

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

QUANTIZZAZIONI DI STATI GAUSSIANI

Relatore:

Prof. Fedele Lizzi

F. Lizzi

Candidato:

Giorgio Lo Giudice

Matr. N85001409

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	2
2	Un parallelismo tra meccanica classica e quantistica	4
2.1	Determinismo e probabilità	4
2.2	Parentesi di Poisson e commutatori	6
2.3	Operatore densità vs funzione densità	8
2.4	Principio di corrispondenza	12
3	Quantizzazioni di stati gaussiani	13
3.1	Mappe di quantizzazione	13
3.2	Quantizzazioni di stati gaussiani	15
3.3	Ordinamento normale o di Wick	18
3.4	Confronto e conclusioni	20
A	Calcolo per l'ordinamento arbitrario	22
B	Calcolo per l'ordinamento normale	25

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi si focalizza l'attenzione sul mondo macroscopico, la realtà che quotidianamente circonda l'essere umano, e sul mondo microscopico: il primo è ben descritto dalla teoria della *meccanica classica*, mentre la branca della fisica che descrive i sistemi microscopici in modo soddisfacente è la *meccanica quantistica*. In particolare si esamina nel presente lavoro la meccanica quantistica come deformazione, ovvero la visione della meccanica quantistica come limite della teoria classica. Questa analisi non risulta essere banale, dal momento che la meccanica quantistica non è una generalizzazione della meccanica newtoniana, né tanto meno il confine tra una teoria e l'altra è ben marcato. Si può a tal proposito fornire l'esempio della teoria della relatività di Einstein che nel limite in cui $\frac{1}{c} \rightarrow 0$, si riduce alla teoria classica. In questa situazione risulta quindi evidente che la relatività sia una generalizzazione della meccanica classica. Invece in meccanica quantistica il limite è molto più sottile.

Nel secondo capitolo si analizzano i legami e le differenze tra le due teorie, ponendo l'attenzione sia sugli aspetti concettuali, che sulle strutture e gli strumenti matematici relativi alla meccanica classica e quantistica. Questa analisi fornisce le informazioni essenziali per poter affrontare il discorso del terzo capitolo delle *quantizzazioni di stati gaussiani*. Fondamentale il legame tra parentesi di Poisson e commutatori, che mostra un importante legame tra le due teorie. Successivamente è stata effettuata la disamina dell'operatore densità e della funzione densità; infine si discute del fondamentale principio di corrispondenza, che consente di passare da un osservabile classico ad uno quantistico, però ponendo l'accento sui possibili problemi a cui si va incontro operando questa procedura.

Quanto detto si lega direttamente agli argomenti trattati nel terzo capitolo, che rappresenta il cuore della presente tesi. Si sono introdotte le mappe di quantizzazione, le quali consentono di associare in maniera biunivoca un osservabile quantistico ad un osservabile classico; questo ha permesso di esaminare per un *ordinamento arbitrario* il problema della quantizzazione di stati gaussiani, perciò

nella tesi si parla di quantizzazioni, al plurale, di stati gaussiani. Questa analisi è originale. Infine è stato affrontato lo stesso problema con un particolare ordinamento: *l'ordinamento normale* o di Wick. Anche quest'ultima disamina è originale.

Capitolo 2

Un parallelismo tra meccanica classica e quantistica

In questo capitolo si vogliono rimarcare i legami e le differenze tra meccanica quantistica e meccanica classica. L'analisi partirà dalle grosse differenze concettuali alla base delle due teorie che rispecchiano anche la differente struttura matematica che le caratterizza. D'altro canto sarà anche mostrato come ci sia una corrispondenza piuttosto evidente tra determinate espressioni quantistiche e opportune espressioni classiche.

2.1 Determinismo e probabilità

Il formalismo che più si adatta alla meccanica quantistica è quello hamiltoniano, per tale ragione si parte dalla disamina di questo classicamente. Se risultano assegnate le condizioni iniziali q_0 e p_0 allora a partire dalle *equazioni di Hamilton*:

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad (2.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (2.2)$$

è noto che il sistema è deterministico: assegnate le condizioni iniziali del sistema (q_0 e p_0 nel caso esaminato) allora l'evoluzione temporale di questo è completamente determinata, cioè istante per istante è noto il punto dello spazio in cui si trova il sistema. Questo determinismo meccanico è una condizione ideale, ovvero risulterebbe valido se fosse possibile misurare con precisione infinita posizione e momento iniziale del sistema.

Ora si affronta il problema della localizzazione in meccanica quantistica. A tal proposito si introduce il principio di indeterminazione di Heisenberg, che è una conseguenza dell'algebra di Heisenberg:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1} \text{ algebra di Heisenberg} \quad (2.3)$$

$$\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2} \text{ principio di indeterminazione} \quad (2.4)$$

Dove \hat{Q} e \hat{P} sono gli operatori autoaggiunti associati rispettivamente agli osservabili fisici posizione e momento di una generica particella sulla quale si effettua la misura. Di fatto l'equazione (2.4) mostra come risulti impossibile misurare con accuratezza grande a piacere (ciò che è stato supposto nel caso classico per ottenere il determinismo meccanico) sia la posizione che l'impulso della particella. Non appena si effettua una misura molto precisa su una di queste due grandezze, l'indeterminazione sull'altra diventa molto grande, proprio perché deve essere rispettata la (2.4).

Mentre classicamente sono le equazioni di Hamilton (2.1) e (2.2) a governare l'evoluzione temporale del sistema; in meccanica quantistica si avrà, invece, l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

dove ψ è la già citata funzione d'onda, sulla quale si pone l'attenzione adesso, mentre \hat{H} è l'operatore Hamiltoniano. Attraverso le ψ vengono descritti gli stati del sistema quantistico. Se per esempio il sistema quantistico è costituito da una particella, allora ψ risulta essere funzione nel caso più generale sia delle sue coordinate spaziali esprimibili attraverso il vettore \vec{r} , sia della coordinata temporale t : $\psi(\vec{r}, t)$. In particolare dall'equazione di Schrödinger è possibile estrarre una quantità conservata nel tempo: $\|\psi\|^2$.

$$\frac{d}{dt} \int_{R^3} |\psi|^2 d\vec{r} = 0 \quad (2.6)$$

Interpretando il modulo quadro della funzione d'onda come la densità di probabilità di effettuare una misura di posizione e trovare la particella in un volume posto tra \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, integrando sulla particolare regione di spazio considerata durante la misura, si passa dal modulo quadro della ψ alla norma quadra e, corrispondentemente, da una densità di probabilità a una probabilità.

Da questa disamina si comprende che da un lato, per quanto concerne il mondo macroscopico, si ha il determinismo meccanico, almeno nella situazione in cui si dispone di strumenti ideali, quindi si può effettuare un'analisi in termini di certezze; mentre nel caso del mondo microscopico, si parla di *probabilità*, ovvero

si ha un'indeterminazione sulla conoscenza del fenomeno microscopico, dovuta alla natura ondulatoria della data particella quantistica, quindi si ha una fonte di indeterminazione *intrinseca* legata all'oggetto che si misura e non più, come può accadere classicamente, allo strumento che misura, nel caso in cui questo sia considerato non ideale.

Si conclude la sezione ragionando su quando un sistema fisico risulta essere quantistico o classico, ovvero comprendere quando si sta analizzando un sistema macroscopico o microscopico. Dalla relazione (2.3) risulta essere evidente che sarà il *quanto d'azione* \hbar a distinguere un sistema quantistico da uno classico: sistemi fisici le cui grandezze osservabili, con le dimensioni di un'azione, avranno valori paragonabili ad \hbar saranno quantistici; in caso contrario classici. Questo risulta essere evidente se si considera il seguente limite:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} [\hat{Q}, \hat{P}] \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Infatti in questa situazione si ritrova la commutatività tra il prodotto degli osservabili posizione e momento tipici del caso classico.

Quanto visto fino ad adesso deve far ragionare ancora una volta sulla relazione tra mondo classico e quantistico, per comprendere a pieno in che rapporto si trovano le due teorie. Come visto in precedenza nel caso della relatività, la meccanica newtoniana ne costituisce un limite e pertanto è possibile costruire la teoria della relatività a partire da assiomi e principi fondamentali, senza far alcun riferimento alla meccanica classica. Non è possibile fare altrettanto per la costruzione della meccanica quantistica.

2.2 Parentesi di Poisson e commutatori

Fino ad ora sono state analizzate le principali differenze dal punto di vista concettuale tra la meccanica classica e la meccanica quantistica. È lecito allora attendersi che queste differenze si rispecchino anche in un differente apparato matematico per quanto concerne il mondo microscopico e macroscopico. Si parte da quest'ultimo. È già stato anticipato che l'evoluzione di un sistema fisico classico è governata dalle equazioni di Hamilton (2.1) e (2.2). Agli osservabili fisici nel caso classico sono associate delle funzioni $f(q, p)$. Queste sono funzioni reali le quali sono definite sullo spazio delle fasi \mathcal{S} , definito come l'insieme di tutte le possibili configurazioni di un sistema, ovvero lo spazio i cui punti rappresentano univocamente tutti e soli i possibili stati del sistema. Si supponga di avere un sistema costituito da una particella, lo spazio delle fasi è $\mathcal{S} \equiv \mathbb{R}^2$ le cui variabili sono $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$. Quindi formalmente, sulla retta reale, un osservabile in meccanica classica viene definito attraverso la funzione reale $f(q, p)$:

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.8)$$

A questo punto è molto interessante introdurre le *parentesi di Poisson*. Queste sono definite nella seguente maniera.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \quad (2.9)$$

Dove f e g sono due osservabili. Le parentesi di Poisson consentono di riscrivere le equazioni di Hamilton in maniera molto simmetrica:

$$\dot{q} = \{q, H\} \quad \dot{p} = \{p, H\} \quad (2.10)$$

Dove ora si può interpretare H come una funzione appartenente a $F(\mathcal{S})$, che sarebbe lo spazio vettoriale delle funzioni appartenenti allo spazio delle fasi, con la proprietà di soddisfare le suddette equazioni.

Si mostrano le proprietà che soddisfano le parentesi di Poisson:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f, \alpha g_1 + \beta g_2\} = \alpha \{f, g_1\} + \beta \{f, g_2\}$
3. $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$ *Regola di Leibniz*
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ *Identità di Jacobi*

dove f, g, h sono funzioni associate ad osservabili fisici.

Quantisticamente a ciascun osservabile non è associato una funzione, ma un operatore autoaggiunto. Inoltre è stata introdotta l'equazione di Schrödinger affermando che questa governa l'evoluzione temporale degli stati del sistema. Ciò che non è ancora stato sottolineato però, è a quale spazio di Hilbert (che fa da contraltare allo spazio delle fasi classico) appartengono questi stati espressi mediante funzioni d'onda ψ . In realtà implicitamente anche questo è stato mostrato nella sezione 2.1 con l'equazione (2.6). Questa mostra inequivocabilmente che gli stati ψ devono appartenere alle funzioni a quadrato sommabile su tutto lo spazio: $\psi \in L^2[\mathbb{R}^3]$. Questo è il caso più generale, nulla vieta che il sistema possa evolvere solo all'interno di un sottospazio di \mathbb{R}^3 , in tal caso si dovrà considerare le funzioni a quadrato sommabile in quel sottospazio. Si deve evidenziare però che lo stato che rappresenta il sistema non è un vettore di questo spazio vettoriale, ma bensì un raggio: infatti presi uno stato ψ e un $\lambda \in \mathbb{C}$ allora $\lambda\psi$ è ancora uno stato ottenuto dal primo attraverso la moltiplicazione per uno scalare. Questa è un'osservazione importante dal momento che lungo il raggio ci saranno tanti vettori di norma variabile e tra questi ci saranno quelli di norma unitaria, allora si potrà scegliere proprio questi vettori come rappresentativi del raggio, indeterminati a meno di una fase. In questo modo si può ragionare su funzioni d'onda a quadrato sommabile e con norma unitaria.

L'altra disamina matematica da effettuare è quella legata all'equazione (2.3), che mostra che la struttura algebrica che governa la meccanica quantistica è appunto un'algebra basata sulla non commutatività degli enti matematici che determinano posizione e momento di una data particella che si vuole descrivere, che quindi non è tipica delle funzioni, ma degli operatori. Di seguito si elencano le proprietà dei commutatori:

1. $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
2. $[\hat{A}, \alpha\hat{B}_1 + \beta\hat{B}_2] = \alpha[\hat{A}, \hat{B}_1] + \beta[\hat{A}, \hat{B}_2]$
3. $[\hat{A}\hat{C}, \hat{B}] = \hat{A}[\hat{C}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$
4. $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$

$\forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in O(\mathbb{H}) ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

dove $O(\mathbb{H})$ è l'algebra degli operatori definiti sugli spazi di Hilbert \mathbb{H} . Un'algebra è una struttura di spazio vettoriale con l'usuale proprietà:

$$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in O(\mathbb{H}); \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha\hat{A} + \beta\hat{B} \in O(\mathbb{H}) \quad (2.11)$$

e tale che il prodotto tra due operatori appartiene ancora a $O(\mathbb{H})$.

Risulta che le proprietà soddisfatte da commutatori e parentesi di Poisson sono identiche. Il legame è ulteriormente sottolineato se si considerano le parentesi di Poisson tra la posizione e il momento della particella ottenendo le relazioni di Poisson fondamentali:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (2.12)$$

Quindi non solo soddisfano le stesse proprietà dei commutatori, ma formalmente si ritrova lo stesso risultato fornito dagli operatori momento e posizione nell'algebra di Heisenberg, a meno del termine $i\hbar$:

$$\{q, p\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{Q}, \hat{P}] \quad (2.13)$$

2.3 Operatore densità vs funzione densità

In questa sezione si introduce un concetto fondamentale per quanto riguarda il seguito di questa tesi, che è l'operatore densità, mostrando anche una particolare connessione tra questo e la funzione densità, le quali soddisfano equazioni formalmente equivalenti per quanto riguarda la loro evoluzione temporale.

Si parte dal mondo macroscopico. Fino ad ora è stato definito solo un osservabile fisico in meccanica classica, ma non è stata fornita alcuna analisi sullo *stato*

di un sistema classico: in meccanica classica uno stato è descritto da una funzione positiva delle coordinate $\rho_t(q, p)$, la funzione densità. Questa rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella in una regione dello spazio delle fasi \mathbb{S} , può dipendere anche dal tempo nel caso più generale e il seguente integrale

$$\int_{\Delta q \Delta p} dq dp \rho_t(q, p) \quad (2.14)$$

restituisce la probabilità di trovare la particella nel volume $\Delta q \Delta p$ dello spazio degli stati. Per semplicità si sta considerando il caso unidimensionale. Se si integra su tutto lo spazio, la condizione di normalizzazione imporrà:

$$\int dq dp \rho_t(q, p) = 1 \quad (2.15)$$

dove l'integrale privo dei suoi estremi indica l'integrazione su tutto lo spazio. Questa notazione viene usata per tutto il continuo della tesi.

Questa densità di probabilità emerge solamente dal limite tecnologico degli strumenti di misura, diversamente da quanto accade in meccanica quantistica, come visto nella sezione 2.1. Quindi se si suppone di essere nel caso ideale, in cui i dispositivi di misura sono infinitamente accurati, allora non si avrà più a che fare con una densità di probabilità, ma con una certezza:

$$\rho(q, p) = \delta(q - q_0) \delta(p - p_0) \quad (2.16)$$

L'evoluzione temporale è data dall'equazione di Liouville

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = - \{ \rho_t, H \} \quad (2.17)$$

Prima di passare alla trattazione quantistica è necessario introdurre la notazione *bra-ket* che si deve a Dirac per la descrizione di uno stato quantistico. Il nome di questa notazione è dovuta al fatto che un prodotto scalare fra due vettori in uno spazio di Hilbert \mathbb{H} è denotato con un braket:

$$\langle \phi | \psi \rangle \quad \psi, \phi \in \mathbb{H} \quad (2.18)$$

Dove $\langle \phi |$ è il bra e $|\psi\rangle$ è il ket. Questi ultimi sono i vettori che costituiscono lo spazio di Hilbert \mathbb{H}

Questa notazione è coerente con il noto prodotto scalare definito sullo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabile $L^2[\mathbb{R}^3]$. Risulta essere utile riepilogare le proprietà del prodotto scalare:

1. $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$

2. $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$
3. $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$
4. $\langle \phi | \alpha \psi \rangle = \alpha \langle \phi | \psi \rangle$
5. $\langle \phi_1 + \phi_2 | \psi \rangle = \langle \phi_1 | \psi \rangle + \langle \phi_2 | \psi \rangle$

$$\forall \psi, \phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{H}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Da questo momento in poi, sarà adottata esclusivamente la notazione bra-ket.

È stata introdotta la rappresentazione più efficace per analizzare l'operatore densità, ma non è stata ancora introdotta un'importante distinzione sugli stati di un sistema quantistico, in particolare si possono avere *stati puri* oppure *miscele di stati*. Uno stato puro è lo stato corrispondente alla conoscenza della massima informazione sul sistema. Si parla invece di miscele di stati, cioè di un insieme statistico di più stati puri, quando si ha tipicamente una conoscenza incompleta del sistema. Si introducono le proprietà dell'operatore densità, il quale sarà indicato con $\hat{\rho}$:

1. $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ hermitiano
2. $\hat{\rho}$ ha tutti autovalori non negativi
3. $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$
4. $\text{tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$

Segue la definizione formale di traccia:

$$\text{tr}(\hat{A}) = \sum_n^{\infty} \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle \quad (2.19)$$

Dove $|\phi_n\rangle$ sono gli autostati dell'operatore \hat{A} .

Queste proprietà sono del tutto generali e valgono sia per stati puri che per stati miscela. In realtà l'unica proprietà che cambia nei due casi è la quarta: per uno stato puro si ha che $\hat{\rho}$ è idempotente ovvero $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$ e pertanto vale che $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$. Mentre quando si hanno stati miscela $\hat{\rho}$ non è idempotente e $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1$. Ragion per cui ci si riferisce alla quantità $\text{tr}(\hat{\rho}^2)$ come purezza, essendo questa uguale a uno, solo quando il sistema è descritto da uno stato puro.

A questo punto si introduce l'operatore densità per uno stato puro, ovvero rappresentato da un singolo vettore di stato $|\psi(t)\rangle$. In questa situazione l'operatore densità è definito come l'operatore di proiezione sullo stato $|\psi(t)\rangle$

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (2.20)$$

Inoltre il valore medio per un generico osservabile \hat{A} si può scrivere come:

$$\langle \hat{A} \rangle (t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}(t)) = \text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{A}) \quad (2.21)$$

L'evoluzione temporale di $\hat{\rho}$ è data dall'equazione di Von Neumann:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (2.22)$$

Risulta evidente ancora una volta l'analogia con l'espressione classica (2.17). Anzi alla luce del legame tra parentesi di Poisson e commutatori, questa può essere vista semplicemente come una diretta conseguenza di tale legame, espresso dalla (2.13).

Inoltre, poiché la probabilità $P(a_n)$ di osservare un certo autovalore a_n di \hat{A} è esprimibile come il valor medio dell'operatore di proiezione $\hat{P}_n = |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$, allora si ha che:

$$P(a_n) = \langle \psi(t) | \hat{P}_n | \psi(t) \rangle = \text{tr}(\hat{P}_n \hat{\rho}(t)) \quad (2.23)$$

A questo punto si passa all'analisi dell'operatore densità per stati miscela. Si consideri la situazione in cui detto $|\psi_i\rangle$ il generico stato del sistema, la probabilità che esso si trovi nello stato $|\psi_1\rangle$ è p_1 , la probabilità che esso si trovi nello stato $|\psi_2\rangle$ è p_2 e così via, con il vincolo $\sum_i p_i = 1$ con $0 \leq p_i \leq 1$.

Allora per il singolo i -simo stato della miscela, avente probabilità p_i di occorere, si ha:

$$P_i(a_n) = \langle \psi_i | \hat{P}_n | \psi_i \rangle, \hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.24)$$

Per cui la probabilità complessiva $P(a_n)$ di misurare l'autovalore a_n di \hat{A} per la miscela di stati è data dalla media pesata delle singole probabilità $P_i(a_n)$:

$$\sum_i p_i P_i(a_n) \quad (2.25)$$

Sfruttando la linearità delle formule si ottiene:

$$P(a_n) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{P}_n | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{tr}(\hat{P}_n \hat{\rho}_i) = \text{tr} \sum_i p_i \hat{P}_n \hat{\rho}_i = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{P}_n) \quad (2.26)$$

Dove si è posto:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i \quad (2.27)$$

Da cui si vede che l'operatore densità $\hat{\rho}$ di uno stato miscela è dato dalla media pesata degli operatori densità $\hat{\rho}_i$ dei singoli stati. Inoltre sempre per la linearità delle formule l'evoluzione temporale dell'operatore densità è ancora dato dalla (2.22).

2.4 Principio di corrispondenza

Fino ad ora sono stati mostrati diversi punti di contatto, le principali differenze concettuali e non solo tra la meccanica quantistica e la meccanica classica. Adesso ci si chiede se è possibile passare da una grandezza *classica* alla corrispondente *quantistica*. Tale procedura è possibile e prende il nome di *principio di corrispondenza*. Per semplicità si considera il caso di un sistema descritto da una singola paricella in una dimensione, la generalizzazione è immediata. Questo consiste nell'associare a osservabile classico un corrispondente operatore autoaggiunto:

$$F(q, p) \rightarrow \hat{F}(\hat{Q}, \hat{P}) \quad (2.28)$$

Questo processo è applicabile ad una qualsiasi funzione classica, compresa l'hamiltoniana del sistema considerato:

$$H(q, p) \rightarrow \hat{H}(\hat{Q}, \hat{P}) \quad (2.29)$$

L'operatore Hamiltoniano ottenuto con questa procedura, è l'operatore hermitiano associato ad un particolare osservabile che è l'energia.

Il principio di corrispondenza consente quindi di passare da un osservabile classico ad un osservabile quantistico, quindi di passare a tutti gli effetti da una funzione ad un operatore, tuttavia si deve comprendere quale operatore viene associato alle particolari funzioni classiche:

$$q \rightarrow \hat{Q} = q \quad p \rightarrow \hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (2.30)$$

In questa situazione a q si associa l'operatore di moltiplicazione, mentre al momento p viene associato un operatore differenziale. Questi operatori soddisfano la (2.3) e per tale ragione vengono detti operatori canonici e nel seguito ci si riferirà solo a questa tipologia di operatori.

Si comprende quindi l'importanza cruciale del *principio di corrispondenza* nel passaggio dal mondo macroscopico a quello microscopico. A questo punto è logico chiedersi se il principio di corrispondenza associa uno e un solo operatore ad ogni data funzione classica. La risposta è no, infatti è necessario sottolineare che ci si trova davanti ad importanti problemi di ordinamento quando la funzione classica è una combinazione lineare di prodotti misti del tipo $q^m p^n$, per esempio:

$$pq \rightarrow \hat{Q}\hat{P} \quad pq \rightarrow \hat{P}\hat{Q} \quad (2.31)$$

o qualunque altro ordinamento intermedio.

Visto che dalla (2.3) gli operatori momento e posizione non commutano, la disamina di situazioni del genere costituisce il fulcro di questo lavoro e sarà affrontata nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Quantizzazioni di stati gaussiani

Come si è visto nella parte finale del capitolo precedente, nel passaggio da grandezze classiche, quindi funzioni che commutano, a grandezze quantistiche, quindi operatori che (in generale) non commutano, si può andare incontro ad un problema di ordinamento. Questo può essere risolto andando ad introdurre una *mappa di quantizzazione*, tale argomento sarà trattato nella successiva sezione e fornirà lo strumento matematico per esaminare l'obiettivo del presente lavoro: le *quantizzazioni di stati gaussiani*.

3.1 Mappe di quantizzazione

L'applicazione che si sta ricercando prende il nome di *mappa di quantizzazione*. Si indica con Ω . Questa è definita sullo spazio vettoriale delle funzioni appartenenti allo spazio delle fasi $F(\mathbb{S})$ ed ha valore in $O(\mathbb{H})$:

$$\Omega : F(\mathbb{S}) \rightarrow O(\mathbb{H}) \quad (3.1)$$

Effettivamente questa mappa associa ad una funzione *classica* un corrispondente operatore *quantistico*. Inoltre si richiede che questa applicazione soddisfi le seguenti proprietà:

1. sia invertibile
2. sia lineare: $\Omega(\alpha f + \beta g) = \alpha\Omega(f) + \beta\Omega(g)$
3. $\Omega(1) = \mathbb{1}$

introducendo l'operatore a un parametro $\hat{U}(x)$, è possibile definire la funzione associata ad un operatore \hat{A} nel modo seguente:

$$f_{\hat{A}}(x) = \text{tr}(\hat{A}\hat{U}(x)) \quad (3.2)$$

L'operatore a un parametro $\hat{U}(x)$ ricopre un ruolo fondamentale nella corrispondenza tra funzioni e operatori ed è denominato *dequantizer*.

L'applicazione inversa, ovvero quella che ad una funzione associa un operatore è ottenuta a partire da un operatore (più correttamente da un gruppo di operatori) $\hat{D}(x)$ chiamato *quantizer*, in tal modo si ha:

$$\hat{A} = \int dx f_{\hat{A}}(x) \hat{D}(x) \quad (3.3)$$

Dal momento che le due espressioni devono essere l'una l'inverso dell'altra deve succedere che:

$$\hat{A} = \int dx f_{\hat{A}}(x) \hat{D}(x) \Rightarrow \hat{A}\hat{U}(x') = \int dx f_{\hat{A}}(x) \hat{D}(x) \hat{U}(x') \Rightarrow \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\hat{A}\hat{U}(x')) = \int dx f_{\hat{A}}(x) \text{tr}(\hat{D}(x) \hat{U}(x')) \quad (3.5)$$

Si ottiene dunque:

$$\text{tr}(\hat{A}\hat{U}(x')) = \delta(x' - x) \quad (3.6)$$

In questo modo sono state trovate le condizioni che devono essere soddisfatte dal *quantizer* e dal *dequantizer*, affinché si ottenga una corretta applicazione tra spazio delle fasi e spazio di Hilbert.

Si presentano adesso alcuni ordinamenti notevoli:

1. $qp \rightarrow \hat{Q}\hat{P}$ ordinamento standard
2. $qp \rightarrow \hat{P}\hat{Q}$ ordinamento anti-standard
3. $qp \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q})$ ordinamento simmetrico o di Weyl

Alla luce di ciò, si può pensare di usare la seguente mappa di quantizzazione dipendente dal parametro γ :

$$\Omega_{\gamma}(f) = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} e^{\frac{\hbar}{2}(i\gamma\xi\eta)} \quad (3.7)$$

Dove $\tilde{f}(\xi, \eta)$ è la trasformata di Fourier della particolare funzione classica che si sta considerando. Come anticipato è la scelta di γ che porta a differenti ordinamenti: per $\gamma = 1$ si ottiene l'ordinamento standard; per $\gamma = -1$ l'ordinamento anti-standard; per $\gamma = 0$ l'ordinamento di Weyl.

Sarà proprio tramite la mappa (3.7) che, nella prossima sezione, si giungerà al cuore di questo lavoro, con le quantizzazioni di stati gaussiani.

3.2 Quantizzazioni di stati gaussiani

In questa tesi ci si è concentrati sul legame tra il mondo quantistico e il mondo classico, per poi giungere finalmente a trattare l'argomento delle mappe di quantizzazione. A questo punto si vuole procedere con l'analisi delle *quantizzazioni di stati gaussiani*. Quindi a partire da una gaussiana, che sarà scelta centrata nell'origine, definita nello spazio delle fasi \mathbb{S} si applicherà ad essa la mappa di quantizzazione (3.7), ovvero si procederà con un ordinamento arbitrario.

Si introduce dunque la gaussiana:

$$f(q, p) = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(q^2+p^2)} \quad (3.8)$$

Questa è una gaussiana normalizzata, in cui λ , che appartiene all'insieme dei reali positivi escluso lo zero, risulta essere il fattore di *compressione*.

La ragione per cui si è scelto di quantizzare una gaussiana è che essa classicamente è una funzione che può essere interpretata come la densità di probabilità di trovare la particella centrata nell'origine dello spazio delle fasi, ovvero quasi ferma e quasi nell'origine. Con la procedura di quantizzazione allora si vuole mettere in relazione diretta la densità di probabilità classica, espressa appunto dalla gaussiana, con la densità di probabilità quantistica, espressa in termini dell'operatore densità.

Nell'espressione (3.7) figura la trasformata di Fourier della funzione classica considerata, per tanto si calcola questa per la gaussiana nelle variabili ξ e η :

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp f(q, p) e^{i(\xi q + \eta p)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{4\lambda}} \quad (3.9)$$

Dove è stata utilizzata la nota espressione della trasformata di Fourier di una gaussiana:

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{2a} e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (3.10)$$

La prima cosa da verificare è se l'operatore ottenuto tramite questa mappa è autoaggiunto, altrimenti si è certi di non avere un buon operatore densità. Questa analisi può essere effettuata senza calcolare alcun integrale, infatti mandando $\xi \rightarrow -\xi$ ed $\eta \rightarrow -\eta$ si ha:

$$\Omega_\gamma^\dagger(f) = \int d(-\xi) d(-\eta) \tilde{f}^*(-\xi, -\eta) e^{-i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} e^{\frac{-\hbar}{2}(i\gamma\xi\eta)} \quad (3.11)$$

Ma dal momento che f è reale questo significa che $\tilde{f}^*(-\xi, -\eta) = \tilde{f}(\xi, \eta)$. Quindi si trova:

$$\Omega_\gamma^\dagger(f) = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} e^{\frac{-\hbar}{2}(i\gamma\xi\eta)} \quad (3.12)$$

A questo punto da un confronto immediato con la (3.7) si osserva che l'aggiunto dell'operatore non coincide con l'operatore stesso, dunque questo non è hermitiano per un γ generico. Si conclude che nel caso di un ordinamento arbitrario non è possibile associare ad una densità di probabilità classica descritta da una gaussiana, una corrispondente densità di probabilità quantistica descritta da un operatore densità, tramite l'applicazione di una mappa di quantizzazione: infatti questa restituisce un operatore che non è hermitiano e che quindi non risulta essere un buon operatore densità.

Questo almeno nel caso più generale, tuttavia ci possono essere dei particolari valori di γ per cui l'operatore può tornare ad essere hermitiano. Per ricercare gli eventuali valori di γ per cui si ha un operatore hermitiano si lavora in unità naturali, per cui $\hbar = 1$ e quindi da questo momento in poi con \hat{Q} e \hat{P} vengono indicati gli operatori posizione ed impulso *adimensionali*. Innanzitutto si scrive l'elemento di matrice associato all'operatore $\Omega_\gamma(f)$ nella base in cui $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ è diagonale:

$$\langle m | \Omega_\gamma(f) | n \rangle = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} \langle m | e^{-i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} | n \rangle \quad (3.13)$$

Dove \hat{a}^\dagger e \hat{a} sono rispettivamente gli operatori di creazione e distruzione:

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

$$\text{con } [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.15)$$

I dettagli del calcolo sono riportati nell'appendice A. il risultato ottenuto è il seguente:

$$\langle m | \Omega_\gamma(f) | m + k \rangle = c_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{2^{-i-\frac{k}{2}}}{(m-i)!(i+k)!} \int d\rho d\theta \rho e^{\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} e^{-\frac{\alpha}{2}\rho^2} (\rho^2)^{i+\frac{k}{2}} e^{ik\theta} \quad (3.16)$$

Dove $n = m + k$, $\alpha = \frac{1+\lambda}{2\lambda}$ e $c_{mk} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k$. Inoltre si è usato il simbolo i per l'indice su cui si somma, mentre con i si indica l'unità immaginaria.

Concentrando l'attenzione sulla parte integrale si ottiene:

$$\int_0^\infty d\rho e^{-\frac{\alpha}{2}\rho^2} (\rho)^{2(i+\frac{k}{2})+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} e^{ik\theta} \quad (3.17)$$

A questo punto si richiede che l'operatore sia autoaggiunto e che quindi valga che: Si impone la condizione sull'elemento di matrice:

$$\langle m | \Omega_\gamma(f) | n \rangle = (\langle n | \Omega_\gamma(f) | m \rangle)^* = \langle m | \Omega_\gamma^\dagger(f) | n \rangle \quad (3.18)$$

Pertanto bisogna calcolare l'elemento di matrice relativo a $\Omega_\gamma^\dagger(f)$

$$\langle m | \Omega_\gamma^\dagger(f) | n \rangle = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} \langle m | e^{i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} | n \rangle \quad (3.19)$$

Il calcolo risulta essere identico a quello effettuato in precedenza per la (3.13), per cui in coordinate polari l'unica differenza si avrà nell'integrale in $d\theta$:

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} e^{ik\theta} \quad (3.20)$$

Affinché l'operatore Ω_γ sia autoaggiunto deve valere la (3.18), quindi confrontando l'integrale angolare della (3.17) e la (3.20) si deve avere che:

$$e^{\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} = e^{-\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} \rightarrow e^{i\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} = 1 \quad (3.21)$$

Ma poiché questa relazione deve valere $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ e $\forall \rho \in [0, \infty]$ allora l'unica maniera è che $\gamma = 0$, finendo così nel caso particolare della mappa di Weyl. In questa maniera si è dunque provato che per $\gamma = 0$ l'operatore ottenuto tramite la mappa di quantizzazione è effettivamente hermitiano.

Si conclude che a partire da una densità di probabilità classica espressa da una gaussiana, in generale non è possibile ottenere una densità di probabilità quantistica, ovvero tramite l'applicazione di una mappa di quantizzazione, non si ottiene un buon operatore densità. Infatti i calcoli hanno mostrato che con tale procedura non si ottiene un operatore autoaggiunto, quindi l'operatore in questione sicuramente non potrà essere un operatore densità, ma inoltre non sarà nemmeno associato ad un qualsiasi osservabile, dal momento che a questo è sempre associato un operatore autoaggiunto. In altri termini non è possibile quantizzare la particella classica, nel caso di un ordinamento arbitrario. Questo però non impedisce che per un particolare ordinamento, ovvero per un particolare valore di γ , si possa ottenere un operatore hermitiano. Infatti si è mostrato che nel caso della mappa di Weyl, ovvero in corrispondenza del valore $\gamma = 0$, si ottiene effettivamente un operatore autoaggiunto. Questo non basta ad assicurare che l'operatore così ottenuto sia un operatore densità, bisogna verificare che siano soddisfatte tutte le proprietà di questo, tuttavia ciò esula dallo scopo di questa disamina, la quale si è posta l'obiettivo di mostrare cosa accade con un ordinamento arbitrario e che per un ordinamento specifico fosse *possibile* (ma da verificare) ottenere un buon operatore densità. Si riporta direttamente il risultato finale¹, ovvero la forma dell'operatore

¹Per il calcolo completo si può consultare [5] http://www.fisica.unina.it/documents/12375590/13725484/2628_LeoneL_24-10-2017.pdf/5dda65b8-2002-47f4-848b-c2db119a91a6

$\hat{\Omega}_0(f)$:

$$\langle n | \hat{\Omega}_0(f) | n \rangle = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^n \quad (3.22)$$

Esplicitando gli elementi di matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{1+\lambda} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.3 Ordinamento normale o di Wick

Dalla discussione precedente si è tenuto fuori una particolare tipologia di ordinamento, l'*ordinamento normale* o di *Wick*. Questo consiste nello scrivere l'operatore in termini di \hat{a} e \hat{a}^\dagger e ordinare in modo tale che nel prodotto tutti gli operatori di creazione sono a sinistra di tutti gli operatori di distruzione. Per far ciò conviene definire:

$$z = q + ip \quad \bar{z} = q - ip \quad (3.23)$$

La funzione alla quale si vuole applicare l'ordinamento normale è sempre la gaussiana considerata nella sezione precedente, che si riscrive per comodità:

$$f(q, p) = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(q^2 + p^2)}$$

Questa funzione in virtù della (3.23) diventa:

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2} \quad (3.24)$$

A questo punto si introduce il *quantizer* della mappa di Wick:

$$\hat{D}(x) = \frac{1}{\pi} \int d\xi^2 e^{\xi(\hat{a}^\dagger - \bar{z})} e^{-\bar{\xi}(\hat{a} - z)} \quad (3.25)$$

Per ottenere l'operatore Ω_W dove col pedice W si intende l'applicazione dell'ordinamento normale, quindi di Wick, si usa la (3.3):

$$\hat{\Omega}_W(f) = \int dz^2 \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2} \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\xi(\hat{a}^\dagger - \bar{z})} e^{-\bar{\xi}(\hat{a} - z)} \quad (3.26)$$

A questo punto bisogna calcolare questi integrali, i dettagli del calcolo si trovano nell'appendice B. Dal momento che sono presenti operatori all'interno dell'integrale in $d\xi^2$, sarà necessario effettuare il calcolo in termini di elementi di matrice.

Il primo importante risultato ottenuto è che gli elementi di matrice *off diagonal* sono nulli, quindi l'operatore è diagonale; il secondo risultato invece fornisce gli elementi di matrice diagonali:

$$\langle n | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle = \lambda(1 - \lambda)^n \quad (3.27)$$

Finalmente è possibile mostrare gli elementi di matrice:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(1 - \lambda) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(1 - \lambda)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ora è possibile introdurre un'espressione "astratta" dell'operatore $\hat{\Omega}_W(f)$ in termini dell'operatore numero \hat{N} :

$$\hat{\Omega}_W(f) = \lambda(1 - \lambda)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} = \lambda(1 - \lambda)^{\hat{N}} \quad (3.28)$$

Quindi l'operatore è autoaggiunto. Per verificare le altre proprietà dell'operatore densità conviene effettuare una analisi sui possibili valori di λ , per fare ciò si scrive la traccia dell'operatore:

$$\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n \quad (3.29)$$

Dal momento che questa è una serie geometrica, risulta essere divergente se la ragione della serie è maggiore di uno, il che corrisponde a $\lambda > 1$. Una verifica di ciò è fornita dal principio di indeterminazione di Heisenberg, infatti calcolando classicamente le deviazioni standard Δq e Δp per la funzione $f(q, p)$, ricordando che questa è la gaussiana (3.8), si ottiene:

$$\Delta q \Delta p = \frac{1}{2\lambda} \quad (3.30)$$

Quindi per $\lambda > 1$ si ha $\Delta q \Delta p < \frac{1}{2}$ violando così il principio di indeterminazione di Heisenberg. Pertanto da questo momento in poi si considerano unicamente i valori di λ tali che $0 < \lambda \leq 1$. Alla luce di tale osservazione, è evidente che allora gli autovalori dell'operatore $\hat{\Omega}_W(f)$ sono tutti non negativi. Resta solo da verificare se $\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = 1$. A tal proposito per valutare la serie risulta essere utile distinguere due casi:

1. $\lambda = 1$ in questo caso si ha:

$$\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 1)^n = \delta_0^n \quad (3.31)$$

Allora l'operatore corrispondente alla funzione classica (3.8) valutata per $\lambda = 1$ si comporta come il proiettore sullo stato fondamentale:

$$\hat{\Omega}_W(f|_{\lambda=1}) = |0\rangle \langle 0| \quad (3.32)$$

In questa situazione si ha un unico elemento di matrice non nullo, il primo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Evidentemente vale che $\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = 1$. Questa è la matrice densità di uno stato puro.

2. $\lambda < 1$

In questo caso si ha:

$$\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n \quad (3.33)$$

Essendo per ipotesi $\lambda < 1$ la ragione della serie geometrica è minore di uno e quindi è nota la convergenza della serie:

$$\text{tr}(\hat{\Omega}_W(f)) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n = 1 \quad (3.34)$$

Si comprende che in entrambi i casi il risultato ottenuto per la traccia è sempre uno. Quindi ciò che determina se l'operatore ottenuto tramite il processo di quantizzazione è un operatore densità o meno è se λ è maggiore o minore di uno. In quest'ultimo caso effettivamente tramite *l'ordinamento normale o di Wick* si ottiene un buon operatore densità. Ciò significa che in questa situazione a partire da una densità di probabilità classica, espressa da una gaussiana, si ottiene una densità di probabilità quantistica, in termini dell'operatore densità. Questo risulta essere particolarmente evidente nel caso in cui $\lambda = 1$ e l'operatore $\hat{\Omega}_W(f)$ si scrive proprio come un operatore di proiezione, che è proprio la definizione di un operatore densità, come visto nella sezione 2.3.

3.4 Confronto e conclusioni

I risultati ottenuti alla fine dei due precedenti paragrafi, conducono a conclusioni analoghe. Per evidenziare ciò, risulta essere conveniente scrivere di nuovo gli

elementi di matrice dei due operatori:

$$\langle n | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle = \lambda(1 - \lambda)^n \quad ; \quad \langle n | \hat{\Omega}_0(f) | n \rangle = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^n \quad (3.35)$$

Bisogna notare che così come mostrato per $\hat{\Omega}_W(f)$, con un ragionamento del tutto analogo per $\hat{\Omega}_0(f)$ si trova che la traccia è uguale a uno solo se $\lambda \leq 1$:

$$\text{tr}(\hat{\Omega}_0(f)) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^n \quad (3.36)$$

Infatti anche in questa situazione si ha una serie geometrica e affinché questa converga è necessario che la ragione sia minore di uno. Si sottolinea che nel caso particolare $\lambda = 1$, esattamente come visto per $\hat{\Omega}_W(f)$, anche $\hat{\Omega}_0(f)$ diviene il proiettore sullo stato di vuoto. Quindi i due ordinamenti, quello normale e quello simmetrico, portano ad un risultato analogo: per $\lambda \leq 1$ si ottiene un buon operatore densità, ma non per $\lambda > 1$. Questa condizione è stata ottenuta sia matematicamente, ricercando i valori per cui la serie geometrica fosse convergente; ma se ne ha una verifica puramente fisica, data dal principio di indeterminazione di Heisenberg, come mostrato nella precedente sezione attraverso la (3.30). Quindi il risultato a cui si giunge è che per i valori di λ maggiori di uno si viola il principio di indeterminazione. Questo è in accordo con il fatto che in entrambi i casi per $\lambda = 1$ sia $\hat{\Omega}_W(f)$ che $\hat{\Omega}_0(f)$ risultano essere il proiettore sullo stato di vuoto, il quale è lo stato di minima indeterminazione. Non sorprende dunque che i valori di $\lambda < 1$ conducano ad un buon processo di quantizzazione: classicamente questo corrisponde alla situazione in cui la particella risulta meno localizzata nell'origine e quindi quantisticamente viene rispettato il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Si conclude la tesi sottolineando che i risultati ottenuti mostrano una volta di più come la meccanica quantistica abbia un legame particolare con la teoria classica: è stato mostrato come usando un *ordinamento arbitrario* nel tentativo di *quantizzare* un oggetto classico, si va spesso incontro a situazioni insensate dal punto di vista fisico, in particolare ad una densità di probabilità classica è stato mostrato corrispondere un operatore non hermitiano, quindi non solo manca una corrispondenza tra densità di probabilità classica e quantistica, ma manca addirittura una corrispondenza tra un osservabile classico e uno quantistico. Si è anche sottolineato che risultasse essere possibile che selezionando non più un ordinamento arbitrario, ma un particolare ordinamento si potesse ottenere un operatore densità; d'altro canto con l'*ordinamento normale o di Wick* il processo di quantizzazione ha portato all'introduzione dell'operatore $\hat{\Omega}_W(f)$ che effettivamente soddisfa le proprietà dell'operatore densità. In questa situazione dunque si ha una corrispondenza tra mondo classico e mondo quantistico.

Appendice A

Calcolo per l'ordinamento arbitrario

In questa appendice è riportato nel dettaglio il calcolo effettuato nella sezione 3.2 per determinare gli elementi di matrice dell'operatore $\Omega_\gamma(f)$

$$\langle m | \Omega_\gamma(f) | n \rangle = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} \langle m | e^{-i(\xi\hat{Q}+\eta\hat{P})} | n \rangle \quad (\text{A.1})$$

Si focalizza l'attenzione sul prodotto scalare dentro l'integrale. È possibile ottenere un'espressione per \hat{Q} e \hat{P} in termini di \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\hat{Q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad (\text{A.2})$$

Ora si vuole scrivere $e^{-i(\xi\hat{Q}+\eta\hat{P})}$ in termini proprio degli operatori di creazione e distruzione:

$$e^{-i(\xi\hat{Q}+\eta\hat{P})} = e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)+\frac{\eta(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}{i})} = e^{-\frac{\hat{a}}{\sqrt{2}}(\eta+i\xi)-\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}(-\eta+i\xi)} \quad (\text{A.3})$$

Definendo:

$$z = \frac{\eta + i\xi}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.4})$$

L'espressione diventa:

$$e^{-i(\xi\hat{Q}+\eta\hat{P})} = e^{\hat{a}^\dagger z^* - \hat{a}z} \quad (\text{A.5})$$

Dal momento che verrà usata a breve, si ricorda la regole di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \quad (\text{A.6})$$

Con \hat{A} e \hat{B} definiti sullo spazio di Hilbert \mathbb{H} il cui commutatore è un numero. Bisogna sottolineare che questa condizione è rispettata dagli operatori \hat{Q} , \hat{P} .

Si utilizza tale regola:

$$e^{\hat{a}^\dagger z^* - \hat{a}z} = e^{\hat{a}^\dagger z^*} e^{-\hat{a}z} e^{-\frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger z^*, -\hat{a}z]} \quad (\text{A.7})$$

Usando le proprietà dei commutatori, introdotte nella sezione 2.2, e sfruttando la (3.15) si ottiene:

$$e^{\hat{a}^\dagger z^* - \hat{a}z} = e^{\hat{a}^\dagger z^*} e^{-\hat{a}z} e^{-\frac{1}{2}|z|^2 \mathbb{1}} \quad (\text{A.8})$$

Si pone di nuovo l'attenzione sul prodotto scalare sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \langle m | e^{-i(\xi\hat{Q} + \eta\hat{P})} | n \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \langle m | e^{\hat{a}^\dagger z^*} e^{-\hat{a}z} | n \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} [\langle m | (e^{\hat{a}^\dagger z^*})^\dagger] [e^{-\hat{a}z} | n \rangle] = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} [\langle m | (e^{\hat{a}z})] [e^{-\hat{a}z} | n \rangle] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dove si è sfruttato che:

$$(e^{\hat{a}^\dagger z^*})^\dagger = \sum_n \left(\frac{(\hat{a}^\dagger z^*)^n}{n!} \right)^\dagger = \frac{(\hat{a}z)^n}{n!} \quad (\text{A.10})$$

L'operazione di dividere il prodotto scalare consente di calcolare l'azione dell'operatore sui due ket:

$$e^{\hat{a}z} | m \rangle = \sum_{i=0}^m \frac{z^i}{i!} \hat{a}^i | m \rangle = \sum_{i=0}^m \frac{z^i}{i!} \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!}} | m-i \rangle \quad (\text{A.11})$$

$$e^{-\hat{a}z} | n \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{z^j}{j!} \hat{a}^j | n \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{z^j}{j!} \sqrt{\frac{n!}{(n-j)!}} | n-j \rangle \quad (\text{A.12})$$

Dove da ora in poi con i si indica l'indice della sommatoria e con i l'unità immaginaria.

Se ne effettua il prodotto scalare:

$$\langle m e^{\hat{a}z} | e^{-\hat{a}z} n \rangle = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{z^{*i}}{i!} \frac{z^j}{j!} (-1)^j \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!} \frac{n!}{(n-j)!}} \delta_{m-i}^{n-j} \quad (\text{A.13})$$

per semplificare l'espressione si pone:

$$k = n - m \rightarrow n = m + k \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.14})$$

$$s = j - k = j - n + m \quad (\text{A.15})$$

In questo modo la δ_{m-i}^{n-j} diventa una δ_{m-i}^{m-s} quindi sono non nulli solo i termini per cui $i = s$ questo implica che:

$$s = j - k = i \rightarrow j = i + k \quad (\text{A.16})$$

Allora la (A.13) diventa:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^m \frac{z^{*i} z^{i+k}}{i!(i+k)!} (-1)^{i+k} \sqrt{\frac{(m+k)!m!}{(m-i)!(m+k-i-k)!}} \\
&= \sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} |z|^{2i} z^k \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Definendo:

$$c_{mk} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k \quad (\text{A.18})$$

A questo punto si può procedere con il calcolo dell'integrale (A.1), ovvero con il calcolo degli elementi di matrice dell'operatore $\Omega_\gamma(f)$ nella *base naturale*. Per ottenere la seguente espressione, si effettuano le sostituzioni nella (A.1) della (3.9), (A.14) e la (A.17).

$$\begin{aligned}
\langle m | \Omega_\gamma(f) | m+k \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} e^{-\frac{1}{2\lambda}|z|^2} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} [\langle m | (e^{\hat{a}z})] [e^{-\hat{a}z} | m+k \rangle] \\
&= c_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \\
&\quad \int d\xi d\eta e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} e^{-\frac{1+\lambda}{2\lambda}|z|^2} |z|^{2i} z^k \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Si pone:

$$\alpha = \frac{1+\lambda}{2\lambda} \quad (\text{A.20})$$

Inoltre si ricorda che vale la (A.4), pertanto l'espressione diventa:

$$\begin{aligned}
&= c_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi d\eta e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi^2+\eta^2)} \frac{(\xi^2+\eta^2)^i}{2^i} \left(\frac{\eta+i\xi}{\sqrt{2}}\right)^k \\
&= c_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{2^{-i-\frac{k}{2}}}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi d\eta e^{\frac{i}{2}\gamma\xi\eta} e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi^2+\eta^2)} (\xi^2+\eta^2)^i (\eta+i\xi)^k \\
&= c_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{2^{-i-\frac{k}{2}}}{(m-i)!(i+k)!} \int d\rho d\theta \rho e^{\frac{i}{2}\gamma\rho^2 \cos\theta \sin\theta} e^{-\frac{\alpha}{2}\rho^2} (\rho^2)^{i+\frac{k}{2}} e^{ik\theta} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Dove si sono introdotte le coordinate polari:

$$\eta = \rho \cos\theta \quad \xi = \rho \sin\theta \quad (\text{A.22})$$

Appendice B

Calcolo per l'ordinamento normale

In questa appendice è riportato nel dettaglio il calcolo effettuato nella sezione 3.3 per determinare gli elementi di matrice dell'operatore $\hat{\Omega}_W(f)$.

$$\hat{\Omega}_W(f) = \int dz^2 \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2} \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\xi(\hat{a}^\dagger - \bar{z})} e^{-\bar{\xi}(\hat{a} - z)} \quad (\text{B.1})$$

A questo punto bisogna calcolare questi integrali, si sfrutta il fatto che:

$$dz^2 = dqdp \quad (\text{B.2})$$

In questo modo la (B.1) diviene:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_W(f) &= \int dqdp \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2} \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\xi(\hat{a}^\dagger - \bar{z})} e^{-\bar{\xi}(\hat{a} - z)} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int dqdp e^{-\lambda(q^2+p^2)} \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\xi(\hat{a}^\dagger - (q-ip))} e^{-\bar{\xi}(\hat{a} - (q+ip))} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int dqdp e^{-\lambda(q^2+p^2)} e^{-\xi q} e^{i\xi p} e^{\bar{\xi} q} e^{i\bar{\xi} p} \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\xi \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\xi} \hat{a}} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

A questo punto si risolve l'integrale in $dqdp$:

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\pi} \int dqdp e^{-\lambda(q^2+p^2)} e^{-\xi q} e^{i\xi p} e^{\bar{\xi} q} e^{i\bar{\xi} p} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int dqdp e^{-\lambda(q^2+p^2) + q(\xi - \bar{\xi}) + ip(\xi + \bar{\xi})} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int dq e^{-\lambda q^2 + q(\xi - \bar{\xi})} \int dp e^{-\lambda p^2 + ip(\xi + \bar{\xi})} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \frac{\pi}{\lambda} e^{\frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{4\lambda}} e^{\frac{(\xi + \bar{\xi})^2}{4\lambda}} \\ &= e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

In questo caso si è sfruttato il noto risultato per integrali gaussiani del tipo:

$$\int dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (\text{B.5})$$

Quindi la (B.1) diventa:

$$\hat{\Omega}_W(f) = \int d\xi^2 \frac{1}{\pi} e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} e^{\xi \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\xi} \hat{a}} \quad (\text{B.6})$$

Si procede con il calcolo degli elementi di matrice:

$$\langle m | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle = \frac{1}{\pi} \int d\xi^2 e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} \langle m | e^{\xi \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle \quad (\text{B.7})$$

Si concentra l'attenzione sul prodotto scalare all'interno dell'integrale:

$$\langle m | e^{\xi \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle = [\langle m | (e^{\xi \hat{a}^\dagger})^\dagger] [e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle] = [\langle m | (e^{\bar{\xi} \hat{a}})] [e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle] \quad (\text{B.8})$$

Si mostra l'azione sui ket:

$$e^{\bar{\xi} \hat{a}} | m \rangle = \sum_{i=0}^m \frac{(\bar{\xi})^i}{i!} \hat{a}^i | m \rangle = \sum_{i=0}^m \frac{(\bar{\xi})^i}{i!} \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!}} | m-i \rangle \quad (\text{B.9})$$

$$e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(\bar{\xi})^j}{j!} \hat{a}^j | n \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(\bar{\xi})^j}{j!} \sqrt{\frac{n!}{(n-j)!}} | n-j \rangle \quad (\text{B.10})$$

Dove con i si indica l'indice della sommatoria e con i l'unità immaginaria.

Se ne effettua il prodotto scalare:

$$\langle m | e^{\bar{\xi} \hat{a}} | e^{-\bar{\xi} \hat{a}} | n \rangle = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i! j!} (-1)^j \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!} \frac{n!}{(n-j)!}} \delta_{m-i}^{n-j} \quad (\text{B.11})$$

per semplificare l'espressione si pone:

$$k = n - m \rightarrow n = m + k \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \quad (\text{B.12})$$

$$s = j - k = j - n + m \quad (\text{B.13})$$

In questo modo la δ_{m-i}^{n-j} diventa una δ_{m-i}^{m-s} quindi sono non nulli solo i termini per cui $i = s$ questo implica:

$$s = j - k = i \rightarrow j = i + k \quad (\text{B.14})$$

L'espressione (B.11) diventa:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^m \frac{\xi^i \bar{\xi}^{i+k}}{i!(i+k)!} (-1)^{i+k} \sqrt{\frac{(m+k)!m!}{(m-i)!(m+k-i-k)!}} = \\
&= \sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} |\xi|^{2i} \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

Definendo

$$a_{mk} = \frac{1}{\pi} \sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k \quad (\text{B.16})$$

La (B.7) usando che:

$$d\xi^2 = d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{B.17})$$

Diventa:

$$\begin{aligned}
&\langle m | \hat{\Omega}_W(f) | m+k \rangle = \\
&a_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi^2 e^{-\frac{|\xi|^2}{\lambda}} |\xi|^{2i} \bar{\xi}^k = \\
&a_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi_1 d\xi_2 e^{-\frac{|\xi_1 + \xi_2|^2}{\lambda}} |\xi_1^2 + \xi_2^2|^i (\xi_1 - i\xi_2)^k = \\
&a_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int d\rho d\theta \rho e^{-\frac{\rho^2}{\lambda}} \rho^{2i} \rho^k e^{-ik\theta} = \\
&a_{mk} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{\rho^2}{\lambda}} \rho^{2i+1+k} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik\theta} \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

Dal momento che l'integrale in $d\theta$ è non nullo solo se $k = 0$ si ottiene un primo importante risultato: i termini *off diagonal* sono nulli.

A questo punto si determinano gli elementi diagonali:

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle &= \frac{1}{\pi} 2\pi n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{i!(n-i)!} \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{\rho^2}{\lambda}} \rho^{2i+1} \\
&= 2 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} \int_0^\infty d\rho e^{-\frac{\rho^2}{\lambda}} \rho^{2i+1} \\
&= 2 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} \lambda^{i+1} \frac{2i!!}{2^{i+1}} \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è usato il risultato dell'integrale:

$$\int_0^\infty d\rho e^{-\frac{\rho^2}{\lambda}} \rho^{2i+1} = \lambda^{i+1} \frac{2i!!}{2^{i+1}} \quad (\text{B.20})$$

Che può essere ottenuto ragionando per induzione. Ora usando che $2i!! = 2^i \cdot i!$ la (B.19) diventa:

$$\langle n | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^{i+1} = \lambda \sum_{i=0}^n (-\lambda)^i \binom{n}{i} \quad (\text{B.21})$$

Riconoscendo lo sviluppo in serie di potenze del binomio di Newton si ottiene:

$$\langle n | \hat{\Omega}_W(f) | n \rangle = \lambda(1 - \lambda)^n \quad (\text{B.22})$$

Bibliografia

- [1] David Bohm. *Quantum theory*. Dover Publications, 1989.
- [2] Piero Caldirola, Giovanni Prosperi, and Renzo Cirelli. *Introduzione alla fisica teorica*. UTET, 1982.
- [3] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [4] Giampiero Esposito, Giuseppe Marmo, Gennaro Miele, and George Sudarshan. *Advanced concepts in quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2014.
- [5] Lorenzo Leone. Quantizzazione di stati gaussiani. *Laurea triennale*, Napoli, Federico II, 2017.
- [6] Fedele Lizzi, Patrizia Vitale, et al. Matrix bases for star products: a review. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 10:086, 2014.
- [7] Antonio Romano. *Introduzione alla meccanica classica*. Maggioli Editore, 2019.