

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Studio e Ricerca delle Soluzioni di Wormhole

Relatori:

Prof. Salvatore Capozziello
Dr. Francesco Bajardi

Candidato:

Gianluca Sasanelli
Matr. N85001408

A.A. 2020/2021

INDICE

INTRODUZIONE	3
1. Le singolarità in relatività generale	6
i. La metrica di Schwarzschild.....	7
ii. L'estensione di Kruskal	10
2. I wormholes	15
iii. Il ponte di Einstein-Rosen.....	15
iv. Il wormhole	16
v. I buchi neri e i wormholes di Schwarzschild per il viaggio interstellare	17
3. La metrica di Morris e Thorne	18
vi. Le condizioni di traversabilità.....	18
vii. I dettagli matematici della traversabilità	19
viii. La materia esotica e le condizioni dell'energia	22
4. Ricerca moderna delle soluzioni di Wormhole.....	23
ix. Le frequenze epicicliche nella metrica di Schwarzschild	23
x. L'utilizzo sperimentale delle frequenze epicicliche	25
5. Conclusioni.....	27
6. Bibliografia	28

INTRODUZIONE

La relatività generale è una teoria geometrica della gravitazione pubblicata da Einstein nel 1915 ed è la corrente descrizione dell'interazione gravitazionale in fisica moderna. Essa generalizza la relatività ristretta e ridefinisce la legge di gravitazione universale di Newton, fornendo una descrizione unitaria della gravità come proprietà geometrica dello spazio-tempo. La motivazione fondamentale che ha portato allo sviluppo della relatività generale è che la teoria gravitazionale newtoniana non è consistente con la relatività speciale, in quanto ammette la possibilità di un'azione istantanea tra i corpi. Si potrebbe altresì pensare di poterla modificare all'interno della struttura della relatività speciale. Tuttavia, due idee principali indussero Einstein a non seguire questo percorso: la prima riguarda il concetto, noto ai fisici classici, del principio di equivalenza in forma debole, cioè che massa gravitazionale e massa inerziale hanno lo stesso valore. Einstein estese questo principio a quello che oggi è chiamato principio di equivalenza in forma forte [1] [2]. La definizione di quest'ultimo è la seguente: per un oggetto in caduta libera in un campo gravitazionale, il risultato di tutti gli esperimenti locali sono indipendenti dal campo stesso. La seconda idea è legata al principio di Mach. In relatività speciale come in fisica classica, la struttura dello spazio-tempo è assunta a priori ed è indipendente dai corpi presenti al suo interno, inoltre il moto inerziale e non rotazionale non sono influenzati da questi. Ma il principio di Mach modifica totalmente questa concezione poiché prevede che tutta la materia deve contribuire alla definizione locale di moto inerziale e non rotazionale, e che in un universo privo di materia questi concetti non dovrebbero avere significato. Einstein accettava questo pensiero e ne fu notevolmente influenzato. Il principio di equivalenza fu usato, da Einstein, come punto di partenza per questa nuova teoria, mentre l'influenza del principio di Mach si manifesta nelle equazioni di campo. Iniziamo, pertanto, l'introduzione della relatività generale dal principio di equivalenza.

Nella teoria newtoniana l'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale era una coincidenza non spiegata e fu, perlopiù, ignorata. Tuttavia, Einstein realizzò le implicazioni dovute all'indipendenza dell'accelerazione gravitazionale da proprietà specifiche della massa accelerata. In particolare, Einstein comprese che un corpo in caduta libera non è in grado di "sentire il proprio peso", quindi, per un sistema locale in caduta libera gli effetti gravitazionali sono nulli. Di conseguenza, operativamente non è possibile distinguere una accelerazione arbitraria dagli effetti della gravità: ciò porta al principio di equivalenza in forma forte. Successivamente, Einstein, con molteplici esperimenti mentali, intuì che la gravità è associata alla geometria spaziotemporale, nello specifico alla sua curvatura. Per definire la curvatura intrinseca possiamo utilizzare la seguente idea: nello spazio euclideo, trasportando un vettore parallelamente su un percorso chiuso, esso, tornato al punto d'inizio, avrà la stessa direzione di partenza. Questa proprietà non è valida nel caso generale; il tensore di Riemann misura, così, la deviazione dallo spazio euclideo e quindi la curvatura della varietà in questione.

Dopo dieci anni di studio, Einstein pubblica le celeberrime equazioni di campo [3] [4]. Storicamente, queste equazioni sono state ricavate contemporaneamente da Hilbert e da Einstein, seguendo due ragionamenti completamente diversi. Seguiremo il metodo di Hilbert, basato sul principio di minima azione. Definiamo l'azione S come segue

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} dx^4, \quad (1)$$

dove $\sqrt{-g} dx^4$ è l'elemento di volume invariante e \mathcal{L} la lagrangiana. Hilbert assunse $\mathcal{L} = R$, lo scalare di Ricci, e pertanto, imponendo $\delta S = 0$ si ottengono le seguenti equazioni di campo¹

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein, $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci, R lo scalare di Ricci, $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso, c la velocità della luce e G_N la costante gravitazionale. È un sistema di dieci equazioni differenziali accoppiate e non lineari, e in quanto tale estremamente difficile da risolvere. Delle soluzioni esatte possono essere trovate solo sotto semplici condizioni, come nel caso in cui sussistano simmetrie.

Negli anni successivi alla formulazione delle equazioni di campo si cercò di verificare la validità della relatività generale eseguendo i cosiddetti test classici, cioè quei fenomeni empirici per i quali si è potuto appurare la fondatezza della relatività generale. I primi tre test proposti da Einstein furono la precessione al perielio di Mercurio, la curvatura della luce nel campo gravitazionale e il redshift gravitazionale. Iniziamo dal primo: era noto che la precessione del perielio di Mercurio differiva dalle predizioni newtoniane di 43 secondi d'arco, ma fu provato che essa è perfettamente in accordo con le previsioni della relatività generale. Matematicamente si devono studiare le orbite in una metrica di Schwarzschild, ciò verrà fatto nell'ultimo capitolo al fine di esaminare le frequenze epicicliche in questa metrica. Il secondo test è la curvatura della luce attorno a un oggetto massivo. La fisica classica predice la metà del valore esatto. Eddington, nel 1919, misurò la deflessione della luce transitante vicino al sole e i risultati erano conformi alle predizioni della teoria einsteiniana. Infine, il terzo test, sul redshift gravitazionale, fu effettuato intorno al 1950 e anch'esso fu un successo per la relatività generale. Inoltre, nel 2015, fu misurata la prima onda gravitazionale con l'apparato LIGO, che si aggiunge alle prove della validità della relatività generale. Le onde gravitazionali sono propagazioni delle oscillazioni del campo gravitazionale, e si muovono alla velocità della luce. Esse furono scoperte, matematicamente, da Einstein poco dopo il 1915 linearizzando le equazioni di campo.

La teoria di Einstein è stata usata anche a livello cosmologico secondo il modello Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker: gli autori di questo modello trovarono una soluzione esatta delle equazioni di campo che descrive un universo omogeneo, isotropo, e in espansione o contrazione. L'accelerazione dell'universo dipende dalla cosiddetta "costante cosmologica" che si aggiunge alle originali equazioni di campo, e senza la quale si trova un Universo in decelerazione. Questa costante originariamente fu introdotta da Einstein nel 1917 per controbilanciare l'effetto gravitazionale e pertanto, ottenere un universo statico; tuttavia, essa fu lasciata da parte a seguito della conferma di Hubble di un universo in espansione e fu successivamente reintrodotta nel 1988, a seguito della scoperta dell'accelerazione dell'Universo. La costante cosmologica è la più semplice spiegazione ed è interpretata come energia di vuoto; pertanto, si pensa che sia legata ai campi quantistici.

¹Il tensore di Ricci si ottiene contraendo il primo e terzo indice del tensore di Riemann, il quale ha la seguente forma $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu;\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu;\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}$, dove $\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\alpha}}$ e il punto e virgola indica la derivata covariante.

La prima soluzione delle (2) fu esibita da Schwarzschild nel 1916 imponendo la simmetria sferica alla sorgente del campo gravitazionale. Dunque, partendo da una sorgente a simmetria sferica e poi risolvendo le equazioni di campo², trovò:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

dove $R_S = \frac{2G_N M}{c^2}$ è chiamato il raggio di Schwarzschild del corpo di massa M che funge da sorgente del campo gravitazionale, e $d\Omega^2$ rappresenta la 2-sfera definita come $d\Omega^2 = d\varphi^2 \sin^2 \theta + d\theta^2$. Come si può vedere, due singolarità sono presenti nella metrica (3), corrispondenti a $r = R_S$ e $r = 0$. In particolare, per $r = R_S$ diverge l'elemento radiale g_{rr} , mentre per $r = 0$ si ha la divergenza dell'elemento g_{tt} .

La metrica di Schwarzschild fu studiata dal fisico L.Flamm [5], il quale comprese che le equazioni di campo ammettevano una soluzione collegante due regioni spaziotemporali differenti. Questo concetto fu studiato formalmente, nel 1935, da Einstein e Rosen nell'articolo [6]. Lo scopo di ref. [6] è quello di esplorare le possibilità di una teoria atomistica della materia e dell'elettricità, utilizzando come uniche variabili il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ della relatività generale e il potenziale scalare φ_μ della teoria di Maxwell. Einstein e Rosen effettuarono un cambio di coordinate sulla metrica di Schwarzschild, ottenendo una rappresentazione di tale soluzione che collegasse due "fogli" spaziotemporali. In seguito, questo tipo di soluzione fu chiamata wormhole [7]. Tuttavia, l'argomento del wormhole fu lasciato in disparte praticamente fino al 1988, quando Morris e Thorne pubblicarono una nuova scoperta [8]. In ref. [8] fu studiato il viaggio interstellare e a questo scopo i due autori giungono a descrivere matematicamente una possibile soluzione di wormhole nella quale impongono delle condizioni legate alla possibilità di attraversarlo, da parte di un essere umano.

La metrica generica di questa soluzione è:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (4)$$

dove $\phi(r)$ e $b(r)$ sono due funzioni arbitrarie che possono essere ottenute in due modi:

1. A-priori, cioè imponendo delle condizioni al wormhole che definiscano le due funzioni. Come fatto dagli autori di ref. [8];
2. A-posteriori, trovando dei risultati sperimentali corrispondenti a una metrica del genere e costruendo le due funzioni in base a questi dati.

Un metodo per ottenere i dati sperimentali è basato sullo studio delle frequenze epicycliche delle orbite nello spazio-tempo considerato. Da queste è possibile ricavare la geometria spaziotemporale considerata, e di conseguenza la forma della sorgente di campo. Il problema principale è che le misurazioni di queste frequenze possono avvenire solo indirettamente attraverso il rilevamento dei

² La convezione sulla metrica usata in questa tesi è (-, +, +, +).

QPOs, i quali modelli sono ancora prettamente teorici; questo argomento sarà esposto nell'ultimo capitolo di questo lavoro di tesi. Comunque, anche se i wormholes sono delle soluzioni delle equazioni di campo, la loro esistenza rimane un tema puramente speculativo, perché non ne è stato trovato ancora riscontro. Tuttavia, essi si configurano all'interno di un tema particolarmente interessante, dal momento che interessa la riconciliazione tra i principi della fisica moderna e la possibilità del viaggio nel tempo.

Per riassumere, nel capitolo 1 sarà data la definizione di singolarità e sarà trattata la metrica di Schwarzschild con l'annessa estensione di Kruskal [9]. Successivamente, nel capitolo 2, sarà studiato il primo esempio di wormhole e il problema della sua traversabilità. Di conseguenza, verrà trattata una metrica con questa proprietà. Infine, sarà esaminato un metodo moderno di ricerca per queste soluzioni, basato sulle frequenze epicycliche.

1. LE SINGOLARITÀ IN RELATIVITÀ GENERALE

Uno degli aspetti peculiari della relatività generale sono le singolarità, ossia i punti in cui gli elementi metrici presentano "comportamenti patologici"; il loro studio è fondamentale per comprendere la natura dei wormholes. In generale, in una metrica definita in una varietà in \mathbb{R}^4 , le singolarità sono i punti di \mathbb{R}^4 in cui almeno una componente della metrica non può essere definita in maniera continua. Un esempio è il Big Bang, ossia la singolarità della metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Ma storicamente le prime singolarità studiate sono nella metrica di Schwarzschild (3), la quale è singolare in $r = R_s$ e $r = 0$. Tuttavia, come vedremo, la prima singolarità può essere eliminata cambiando coordinate, di conseguenza la definizione precedente di singolarità non rispecchia una realtà fisica. Nel 1918 Einstein definì le condizioni per il quale una singolarità sia reale [10]:

1. La metrica non può essere resa regolare tramite un cambiamento di coordinate;
2. La singolarità deve essere accessibile, ossia deve esistere una curva di tipo tempo che, partendo da un punto regolare dello spazio-tempo, raggiunge la singolarità in un tempo proprio finito.

Quindi, la singolarità in $r = R_s$ di questa metrica non è reale, poiché, come vedremo in questo capitolo, attraverso un cambiamento di coordinate è possibile eliminarla.

La definizione attuale di singolarità si fonda sul teorema di incompletezza geodetica. Una geodetica incompleta ha il parametro affine finito, ossia questa geodetica è inestensibile in almeno una direzione. Nel caso di una geodetica di tipo tempo tale parametro è il tempo proprio. Pertanto, si definisce uno spazio-tempo singolare se questo possiede almeno una geodetica incompleta, e questo tipo di spazio è chiamato *geodeticamente incompleto*³. Questa definizione di singolarità non fornisce informazioni sulla natura della singolarità in sé, ma solo della sua presenza all'interno di uno spazio-tempo.

³ È importante notare che questa definizione è indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Seguendo un approccio storico, inizialmente tratteremo lo studio della metrica di Schwarzschild e l'estensione di Kruskal, al fine di introdurre, nel secondo capitolo, i wormholes.

i. La metrica di Schwarzschild

Nel 1916 Karl Schwarzschild fornì la prima soluzione alle equazioni di Einstein [11], partendo da una metrica arbitraria che fosse sia statica che sfericamente simmetrica nello spazio-tempo vuoto. Come sarà evidente nel seguito, la prima assunzione non è necessaria, in quanto deriva direttamente dalla seconda; quindi, sotto queste condizioni la metrica ha la seguente forma:

$$ds^2 = -A(r, t)c^2 dt^2 + B(r, t) dr^2 + 2C(r, t)drdt + D(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5)$$

dove A, B, C, D sono funzioni arbitrarie della coordinata radiale e temporale. Per ottenere il risultato di Schwarzschild è conveniente scrivere la metrica in un altro sistema di coordinate, nel quale non compaiono i termini diagonali. È lecito questo passaggio per la proprietà di invarianza rispetto a trasformazioni di coordinate. Si ottiene:

$$ds^2 = -e^v c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6)$$

dove v e λ sono funzioni di r e t .

Gli elementi del tensore metrico sono:

$$g_{00} = -e^v, g_{11} = e^\lambda, g_{22} = r^2, g_{33} = -r^2 \sin^2\theta. \quad (7)$$

Per semplicità possiamo utilizzare la seguente notazione $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$.

Si procede, seguendo i passaggi di ref. [12], utilizzando l'equazione della lagrangiana e quella delle geodetiche per ricavare i simboli di Christoffel. La forma della lagrangiana è la seguente:

$$\mathcal{L} = g_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v = -e^v(\dot{x}^0)^2 + e^\lambda(\dot{x}^1)^2 + r^2(\dot{x}^2)^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{x}^3)^2. \quad (7)$$

Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (8)$$

ed esplicitandole rispetto alle derivate di ordine massimo, riconosciamo l'equazione delle geodetiche, che ha la seguente forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha k}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (9)$$

Quindi, per ricavare la forma delle equazioni di campo, è necessario risolvere la (9) per ogni indice; partiamo da $\mu = 0$ e si ottiene⁴:

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{2c} v_\tau \dot{x}^0 \dot{x}^0 + v_r \dot{x}^0 \dot{x}^1 + \frac{1}{2c} \lambda_\tau e^{\lambda-v} \dot{x}^1 \dot{x}^1 = 0, \quad (10)$$

⁴ La lettera al pedice indica la derivazione rispetto a quella variabile.

e confrontando con l'equazione delle geodetiche si perviene alla forma di alcuni simboli di Christoffel

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2c} v_r, \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} v_r, \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2c} \lambda_r e^{\lambda-v}. \quad (11)$$

Ponendo adesso $\mu = 1$, similmente, si ottiene

$$\ddot{x}^1 + \frac{1}{2} e^{-\lambda+v} v_r \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \frac{1}{2} \lambda_r \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \frac{1}{c} \lambda_r \dot{x}^0 \dot{x}^1 - r e^{-\lambda} \lambda_r \dot{x}^2 \dot{x}^2 - r e^{-\lambda} \sin^2 \theta \dot{x}^3 \dot{x}^3 = 0, \quad (12)$$

come in precedenza ne segue che i relativi simboli di Christoffel hanno la forma:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} v_r e^{-\lambda+v}, \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2c} \lambda_r, \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \lambda_r, \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \Gamma_{33}^1 = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Per $\mu = 2$ si ottiene

$$\ddot{x}^2 + \frac{2}{r} \dot{x}^1 \dot{x}^2 - \sin \theta \cos \theta \dot{x}^3 \dot{x}^3 = 0, \quad (14)$$

da cui

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta. \quad (15)$$

Infine, per $\mu = 3$ abbiamo,

$$\ddot{x}^3 + \frac{2}{r} \dot{x}^1 \dot{x}^3 + 2 \cot \theta \dot{x}^2 \dot{x}^3 = 0, \quad (16)$$

da cui

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (17)$$

Adesso, con l'obiettivo di ricavare le equazioni di campo, è necessario ottenere tutte le componenti del tensore di Ricci a partire dai simboli di Christoffel. Usufruiamo della seguente espressione:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \ln \sqrt{-g} + \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \frac{\partial}{\partial x^\tau} \ln \sqrt{-g} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau \Gamma_{\tau\beta}^\sigma. \quad (18)$$

Sostituendo nelle equazioni di Einstein nel vuoto, ossia nelle (2) con un tensore energia-impulso nullo, si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$R_{01} = \frac{1}{cr} \lambda_r = 0, \quad (19)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left(v_{rr} + \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{2v_r}{r} - \frac{1}{2} v_r \lambda_r \right) = 0, \quad (20)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} \left(v_{rr} + \frac{1}{2} v_r^2 - \frac{2\lambda_r}{r} - \frac{1}{2} v_r \lambda_r \right) = 0. \quad (21)$$

Dalla prima equazione si ricava che λ non dipende dal tempo, e nell'altre due non compare la derivata di v rispetto al tempo, e quindi, si può assumere che anch'essa non dipenda dal tempo.

Dunque, facendo la sola ipotesi di un sistema a simmetria sferica, si ottiene una metrica indipendente dal tempo. Questo risultato è conosciuto come teorema di Birkhoff [13]. Dalla (20) si ottiene

$$v_{rr} + \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{2v_r}{r} - \frac{1}{2}v_r\lambda_r = 0, \quad (22)$$

e dalla (21) si ha

$$v_{rr} + \frac{1}{2}v_r^2 - \frac{2\lambda_r}{r} - \frac{1}{2}v_r\lambda_r = 0. \quad (23)$$

Sottraendo le ultime due equazioni membro a membro, si ottiene

$$v_r = -\lambda_r, \quad (24)$$

da cui

$$v + \lambda = \text{costante}. \quad (25)$$

La costante d'integrazione deve essere nulla affinché si abbia a grandi distanze una metrica piatta, cioè per $r \rightarrow \infty$, $e^v \rightarrow 1$, $e^\lambda \rightarrow 1$ deve essere

$$e^v = e^{-\lambda}. \quad (26)$$

Sostituendo si ha

$$v_{rr} + \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{2v_r}{r} = 0, \quad (27)$$

che può essere scritta come

$$\frac{1}{r}(re^v)'' = 0, \quad (28)$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a r .

Integrando la (28) due volte si ottiene

$$e^v = A + \frac{B}{r}. \quad (29)$$

La condizione al contorno, cioè la metrica piatta asintoticamente implica che

$$A = 1. \quad (30)$$

Utilizzando il limite per campi deboli, ossia $g_{00} = 1 - \frac{2G_{NM}}{Rc^2}$, si ottiene

$$e^v = e^{-\lambda} = 1 - \frac{R_S}{r}, \quad \text{con } R_S = \frac{2G_{NM}}{c^2}. \quad (31)$$

A valle delle soluzioni in (31), otteniamo la seguente forma della metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (32)$$

dove R_s è chiamato “raggio di Schwarzschild”. La metrica appare singolare in $r = R_s$ e in $r = 0$. La prima, nella fisica antecedente al 1960, veniva denominata “singolarità di Schwarzschild”; tale attribuzione risulta impropria dal momento che, come verrà discusso nel prossimo paragrafo, questa singolarità non è fisica ma è dovuta alla scelta di coordinate.

ii. L'estensione di Kruskal

Come già accennato in precedenza, ci sono due tipi di singolarità:

- Una singolarità fisica, quando la metrica non può essere resa regolare tramite un cambiamento di coordinate
- Una “coordinate singularity”, nel caso in cui le coordinate non riescono a descrivere una certa regione spaziotemporale e trasformandole la singolarità scompare.

Solitamente non è semplice determinare in quale caso ci si trova; fortunatamente, nel caso della metrica di Schwarzschild è possibile dimostrare che la singolarità sulla 3-superficie $r = R_s$ non è reale e può essere eliminata tramite un cambio di variabili. Questo processo fu effettuato da Kruskal nel 1960 al fine di estendere lo spazio di Schwarzschild fino alla singolarità reale [9]. Senza perdita di generalità, al fine di questo studio basterà analizzare solo la parte di metrica relativa alle coordinate r - t , data la simmetria sferica della stessa. Verrà quindi analizzata solo la seguente metrica bidimensionale.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}}. \quad (33)$$

In generale, il miglior metodo per cambiare coordinate è quello d'introdurre delle nuove che sono strettamente legate alla geometria spaziotemporale: questo può essere perseguito introducendo una famiglia di geodetiche di tipo nullo radiali e usare il parametro affine lungo la geodetica come coordinata. Conviene dividere le geodetiche di tipo nullo in due classi “uscenti” ed “entranti”, sicché all'interno di tali classi due geodetiche distinte non si intersecano mai⁵. Introducendo queste coordinate, chiamate coordinate nulle, per le quali la prima è costante sulle geodetiche “uscenti” e la seconda su quelle “entranti”, si ottiene una griglia basata sulla geometria di queste geodetiche, come mostrato nella seguente figura.

⁵ Proprio per questo motivo questo metodo è utilizzabile solo in spazi bidimensionali, in spazi a più dimensioni le geodetiche possono intersecarsi e spuntano altre singolarità di coordinata.

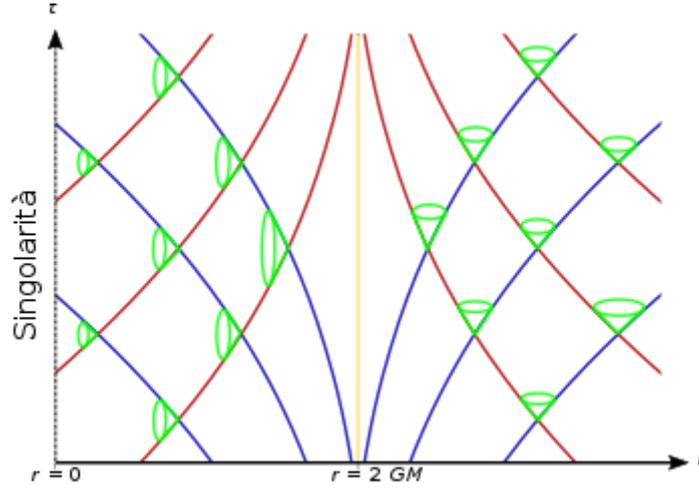


Figura 1.1. La soluzione di Schwarzschild nelle coordinate di Schwarzschild r - t . Le geodetiche di tipo nullo entranti sono indicate in rosso mentre quelle uscenti in blu. In verde sono rappresentati i coni di tipo luce.

Le geodetiche nulle dello spazio-tempo di Schwarzschild si ottengono dalla *null condition*⁶:

$$0 = g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2, \quad (34)$$

dove k_u è il vettore tangente alla geodetica e il punto indica la derivata rispetto al parametro affine. La (34) implica

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2. \quad (35)$$

Quindi, la geodetica radiale di tipo nullo, nella metrica di Schwarzschild, soddisfa

$$t = \pm r_* + \text{cost}, \quad (36)$$

il segno + indica le geodetiche uscenti e il segno – quelle entranti, la coordinata radiale di *Regge-Wheeler* r_* è data da:

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad (37)$$

così che $\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$.

Definiamo le coordinate nulle come:

$$u = t - r_*, \quad (38)$$

$$v = t + r_*. \quad (39)$$

Queste coordinate sono note in letteratura con il nome di coordinate di *Eddington-Finkelstein*. Utilizzando queste coordinate la metrica diventa

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv, \quad (40)$$

⁶ In unità naturali.

dove r è adesso vista come una funzione di u e v , definita da

$$r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) = r_* = \frac{(v-u)}{2}. \quad (41)$$

Utilizzando la (40), possiamo riscrivere la (39) come

$$ds^2 = -\frac{2Me^{-\frac{r}{2M}}}{r} e^{\frac{v-u}{4M}} dudv, \quad (42)$$

dove la metrica è stata fattorizzata in un termine $\frac{e^{-\frac{r}{2M}}}{r}$, il quale non è singolare per $r \rightarrow 2M$, e un altro dipendente unicamente da u e v . Nondimeno, poiché le coordinate u e v definite da (38-39) corrispondono alla regione $r > 2M$, non sono sufficienti per analizzare la singolarità in $r = 2M$. Allora conviene definire delle nuove coordinate dipendenti da u e v

$$U = -e^{\frac{-u}{4M}}, \quad (43)$$

$$V = e^{\frac{v}{4M}}, \quad (44)$$

tramite le quali la metrica può essere riscritta come

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2M}}}{r} dV dU. \quad (45)$$

In questa forma è evidente che la metrica scritta non è singolare per $r = 2M$ (ossia $U = 0$ o $V = 0$), il che implica che è possibile estendere la soluzione di Schwarzschild in modo che le nuove coordinate U e V possano assumere tutti i valori reali positivi. La singolarità in $r = 0$, come già accennato, è reale e quindi non può essere eliminata tramite ulteriori trasformazioni di coordinate.

Per ottenere la forma della metrica data da Kruskal, è necessario effettuare un ulteriore cambiamento di coordinate, ovvero

$$T = \frac{(U+V)}{2}, \quad (46)$$

$$X = \frac{(V-U)}{2}. \quad (47)$$

Si perviene dunque alla seguente forma della metrica:

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2M}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (48)$$

La relazione tra le vecchie coordinate (t, r) e le nuove coordinate (T, X) è data da

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \frac{r}{e^{\frac{r}{2M}}} = X^2 - T^2, \quad (49)$$

$$\frac{t}{2M} = 2 \tanh\left(\frac{T}{X}\right)^{-1}. \quad (50)$$

L'intervallo di valori assumibili dalle coordinate X e T è dato dalla condizione $r > 0$, da cui segue:

$$X^2 - T^2 > -1. \quad (51)$$

Nella seguente figura è rappresentata l'estensione di Kruskal, quindi l'estensione massimale dello spazio di Schwarzschild.

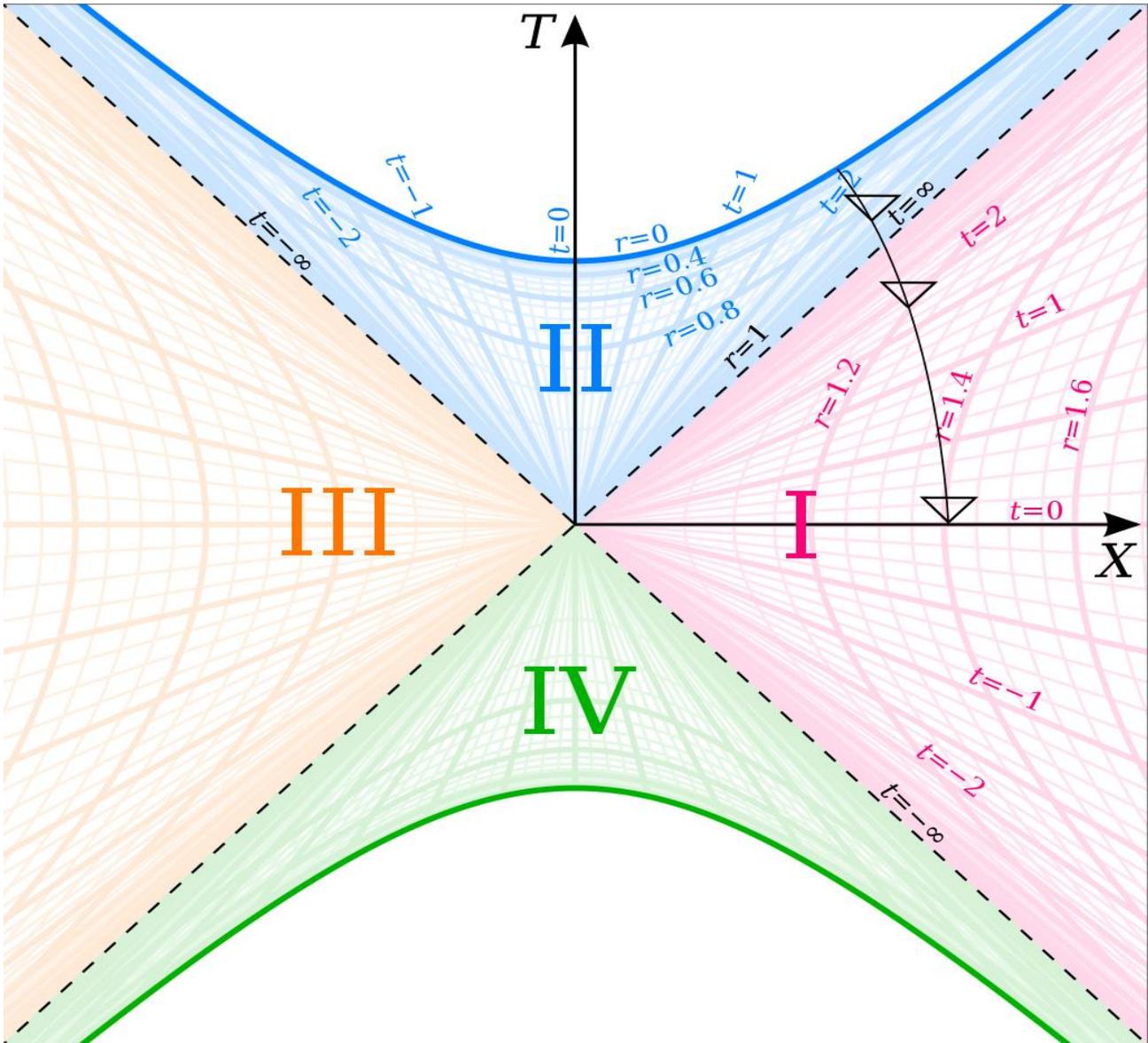


Figura 1.2. Rappresentazione dello spazio-tempo di Schwarzschild per $2G_N M = 1$. Le linee tratteggiate, separanti le quattro regioni, raffigurano le geodetiche nulle. Le iperboli più scure indicano le singolarità fisiche, mentre le più chiare rappresentano le curve di livello delle coordinate r e t .

La struttura causale di questo spazio-tempo è facilmente intuibile dal diagramma poiché le geodetiche nulle, per costruzione, sono rette inclinate di 45° e la singolarità fisica è nella regione $X = \pm(T^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Si noti che la singolarità in $r = 0$ ha un carattere di tipo spazio ed esiste nel futuro della regione II e nel passato della regione III. Essa, infatti, non corrisponde a una “linea di tipo tempo all’origine delle coordinate”, come un’interpretazione superficiale delle coordinate di Schwarzschild (r, t) poteva suggerirci.

Prima di esaminare la struttura dello spazio-tempo che stiamo studiando, è importante ricordare che esso è quadridimensionale, quindi ogni punto in Figura 1.2 rappresenta una sfera bidimensionale di raggio r .

Come rappresentato in Figura 1.2, lo spazio di Schwarzschild esteso si divide in quattro regioni. La regione I corrisponde al piano $r > 2M$ fisicamente è interpretabile come il campo gravitazionale esterno del corpo sferico. La regione II ha la proprietà che qualsiasi oggetto al suo interno non può uscirne. Entro un tempo proprio finito, tale oggetto cadrà inevitabilmente all'interno della singolarità e ogni segnale luminoso inviato rimarrà nella regione II, collassando all'interno della singolarità. Per questa ragione, la regione II è chiamata buco nero. La regione IV è esattamente l'inverso temporale della regione II, ed è chiamata buco bianco. Ogni osservatore presente in questa regione deve essere stato prodotto nella singolarità in $X = \pm(T^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ e, entro un tempo finito, lascerà la regione. Infine, la regione III ha le stesse proprietà della regione I e rappresenta un'altra regione asintoticamente piatta che risiede entro $r = 2M$. Per capire come questo possa succedere è bene analizzare la superficie di tipo spazio data da $T = 0$, una cui rappresentazione è data in Figura 1.3.

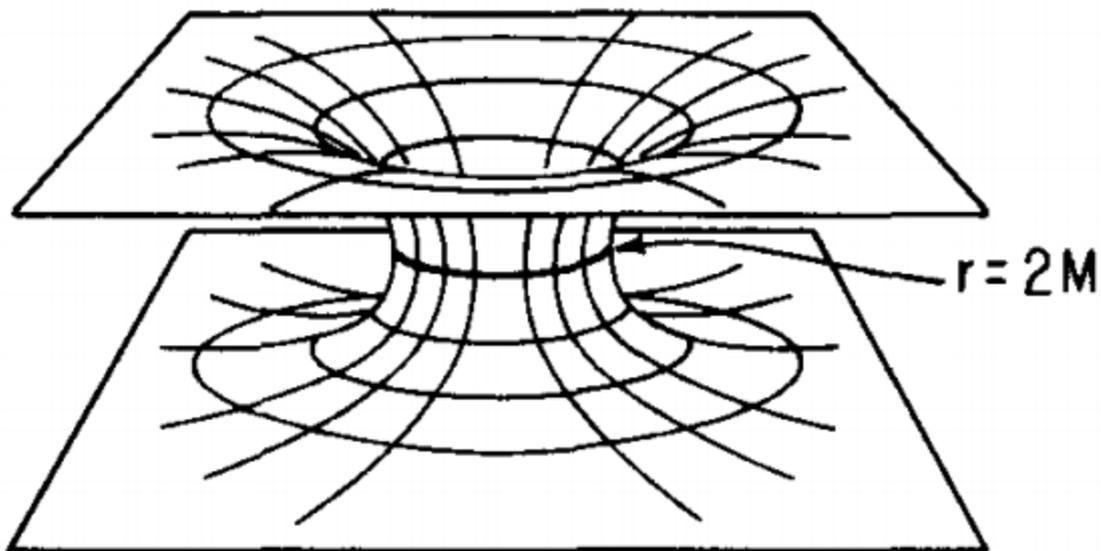


Figura 1.3. Geometria spaziale dell'ipersuperficie $T = 0$ dello spazio di Schwarzschild. In questa rappresentazione una dimensione è soppressa, ovvero la topologia dell'ipersuperficie è $\mathbb{R} \times S^2$. (Quindi ogni cerchio rappresenta una due-sfera). La struttura sopra la "gola" ($r=2M$) della figura 1.3 corrisponde alla regione I della figura 1.2, la struttura sottostante a $r=2M$ risiede nella regione IV della figura 1.2.

È fondamentale notare che un osservatore nella regione I non può comunicare con la regione III, poiché ogni segnale luminoso collasserà nel buco nero.

L'estensione della soluzione di Schwarzschild è una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto e come tale rappresenta una struttura possibile dello spaziotempo. Tuttavia, per ottenere questa struttura occorrono certe condizioni iniziali, ossia due regioni asintoticamente piatte legate da una singolarità nella regione IV. Queste condizioni iniziali potrebbero non corrispondere a nessuna regione del nostro Universo, e quindi l'estensione di Kruskal potrebbe non essere fisica. Nondimeno,

le regioni I e II sono di grande importanza fisica perché rivelate sperimentalmente, mentre le altre due potrebbero non essere reali.

2. I WORMHOLES

Una caratteristica importante delle equazioni di Einstein è che non impongono nessun tipo di condizione sulla topologia delle soluzioni. Questa libertà porta a sviluppi molto interessanti, possono essere considerate soluzioni con topologie non banali. In questo capitolo sarà introdotto, nel dettaglio, il wormhole. Sarà fatto partendo dal primo esempio storico, il ponte di Einstein-Rosen.

iii. Il ponte di Einstein-Rosen

Nel 1935 Einstein e Rosen pubblicarono un articolo allo scopo di studiare una possibile teoria atomica della materia e dell'elettromagnetismo. Essa utilizza come uniche variabili gli elementi del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ della relatività generale e il potenziale φ_μ della teoria di Maxwell. Tale modello è stato considerato un fallimento, nonostante abbia dato vita a molte idee interessanti che saranno esaminate in questo paragrafo. Einstein e Rosen discutono due tipi specifici di "ponte", quello neutrale e il "quasicarico"; in questa tesi verrà studiato solo il primo. I dettagli sul secondo sono in ref. [6].

Il ponte di Einstein-Rosen neutrale si basa sull'osservazione che un determinato cambio di coordinate rimuove la singolarità di Schwarzschild, in $r = R_s$; è importante sottolineare che in quegli anni non era ancora conosciuta la differenza tra "singolarità di coordinate" e "singolarità fisica". Neppure era perfettamente compresa la geometria di Schwarzschild in prossimità dell'orizzonte degli eventi, che secondo l'opinione comune dell'epoca rappresentava la singolarità. Nel linguaggio moderno la scoperta di Einstein e Rosen si riduce all'osservazione che qualche sistema di coordinate naturalmente copre due regioni asintoticamente piatte dello spaziotempo di Schwarzschild esteso, come già visto nel capitolo 1. Rimane comunque importante analizzare questo articolo poiché verrà utilizzato come base per i successivi studi sul wormhole. Si consideri, quindi la geometria di Schwarzschild, ponendo $G_N = c = 1$. Nelle coordinate di Schwarzschild la metrica è

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (52)$$

utilizzando il cambio di coordinate $u^2 = r - 2M$, è possibile scrivere la (52) nella forma di Einstein-Rosen

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M) d\Omega^2, \quad (53)$$

con $u \in (-\infty, +\infty)$. Queste coordinate non coprono la regione $r \in [0, 2M)$, mentre la regione asintotica corrispondente a $r \in [2M, +\infty)$ è coperta due volte. La regione in prossimità di $u = 0$ è considerata un "ponte" che congiunge le due regioni, asintoticamente piatte, vicino a $u = +\infty$ e $u = -\infty$. Per giustificare questo appellativo, si consideri una superficie sferica definita da u costante. L'area è $A(u) = 4\pi(2M + u^2)^2$ e raggiunge il minimo a $u = 0$, $A(0) = 4\pi(2M)^2$. La parte più ristretta della geometria è definita come "gola" e la regione circostante come "ponte", o

“wormhole”. Notiamo che questa costruzione per $M < 0$ non funziona, poiché essa richiede l’esistenza di un orizzonte degli eventi per il cambio di coordinate.

iv. Il wormhole

Prima di scrivere la metrica di Morris-Thorne è utile considerare una panoramica dei wormholes. Come già detto, il wormhole è una struttura geometrica che connette due regioni diverse dello spazio-tempo. Essi possono essere divisi in molte classi, non tutte saranno argomento di questa tesi, e maggiori dettagli sono rintracciabili in ref. [14]. Una prima divisione è tra wormholes Euclidei e Lorentziani, questo riflette se la varietà nella quale il wormhole risiede è lorentziana (segnatura $(1, n-1)$) o euclidea $(n, 0)$.

Un’altra divisione è tra i wormholes “intra-universo” e “inter-universo”. Le due specie vengono suddivise in base a quali regioni spazio-temporali collegano, ovvero due regioni di un singolo universo o differenti universi in un multiverso. Tale differenza è schematicamente rappresentata in Fig. 2.1

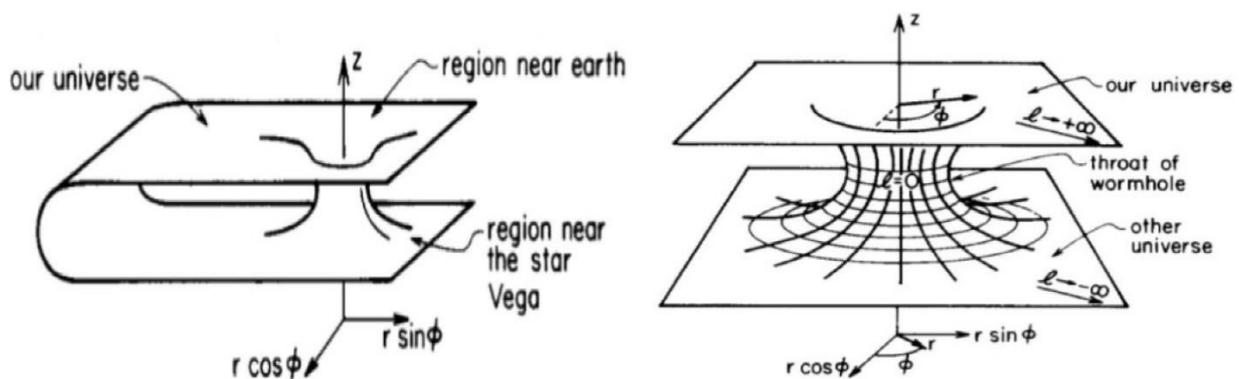


Figura 2.1. Esempi di wormholes intra-universo e inter-universo rispettivamente a sinistra e a destra.

La differenza tra queste due classi è riscontrabile solo a livello globale, quindi solo con uno studio della topologia e geometria complessiva dei due universi.

La definizione matematica di wormhole non è banale. Una possibile definizione “informale” è la seguente:

Una regione di spazio-tempo contenente un “world tube”⁷, il quale non può essere trasformato in una “world line”⁸ tramite una deformazione continua

La seguente invece è una definizione formale di wormhole quasi-permanente intra-universo, dove per quasi-permanente s’intende che questi oggetti esistono per un tempo finito:

“Se uno spazio-tempo Lorentziano contiene una regione compatta Ω , e se la topologia di Ω è della forma $\Omega \sim \mathbb{R} \times \Sigma$, dove Σ è una 3-varietà di topologia non banale, i quali confini hanno topologia di

⁷ L’evoluzione temporale di una superficie chiusa.

⁸ Evoluzione temporale di un punto.

forma $\partial\Sigma \sim S^2$, e se l'ipersuperficie Σ sono tutte di tipo spazio, allora la regione Ω contiene un wormhole intra-universo quasi-permanente."

In generale, i wormholes quasi-permanenti inter-universo sono più difficili da caratterizzare e ciò va oltre gli scopi di questa tesi. Per maggiori dettagli si veda [14].

Un'altra caratteristica dei wormholes è la "traversabilità", discussa in dettaglio nel prossimo capitolo.

v. I buchi neri e i wormholes di Schwarzschild per il viaggio interstellare

Uno dei punti principali nello studio dei wormholes riguarda il problema della loro traversabilità. In questo paragrafo saranno elencati alcuni motivi chiave per cui certi tipi di geometrie spaziotemporali, ad esempio il ponte di Einstein-Rosen, non sono attraversabili da parte di un essere umano. Le argomentazioni esposte sono rintracciabili in ref [8].

Gli autori sostengono che i problemi principali del buco nero, al fine della "traversabilità" di quest'ultimo, sono i seguenti:

- all'orizzonte degli eventi di un buco nero di massa M , le forze di marea (inomogeneità della gravità) producono enormi accelerazioni relative tra, per esempio, la testa e i piedi. Salvo che la massa del buco nero sia maggiore di 10^4 masse solari, l'osservatore in prossimità dell'orizzonte degli eventi risentirà fatalmente delle forze di marea lì presenti;
- l'orizzonte del buco nero è una membrana con una sola direzione, ovvero la materia-energia che ne viene attratta non può uscirne [15]. Perciò un viaggio di andata e di ritorno non è permesso. Nel viaggio unidirezionale la geometria nel quale l'osservatore fuoriesce dovrebbe essere rappresentata da un buco bianco;
- il buco bianco possiede un anti-orizzonte [16], ossia una superficie dalla quale la materia può solo fuoriuscire, il quale è instabile per piccole perturbazioni.

Questi ostacoli rendono ardua l'ipotesi che un buco nero possa essere utilizzato per il viaggio interstellare.

Per il wormhole di Schwarzschild (ponte di Einstein-Rosen), d'altro canto, sussistono altrettanti problemi, elencati di seguito:

- le forze di marea alla gola del wormhole di Schwarzschild sono nello stesso ordine di grandezza di quelle rilevate all'orizzonte del buco nero di Schwarzschild;
- un wormhole di Schwarzschild è dinamico e non statico: esso si espande da una gola con circonferenza nulla, a quella massima per poi si ricontrae. Queste espansioni e contrazioni sono talmente rapide che anche muovendosi alla velocità della luce, non è possibile attraversare completamente il wormhole;
- anche qui sussiste un anti-orizzonte che presenta gli stessi problemi elencati sopra.

Risulta dunque evidente che queste soluzioni non sono adatte per il viaggio interstellare, e andranno cercate soluzioni differenti. Una di queste sarà trattata nel seguente capitolo.

3. LA METRICA DI MORRIS E THORNE

In questo capitolo saranno introdotti i risultati dell'articolo dell'88 ad opera di Morris e Thorne [8]. Inizieremo elencando le condizioni da richiedere affinché un wormhole sia traversabile; in seguito, definiremo una metrica generica sulla quale saranno imposte matematicamente tali condizioni e troveremo le equazioni di campo che descrivono questa struttura.

vi. Le condizioni di traversabilità

Al fine di cercare una struttura che permetta il viaggio interstellare, in questo paragrafo saranno descritte le proprietà da richiedere a un wormhole con questa caratteristica. Esse saranno descritte in maniera qualitativa, allo scopo d'introdurre il problema, e successivamente saranno tradotte in linguaggio matematico.

Le condizioni da richiedere sono le seguenti:

- la simmetria sferica e la staticità, al fine di semplificare i calcoli;
- assumendo la correttezza della teoria della relatività generale, chiediamo che il wormhole sia soluzione delle equazioni di Einstein;
- la presenza di una gola che connette due regioni asintoticamente piatte dello spazio-tempo, seguendo quindi la geometria delle soluzioni già viste;
- assenza di un orizzonte, poiché non permetterebbe il viaggio in entrambe le direzioni.
- le forze di marea provate dal viaggiatore devono essere sopportabili, quindi deboli;
- il viaggiatore deve essere in grado di attraversare tutto il wormhole in un tempo proprio finito e ragionevolmente piccolo; matematicamente sarà imposto arbitrariamente un tempo proprio minore di un anno, misurato anche da un osservatore all'esterno del wormhole;
- la materia e il campo che genera la curvatura spazio-temporale del wormhole deve essere fisica, cioè deve avere un tensore energia-impulso ragionevolmente fisico. Si noti come conseguenza delle altre condizioni questa sarà violata, almeno nel significato classico di fisico;
- la soluzione deve essere perturbativamente stabile;
- l'assemblamento del wormhole richiede meno massa e tempo dell'Universo.

Le prime quattro condizioni sono richieste per ottenere una soluzione generica di wormhole, le successive quattro sono necessarie per la sua traversabilità. Invece, l'ultima ha un significato tecnologico più che fisico.

vii. I dettagli matematici della traversabilità

In questo paragrafo, studieremo il problema dal punto di vista matematico. Partiamo dalla prima richiesta, ossia la proprietà 1 del paragrafo precedente. Essa impone una metrica a simmetria sferica e statica che, senza ledere di generalità, possiamo scrivere nella forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{b}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (54)$$

dove $\Phi = \Phi(r)$ e $b = b(r)$ sono due funzioni arbitrarie del raggio, sulle quali saranno imposte le restrizioni del paragrafo precedente. $b(r)$ è chiamata “shape function”, per motivi che saranno esposti in seguito, e $\Phi(r)$ “redshift function”. Notiamo che r ha un importante significato geometrico perché $2\pi r$ è la circonferenza di un cerchio centrato alla gola del wormhole, di conseguenza non è monotona: decresce da $+\infty$ a un valore minimo b_0 e poi cresce da b_0 a $+\infty$ passando da un “foglio” spazio-temporale all’altro.

In seguito, dovremo trovare le soluzioni delle equazioni di campo di Einstein nel background descritto dalla metrica (54). Se, in analogia all’analisi perseguita nel primo capitolo, considerassimo soluzioni di vuoto otterremmo la metrica di Schwarzschild, a causa del teorema di Birkhoff. Di conseguenza, in questo caso la situazione è più complessa perché nelle equazioni di campo è necessario inserire un tensore energia impulso non nullo. Per ottenere le varie componenti delle equazioni di Einstein procederemo nella seguente maniera.

In primo luogo, saranno ricavati i simboli di Christoffel usando la formula seguente⁹

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\lambda}), \quad (55)$$

gli elementi del tensore metrico sono stati ricavati da

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (56)$$

Utilizzando i simboli di Christoffel si ottiene la forma del tensore di Riemann. Successivamente occorre contrarre quest’ultimo in modo da ricavare il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci. Infine, ricaviamo il tensore di Einstein utilizzando¹⁰:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (57)$$

nel quale i termini diagonali sono gli unici non nulli.

Poiché le equazioni di campo di Einstein prevedono che il tensore energia-impulso sia proporzionale al tensore di Einstein, essi dovranno avere la stessa struttura algebrica. Quindi, le uniche componenti non nulle del tensore energia-impulso saranno quelle diagonali. Considerato che i vettori di base nel quale è calcolato sono quelli usati da un osservatore statico, ogni componente

⁹ Dove la virgola indica una derivata parziale.

¹⁰ Scritto nel seguente sistema di riferimento $e_{\hat{t}} = \frac{1}{c} e_t$, $e_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e_r$, $e_{\hat{\theta}} = r^{-1} e_{\theta}$, $e_{\hat{\phi}} = (r \sin \theta)$.

del tensore ha una chiara interpretazione fisica in termini delle misurazioni che l'osservatore statico può effettuare:

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r), \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r), \quad (58)$$

dove $\rho(r)$ è la densità totale di massa-energia misurabile dall'osservatore statico, $\tau(r)$ la pressione radiale e $p(r)$ la pressione laterale.

Utilizzando le equazioni di Einstein

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi G_N c^{-4} T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad (59)$$

si giunge a

$$b' = 8\pi G_N c^{-2} r^2 \rho, \quad (60)$$

$$\Phi' = \frac{(8\pi G_N c^{-4} \tau r^3 + b)}{2r(r-b)}, \quad (61)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - \frac{2(\rho - \tau)}{r}, \quad (62)$$

dove l'apostrofo indica la derivazione rispetto a r . Le equazioni (60) e (61) indicano, rispettivamente, la parte radiale e temporale dell'equazione di campo e la (62) indica la parte laterale ($\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$). Ci sono quindi 3 equazioni differenziali che legano 5 incognite. Solitamente questa tipologia di equazioni si risolve assumendo un tipo specifico di materia come sorgente; quindi, si aggiungono le equazioni di stato di esso e si risolve il sistema di conseguenza. Ma in questo caso si utilizza una filosofia differente per risolvere queste equazioni e sarà fatto in funzione delle condizioni del paragrafo 3.1. Si possono anche imporre delle condizioni al contorno in base al caso studiato; in tutta generalità in questo studio sarà imposta solo la condizione di piatezza asintotica dello spazio-tempo.

Quindi iniziamo lo studio delle condizioni da imporre. Per definizione il wormhole deve possedere un raggio minimo $r = b_0$, onde l'elemento radiale diverge. Tuttavia, al fine di risolvere il problema e trovare soluzioni esatte di wormholes traversabili, il primo passo è definire la lunghezza propria misurata dall'osservatore statico:

$$l(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left[1 - \frac{b}{r}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (63)$$

e imporre la sua finitezza all'interno dello spazio, ossia

$$1 - \frac{b}{r} \geq 0. \quad (64)$$

Dalla condizione della piatezza asintotica, cioè che i campi vadano a zero abbastanza velocemente per $r \rightarrow \infty$, segue:

$$\frac{b}{r} \rightarrow 0 \text{ e } \Phi \rightarrow 0 \text{ per } l \rightarrow \pm\infty. \quad (65)$$

Successivamente si impone la condizione dovuta alla richiesta che la singolarità sia “nuda” ossia senza orizzonte, il che è equivalente a richiedere matematicamente:

$$g_{00} \neq 0, \text{ da cui segue che } \Phi(r) \text{ sia finita in tutto lo spazio.} \quad (66)$$

La condizione dovuta alle forze mareali può essere tradotta matematicamente annullando la derivata prima in r , della funzione Φ , ovvero:

$$\Phi' = 0. \quad (67)$$

Le condizioni imposte alla funzione $b(r)$ del wormhole implicano, attraverso le equazioni di campo di Einstein, condizioni sulla densità ρ , sulla pressione radiale τ e sulla pressione laterale p . Per valori di b_0 nell'ordine del chilometro, la pressione radiale, calcolata alla gola del wormhole, è dello stesso ordine di grandezza della più massiva stella di neutroni.

Per semplificare lo studio della pressione radiale in prossimità della gola del wormhole conviene introdurre la seguente funzione:

$$\xi = \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|}. \quad (68)$$

La condizione che il wormhole sia connettibile a una regione spaziotemporale asintoticamente piatta implica che il wormhole deve divaricarsi, si faccia riferimento a fig. 3.1. Questa condizione è chiamata condizione di “flaring-out” e può essere scritta come¹¹

$$\xi_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \text{ in prossimità o in corrispondenza della gola} \quad (69)$$

¹¹ Dove il pedice “0” indica che la funzione è calcolata alla gola

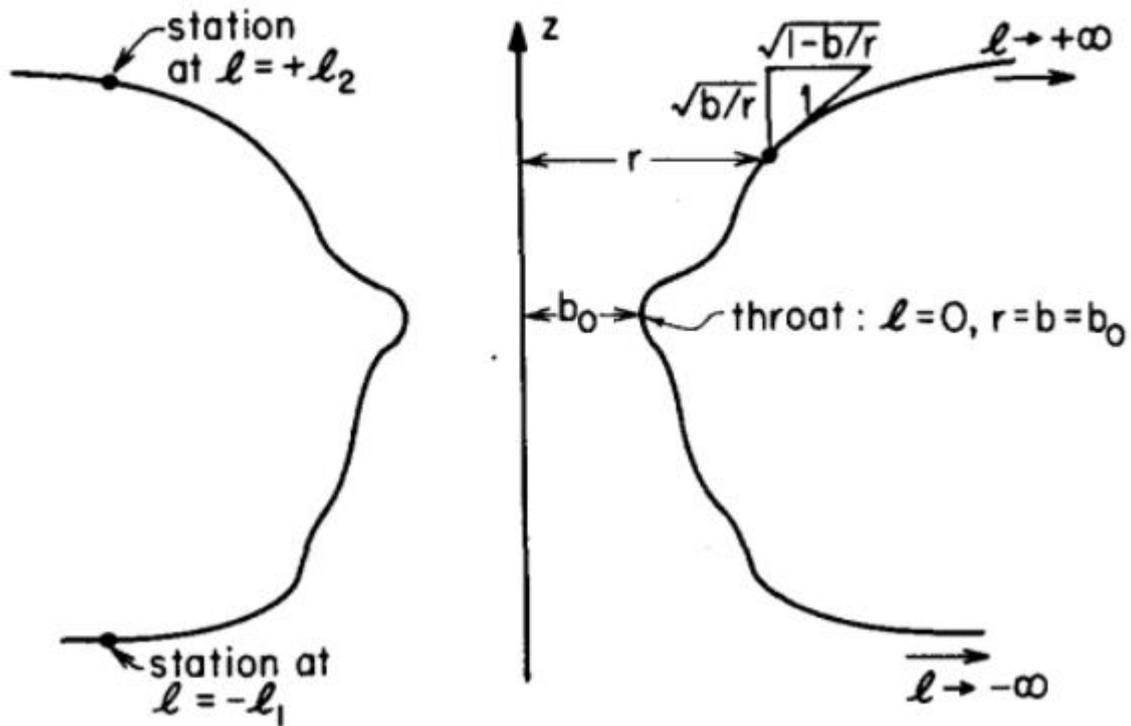


Figura 3.1. Diagramma di embedding del wormhole visto di profilo, ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Il diagramma deve essere ruotato rispetto all'asse verticale z per essere completo.

viii. La materia esotica e le condizioni dell'energia

Intorno agli anni 60' e ai primi anni 70', la maggior parte dei fisici asseriva che nessun osservatore possa misurare una densità di energia negativa. Questa condizione è chiamata in letteratura "weak energy condition"¹², la quale può essere rafforzata con altre due condizioni, la "null energy condition"¹³ e la "strong energy condition"¹⁴, che in ultima istanza sono condizioni sul tensore energia-impulso [17]. Tutte queste condizioni sono violate dalla materia con la proprietà $\tau > \rho c^2$, chiamata "esotica". Esse sono alla base di teoremi fondamentali come il "teorema di positività della massa", il quale afferma che oggetti costituiti da materia che soddisfi la "dominant energy condition" non possano antigravitare. Un altro di questi teoremi è la "seconda legge della meccanica dei buchi neri": esso afferma che, se il tensore energia-impulso in prossimità del buco nero soddisfa la strong energy condition, allora la superficie dell'orizzonte non può diminuire. La scoperta di Hawking dell'evaporazione dei buchi neri non rotanti, alla quale corrisponde la riduzione della loro area, viola la seconda legge della meccanica dei buchi neri [18]. Questa scoperta ha forzato i fisici ad accettare che i campi quantistici possono violare le condizioni energetiche [19]. Un caso importante è la legge quantistica della creazione di particelle, che implica sempre violazioni delle condizioni energetiche. Ad esempio, consideriamo un osservatore statico in prossimità dell'orizzonte degli eventi di un buco nero di Schwarzschild circondato dal vuoto. L'osservatore

¹² $T_{\alpha\beta} W^\alpha W^\beta \geq 0$ con $W^\alpha W_\alpha = -1$

¹³ $T_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \geq 0$ con $k^\alpha k_\alpha = -1$

¹⁴ $T_{\alpha\beta} W^\alpha W^\beta \geq \frac{1}{2} T W^\alpha W_\alpha$

misurerà un valore di aspettazione negativo di densità energetica. La densità negativa di energia è associata alla creazione di particelle in prossimità dell'orizzonte le quali evaporeranno e, di conseguenza, un flusso negativo di energia attraverserà l'orizzonte restringendolo.

Questi esempi di violazione delle condizioni energetiche ci avvertono che non si deve scartare, ciecamente, la possibilità dell'esistenza di materia esotica.

4. RICERCA MODERNA DELLE SOLUZIONI DI WORMHOLE

A partire dall' articolo [8], lo studio dei wormholes è stato ampliato, sono state introdotte nuove soluzioni sia in relatività generale che in alcune teorie estese della relatività. Ma un grande sforzo scientifico è finalizzato alla ricerca sperimentale di questi oggetti. Fino ad oggi i wormholes non sono ancora stati rivelati, la spiegazione potrebbe essere che la gravità non è stata ancora studiata nel regime di campo forte. Ma nel prossimo futuro si potranno compiere precise osservazioni in questo regime e un metodo di ricerca si potrà basare sulle frequenze epicycliche.

ix. Le frequenze epicycliche nella metrica di Schwarzschild

Le frequenze epicycliche sono le oscillazioni, solitamente radiali, dell'orbita chiusa dovuta a delle piccole perturbazioni. Per chiarificare questo concetto si consideri il seguente esempio: un pianeta orbitante con orbita circolare, attorno a una stella. Se il moto è poco perturbato radialmente l'orbita diventerà ellittica. Di conseguenza la distanza dal centro del potenziale non è più costante ma oscilla tra un massimo e un minimo, chiamati afelio e perielio nelle orbite solari. La frequenza epicyclica è la frequenza di queste oscillazioni. In generale, queste frequenze portano con sé numerosi dati circa la struttura geometrica dello spazio-tempo nel quale si trova la particella. Da questi dati si può ricavare il tipo di sorgente che l'ha formato.

Per approfondire ulteriormente questo argomento, saranno ricavate le frequenze epicycliche in uno spazio di Schwarzschild. [20]

Per procedere in questo compito, si devono innanzitutto comprendere i tratti qualitativi delle orbite nella metrica di Schwarzschild, cioè l'equazione delle geodetiche, e fatto questo ricavare le frequenze epicycliche. Pertanto, occorre ricavare l'equazione delle geodetiche per dei corpi test o dei raggi di luce, quindi delle geodetiche di tipo nullo o di tipo tempo. In primo luogo, si noti la simmetria per parità, $\theta = \pi - \theta$, della metrica di Schwarzschild, che semplificherà questo studio. Di conseguenza se la posizione iniziale e il vettore tangente di una geodetica giacciono nel piano equatoriale $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora tutta la geodetica dovrà essere ristretta in questo piano. Senza perdita di generalità, è possibile restringere lo studio alle geodetiche in questo piano.

Le componenti di base delle coordinate del vettore tangente alla curva parametrizzata da τ sono

$$u^u = \frac{dx^u}{d\tau} \equiv \dot{x}^u. \quad (70)$$

Per delle geodetiche di tipo tempo, τ è il tempo proprio; per le geodetiche nulle τ è il parametro affine. Poiché lo studio è incentrato sulle geodetiche di tipo nullo o tempo, utilizzando la metrica (3), si ha¹⁵:

$$-k = g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}r^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad (71)$$

dove

$$k = \begin{cases} 1 & (\text{geodetiche di tipo tempo}) \\ 0 & (\text{geodetiche di tipo nullo}) \end{cases}. \quad (72)$$

Inoltre, la metrica di Schwarzschild è indipendente dal tempo, il che implica l'esistenza di un vettore di Killing di tipo tempo¹⁶, $\xi^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha$, associato con la simmetria per traslazione temporale. Si può dimostrare che ogni vettore di Killing è associato a una quantità conservata lungo la geodetica [21], in questo caso corrisponde a

$$E = -g_{\alpha\beta}\mu^\beta\xi^\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2. \quad (73)$$

E è quindi una costante del moto; in generale, è possibile interpretarla, per una geodetica di tipo tempo, come la rappresentazione dell'energia totale per unità di massa a riposo della particella¹⁷ che segue la geodetica in questione. Inoltre, dato che la metrica è sfericamente simmetrica, non dipende da φ , è presente un altro vettore di Killing, $\psi^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^\alpha$, al quale è associato un'altra costante del moto L

$$L = g_{\alpha\beta}\psi^\alpha u^\beta = r^2\dot{\varphi}. \quad (74)$$

Possiamo interpretare L come il momento angolare per unità di massa a riposo di una particella nel caso di tipo tempo, $\hbar L$ è il momento angolare di un fotone nel caso di tipo nullo. Nel caso newtoniano, questa equazione si riduce alla seconda legge di Keplero, cioè che la velocità areolare è costante. In relatività generale, dato che la geometria spaziale non è più euclidea e l'interpretazione non è più così banale.

Sostituendole in (71) si ottiene

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + k\right) = \frac{1}{2}E^2. \quad (75)$$

Quest'equazione mostra che il moto geodetico radiale è lo stesso di una particella con energia $\frac{1}{2}E^2$ in un potenziale effettivo, in un caso unidimensionale e non relativistico, dato da

$$V = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + k\right) = \frac{1}{2}k - k\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \quad (76)$$

¹⁵ In unità naturali.

¹⁶ Il campo vettoriale di Killing è il generatore infinitesimo delle isometrie.

¹⁷ $\lim_{r \rightarrow \infty} E = \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{m}$ dove $E = p^0 = mu^0$

La differenza rispetto al caso newtoniano è la presenza del termine $\frac{ML^2}{r^3}$ (e l'interpretazione fisica delle coordinate), il quale domina sulla barriera centrifuga per piccoli r . Quest'ultimo termine spiega perché la precessione al perielio di Mercurio differisce molto da quella prevista classicamente.

Se consideriamo gli estremi del potenziale effettivo, nel caso $k = 1$, essi sono dati da

$$0 = \frac{\partial V}{\partial r} = r^{-4}(Mr^2 - L^2r + 3ML^2), \quad (77)$$

con soluzioni

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm (L^4 - 12L^2M^2)^{1/2}}{2M}. \quad (78)$$

Perciò, se $L^2 < 12M^2$, non ci sono estremi per V e in particolare, un a particella diretta verso il centro di attrazione finirà all'orizzonte in $r = 2M$, e quindi poi in $r = 0$.

Per $L^2 > 12M^2$, è facile verificare che R_+ è un minimo di V , mentre R_- il massimo. Quindi, le orbite stabili ($\dot{r} = 0$) esistono al raggio $r = R_+$, e le instabili a $r = R_-$. Inoltre, per $L \gg M$, R_+ diventa

$$R_+ \approx \frac{L^2}{M}, \quad (79)$$

che è la formula newtoniana per il raggio di un'orbita circolare di una particella con momento angolare L orbitante attorno a un corpo sferico di massa M . Inoltre, è importante notare che R_+ è ristretta nel range

$$R_+ > 6M, \text{ e } R = 6M \text{ viene chiamato } R_{ISCO} \text{ (innermost stable circular orbit)}. \quad (80)$$

Solitamente, una particella orbitante in una geometria di Schwarzschild emetterà radiazione gravitazionale, e quindi, devierà debolmente dal moto geodetico. Una particella inizialmente in un'orbita $R \gg M$ inizierà lentamente a spiraleggiare in raggi più piccoli fino ad arrivare all'ultimo raggio stabile, cioè $R = 6M$.

Se una particella è vicina al raggio di equilibrio R_+ , di un'orbita circolare stabile, la particella oscillerà in un raggio di circa R_+ . Per piccoli spostamenti eseguirà un moto armonico con frequenze epicicliche radiali

$$k_{eff} = \omega_r^2 = \left. \frac{dV^2}{dr^2} \right|_{R_+} = \frac{M(R_+ - 6M)}{R_+^3(R_+ - 3M)} \quad (81)$$

dove è stata usata la (77) per eliminare il termine L^2 . Il tempo implicito in questa frequenza è il tempo proprio misurato dalla particella e non il tempo coordinato "t" della metrica in questione.

x. L'utilizzo sperimentale delle frequenze epicicliche

L'utilizzo delle frequenze epicicliche assume un ruolo di spicco nelle *X-ray Binaries*; esso è un sistema doppio formato da un buco nero o una stella di neutroni e una stella. Una sua schematizzazione è rappresentata in Fig. 4.1. Questi sistemi non possono essere osservati direttamente poiché la loro grandezza angolare è sotto i nano secondi d'arco, ma si osservano delle oscillazioni quasi periodiche nel loro flusso di raggi X (QPO). Nonostante essere dei segnali facilmente osservabili, la loro origine è ancora dibattuta. Maggiori dettagli sono rintracciabili in ref. [22]

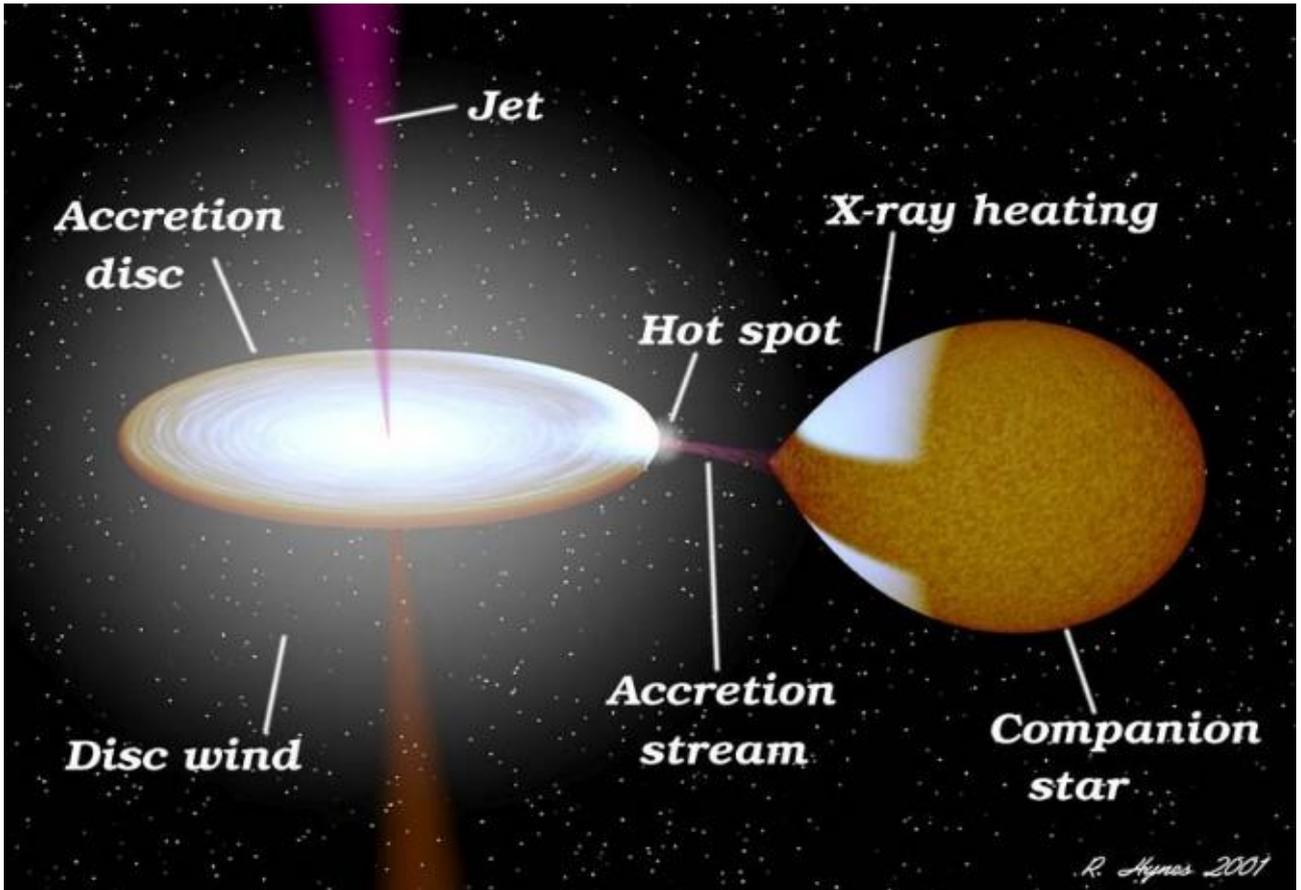


Figura 4.1. Rappresentazione delle X-ray Binaries.

Un aspetto importante di tutti i modelli di QPO, è che sono basati sulle frequenze epicicliche. Pertanto, è possibile asserire che le osservazioni delle frequenze epicicliche possono essere associate alle misure dei QPOs. Quindi studiando questo tipo di segnali sarebbe possibile risalire alle frequenze epicicliche dei corpi orbitanti attorno alla sorgente. Da queste poi ricavare la struttura della metrica e così ricavare il tipo di sorgente gravitazionale.

Poiché la firma osservazionale del buco nero di Schwarzschild è simile a quella dei wormholes, per poterli rivelare è necessario saper distinguere questi due oggetti. Un approccio diretto è quello di confrontare le due frequenze epicicliche. Esse dipendono fortemente dalla metrica come visto nel paragrafo precedente, ed esiste anche una formula diretta per ottenere le frequenze epicicliche in qualsiasi metrica:

$$\Omega_r = \frac{1}{2g_{rr}} [g_{tt}^2 \partial_r^2 g^{tt} + (\Omega_\phi g_{\phi\phi})^2 \partial_r^2 g^{\phi\phi}], \quad (82)$$

$$\Omega_\phi = \sqrt{\frac{\partial_r g_{tt}}{\partial_r g_{\phi\phi}}}. \quad (83)$$

Ω indica la velocità angolare epiciclica ed è proporzionale alla frequenza epiciclica secondo la seguente equazione,

$$v_r = \frac{\Omega_r}{2\pi}. \quad (84)$$

Un'ulteriore applicazione delle frequenze epicicliche è collegata al ricostruire la metrica partendo dai dati sperimentali ottenibili dall'osservazione delle frequenze epicicliche. Cioè ricostruire le due funzioni arbitrarie della metrica (54), b e Φ , a partire dai dati osservazionali. Per maggiori dettagli riguardo questo argomento si veda [23,24]

5. CONCLUSIONI

In questa tesi abbiamo visto l'avanzamento costante di teorie sempre più complesse e affascinanti. Abbiamo trattato la prima soluzione di wormhole, il ponte di Einstein-Rosen, legata alla metrica di Schwarzschild e nel seguito abbiamo provato che questa non è traversabile. Allo scopo di cercare geometrie con questa caratteristica abbiamo esplorato nel dettaglio le idee di Morris e Thorne. Idee semplici ma alla base della ricerca moderna in questo ramo della fisica e un'ulteriore dimostrazione che la fisica quantistica potrebbe avere conseguenze tecnologiche notevoli nel futuro. La ricerca dei wormholes è tutt'altro che conclusa, e solo uno studio ulteriore dei campi quantistici e delle teorie estese della gravità può provarne l'esistenza teorica. Parallelamente allo studio teorico, molti sforzi sono finalizzati nel cercare la conferma sperimentale dei wormholes. In questa tesi abbiamo visto un metodo di ricerca basato sulle frequenze epicicliche, ma questo non è l'unico possibile. In ref. [24] è spiegato come utilizzare l'effetto Poynting-Robertson per osservare la struttura dei wormholes e desumere i parametri costruttivi di quest'ultimi, studiati nel corso di questa tesi. Inoltre, tali parametri costruttivi dipendono anche dalla teoria gravitazionale utilizzata.

Un'ulteriore caratteristica che rende ancora più affascinanti i wormholes è la possibilità del cosiddetto "viaggio nel tempo". Questa eventualità è conseguenza della geometria del wormhole, poiché esso collega due regioni *spaziotemporali* differenti. I paradossi logici che ne conseguono colpiscono le fondamenta della fisica, sia classica che quantistica. Le soluzioni a questo paradosso sono molteplici. Una è chiamata la "radical rewrite conjecture", che propone, di riscrivere tutta la fisica; questa sarebbe una procedura incredibilmente drastica e ovviamente l'ultima da intraprendere se l'esistenza del wormhole fosse provata. Un'altra congettura è chiamata "Novikov's consistency conjecture", la quale prevede che l'universo sia consistente; quindi, indipendentemente dalla trasposizione temporale che si possa effettuare, gli eventi si verificheranno in maniera tale da avere un risultato totale consistente. L'ultima congettura è la "Hawking's chronology protection conjecture", che assume che il cosmo ha qualche proprietà da non permettere il viaggio temporale. Questa congettura permette l'esistenza del wormhole ma esclude la possibilità di viaggi temporali.

Per concludere, nonostante questi oggetti siano ancora nel dominio della fisica teorica, vale la pena proseguire nelle ricerche, perché il loro studio pone la fisica davanti a sfide avvincenti ed estremamente complesse. Vedremo cosa il futuro ha in serbo per noi.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Einstein. *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, **4**, 411-462, (1907).
- [2] A. Einstein. *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Ann. der Phys., **35**, 898-908, (1911).
- [3] A. Einstein. *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844-847, (1915).
- [4] A. Einstein *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. der Phys., **354 (7)**, 769-822, (1916).
- [5] L. Flamm. *Beträge zur Einsteinschen gravitationstheorie*, Hirzel, (1916).
- [6] A. Einstein, N. Rosen. *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*, Phys. Rev. **48**, 73, (1935).
- [7] Misner C. W., Wheeler J. A. *Classical physics as geometry*, Ann. Of Phys. **2**, 525, (1957).
- [8] M. Morris, K.S. Thorne. *Whormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A toll for teaching general relativity*, American Journal of Physics, **56(5)**, 395, (1988).
- [9] M.D. Kruskal. *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*, Physical Review, **119(5)**, 1743, (1960).
- [10] A. Einstein. *Kritisches zu einer von Herrn De Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen*, Ann. der Phys., (1918).
- [11] K. Schwarzschild. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsbereichte der königlich preußchen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1916).
- [12] S. Capozziello, M. Funaro. *Introduzione alla relatività generale: con applicazione all'astrofisica relativistica e alla cosmologia*, Liguori, (2006), Napoli.
- [13] G.D. Birkhoff, R.E. Langer. *Relativity and modern physics*, Harvard University Press, (1923), Harvard.

- [14] M. Visser (1996). *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*. Springer-Verlag New York, Inc. (New York).
- [15] K.S. Thorne, C.W. Misner, J.A. Wheeler. *Gravitation*, Freeman, (2000).
- [16] K.S. Thorne. *Nonlinear Phenomena in Physics*, Springer, (1985).
- [17] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. *The large-scale structure of space-time*, 1, Cambridge university press, (1973), Cambridge.
- [18] S.W. Hawking. *Black hole explosions?* ,Nature, **248**(5443), 30, (1974), Londra.
- [19] H. Epstein, V. Glaser, et al. *Nonpositivity of the energy density in quantized field theories*, Nuovo Cimento, **36**, 1016, (1955), Bologna.
- [20] Wald, Robert M. *General Relativity*. Chicago, Univ. Of Chicago Press, 2009.
- [21] Guidry, Mike W. *Modern General Relativity: Black Holes, Gravitational Waves, and Cosmology*. Cambridge University Press, 2019.
- [22] Ingram, Adam R., and Sara E. Motta. “*A Review of Quasi-Periodic Oscillations from Black Hole X-Ray Binaries: Observation and Theory.*” *New Astronomy Reviews*, vol. **85**, 2019.
- [23] V. De Falco, S. Capozziello, M. De Laurentis. *Epicyclic Frequencies in Static and Spherically Symmetric Wormhole Geometries*. *Physical Review D*, vol. **104**, no. 2, 21 July 2021.
- [24] V. De Falco, E. Battista, S. Capozziello, M. De Laurentis *General relativistic Poynting-Robertson effect to diagnose wormholes existence: static and spherically symmetric case*, *Phys.Rev D*, **101**(19), 104037, (2020).