo in serie di  $1/r$  come

$$\phi = -\left(\frac{M}{r} + \frac{d_j n^j}{r^2} + \frac{3\bar{I}_{jk} n^j n^k}{2r^3} + \dots\right), \quad \text{dove } n^j = \frac{x^j}{r}. \quad (3.24)$$

Dove si è scritta  $M$  come la massa-energia totale del sistema (o la massa gravitazionale attiva),  $d_j$  come il momento di dipolo e  $\bar{I}_{jk}$  come il momento di quadrupolo ridotto.

Quando il potenziale Newtoniano arriva nella *radiation zone*, i primi due termini del potenziale, di carattere statico, mantengono la loro forma, mentre, il termine dinamico, con il quadrupolo ridotto, diventa impossibile da descrivere in termini Newtoniani. Quando  $r$  aumenta, aumentano gli effetti di ritardo e il potenziale descrive onde gravitazionali che si propagano verso l'esterno del sistema. Per trattare il problema adesso si usa la teoria linearizzata nella *radiation zone*. Imponendo la gauge di traccia trasversa-nulla ( $h_{0\mu}^{TT} = 0$ ;  $h_{jj}^{TT} = 0$ ;  $h_{jk,k}^{TT} = 0$ ) allora l'onda gravitazionale prende la forma

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2}{r} \bar{I}_{jk}^{\cdot\cdot TT} (t-r) + \text{correzioni di ordine } \left[\frac{1}{r^2} \bar{I}_{jk}^{\cdot TT} (t-r)\right], \quad (3.25)$$

$$\bar{I}_{jk}^{\cdot\cdot TT} = P_j^l \bar{I}_{lm}^{\cdot\cdot} P_k^m - \frac{1}{2} P_{jk} P^{lm} \bar{I}_{ab}^{\cdot\cdot}, \quad (3.26)$$

$$P_{ab} = (\delta_{ab} - n_a n_b) \quad (\text{operatore di proiezione}), \quad (3.27)$$

$$n_a = x^a / r \quad (\text{vettore radiale unitario}). \quad (3.28)$$

Il tensore stress-energia effettivo per le onde che si stanno studiando ha la stessa forma di uno sciame di particelle senza massa che viaggiano alla velocità della luce verso l'esterno in direzione radiale. A grandi distanze, le componenti non nulle, di ordine più basso, sono

$$T_{00}^{(GW)} = -T_{0r}^{(GW)} = T_{rr}^{(GW)} = \frac{1}{32\pi} \langle h_{jk,0}^{TT} h_{jk,0}^{TT} \rangle = \frac{1}{8\pi r^2} \langle \ddot{I}_{jk}^{TT} \ddot{I}_{jk}^{TT} \rangle = \frac{1}{8\pi r^2} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} - 2n_i \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{jk} n_k + \frac{1}{2} (n_j \ddot{I}_{jk} n_k)^2 \rangle. \quad (3.29)$$

Nell'equazione (3.29), è stata considerata la media su varie lunghezze d'onda attraverso le parentesi  $\langle \ \rangle$ .

La potenza totale che attraversa una sfera di raggio  $r$  in un tempo  $t$  è

$$L_{GW}(t, r) = \int T^{(GW)0r} r^2 d\Omega = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk}(t-r) \ddot{I}_{jk}(t-r) \rangle. \quad (3.30)$$

Le leggi di conservazione garantiscono che l'energia ed il momento angolare perso dalla sorgente sono uguali alle stesse quantità portate dalle onde gravitazionali. Queste perdite sono causate da una piccola componente della curvatura dello spazio-tempo all'interno della sorgente, che cambia segno nel passaggio da una condizione (realistica) di onda uscente all'infinito ad una (non realistica) di onda entrante. La parte dinamica del potenziale di Newton (standard) è

$$\phi = -\frac{3\bar{I}_{jk}(t)n^j n^k}{2r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (3.31)$$

e non ha ritardi.

Si può prendere solo la situazione realistica se si aggiunge al potenziale standard una piccola componente di potenziale di *reaction-radiation*

$$\phi = \phi_{standard} + \phi^{(react)}, \quad (3.32)$$

$$\phi^{(react)} = \frac{1}{5} \frac{d^5 \bar{I}_{jk}}{dt^5} x^j x^k. \quad (3.33)$$

Se invece si considera  $\phi = \phi_{standard} - \phi^{(react)}$  si ha la situazione non realistica. [17] Gli effetti del potenziale di reazione sono quelli di una accelerazione, come gli altri termini del potenziale di Newton.

### 3.3 Il campo ed il potenziale di radiazione

Per costruire un metodo per il calcolo delle formule di radiazione, si impone la condizione che la sorgente sia isolata e lo spazio asintoticamente piatto e si definisce, in un sistema di coordinate che verifica queste condizioni anche dentro la sorgente,

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

con  $g_{\mu\nu}$  metrica del sistema ed  $\eta_{\mu\nu}$  la metrica piatta di Minkowski. Applicando la linearizzazione delle equazioni di Einstein, definiamo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h; \quad h = h^\alpha_\alpha = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}. \quad (3.35)$$

Con la condizione (gauge armonica)

$$\bar{h}^\alpha_{\mu,\alpha} = 0, \quad (3.36)$$

soddisfatta anche all'interno della sorgente,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  diventa il campo gravitazionale della teoria linearizzata sia lontano dalla sorgente, ma anche all'interno se la gravità è debole in questa regione ( $|\bar{h}_{\mu\nu}| \ll 1$ ).

Le equazioni esatte di Einstein possono essere scritte in termini di  $\bar{h}^{\mu\nu}$  come

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = -16\pi(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (3.37)$$

dove  $T^{\mu\nu}$  è il tensore stress-energia e  $t^{\mu\nu}$  lo pseudotensore. Quest'ultimo è un oggetto che si comporta come un tensore per tutte le trasformazioni di coordinate, eccetto quelle trasformazioni che non possono essere ridotte a rotazioni, come le riflessioni, che implicano cambi di segno di coordinate, irriducibili a rotazioni. Di conseguenza, la forma di uno pseudotensore cambierà, in generale, al variare del sistema di riferimento. Un'equazione contenente pseudotensori che vale in un sistema non varrà necessariamente in un altro sistema. Questo rende gli pseudotensori di importanza limitata perché le equazioni nelle quali appaiono non sono invarianti nella forma. [6] Le sue componenti sono dell'ordine quadratico (ed oltre) in  $\bar{h}_{\mu\nu}$ .

Le equazioni di Einstein, insieme ad una condizione al contorno per le onde uscenti, possono essere poste nella seguente forma integrale

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = 4 \int_{\text{tutto lo spazio}} \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{\text{ret}}}{|x - x'|} d^3x' \quad (3.38)$$

dove  $|x - x'| \equiv \left[ \sum_j (x^j - x^{j'})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $d^3x' \equiv dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}$ ,

### 3.3 IL CAMPO ED IL POTENZIALE DI RADIAZIONE

e dove *ret* indica che la quantità è valutata in un punto dello spazio-tempo ritardato, cioè

$$(t' = t - |x - x'|, x').$$

Poiché si sono considerate le  $\bar{h}^{\mu\nu}$  come campi nello spazio-tempo piatto nell'equazione (3.38), allora queste ultime sono valide per qualsiasi punto del campo  $(t, x^j)$ , anche all'interno della sorgente.

A questo punto introduciamo la condizione di *slow-motion*:  $R \ll \bar{\lambda}$ . Ponendo l'origine delle coordinate spaziali all'interno della sorgente; per i sistemi in *slow-motion*, gli unici contributi per gli integrali ritardati arriveranno dall'interno della *near-zone* (in particolare da una regione  $L \sim R \ll \bar{\lambda}$ ) e l'attenzione sarà posta sui punti  $x^j$  lontani da questa regione (punti di osservazione)

$$|x| \equiv r \gg L \geq |x'|. \quad (3.39)$$

Espandendo la (3.38) in potenze di  $x'/r$  si ottiene

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x) = \frac{4}{R} \int [T^{\mu\nu}(x', t - r) + t^{\mu\nu}(x', t - r)] d^3x' + O \left\{ \frac{x^j}{r^2 \bar{\lambda}} \int x^{j'} [T^{\mu\nu}(x', t - r) + t^{\mu\nu}(x', t - r)] d^3x' \right\}. \quad (3.40)$$

Delle dieci componenti di  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , solo le sei spaziali ( $\bar{h}^{jk}$ ) sono di interesse, poiché sono quelle che intervengono nel campo di radiazione a traccia trasversa-nulla  $\bar{h}_{jk}^{TT}$ . Per passare da  $\bar{h}^{jk}$  in termini di  $T^{jk} + t^{jk}$  alla forma in termini di  $T^{00} + t^{00}$  (distribuzione di energia), è possibile usare la conservazione dell'energia  $T^{\mu\nu}_{;v} = 0$ , in modo da poter scrivere

$$\int (T^{jk} + t^{jk}) d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2}, \quad (3.41)$$

dove

$$I_{jk} \equiv \int [T^{00}(t, x) + t^{00}(t, x)] x^j x^k d^3x. \quad (3.42)$$

Introducendo l'approssimazione di sorgente Newtoniana, che garantisce che la gravitazione contribuisce in minima parte all'energia totale, si può scrivere

$$t^{00} \sim (\phi_{,j})^2 \sim \frac{M^2}{R^4} \sim \left(\frac{M}{R}\right) T^{00} \ll T^{00}, \quad (3.43)$$

### 3.3 IL CAMPO ED IL POTENZIALE DI RADIAZIONE

e quindi

$$I_{jk}(t) \equiv \int T^{00}(t, x) x^j x^k d^3 x. \quad (3.44)$$

Si perviene quindi a

$$\bar{h}^{jk}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{d^2 I_{jk}(t-r)}{dt^2} \left\{ 1 + O \left[ \frac{|T^{jk}|}{T^{00}} + \frac{M}{R} \right] \frac{\bar{\lambda}}{R} \right\}. \quad (3.45)$$

Al fine di ottenere l'espressione di  $h_{jk}^{TT}$ , si abbassano gli indici e si usa un operatore di proiezione per le onde che viaggiano radialmente

$$P_{lm} = \delta_{lm} - n_l n_m; \quad n_l = \frac{x^l}{r}. \quad (3.46)$$

Il risultato quindi è

$$h_{jk}^{TT}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{d^2 I_{jk}^{TT}(t-r)}{dt^2}, \quad (3.47)$$

dove

$$I_{jk}^{TT} = P_j^l I_{lm} P_k^m - \frac{1}{2} P_{jk} (P^{lm} I_{ml}). \quad (3.48)$$

Ma un osservatore esterno non può misurare direttamente il secondo momento della distribuzione di massa, bisogna quindi sostituire  $I_{jk}$  con il ridotto  $\bar{I}_{jk}$

$$\bar{I}_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I = \int (T^{00} + t^{00}) (x^j x^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x, \quad (3.49)$$

e scrivere

$$h_{jk}^{TT}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{d^2 \bar{I}_{jk}^{TT}(t-r)}{dt^2}, \quad (3.50)$$

poiché le parti TT di  $I_{jk}$  e  $\bar{I}_{jk}$  sono uguali.

Nella *near-zone*, ma al di fuori della sorgente, il potenziale Newtoniano ha la forma

$$\phi = -\frac{1}{2} h^{00} = -\frac{1}{4} (\bar{h}^{00} + \bar{h}^{jj}) = - \int_{\text{tutto lo spazio}} \frac{[T^{00} + t^{00} + T^{jj} + t^{jj}]_{ret}}{|x-x'|} d^3 x'. \quad (3.51)$$

### 3.3 IL CAMPO ED IL POTENZIALE DI RADIAZIONE

Tuttavia, ancora una volta, l'approssimazione Newtoniana suggerisce che

$$|t^{00} + T^{jj} + t^{jj}| \ll T^{00}, \quad (3.52)$$

da cui è possibile scrivere

$$\phi = - \int \frac{T^{00}(x',t)}{|x-x'|} d^3x'. \quad (3.53)$$

Espandendo  $|x - x'|^{-1}$  in termini di  $1/r$  si ottiene

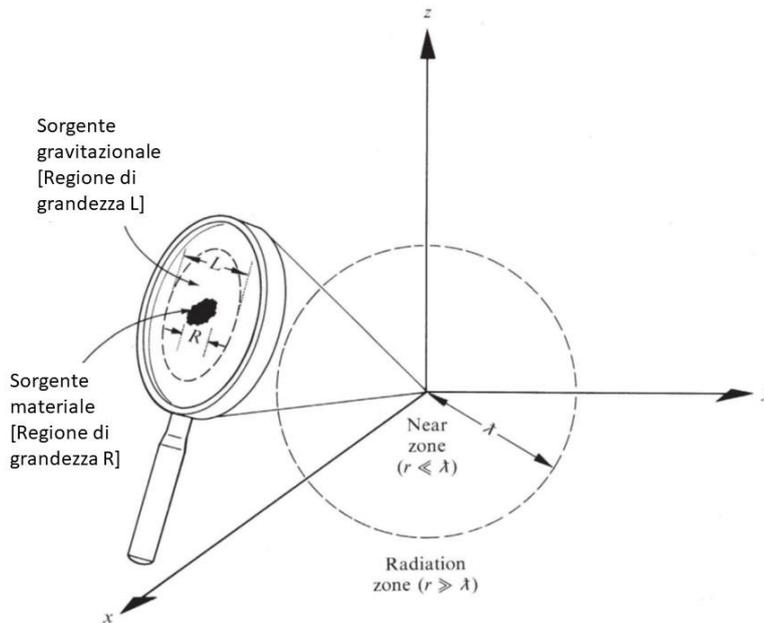
$$\phi = - \left( \frac{M}{r} + \frac{d_j x^j}{r^3} + \frac{3\bar{I}_{jk} x^j x^k}{2r^5} + \dots \right), \quad (3.54)$$

per  $r \ll \bar{\lambda}$ , ma  $r$  abbastanza grande da far valere la teoria Newtoniana nel vuoto. Abbiamo inoltre definito

$$M = \int T^{00} d^3x \quad \text{massa energia totale della sorgente}, \quad (3.55)$$

$$d_j = \int T^{00} x^j d^3x \quad \text{momento di dipolo della sorgente}. \quad (3.56)$$

In conclusione, si può affermare che le  $\bar{I}_{jk}$  sono precisamente le componenti del momento di quadrupolo ridotto misurate da un osservatore che si trova nel potenziale Newtoniano all'interno della *near-zone*. Nella **figura 3.2** viene mostrato il sistema in cui è stata ricavata la forma del potenziale Newtoniano.



### 3.3 IL CAMPO ED IL POTENZIALE DI RADIAZIONE

**Figura 3.2:** Sorgente di onde gravitazionali in *slow-motion*, con l'origine delle coordinate spaziali situata nella sorgente. La grandezza di quest'ultima è  $R$  ed è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda ridotta. Al di fuori della sorgente, ma all'interno della *near-zone*,  $t^{\mu\nu}$  è proporzionale a  $1/r^4$ , quindi i contributi all'integrale ritardato di  $\bar{h}^{\mu\nu}$  arrivano solo dalla regione  $L$  che circonda la sorgente. Immagine presa da [7].

Viene presentato, in quest'ultima sezione, un metodo per il calcolo del termine di reazione nel potenziale Newtoniano. Nella *near-zone* si può espandere la (3.50) in potenze di  $r$  come

$$\bar{h}_{jk} = 2 \left[ \frac{I_{jk}^{(2)}}{r} - \varepsilon I_{jk}^{(3)} + \frac{I_{jk}^{(4)} r}{2!} - \varepsilon \frac{I_{jk}^{(5)} r^2}{3!} + \dots \right], \quad (3.57)$$

dove

$$I_{jk}^{(n)} \equiv \frac{d^n I_{jk}(t)}{dt^n}. \quad (3.58)$$

Le forme corrispondenti di  $\bar{h}_{0j}$  e  $\bar{h}_{00}$  possono essere calcolate attraverso le condizioni imposte dalla gauge (3.36) ovvero  $\bar{h}_{j0,0} = \bar{h}_{jk,k}$  e  $\bar{h}_{00,0} = \bar{h}_{0j,j}$ . Da qui si ottiene il termine che serve per calcolare la parte quadrupolare del potenziale Newtoniano  $\phi = -\frac{1}{4}\bar{h}^{00}$  dal termine in  $I_{jk}$

$$\bar{h}^{00} \approx \frac{6\bar{I}_{jk}n^j n^k}{r^3}. \quad (3.59)$$

Similmente dai contributi in  $\varepsilon$  si ottengono i termini associati alla reazione di radiazione

$$\bar{h}_{00}^{(react)} = -\frac{2}{3}I_{jj}^{(3)} - \frac{1}{15}(2x^j x^k + r^2 \delta^{jk})I_{jk}^{(5)}. \quad (3.60)$$

Usando la relazione  $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\alpha\beta}$  si ottiene

$$h_{00}^{(react)} = -\frac{4}{3}I_{ll}^{(3)} - \frac{1}{15}(2x^j x^k + 3r^2 \delta_{jk})I_{jk}^{(5)}. \quad (3.61)$$

Attraverso una scelta di *gauge* opportuna è possibile trasformare il potenziale in forma Newtoniana, ovvero

$$h_{00}^{(react)} = -\frac{2}{5}\bar{I}_{jk}^{(5)} x^j x^k, \quad (3.62)$$

$$\phi^{(react)} = -\frac{1}{2}h_{00}^{(react)} = \frac{1}{5}\bar{I}_{jk}^{(5)} x^j x^k. \quad (3.63)$$

### 3.3 IL CAMPO ED IL POTENZIALE DI RADIAZIONE

Si possono quindi spiegare gli effetti del potenziale di radiazione nella *near-zone* di una sorgente Newtoniana con l'aggiunta del termine della (3.63) al potenziale Newtoniano.

# Capitolo 4

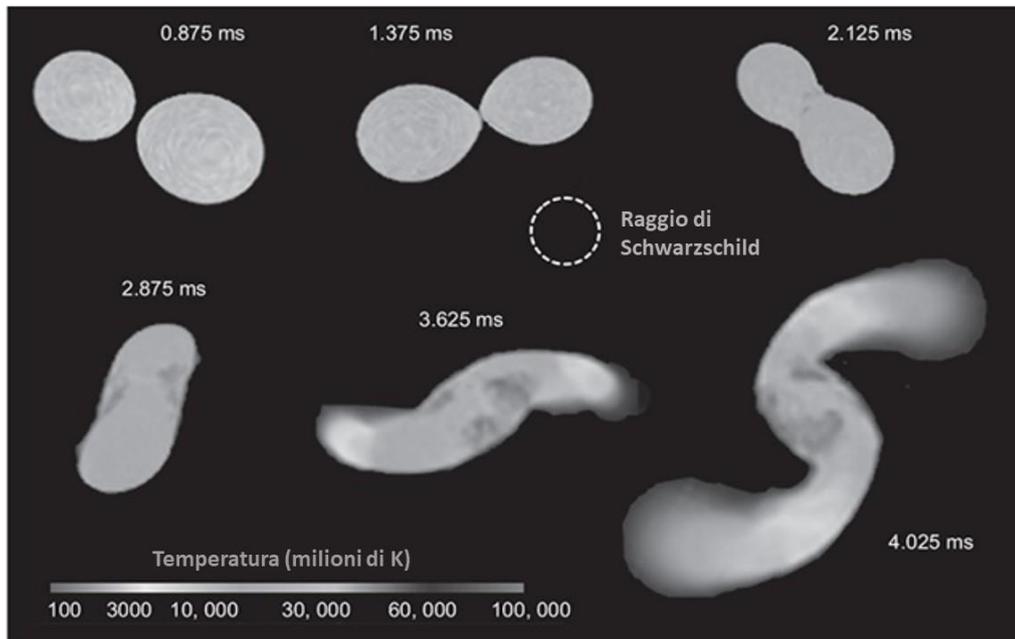
## Sorgenti forti di onde gravitazionali

In questo capitolo verranno descritte le sorgenti di onde gravitazionali in eventi che coinvolgono grandi forze di gravità. La descrizione di questi fenomeni non può essere perseguita con le approssimazioni precedenti e inoltre soluzioni analitiche sono ricavabili solo attraverso complesse simulazioni numeriche. Tuttavia, quest'ultime, suggeriscono che alcuni dei ragionamenti inerenti le sorgenti deboli, sono possibili anche nel regime di sorgenti forti. Le sorgenti forti di onde gravitazionali si possono dividere in due categorie: la fusione di due oggetti compatti (quando le loro orbite decadono a causa di emissione di onde gravitazionali) ed il collasso del nucleo di stelle pesanti. Grazie alle onde gravitazionali si riesce a risalire al tipo di evento che le ha prodotte. [15]

### 4.1 La fusione di corpi celesti

Il primo evento di fusione presentato è la fusione di stelle di neutroni. Questo fenomeno è meno raro del previsto poiché, quando si forma una stella di neutroni binaria, si ha emissione di energia attraverso onde gravitazionali. Ne segue che le orbite si stringono, e si ha la fusione. Una proprietà importante da calcolare di un sistema del genere è l'età della fusione delle due stelle di neutroni. Di solito si parla di questa età attraverso l'*Hubble time* (14 miliardi di anni), che sta a significare se la fusione avviene in un'epoca minore dell'età dell'universo e quindi sia osservabile. Dai calcoli effettuati, l'età, in generale, dovrebbe essere minore dell'*Hubble time*, in particolare dovrebbe essere di circa  $3 \cdot 10^8$  anni. Alcune stime mostrano come la produzione di stelle di neutroni binarie sia così probabile da produrre una fusione ogni giorno all'interno dell'universo osservabile.

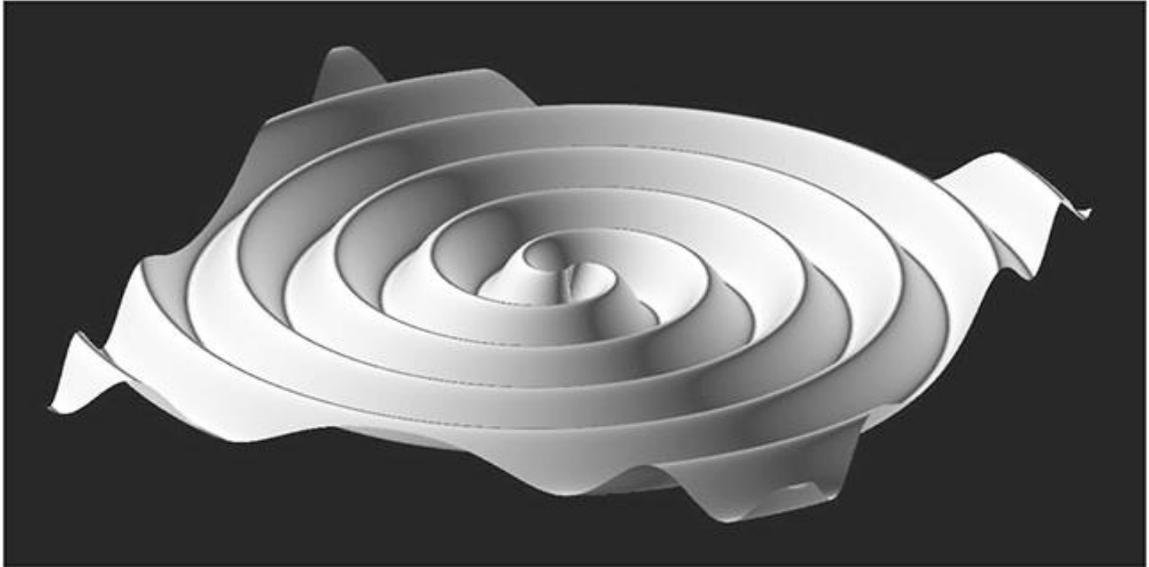
#### 4.1 LA FUSIONE DI CORPI CELESTI



**Figura 4.1:** In questa figura è presentata una simulazione numerica di una fusione in un sistema di una stella di neutroni binaria. Il tempo trascorso è di circa  $3\text{ ms}$  ed è indicato anche il raggio di Schwarzschild per un sistema del genere. Questo moto così rapido di varie masse solari, combinato con la grande distorsione quadrupolare e la natura fortemente compatta della distribuzione di massa, permettono di affermare che un sistema del genere sarà una sorgente forte di onde gravitazionali. Immagine presa da [15].

Il risultato di una fusione di stelle di neutroni dipenderà dalla massa totale delle due stelle coinvolte. Se la fusione porta ad una massa totale minore di 2-3 masse solari, si avrà una stella di neutroni con un'alta velocità di rotazione; se invece si hanno più di 2-3 masse, allora si formerà un buco nero di Kerr.

Il prossimo evento presentato è la fusione di buchi neri stellari (che si ha quando una stella con massa minore di circa 100 masse solari collassa), che ha proprietà e descrizione molto simile alla fusione di stelle di neutroni trattata precedentemente. La differenza principale è data dalla fusione stessa che, nel caso di stelle di neutroni, coinvolge materia densa, mentre, in una fusione di buchi neri, non è presente materia. Si ha quindi un fenomeno più semplice della fusione di stelle di neutroni. Infatti, in un sistema del genere, la situazione iniziale è caratterizzata dagli spin e dalle masse dei buchi neri, mentre, la configurazione finale, sarà definita solo dalla massa e lo spin di un unico buco nero di Kerr.



**Figura 4.2:** Modello di emissione di onde gravitazionali da una coppia di buchi neri basato su simulazioni numeriche di relatività generale. I buchi neri si trovano al centro e le spirali sono le onde gravitazionali generate dal sistema che si propagano verso l'esterno. Immagine presa da [15].

Un altro evento di fusione è quello tra un buco nero ed una stella di neutroni. Questo evento, fino a pochi mesi fa, era solo un'ipotesi, fin quando, il 28 giugno 2021, le collaborazioni Virgo, Ligo e Kagra, non hanno confermato l'esistenza di un evento del genere, annunciando ben due fenomeni di questo tipo (chiamati NSBH), a 10 giorni di distanza, datati gennaio 2020. [18] Le misurazioni hanno inoltre verificato le predizioni teoriche sulle masse dei due corpi coinvolti, ovvero una massa pressoché senza limite per il buco nero, mentre un limite di due masse solari per la stella di neutroni. In particolare, per il primo evento GW200105, si ha come massa del buco nero  $8.9^{+1.2}_{-1.5} M_o$  e della stella di neutroni  $1.9^{+0.3}_{-0.2} M_o$ , invece per il secondo evento GW200115 si ha  $5.7^{+1.8}_{-2.1} M_o$  e  $1.5^{+0.7}_{-0.3} M_o$ .

Infine, si osservi una delle ipotesi di sorgenti forti di onde gravitazionali: la fusione di buchi neri supermassivi. Secondo alcuni studi, il nucleo di quasi tutte le galassie molto massive, dovrebbe presentare un buco nero di circa  $10^6$ - $10^9$  masse solari. Inoltre, poiché la fusione di galassie dovrebbe essere un evento non molto raro nel passato dell'universo, una fusione di buchi neri supermassivi potrebbe essere una conseguenza di una fusione di galassie. Per un evento del genere si stima un picco di luminosità dell'ordine di  $L_o \cong \eta \cdot 10^{59} \text{ erg s}^{-1}$ , dove il parametro  $\eta$  tiene conto delle caratteristiche della fusione e ci si aspetta essere dell'ordine dell'1% nei casi tipici. Se così fosse, la luminosità associata all'evento, sarebbe circa un milione di volte maggiore di quella delle supernove e dei lampi di raggi gamma.

## 4.2 Il collasso del nucleo di stelle pesanti

Dopo aver trattato gli eventi di fusione, è presentata la seconda categoria di sorgenti forti di onde gravitazionali: il collasso del nucleo di stelle pesanti. Per trattare eventi del genere, è necessario che il nucleo stesso abbia una densità comparabile, o maggiore, di quella di una stella di neutroni. Nelle stelle con massa maggiore di 8 masse solari, il nucleo di ferro è supportato da pressione termica e degenerazione elettronica. Quando la temperatura aumenta, il ferro decade in particelle alfa e scattano processi di cattura elettronica, di conseguenza la pressione si riduce vertiginosamente ed il nucleo collassa generando una supernova. [19] Oltre al collasso di una stella pesante, un altro fenomeno che può portare alla formazione di una stella di neutroni o un buco nero, è il collasso di una nana bianca in accrescimento. In entrambi i casi, i due fenomeni, producono supernove di vari tipi, ma potrebbero anche produrre raggi gamma attraverso le ipernove (una supernova con un rilascio di energia 100 volte maggiore) e le collapsar (stelle con un nucleo con massa superiore alle 30 masse solari in rotazione). Quando una nana bianca supera il limite di Chandrasekhar, comincia a collassare e la temperatura aumenta. Il processo Urca (insieme di decadimenti che porta a liberazione di neutrini dalla stella e quindi energia) limita questo aumento di temperatura, ma, se questo processo non riesce ad attenuare questo aumento, allora la nana bianca esploderà (supernova Ia). [20][21][22]

# Capitolo 5

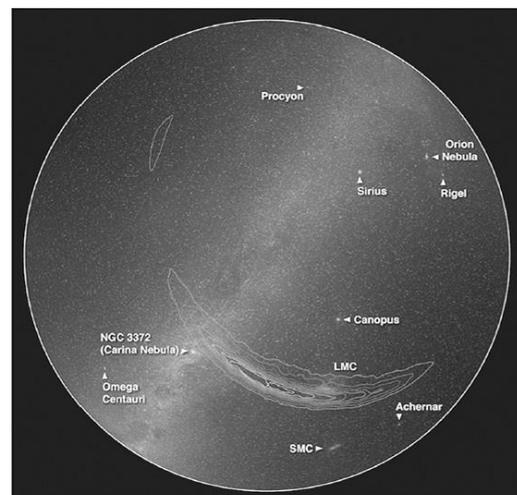
## Conferme sperimentali

In questo ultimo capitolo sarà presentata la prima rilevazione nella storia delle onde gravitazionali; inoltre, si cercherà di spiegarne la genesi e di capire cosa ha portato alla formazione del sistema responsabile dell'evento.

### 5.1 La conferma della teoria di Einstein

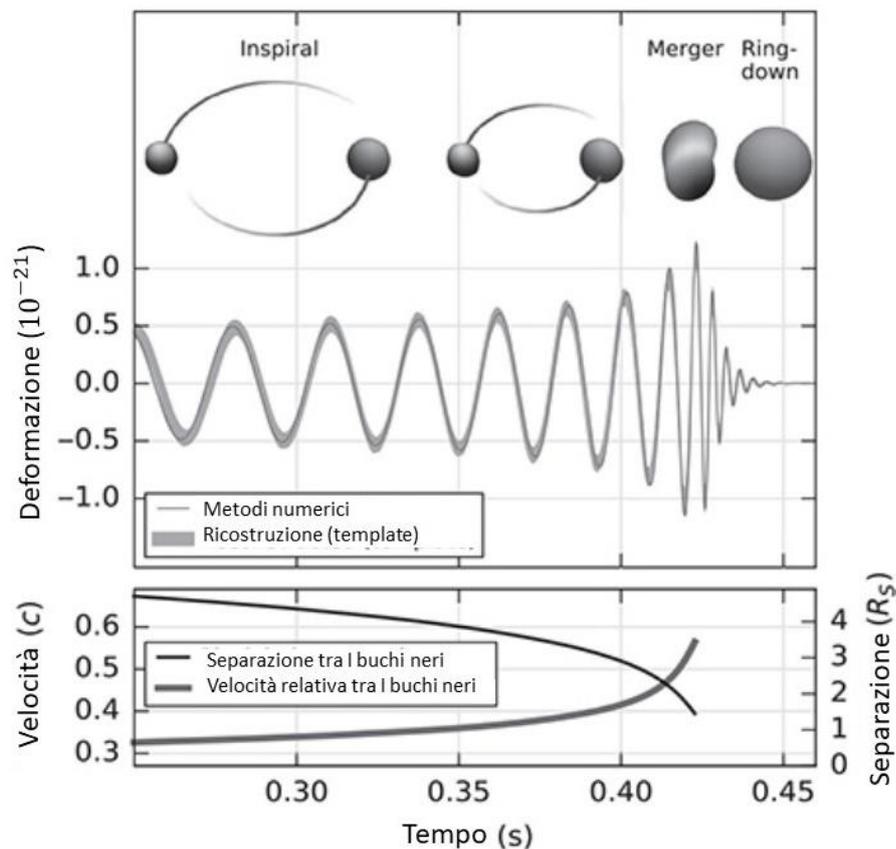
Il 14 settembre 2015, attraverso le due postazioni LIGO a Livingston, Louisiana, e Hanford, Washington, si ha la rilevazione di un segnale che, dopo mesi di analisi, è stato confermato essere un'onda gravitazionale emessa da una fusione di due buchi neri. La forma dell'onda del buco nero binario ha poi aiutato ad ottenere una stima delle masse dei due buchi neri, ovvero  $36^{+5}_{-4} M_o$  e  $29^{+4}_{-4} M_o$  ed una distanza di luminosità (distanza ottenuta comparando l'intensità osservata con la luminosità attuale) di  $410^{+160}_{-180} Mpc$ . [23] Questa corrisponde ad un *redshift* di  $0.09^{+0.03}_{-0.04}$ , cioè l'evento di fusione è avvenuto 12.2-13.1 *Gyr* dopo la formazione dell'universo. Il tempo che ci mette la luce per andare da Livingston a Hanford è di circa 10 *ms*, quindi la coincidenza tra i due *detector* deve essere in questo intervallo di tempo e dipenderà dall'orientamento del fronte d'onda. Ampiezza e fase danno altre indicazioni sulla localizzazione della sorgente. [24] La differenza osservata è di circa 7 *ms* e questo indica che la sorgente si trova nell'emisfero sud del cielo. Ad oggi, l'incertezza che si ha sulla localizzazione del sistema generatore dell'evento è di  $230 \text{ deg}^2$ .

**Figura 5.1:** I contorni indicano la posizione approssimata della sorgente, vicino LMC (*Large Magellanic Cloud*). Il contorno interno ha un *confidence level* del 10%, mentre l'esterno del 90%. Immagine presa da [15].



## 5.2 Un possibile scenario per la genesi di GW150914

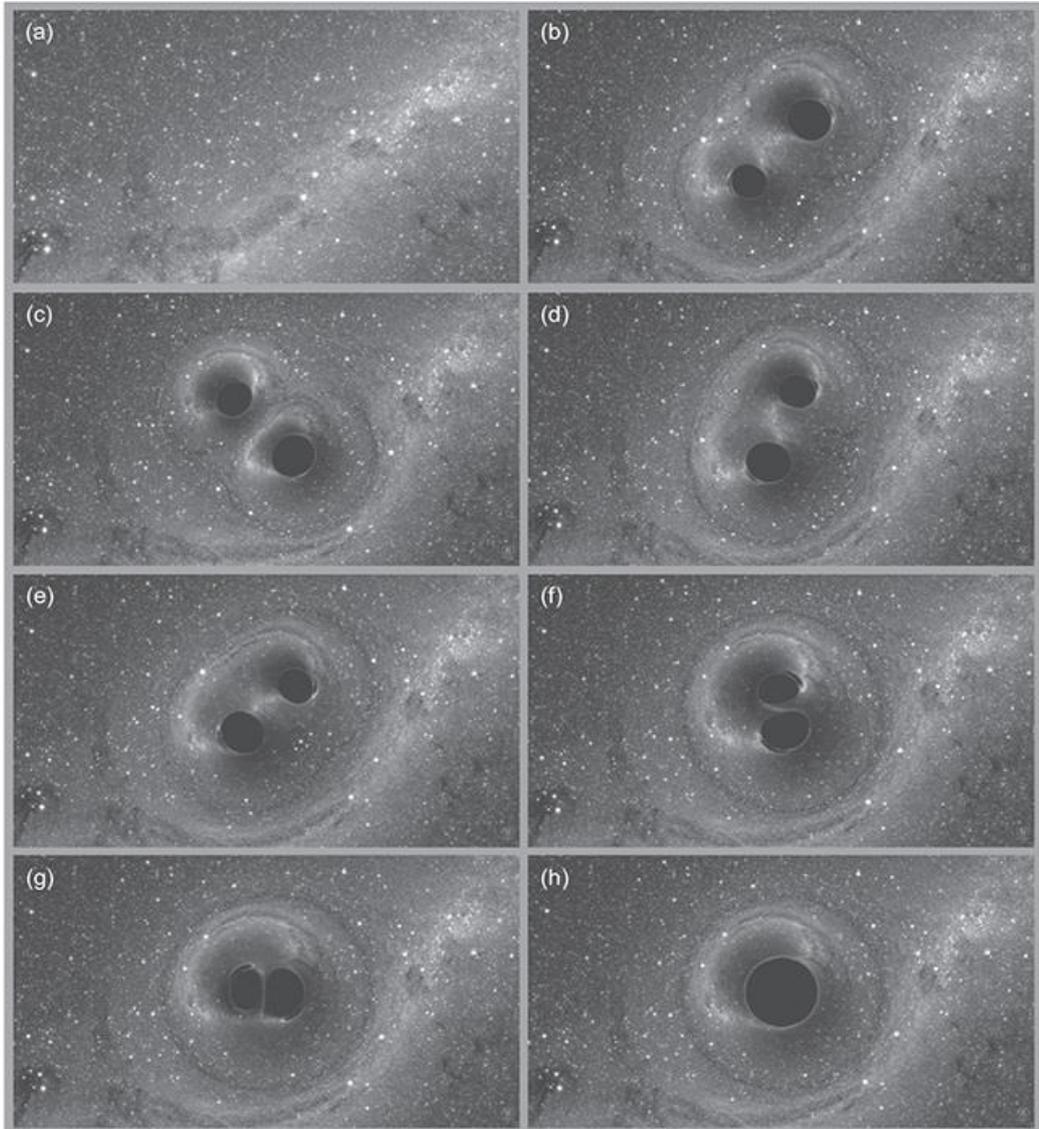
Presentando l'evento del 2015, è stato detto come questo sia stato generato da un buco nero binario, adesso sarà presentata la relazione che c'è tra i vari step del sistema e la deformazione. Definendo la separazione tra i due buchi neri in funzione del tempo in unità del raggio di Schwarzschild  $R_s = 2GM/c^2$ , dove  $M$  è la massa totale e la loro velocità relativa è  $v/c = (GM\pi f/c^3)^{1/3}$ , dove  $f$  è la frequenza dell'onda gravitazionale dalla simulazione di tipo *numerical relativity*, è presentata anche la relazione tra la separazione e la velocità effettiva con il tempo.



**Figura 5.2:** Nella prima parte si ha l'andamento della deformazione in relazione alle tre fasi del sistema. Nella seconda parte si ha l'andamento della separazione tra i buchi neri in unità di raggio di Schwarzschild e della velocità relativa durante le fasi del sistema. Immagine presa da [15].

## 5.2 UN POSSIBILE SCENARIO PER LA GENESI DI GW150914

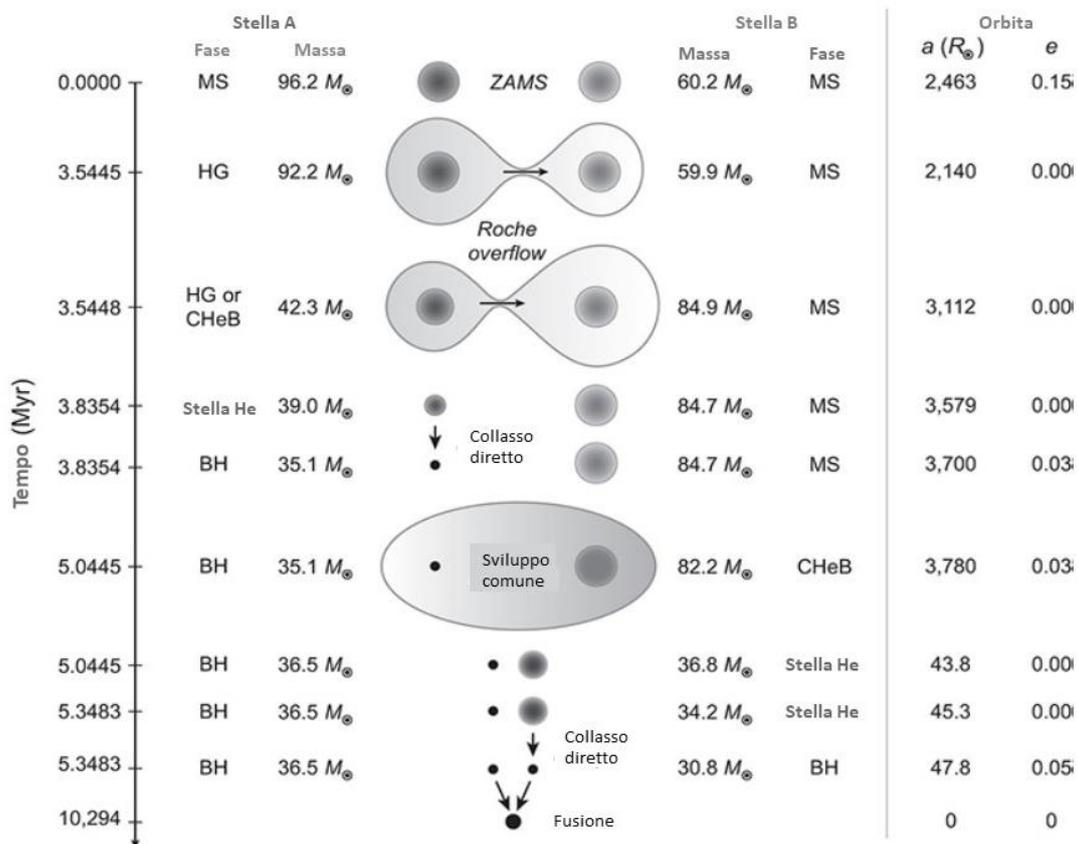
Nella figura seguente è presentata una simulazione della fusione dei due buchi neri.



**Figura 5.3:** (a) Situazione in assenza di buchi neri. (b)-(g) Sequenza di fusione. (h) Il buco nero di Kerr finale. Da un confronto tra il sistema in (a) ed il resto, si può vedere come il fenomeno del *gravitational lensing* abbia l'effetto di cambiare le posizioni apparenti di tutte le stelle vicine ai buchi neri. L'anello attorno a questi è chiamato anello di Einstein ed è causato dall'alta concentrazione di luce data dalle stelle dietro di buchi neri. Immagine presa da [15].

## 5.2 UN POSSIBILE SCENARIO PER LA GENESI DI GW150914

Infine, in **figura 5.4**, è presentato come si è formato il sistema che poi ha generato GW150914. Si tratta di un sistema binario formato circa 2 miliardi di anni dopo il big bang ( $z \sim 3.2$ ), con masse iniziali di  $96.2 M_{\odot}$  (stella A) e  $60.2 M_{\odot}$  (stella B), contenuto metallico pari a 0.03 volte quello del sole, separazione media  $a \sim 2500 R_{\odot}$  ( $7 \cdot 10^5$  km) ed eccentricità  $e = 0.15$ . La stella A si evolve velocemente, espandendo, e trasferendo più di metà della sua massa alla stella B attraverso il *Roche-lobe overflow*, ovvero quando in un sistema binario una delle due stelle supera il proprio lobo di Roche (cioè la regione di spazio attorno alla stella dove il materiale è legato gravitazionalmente alla stella stessa). La stella A decade in un buco nero di massa  $35.1 M_{\odot}$ , con il 10% della massa persa attraverso l'espulsione dei neutrini. La stella B invece ha visto la sua massa aumentare fino a  $84.7 M_{\odot}$ . L'espansione di B comincia in una fase di sviluppo comune con il buco nero formato da A, con una riduzione della distanza media da  $a \sim 3800 R_{\odot}$  ad  $a \sim 45 R_{\odot}$ . Alla fine di questa fase di sviluppo il buco nero formato dalla stella A ha massa  $36.5 M_{\odot}$  e B è una stella di elio di massa  $36.8 M_{\odot}$ . Quest'ultima collassa in un buco nero portando il sistema ad essere un buco nero binario di masse  $36.5 M_{\odot}$  e  $30.8 M_{\odot}$  con separazione  $a = 47.8 R_{\odot}$ . I due buchi neri hanno poi spiraleggiato insieme attraverso emissione di onde gravitazionali per 10.3 miliardi di anni, per poi fondersi 1.1 miliardi di anni fa ( $z \sim 0.09$ ) e produrre GW150914. [25]



## 5.2 UN POSSIBILE SCENARIO PER LA GENESI DI GW150914

**Figura 5.4:** Sequenze di vita del sistema che ha portato all'evento GW150914. Si sono indicati con: ZAMS (*zero age main sequence*) quando le stelle entrano nella sequenza principale; MS è la *main sequence*; CHeB indica l'aumento di temperatura del nucleo di elio (una stella di elio è una stella che presenta linee spettrali di elio forti e linee H deboli); BH indica un buco nero. Il tempo è misurato dalla formazione del sistema binario. Immagine presa da [15][26].

# Conclusioni e Prospettive

In questo elaborato di tesi, è stata dapprima presentata la teoria sulle onde gravitazionali. Dopodiché ne è stata esposta la natura e la loro luminosità, per poi introdurre le proprietà di alcune sorgenti di onde, presentando le loro caratteristiche. Nel capitolo seguente si sono invece considerate le sorgenti deboli, se ne è presentato il caso più comune dei sistemi binari, e si è visto un metodo di trattazione attraverso l'approssimazione Newtoniana. Si è quindi studiato in che modo le sorgenti deboli danno vita alle onde gravitazionali focalizzando maggiormente l'attenzione sul campo e sul potenziale di radiazione, ottenibili grazie alla linearizzazione delle equazioni di Einstein. Per il primo, usando la condizione di *slow-motion*, è stata trovata un'espressione esplicita e sono state definite le componenti del momento di quadrupolo ridotto; il secondo, invece, è stato corretto tramite un termine aggiuntivo volto a considerare gli effetti del potenziale di radiazione nella *near-zone*. Successivamente si sono trattate le sorgenti forti, presentando in particolare eventi di fusione e di collasso di corpi celesti. Ci siamo in particolare concentrati sui primi, presentando eventi di fusione tra due tipi di buchi neri, buchi neri e stelle di neutroni e tra stelle di neutroni. Si è visto come in questo caso, a differenza del capitolo precedente, la discussione è stata inevitabilmente più fenomenologica e meno formale, visto che per sorgenti del genere sono necessarie complesse simulazioni numeriche. Infine, è stato presentato l'evento che ha dato origine alla ricerca sulle onde gravitazionali. Si è anche introdotto un possibile scenario di produzione del sistema che ha poi dato vita all'evento ed il modo in cui si è sviluppato l'evento. Ogni giorno, grazie anche al continuo miglioramento degli osservatori come LIGO e VIRGO, può essere un giorno di una nuova rilevazione di onde gravitazionali. In questa direzione si cercherà di andare attraverso LISA, un sistema di tre satelliti posti ai vertici di un triangolo equilatero, separati tra loro da una distanza di circa 5 milioni di chilometri. LISA sarà sensibile a onde di frequenza compresa tra  $0,1 \text{ mHz}$  e  $1 \text{ Hz}$  e, di conseguenza, questo porterà alla rilevazione di un numero di eventi decisamente maggiore di quello di oggi, ma anche, possibilmente, la rilevazione di nuovi eventi. La data di lancio è prevista per il 2034 e le misurazioni dovrebbero durare 5 anni.

# Indice delle figure

3.1	Sistema di stelle binarie	11
3.2	Sorgente di onde gravitazionali in slow-motion	20
4.1	Fusione di una stella di neutroni binaria	24
4.2	Fusione di buchi neri	25
5.1	Localizzazione di GW150914	27
5.2	Andamento della deformazione con le fasi del sistema in GW150914	28
5.3	Simulazione di GW150914	29
5.4	Sequenze di vita del sistema che ha portato all'evento GW150914	30

# Bibliografia

- [1] Buonanno A., Sathyaprakash B.S., *Chapter 6: Sources of Gravitational Waves: Theory and Observations*, in *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*, Cambridge University Press, Cambridge (2009), pp. 287-346. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139583961.009>.
- [2] Maxwell J., *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Philosophical Transaction of Royal Society of London, **155** (1865), pp. 499. DOI: 10.1098/rstl.1865.0008.
- [3] Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 6, 061102, pp. 1-2. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [4] Bondi H., Pirani F.A.E., Robinson I., *Gravitational waves in general relativity III. Exact plane waves*, in "Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences" Vol. **251**, No. 1267, Royal Society (1959), pp. 519-533. DOI: 10.1098/rspa.1959.0124.
- [5] Barone V., *Relatività. Principi e applicazioni*, Litografia "Il Mettifoglio", Torino, 2004. ISBN: 978-88-339-5757-9.
- [6] Capozziello S., Boskoff W.G., *A Mathematical Journey to Relativity: Deriving Special and General Relativity with Basic Mathematics*, Springer Nature, Basingstoke, 2020. ISBN: 978-3-030-47893-3.
- [7] Misner W. C., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*, Princeton University Press, Princeton, 2017. ISBN: 978-0-691-17779-3.
- [8] Sathyaprakash B.S., Schutz B. F., *Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves*, Living Rev. Rel. **12**, 2 (2009), pp. 9, 16-18, 25,26. DOI: 10.12942/lrr-2009-2.
- [9] Peters, P. C., *Gravitational radiation and the motion of two point masses*, Phys. Rev. **B 136**, 1224- 1232, (1964). DOI: 10.1103/PhysRev.136.B1224.

- [10] Maggiore M., *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, New York, 2008, ISBN: 978-0-19-857074-5.
- [11] Press, W. H., Thorne K. S., *Gravitational-wave astronomy*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **10**, 335-374, (1972). DOI: 10.1146/annurev.aa.10.090172.002003.
- [12] Zerilli F. J., "*Gravitational field of a particle falling in Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics*", Phys. Rev. D **2**, 2141-2160 (1970), pp. 2141-2160. DOI: 10.1103/PhysRevD.2.2141.
- [13] Davis M., Ruffini R., Press W.H., Price R.H., "*Gravitational radiation from a particle falling radially into a Schwarzschild black hole*", Phys. Rev. Lett. **27**, (1971), pp. 1466-1469. DOI: 10.1103/PhysRevLett.27.1466.
- [14] C.N. de Araujo, Miranda D. O., Aguiar D. O., *Stochastic background of gravitational waves*, Phys.Rev. **D61** (2000) 124015, pp. 1-2. DOI: [10.1103/PhysRevD.61.124015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.124015).
- [15] Guidry M., *Modern General Relativity. Black Holes, Gravitational Waves, and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2019. ISBN: 978-1-107-19789-3.
- [16] Peters, P. C., Mathews J., *Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit*, Phys. Rev. **131**, 435-440, (1963). DOI: 10.1103/PhysRev.131.435.
- [17] Burke, W. L, *Gravitational radiation damping of slowly moving systems calculated using matched asymptotic expansions*, J. Math. Phys. **12**, 402-418. (1971). DOI: 10.1063/1.1665603.
- [18] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, and the KAGRA Collaboration, *Observation of gravitational waves from two neutron star-black hole coalescences*, Astrophys. J. Lett. **915** (2021) n.1, L5, p. 1. DOI: 10.3847/2041-8213/ac082e.
- [19] Fryer C.L., Holz D.E., Hughes S.A., *Gravitational Wave Emission From Core-Collapse of Massive Stars*, Astrophys. J. **565** (2002), pp. 430-446. DOI: 10.1086/324034.

- [20] Kotake K., Ohnishi N., Yamada S., *Gravitational Radiation from Standing Accretion Shock Instability in Core-Collapse Supernovae*, *Astrophys. J.* **655**, 406, (2007) DOI: 10.1086/509320.
- [21] Kotake K., Ohnishi N., and Yamada S., *The Gravitational Wave Signal of a Core Collapse Supernova Explosion of a 15  $M_{\odot}$  Star*, *Comptes Rendus Physique*, **14**, 318, (2013). DOI: 10.1016/j.crhy.2013.01.008.
- [22] Ott C. D., *The Gravitational Wave Signature of Core-Collapse Supernovae*, *Class. Quantum Grav.*, **26**, 063001, (2009). DOI: 10.1088/0264-9381/26/6/063001.
- [23] Abbott B. P., Abbott R. et al., *GW150914: Implications for the stochastic gravitational-wave background from binary black holes*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 131102, (2016), pp. 6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.131102.
- [24] Abbott B. P. et al., *Binary Black Hole Mergers in the First Advanced LIGO Observing Run*, *Phys. Rev.*, **X6**, 041015, (2016) DOI: 10.1103/PhysRevX.6.041015.
- [25] Belczynski K. et al, *The First Gravitational-Wave Source from the Isolated Evolution of Two Stars in the 40–100 Solar Mass Range*, *Nature (7608)* **534**, (2016), pp. 512–515. DOI: 10.1038/nature18322.
- [26] Guidry M. W., *Stars and Stellar Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2019. ISBN: 978-1-107-19788-6.