

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Integrali sui Cammini di Feynman
Feynman Path Integrals**

Relatori:
Prof. Massimo Taronna

Candidato:
Francesco Confortini
Matr. N850001334

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	2
1 Propagatore	4
1.1 Definizione propagatore	4
1.2 Ampiezza di transizione	7
2 Integrali sui cammini	10
2.1 Metodo degli operatori di Feynman	10
2.2 Formalismo Hamiltoniano	11
2.3 Misura	14
2.4 Equazione di Schrödinger	16
2.5 Formalismo Lagrangiano e limite classico	18
2.6 Teoria perturbativa	21
2.7 Cammini euclidei	23
3 Applicazioni dell'integrale di cammino	25
3.1 Approssimazione semiclassica	25
3.2 Particella libera	28
3.3 Particella sul cerchio	30
3.4 Oscillatore armonico	31
3.5 Ampiezza tra stati fondamentali	36
3.6 Effetto di Aharonov-Bohm	39
Conclusioni	48
A Calcolo oscillatore armonico	49
Bibliografia	51

Introduzione

In fisica delle particelle elementari ed in teoria dei campi i fenomeni quantistici sono tipicamente descritti in due modi equivalenti:

1. Formalismo operatoriale (quantizzazione canonica, spazi di Hilbert, operatori, etc..)
2. Formalismo dell'integrale di Feynman (detto anche integrale sui cammini o path integral)

L'integrale sui cammini è stato introdotto in meccanica quantistica da Feynman nell'articolo "Space-time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics" nel 1948. L'idea di descrivere la meccanica quantistica mediante un integrale funzionale fu suggerita per la prima volta da alcune osservazioni di Dirac nel suo libro "The principles of Quantum Mechanics". In particolare, come giovane studente di dottorato all'Università di Princeton, si dice che Feynman fu incuriosito da una misteriosa osservazione nel libro di Dirac, che nelle notazioni di questa tesi è: $\exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(q, \dot{q})\right]$ corrisponde a $\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle$.

Feynman provò a capire il significato di questo commento. "Corrisponde a" è la stessa cosa di "è uguale a" oppure "è proporzionale a"? Così facendo fu portato a formulare un approccio spazio-temporale alla meccanica quantistica basato sugli integrali di cammino. L'integrale sui cammini si è dimostrato cruciale per il successivo sviluppo della fisica teorica, fornendo le basi per l'elaborazione del gruppo di rinormalizzazione, che unificò la teoria quantistica dei campi con la meccanica statistica. Se si riflette sul fatto che l'equazione di Schrödinger è essenzialmente una equazione di diffusione con una costante immaginaria, l'integrale di percorso è un metodo per l'enumerazione dei cammini casuali. Per questa ragione gli integrali di cammino sono stati utilizzati anche nello studio del moto browniano e della diffusione, prima della loro introduzione come formulazione alternativa della meccanica quantistica.

Oggi, inoltre, l'integrale sui cammini fornisce una descrizione della meccanica quantistica che si avvicina molto alla visione classica del moto di un punto materiale su delle traiettorie ben definite nello spazio delle fasi o nello spazio-tempo,

anche se i cammini su cui l'integrale funzionale è calcolato sono singolari. Mentre la meccanica quantistica di Heisenberg e di Schrödinger introduce immediatamente il concetto di operatore-misura lasciando poco spazio all'intuizione classica, l'integrale sui cammini non distrugge completamente il concetto di traiettoria del punto materiale ma lo estende.

In questa tesi cercheremo di dare una definizione delle proprietà più importanti di questo formalismo discutendone alcune delle sue applicazioni più semplici.

Capitolo 1

Propagatore

In questo capitolo deriveremo la definizione del propagatore in meccanica quantistica, utilizzando il formalismo operatoriale. In particolare, analizzeremo il legame di questa grandezza con la definizione canonica, in meccanica quantistica, dell'ampiezza di probabilità tra stati.

1.1 Definizione propagatore

In meccanica quantistica sappiamo che l'evoluzione temporale di un vettore dello spazio di Hilbert che rappresenta il sistema, $|\psi(t_0; t)\rangle$, è dominata dall'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo, che nella base delle coordinate, $\hat{\mathbf{q}}$, assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial \langle \mathbf{q} | \psi \rangle}{\partial t} = \langle \mathbf{q} | H | \psi \rangle \quad (1.1)$$

Supponiamo che l'operatore Hamiltoniano assuma la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{q}}) \quad (1.2)$$

che rappresenta un sistema indipendente dal tempo soggetto a un potenziale, $V(\hat{\mathbf{q}})$, dipendente soltanto dalle posizioni. In particolare, sappiamo che il più generale problema di evoluzione temporale, con un hamiltoniana indipendente dal tempo, si può risolvere una volta che abbiamo sviluppato il ket iniziale sugli autoket dell'hamiltoniana. Traducendo questo in formule otteniamo

$$|\psi(t_0; t)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right] |\psi(t_0)\rangle = \sum_{E'} |E'\rangle \langle E' | \psi(t_0)\rangle \exp\left[\frac{-iE'(t-t_0)}{\hbar}\right] \quad (1.3)$$

Dove abbiamo utilizzato come base di autoket gli stessi autostati del hamiltoniana, $|E'\rangle$. Ora moltiplichiamo ambo i membri per l'autostato $\langle \mathbf{q}'|$ ottenendo

$$\langle \mathbf{q}'|\psi(t_0; t)\rangle = \sum_{E'} \langle \mathbf{q}'|E'\rangle \langle E'|\psi(t_0; t)\rangle \exp\left[-\frac{iE'(t-t_0)}{\hbar}\right] \quad (1.4)$$

che si può scrivere come

$$\psi(\mathbf{q}', t) = \sum_{E'} c'_E(t_0) u'_E(\mathbf{q}') \exp\left[\frac{-iE'(t-t_0)}{\hbar}\right] \quad (1.5)$$

con

$$u'_E(\mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}'|E'\rangle \quad (1.6)$$

che rappresenta un'autofunzione dell'operatore \hat{H} con autovalore E' proiettata nella base delle coordinate. Si noti anche che

$$\langle E'|\psi(t_0)\rangle = \int d^3q' \langle E'|\mathbf{q}'\rangle \langle \mathbf{q}'|\psi(t_0)\rangle \quad (1.7)$$

che riconosciamo come la consueta regola in meccanica ondulatoria per ottenere i coefficienti dello sviluppo dello stato iniziale

$$c'_E(t_0) = \int d^3q' u_{E'}^*(\mathbf{q}') \psi(\mathbf{q}', t_0) \quad (1.8)$$

Ora, la (1.4) assieme alla (1.7) possono anche essere viste come una sorta di operatore integrale che agisce sulla funzione d'onda iniziale per fornire la funzione d'onda finale:

$$\psi(\mathbf{q}'', t) = \int d^3q' K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0] \psi(\mathbf{q}', t_0) \quad (1.9)$$

Qui il nucleo dell'operatore, chiamato propagatore o funzione di Green, è dato da

$$K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0] = \sum_{E'} \langle \mathbf{q}''|E'\rangle \langle E'|\mathbf{q}'\rangle \exp\left[-\frac{iE'(t-t_0)}{\hbar}\right] \quad (1.10)$$

Per ogni specifico problema il propagatore dipende solo dal potenziale ed è indipendente dalla funzione d'onda iniziale. Può essere costruito una volta che le autofunzioni dell'energia e i loro autovalori siano noti: chiaramente l'evoluzione temporale della funzione d'onda è chiaramente predicibile se è noto $K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0]$ ed è data $\psi(\mathbf{q}', t_0)$. In questo senso, la meccanica quantistica alla Schrödinger è una teoria perfettamente casuale. L'evoluzione temporale di una funzione d'onda soggetta ad un potenziale è altrettanto "deterministica" come qualunque altra evoluzione in meccanica classica a patto che il sistema non venga disturbato.

Ci sono due proprietà del propagatore importanti. Primo, per $t > t_0$, $K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0]$ soddisfa l'equazione d'onda di Schrödinger dipendente dal tempo nelle variabili \mathbf{q}'' e t , con \mathbf{q}' e t_0 fissi. Questo è evidente se si considera la (1.10) dato che $\langle \mathbf{q}'' | E' \rangle \exp\left[\frac{-iE'(t-t_0)}{\hbar}\right]$ soddisfa l'equazione d'onda, essendo la funzione d'onda corrispondente a $\hat{U}(t, t_0) | E' \rangle$.

Secondo,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0] = \delta^3(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}') \quad (1.11)$$

che è anch'essa una relazione ovvia; per $t \rightarrow t_0$, data la completezza di $\{|E'\rangle\}$, la somma in (1.10) si riduce a $\langle \mathbf{q}'' | \mathbf{q}' \rangle$. In virtù di queste due proprietà, il propagatore (1.10), considerato come funzione di \mathbf{q}'' , è semplicemente la funzione d'onda al tempo t di una particella che era stata localizzata con precisione in \mathbf{q}' a un istante precedente t_0 . In verità questa interpretazione consegue se si nota che la (1.10) può anche essere scritta come

$$K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0] = \langle \mathbf{q}'' | \exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right] | \mathbf{q}' \rangle \quad (1.12)$$

dove l'azione dell'operatore di evoluzione temporale su $|\mathbf{q}'\rangle$ genera il ket di stato al tempo t di un sistema che era localizzato con precisione in \mathbf{q}' al tempo t_0 ($< t$). Se desideriamo risolvere un problema più generale, in cui la funzione d'onda iniziale si estende su una regione finita di spazio, tutto quello che dobbiamo fare è di moltiplicare $\psi(\mathbf{q}', t_0)$ per il propagatore $K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0]$ e integrare su tutto lo spazio (cioè su \mathbf{q}'). La specifica forma del propagatore dipende naturalmente dallo specifico potenziale a cui la particella è soggetta. Consideriamo, per esempio, una particella libera in una dimensione. L'operatore di evoluzione temporale stavolta è diagonale nella base dei momenti:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.13)$$

E quindi per l'evoluto temporale:

$$\hat{U}_0(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i\hat{p}^2(t-t_0)}{2m\hbar}\right] \quad (1.14)$$

L'autofunzione dell'impulso nello spazio delle posizioni risultano essere le onde piane nella forma $\exp\left[\frac{i\hat{p}\hat{q}}{\hbar}\right]$. Combinando tutto otteniamo per il propagatore:

$$K_0[q'', t; q', t_0] = \langle q'' | \exp\left[-\frac{i\hat{p}^2(t-t_0)}{2m\hbar}\right] | q' \rangle \quad (1.15)$$

Da cui utilizzando la completezza della base degli impulsi si ottiene

$$K_0[q'', t; q', t_0] = \int dp' \int dp \langle q'' | p' \rangle \langle p' | \exp \left[-\frac{i\hat{p}^2(t-t_0)}{2m\hbar} \right] | p \rangle \langle p | q' \rangle \quad (1.16)$$

E ricordando che Hamiltoniana risulta essere diagonale nella base degli impulsi

$$K_0[q'', t; q', t_0] = \frac{1}{2\hbar\pi} \int dp \exp \left[\frac{ip(q'' - q')}{\hbar} - \frac{ip^2(t-t_0)}{2m\hbar} \right] \quad (1.17)$$

Utilizzando l'integrale gaussiano si ottiene

$$K_0[q'', t; q', t_0] = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)}} \exp \left[\frac{im(q'' - q')^2}{2\hbar(t-t_0)} \right] \quad (1.18)$$

Questa espressione può essere usata, per esempio, per studiare l'allargamento di un pacchetto d'onda gaussiano al trascorrere del tempo.

Per oscillatore armonico unidimensionale, un sistema di fondamentale importanza in fisica perché consente di modellizzare numerose situazioni reali, il propagatore è

$$K[q'', t; q', t_0] = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega(t_f - t_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(q''^2 + q'^2) \cos(\omega T) - 2q'q''] \right] \quad (1.19)$$

questa espressione può essere dimostrata utilizzando il formalismo operatoriale della meccanica quantistica, in particolare utilizzando gli operatori di creazione e distruzione a e a^\dagger o alternativamente, come faremo in questa tesi, utilizzando il formalismo dell'integrale sui cammini di Feynman che descriveremo in seguito.

1.2 Ampiezza di transizione

Di particolare interesse è il significato fisico del propagatore soprattutto perché esso è collegato al concetto di ampiezza di transizione. In particolare, ricordando che dalla meccanica quantistica la funzione d'onda, che è il prodotto scalare fra il bra della posizione, che è fisso, $\langle q' |$ con il ket di stato che varia nel tempo $|\psi(t_0, t)\rangle$, può anche essere considerata come il prodotto scalare del bra della posizione nella rappresentazione di Heisenberg $\langle q', t |$, che varia nel tempo "al contrario", con il ket di stato nella rappresentazione di Heisenberg, che è fisso nel

tempo. Analogamente, anche il propagatore si puo scrivere come

$$\begin{aligned}
K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0] &= \sum_{E'} \langle \mathbf{q}'' | E' \rangle \langle E' | \mathbf{q}' \rangle \exp \left[-\frac{iE'(t - t_0)}{\hbar} \right] \\
&= \sum_{E'} \langle \mathbf{q}'' | \exp \left(-\frac{iHt}{\hbar} \right) | E' \rangle \langle E' | \exp \left(-\frac{iHt_0}{\hbar} \right) | \mathbf{q}' \rangle \\
&= \langle \mathbf{q}'', t | \mathbf{q}', t_0 \rangle
\end{aligned} \tag{1.20}$$

dove $|\mathbf{q}', t_0\rangle$ e $\langle \mathbf{q}'', t|$ sono un autoket e un autobra dell'operatore posizione nella rappresentazione di Heisenberg. In particolare, sappiamo che in questa rappresentazione il prodotto interno $\langle b' | a' \rangle$ rappresenta l'ampiezza di probabilità di un sistema, preparato originariamente come autostato di \hat{A} con autovalore a' a un centro istante iniziale t_0 , di trovarsi a un istante seguente t in un autostato di \hat{B} con autovalore b' ; da cui questo prodotto interno viene chiamato ampiezza di transizione per andare dallo stato $|a'\rangle$ allo stato $|b'\rangle$. Poiché non c'è niente di speciale nella scelta di t_0 (solo la differenza $t - t_0$ è rilevante) possiamo identificare $\langle \mathbf{q}'', t | \mathbf{q}', t_0 \rangle$ come l'ampiezza di probabilità che la particella, preparata a t_0 in un autostato della posizione con autovalore \mathbf{q}' , si trovi a un istante seguente t in \mathbf{q}'' . Grosso modo, $\langle \mathbf{q}'', t | \mathbf{q}', t_0 \rangle$ è l'ampiezza di transizione per la particella di andare da un punto dello spazio tempo (\mathbf{q}', t_0) a un altro punto dello spazio tempo (\mathbf{q}'', t) . Questa interpretazione è, naturalmente, in accordo con l'interpretazione che abbiamo dato prima di $K[\mathbf{q}'', t; \mathbf{q}', t_0]$. Un altro modo ancora di interpretare $\langle \mathbf{q}'', t | \mathbf{q}', t_0 \rangle$ è il seguente. Come abbiamo già prima sottolineato, $|\mathbf{q}', t_0\rangle$ è l'autoket della posizione a t_0 con autovalore \mathbf{q}' nella rappresentazione di Heisenberg. Poiché, a ogni istante di tempo, gli autoket di un osservabile nella rappresentazione di Heisenberg possono essere scelti come autoket di base, possiamo considerare $\langle \mathbf{q}'', t | \mathbf{q}', t_0 \rangle$ come una trasformazione unitaria, nel senso di un cambiamento di base, che connette un insieme di ket di base formato da $\{|\mathbf{q}', t_0\rangle\}$ a un altro formato da $\{|\mathbf{q}'', t\rangle\}$. Questo ci ricorda in fisica classica l'evoluzione temporale di una variabile dinamica come $\mathbf{q}''(t)$, che può essere vista come una trasformazione canonica generata dalla hamiltoniana del sistema. Poiché a ogni istante gli autoket della posizione formano un insieme completo nella rappresentazione di Heisenberg, è legittimo inserire l'operatore identità scritto come

$$\int d^3q'' |\mathbf{q}'', t''\rangle \langle \mathbf{q}'', t''| = 1 \tag{1.21}$$

dovunque ci serva nelle equazioni. Per esempio consideriamo l'evoluzione temporale da t' a t''' , con $t''' > t'$; dividendo l'intervallo temporale (t', t''') in due parti, (t', t'') e (t'', t''') , abbiamo

$$\langle \mathbf{q}''', t''' | \mathbf{q}', t' \rangle = \int d^3q'' \langle \mathbf{q}''', t''' | \mathbf{q}'', t'' \rangle \langle \mathbf{q}'', t'' | \mathbf{q}', t' \rangle \tag{1.22}$$

Ovviamente possiamo dividere l'intervallo temporale in tanti sottointervalli quanti desideriamo. Abbiamo cioè

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'''' , t'''' | \mathbf{q}' , t' \rangle &= \int d^3 q'''' \int d^3 q'' \langle \mathbf{q}'''' , t'''' | \mathbf{q}'''' , t'''' \rangle \langle \mathbf{q}'''' , t'''' | \mathbf{q}'' , t'' \rangle \\ &\times \langle \mathbf{q}'' , t'' | \mathbf{q}' , t' \rangle \end{aligned} \quad (1.23)$$

Se, in qualche modo, siamo in grado di calcolare la forma di $\langle \mathbf{q}'' , t'' | \mathbf{q}' , t' \rangle$ per un intervallo di tempo infinitesimo (fra t' e $t'' = t' + dt'$), dovremmo essere in grado di ottenere l'ampiezza $\langle \mathbf{q}'' , t'' | \mathbf{q}' , t' \rangle$ per un intervallo di tempo finito componendo le ampiezze di transizione per intervalli di tempo infinitesimi in maniera simile a (1.23). Questo tipo di ragionamento ha portato R. P. Feynman nel 1948 a formulare un'interpretazione diversa della meccanica quantistica, ragionamento che illustreremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Integrali sui cammini

In questo capitolo deriveremo, seguendo il ragionamento di Feynman, il formalismo generale della teoria dell'integrale sui cammini.

2.1 Metodo degli operatori di Feynman

Consideriamo il più semplice sistema quantistico costituito da unico grado di libertà \hat{q} , e il suo momento coniugato \hat{p} , la cui dinamica è descritta dal Hamiltoniana (1.2) vista nel capitolo precedente. Come abbiamo già visto per stabilire l'evoluzione temporale di un sistema in meccanica quantistica dobbiamo determinare l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t-t_0)$ che propaga lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$, nella rappresentazione di Schrödinger, avanti nel tempo.

$$|\psi(t_0, t)\rangle = \exp[-iH(t-t_0)]|\psi(t_0)\rangle = U(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2.1)$$

In particolare, se conosciamo la forma del propagatore o funzione di Green

$$\begin{aligned} K[q, t; q_0, t_0] &= \langle q(t)|q_0(t_0)\rangle = \langle q(0)|\exp[-iH(t-t_0)]|q_0(0)\rangle \\ &= {}_H\langle q|\exp[-iH(t-t_0)]|q_0\rangle_H \end{aligned} \quad (2.2)$$

allora possiamo determinare l'evoluzione temporale di un qualsiasi stato nel tempo. Ma gli elementi di matrice della (2.2) sono difficili da valutare nella maggior parte dei casi fisici, è questo perché in meccanica quantistica gli operatori momento \hat{p} e posizione \hat{q} non commutano fra di loro, quindi le normali procedure di analisi falliscono.

In particolare, si dimostra necessario dividere l'azione dei due operatori non-commutanti $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ e $V(\hat{q})$ che appaiono in (1.2), allo scopo di poter valutare gli elementi di matrice di $\hat{U}(t-t_0)$. Per fare questo Feynman inventò il seguente metodo di calcolo: supponiamo di avere un set di operatori \hat{A}, \hat{B}, \dots , e associamo

a ciascuno di essi un label s in questo modo: $\hat{A} \rightarrow \hat{A}(s)$, $0 \leq s < 1$, e imponiamo la regola che quando due operatori con differenti valori di s agiscono su uno stesso stato, il loro ordine (da destra verso sinistra) d'azione deve essere attuato per valori di s crescenti. Per esempio, se $s' > s$ allora l'ordine è:

$$\hat{B}(s')\hat{A}(s) \quad (2.3)$$

Altrimenti

$$\hat{A}(s)\hat{B}(s') \quad (2.4)$$

Una volta applicato questo metodo possiamo scordarci dell'ordine di azione degli operatori fintanto che teniamo in conto dei vari valori di s con cui sono valutati gli stessi così che alla fine, quando applichiamo la regola appena spiegata, possiamo ritornare al giusto ordine di esecuzione degli operatori. Per esempio, la funzione operatoriale $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$, può essere sostituita da $F = A(1)B(0) = B(0)A(1)$. Visto che la maggior parte delle funzioni che utilizzeremo sono polinomi con operatori non-commutanti, questa regola ci permette di sostituire ad ogni funzione operatoriale che compare nell'espressione un funzionale, il quale può essere manipolato per ottenere la giusta espressione alla fine dei conti.

2.2 Formalismo Hamiltoniano

Ora siamo interessati a calcolare gli elementi di matrice di una generica funzione $\hat{F}[\hat{p}, \hat{q}]$, delle variabili canoniche \hat{p} e \hat{q} , attraverso gli autostati dell'operatore di posizione nella rappresentazione di Heisenberg, $\langle q' | \hat{F}[\hat{p}, \hat{q}] | q \rangle$. Per fare questo utilizzeremo il metodo degli operatori di Feynman, descritto nel paragrafo precedente, il quale consiste nel sostituire la funzione operatoriale \hat{F} con un funzionale $F[p(s), q(s)]$, utilizzando il label s per specificare l'ordine di esecuzione degli operatori impulso \hat{p} e posizione \hat{q} . Così facendo, l'operatore $\hat{U} = \exp\left[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right]$, con \hat{H} pari alla (1.2), sarà sostituito da

$$\begin{aligned} \hat{U}(\hat{p}, \hat{q}) &= \exp\left[-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left[-\frac{it}{n\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)\right] \right\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left[-\frac{it}{n\hbar}\left(\frac{p^2(s_n)}{2m} + V(q(s_n))\right)\right] \dots \exp\left[-\frac{it}{n\hbar}\left(\frac{p^2(s_1)}{2m} + V(q(s_1))\right)\right] \right\} \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \left[\frac{p^2(s)}{2m} + V(q(s))\right]\right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dove abbiamo scelto l'ordine dei label in maniera tale che valga $s_k = \frac{kt}{n}$. Una volta fatto questo possiamo esibire la dipendenza da $p(s)$ esprimendo il funzionale in termini della sua trasformata di Fourier, in maniera tale da dividere l'azione di

$p(s)$ e $q(s)$ è quindi valutare gli elementi di matrice dell'operatore. Con questo fine, definiamo $\mathcal{F}[v(s), q(s)]$ come la trasformata funzionale di Fourier di un generico funzionale $F[p(s), q(s)]$ così da avere:

$$F[p(s), q(s)] = \int \mathcal{D}v(s) \exp \left[-i \int_0^1 ds' p(s') v(s') \right] \mathcal{F}[v(s), q(s)] \quad (2.6)$$

Visto che il funzionale $F[p(s), q(s)]$ sarà, in generale, nella forma $F[p(s), q(s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f[p(s_n), q(s_n)] \dots f[q(s_1), q(s_1)]\}$, come in (2.5), allora abbiamo che

$$\mathcal{F}[v(s), q(s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\bar{f}[v(s_n), q(s_n)] \dots \bar{f}[v(s_1), q(s_1)]\} \quad (2.7)$$

dove $\bar{f}[p(s), q(s)]$ è l'ordinaria trasformata di Fourier della funzione $f[p(s), q(s)]$ è la misura di (2.6) diventa $\mathcal{D}v(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{dv(s_n) \dots dv(s_1)\}$. Quindi abbiamo ridotto il nostro problema originale a valutare gli elementi di matrice dell'operatore che corrisponde a $\exp \left[-i \int_0^1 ds' p(s') v(s') \right] \mathcal{F}[v(s), p(s)]$. Questa è una notevole semplificazione visto che $\exp[ia\hat{p}]$ è semplicemente l'operatore di traslazione per la funzione q , in formule

$$e^{ia\hat{p}} \hat{q} e^{-ia\hat{p}} = \hat{q} + a \quad (2.8)$$

Così, per il funzionale nella forma (2.7) otteniamo

$$\begin{aligned} e^{-i \int_0^1 ds' p(s') v(s')} \mathcal{F}[v(s), q(s)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-i \int_{s_n}^1 ds' p(s') v(s')} \bar{f}[v(s_n), q(s_n)] e^{-i \int_{s_{n-1}}^{s_n} ds' p(s') v(s')} \\ &\dots e^{-i \int_{s_1}^{s_2} ds' p(s') v(s')} \bar{f}[v(s_1), q(s_1)] e^{-i \int_0^{s_1} ds' p(s') v(s')} \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove abbiamo riorganizzato tutti gli operatori in ordine dei loro label s , in modo che ora possiamo sostituirli con gli operatori ordinati. Perciò $\exp \left[-i \int_0^1 ds' p(s') v(s') \right] \mathcal{F}[v(s), q(s)]$ corrisponde all'operatore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-i\hat{p} \int_{s_n}^1 ds' v(s')} \bar{f}[v(s_n), \hat{q}] e^{-i\hat{p} \int_{s_{n-1}}^{s_n} ds' v(s')} \dots e^{-i\hat{p} \int_{s_1}^{s_2} ds' v(s')} \bar{f}[v(s_1), \hat{q}] e^{-i\hat{p} \int_0^{s_1} ds' v(s')} \} \quad (2.10)$$

Successivamente, utilizzando la (2.8), possiamo raccogliere tutti gli esponenziali con \hat{p} a sinistra e riscrivere la (2.10) come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-i\hat{p}y(1)} \bar{f}[v(s_n), \hat{q} + y(s_n)] \dots \bar{f}[v(s_1), \hat{q} + y(s_1)]\} = e^{-i\hat{p}y(1)} \mathcal{F}[v(s), \hat{q} + y(s)] \quad (2.11)$$

dove

$$y(s) = \int_0^s ds' v(s') \quad (2.12)$$

In questa espressione gli operatori sono già ordinati e quindi possiamo direttamente applicare la trasformata di Fourier inversa per ottenere

$$\hat{F}[\hat{p}, \hat{q}] = \int \mathcal{D}v(s) \int \mathcal{D}p(s) e^{-i\hat{p}y(1) + \int_0^1 ds p(s)\dot{y}(s)} \hat{F}[p(s), \hat{q} + y(s)] \quad (2.13)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\dot{y}(s) = v(s)$ e $y(0) = 0$. Ora l'elemento di matrice, $\langle q' | \hat{F} | q \rangle$, è facile da calcolare. Visto che vale l'equazione $\hat{q} | q \rangle = q | q \rangle$ possiamo sostituire il termine $\hat{q} + y(s)$ con $q + y(s)$. Successivamente notiamo che $\langle q' | \exp[-i\hat{p}y(1)] | q \rangle = \langle q' | q + y(1) \rangle = \delta(q' - q - y(1))$. E quindi, in conclusione, possiamo riscrivere l'integrando in termini di un integrale eseguito lungo una traiettoria $q(s)$, dove $q(s) = q + y(s)$ e $q(1) = q'$, così da avere

$$\langle q' | \hat{F}[\hat{p}, \hat{q}] | q_0 \rangle = \int_{q(0)=q_0}^{q(1)=q'} \mathcal{D}q(s) \int \mathcal{D}p(s) e^{i \int_0^1 ds p(s)\dot{q}(s)} F[p(s), q(s)] \quad (2.14)$$

Con l'espressione (2.14) abbiamo derivato l'espressione (formale) degli elementi di matrice di una qualsiasi funzione, delle $p(s)$ e $q(s)$, come un integrale funzionale sulle traiettorie negli spazi dei momenti e delle posizioni. Nel caso particolare in cui l'operatore che stiamo considerando risulta essere l'operatore di evoluzione temporale $\exp[-\frac{iHT}{\hbar}]$, allora otteniamo l'espressione dell'integrale di cammino per il propagatore.

$$\langle q' | e^{-\frac{i\hat{H}(p,q)T}{\hbar}} | q_0 \rangle = \int_{q(0)=q_0}^{q(T)=q'} \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))]} \quad (2.15)$$

In particolare, se il sistema che stiamo considerando risulta essere composto da più gradi di libertà (anche infiniti) la (2.15) si modifica come

$$\langle \mathbf{q}' | e^{-\frac{i\hat{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})T}{\hbar}} | \mathbf{q}_0 \rangle = \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}(T)=\mathbf{q}'} \mathcal{D}q^\alpha(t) \int \mathcal{D}p^\alpha(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt [\mathbf{p}(t)\dot{\mathbf{q}}(t) - H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))]} \quad (2.16)$$

Inoltre, sià nella (2.15) che nella (2.16) abbiamo sostituito il label di ordine del cammino s con la variabile $t = sT$, che possiamo essere il tempo di propagazione. In sostanza, con questo formalismo l'ampiezza di transizione, che abbiamo incontrato nel capitolo precedente, viene interpretata come una somma su tutti i possibili cammini, nelle variabili $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$, nello spazio delle fasi. Per precisione, l'integrale su $\mathbf{q}(t)$ viene definito sugli estremi fissi \mathbf{q} e \mathbf{q}' , mentre l'integrale su $\mathbf{p}(t)$ viene eseguito su tutto lo spazio. Tutti i cammini, inoltre, vengono pesati dal fattore di fase $\exp[\frac{i}{\hbar}S]$, dove S in (2.15) e (2.16) corrisponde all'azione classica scritta in termini del Hamiltoniana.

Nei prossimi paragrafi deriveremo e utilizzeremo un formalismo diverso dell'integrale di cammino, dove l'azione classica S viene scritta in termini della lagrangiana \mathcal{L} piuttosto che del Hamiltoniana.

2.3 Misura

Cerchiamo ora di definire che cosa significano le misure $\mathcal{D}q(t)$ e $\mathcal{D}p(t)$ in maniera tale da poter eseguire gli integrali (2.15) e (2.15). Prima di tutto ci chiediamo cosa significhi integrare su tutte le funzioni $f(t)$; una prima definizione potrebbe essere quella di espandere quest' ultime (tutte rigorosamente di classe C_f) in termini di un set completo $f_n(t)$ di funzioni di classe C_f per poi integrare su tutti i coefficienti dell'espansione:

$$f(t) = \sum_n c_n f_n(t) \rightarrow \int \mathcal{D}f(t) F[f(t)] \equiv \int \prod_n dc_n F[\{c_n\}] \quad (2.17)$$

Ma quale set di funzioni dobbiamo scegliere? Nella nostra derivazione grezza dello scorso paragrafo abbiamo considerato la misura di cui avevamo bisogno per la trasformata di Fourier come se $f(t)$ rappresentasse un insieme numerabile di variabili, indicizzate con t , in maniera tale da avere: $\mathcal{D}f(t) \approx \prod_t df(t)$.

In realtà c'è una ragione per cui questa definizione è giusta: essa, infatti, preserva tutte le proprietà di convoluzione che abbiamo visto nel capitolo precedente per l'operatore di evoluzione temporale.

$$\langle q' | e^{-\frac{iH(t_1+t_2)}{\hbar}} | q_0 \rangle = \int dq \langle q' | e^{-\frac{iHt_1}{\hbar}} | q \rangle \langle q | e^{-\frac{iHt_2}{\hbar}} | q_0 \rangle \quad (2.18)$$

La proprietà di convoluzione non è manifestamente soddisfatta dalla misura definita in (2.17), ma è soddisfatta dalla definizione prodotto, visto che se $\mathcal{D}q(t) = \prod_t dq(t)$ allora otteniamo

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})(t_1, t_2)} | q_0 \rangle &= \int_{q(0)=q_0}^{q(t_1+t_2)=q'} \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_1+t_2} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)]} \\ &= \int d\bar{q} \int_{q(t_1)=\bar{q}}^{q(t_1+t_2)=q'} \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_1+t_2} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)]} \times \\ &\quad \int_{q(0)=q_0}^{q(t_1)=\bar{q}} \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_1} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)]} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ma un prodotto continuo, $\prod_t dq(t)$, non ha significato, se non come limite di un prodotto numerabile, quindi dividiamo l'intervallo temporale, $0 \leq t \leq T$, in N intervalli discreti di ampiezza pari a $\epsilon = \frac{T}{N}$, e approssimiamo i nostri cammini all'interno di questi intervalli.

Consideriamo per primi i cammini nello spazio dei momenti: visto che l'integrale non contiene derivate di $p(t)$ allora possiamo considerare quest'ultima come costante a tratti all'interno degli intervalli temporali discretizzati

$$p(t) = p_n \quad \text{con} \quad (n-1)\epsilon \leq t \leq n\epsilon \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

Così facendo, possiamo definire l'integrale sulle traiettorie dello spazio dei momenti, $p(t)$, come un integrale sui valori p_n

$$\mathcal{D}p(t) \equiv \prod_{n=1}^N dp_n \quad (2.21)$$

Che cosa possiamo dire, invece, per i cammini nello spazio delle posizioni, $q(t)$? Visto che l'integrando dell'integrale dei cammini tiene conto della funzione $\dot{q}(t)$ non avrebbe senso approssimare l'andamento di $q(t)$ come costante a tratti e quindi con derivata pari a zero. Piuttosto, possiamo scegliere l'andamento di quest'ultima come lineare a tratti e continua all'interno dei nostri intervalli temporali.

$$q(t) = (n - \frac{t}{\epsilon})q_{n-1} + (\frac{t}{\epsilon} - (n - 1))q_n \quad (n - 1)\epsilon \leq t \leq n\epsilon \quad (2.22)$$

dove i valori iniziali e finali di $q(t)$ sono fissati, $q_0 = q_0$ e $q_N = q'$. Con questa prescrizione possiamo definire la misura dello spazio delle posizioni all'interno degli intervalli temporali come:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \quad (2.23)$$

In realtà, possiamo scegliere una qualsiasi forma per i cammini che passano nel punto q_n al tempo t_n . La scelta particolare che abbiamo fatto in (2.22) corrisponde a una particolare procedura di ordinamento del hamiltoniana del sistema. (In questo caso, la procedura di Born-Jordan)

Infine, dobbiamo normalizzare la misura. Una scelta ragionevole è quella che la misura di Liouville in ogni punto dello spazio delle fasi, $dp_n dq_n$, deve essere normalizzata in unità della costante di Planck h . Questa è la scelta corretta come dimostreremo fra poco.

Quindi, la forma finale per il nostro integrale di cammino hamiltoniano, discretizzato negli intervalli temporali diventa

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}H(\hat{p},\hat{q})T} | q_0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{h} e^{\frac{i}{\hbar}[\sum_{n=1}^N [p_n(q_n - q_{(n-1)}) - \int_{(n-1)\epsilon}^{n\epsilon} dt H(p_n, q_n(t))]]} \quad (2.24)$$

Per verificare che la normalizzazione che abbiamo scelto risulta essere corretta poniamo $H = 0$, così da ottenere alla sinistra dell'espressione (2.24) il prodotto interno $\langle q' | q_0 \rangle = \delta(q' - q_0)$.

Guardiamo ora la parte destra, settando $H = 0$ possiamo eseguire abbastanza facilmente gli integrali lungo p_n ottenendo per ogni iterazione

$$\int \frac{dp}{h} e^{\frac{i}{\hbar}p_n(q_n - q_{n-1})} = \frac{2\pi\hbar}{h} \delta(q_n - q_{n-1}) \quad (2.25)$$

Successivamente, utilizzando la proprietà di convoluzione delle delta di Dirac e integrando su tutte q_n si ottiene $\langle q' | q_0 \rangle = \delta(q' - q_0)$, che è il risultato che stavamo cercando.

C'è però ancora un'ambiguità nella (2.24). Non abbiamo, infatti, specificato come approssimare $q(t)$ o $H(p, q(t))$ nell'intervallo $(n-1)\epsilon \leq t \leq n\epsilon$. Ci sono varie scelte che si possono adottare ma le più utilizzate sono:

- La prescrizione lineare di Born-Jordan: Dove si pone (per l'intervallo $t = 0$, $q(0) = q_i$ a $t = \epsilon$, $q(\epsilon) = q_f$)

$$H[p, q(t)] \equiv H\left[p, q_i + (q_f - q_i)\frac{t}{\epsilon}\right] \quad (2.26)$$

vale a dire prendere traiettorie lineari in ogni intervallo. Con questo ordinamento dato un operatore classico $q^n p^m$, associamo l'operatore quantico

$$q^n p^m \rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \hat{q}^{n-l} \hat{p} \hat{q}^l \quad (2.27)$$

- La prescrizione di Weyl: Dove poniamo

$$H[p, q(t)] \equiv H\left[p, \frac{q_i + q_f}{2}\right] \quad (2.28)$$

vale a dire sostituiamo $q(t)$ in ciascun intervallo con il suo valore medio in tale intervallo. Con questo ordinamento possiamo scrivere per un operatore classico

$$\left(e^{i\alpha\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} \right)_W \equiv e^{i(\alpha\hat{q} + \beta\hat{p})} = e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{q}} \quad (2.29)$$

2.4 Equazione di Schrödinger

Per provare che l'espressione (2.24) è corretta dimostreremo come essa ci permetta di derivare l'equazione di Schrödinger: l'equazione fondamentale della meccanica quantistica.

Per le proprietà di convoluzione dell'ampiezza di transizione possiamo restringere la nostra analisi a un singolo intervallo temporale

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\hat{p}, \hat{q})\epsilon} | q_0 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p(q' - q_0) - \int_0^\epsilon dt H(p, q(t))]} \quad (2.30)$$

e poi costruire l'intera evoluzione temporale mediante interazioni.

Quindi, consideriamo l'azione dell'operatore di evoluzione temporale in intervallo

temporale infinitesimo $0 \leq t \leq \epsilon$. Visto che l'integrale è dell'ordine di ϵ possiamo applicare uno sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine per l'esponenziale e scrivere

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{q})\epsilon} | q_0 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p(q'-q_0)} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^\epsilon dt H(p, q(t)) \right] + O(\epsilon^2) \quad (2.31)$$

espressione che nello spazio delle posizioni diventa

$$\delta(q' - q_0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^\epsilon dt H \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial(q' - q_0)}, q(t) \right] \delta(q' - q_0) + O(\epsilon^2) \quad (2.32)$$

dove la forma di H dipenderà dalla nostra prescrizione per l'andamento di $q(t)$ nell'intervallo.

In particolare, consideriamo un hamiltoniana senza ambiguità d'ordine, per esempio l'hamiltoniana (1.2) così da avere

$$\begin{aligned} K(q', t' = t_0 + \epsilon; q_0, t_0) &\equiv \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{q})\epsilon} | q_0 \rangle \\ &= \delta(q' - q_0) - \epsilon \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(q_0) \right] \delta(q' - q_0) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ora l'equazione di Schrödinger segue dal fatto che per uno stato arbitrario che rappresenta il nostro sistema, $\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle$, la sua evoluzione temporale è generata dal propagatore in questo modo

$$\psi(q', t') = \int dq_0 \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t_0)} | q_0 \rangle \langle q_0 | \psi(t_0) \rangle = \int dq_0 K(q', t'; q_0, t_0) \psi(q_0, t_0) \quad (2.34)$$

Da cui, utilizzando la (2.33) per il propagatore, deriviamo

$$\psi(q, t' + \epsilon) = \psi(q, t) - \epsilon \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(q) \right] \psi(q, t) + O(\epsilon^2) \quad (2.35)$$

raccogliendo i termini in ϵ e mandando quest'ultimo a 0 si ottiene

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(q) \right] \psi(q, t) \quad (2.36)$$

Che è appunto la forma dell'equazione di Schrödinger cercata.

Abbiamo così mostrato che l'integrale di cammino definito come in (2.24) è equivalente all'usuale equazione di Schrödinger. Possiamo, quindi, utilizzare quest'espressione come definizione dell'ampiezza di transizione in meccanica quantistica.

2.5 Formalismo Lagrangiano e limite classico

Se l'Hamiltoniana del sistema che stiamo considerando è quadratica nei momenti allora possiamo eseguire gli integrali gaussiani nello spazio dei momenti e derivare la forma Lagrangiana dell'integrale sui cammini. Consideriamo il caso più semplice con la hamiltoniana (1.2). Sostituendo quest'ultima nella (2.24) si ottiene

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\hat{p}, \hat{q}) \epsilon} | q_0 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p(q'-q_0) - \int_0^\epsilon dt [\frac{p^2}{2m} + V(q)]]} \quad (2.37)$$

Dove, per semplicità, abbiamo considerato un'unico intervallo temporale. A questo punto eseguiamo l'integrale su p_n utilizzando l'integrale gaussiano

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_n (q_n - q_{n-1}) - \frac{\epsilon p_n^2}{2m\hbar} - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(q_n)} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} e^{\frac{im(q_n - q_{n-1})}{\hbar\epsilon} - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(q_n)} \quad (2.38)$$

da cui possiamo ottenere il risultato generale integrando lungo p_n per N volte, così che alla fine otteniamo

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\hat{p}, \hat{q}) T} | q_0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[\frac{m(q_n - q_{n-1})^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q_n) \right]} \quad (2.39)$$

la quale risulta essere l'espressione cercata. Definiamo ora $q(t)$ la spezzata che passa per i punti q_n agli istanti t_n , con condizioni al bordo $q(t_0) = q_0, q(t') = q'$. L'integrale su $dq_1 \dots dq_{N-1}$ corrisponde dunque a fare la somma (integrale) su tutte le spezzate che passano per certi punti agli istanti t_n con le condizioni al bordo $q(t_0) = q_0, q(t') = q'$, ciascun pesato con una fase complessa:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N L_n \epsilon\right) \quad (2.40)$$

Dove con L_n riconosciamo la lagrangina per il cammino $q_n(t)$.

Per $N \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$) i t_n e i q_n diventano continui, così che la somma è fatta su tutti i cammini che vanno da $q(t_0) = q_0$ ad $q(t') = q'$. Nel fattore di fase la somma diventa un integrale, che riconosciamo essere l'azione associata al cammino $q(t)$ considerato:

$$\sum_{n=1}^N L_n \epsilon = \int_{t_0}^{t'} dt \mathcal{L} = S[q(t)] \quad (2.41)$$

La misura di integrazione diventa

$$\mathcal{D}q(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon} \right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \quad (2.42)$$

Da cui troviamo, infine, l'espressione dell'integrale dei cammini di Feynman per il formalismo Lagrangiano:

$$K[q', t'; q_0, t_0] = \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[q(t)]\right] \quad (2.43)$$

dove il dominio di integrazione è l'insieme dei cammini con condizioni al bordo $q(t_0) = q_0, q(t') = q'$. Dal punto di vista dimensionale è interessante verificare che la misura \mathcal{D} ha le stesse dimensioni della funzione di Green per una particella in una dimensione $[K] = [L]^{-1}$. Troviamo infatti

$$\begin{aligned} \frac{m}{\hbar\epsilon} &= \frac{[M]}{[E][T^2]} = \frac{[M]}{[M][L^2]} = [L]^{-2} \\ [\mathcal{D}] &= \left[\frac{m}{\hbar\epsilon}\right]^{N/2} [L]^{N-1} = [L]^{-N} [L]^{N-1} = [L]^{-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

che è il risultato cercato. Inoltre, nel caso in cui il nostro sistema risulta essere composto da più gradi di libertà (anche infiniti) la (2.43) si modifica nell'espressione più generale

$$\begin{aligned} K[\mathbf{q}', t'; \mathbf{q}_0, t_0] &= \int_{\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}(t')=\mathbf{q}'} \mathcal{D}q^\alpha(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}(t)]\right] \\ (\alpha &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Prima di procedere, conviene ricordare come i cammini appaiono in meccanica classica. Supponiamo di avere una particella soggetta a un campo di forze derivabile da un potenziale $V(q)$. La lagrangiana classica ha la forma

$$\mathcal{L}_{classica} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \quad (2.46)$$

Data questa lagrangiana e specificati gli estremi (q_1, t_1) e (q_N, t_N) , in meccanica classica non prendiamo in considerazione tutti i cammini che congiungono (q_1, t_1) a (q_N, t_N) . Al contrario vi è un cammino che corrisponde al reale moto della particella classica. Più in generale, secondo il principio di Hamilton, l'unico cammino è quello che minimizza l'azione, definita come integrale temporale della lagrangiana classica

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}_{classica}(q, \dot{q}) = 0 \quad (2.47)$$

da cui si possono ottenere le equazioni del moto di Eluero Lagrange.

A questo punto la differenza di fondo fra la meccanica classica e quella quantistica dovrebbe ora essere chiara. In Meccanica classica al moto della particella viene

associato un ben definito cammino nello spazi delle fasi; al contrario in meccanica quantistica tutti i possibili cammini giocano un ruolo, compresi quelli che non hanno alcuna somiglianza col cammino classico. Tuttavia, dobbiamo in qualche modo essere in grado di riprodurre senza discontinuità la meccanica classica nel limite classico, $\hbar \rightarrow 0$.

Uno dei vantaggi della formulazione di Feynman è quello di rendere molto facile l'insorgere di questo limite. Infatti, seguendo tutto il ragionamento di Feynman siamo arrivati alla conclusione che, in generale, l'espressione per l'ampiezza di transizione $\langle q', t' | q_0, t_0 \rangle$ può essere scritta qualitativamente come

$$\langle q', t' | q_0, t_0 \rangle \approx \sum_{\text{tutti i cammini}} \exp \left[\frac{iS[q(t)]}{\hbar} \right] \quad (2.48)$$

Infatti, quando $\hbar \rightarrow 0$, l'esponenziale in (2.48) oscilla violentemente, così che i contributi di cammini vicini hanno la tendenza a cancellarsi. Ciò è dovuto al fatto che se si scelgono due cammini, per esempio $q_1(t)$ e $q_2(t)$, molto vicini tra loro, benché la differenza dell'azione $S[q_1] - S[q_2]$ sia anch'essa piccola come la differenza dei cammini, in conseguenza del teorema della fase stazionaria, la fase oscilla rapidamente e i contributi dei due cammini tendono a cancellarsi. Però c'è un'importante eccezione.

Supponiamo di considerare un cammino, chiamiamolo q_{clas} , che soddisfi

$$\left. \frac{\delta S[q(t)]}{\delta q} \right|_{q=q_{clas}} = 0 \quad (2.49)$$

dove la variazione in S è dovuta a una piccola deformazione del cammino con gli estremi fissi. Questo è precisamente il cammino classico in virtù del principio di Hamilton. Denotiamo la S che soddisfa la (2.49) con S_{min} . Proviamo ora a deformare un poco il cammino da quello classico. La S è ancora uguale a S_{min} al primo ordine nella deformazione. Questo vuol dire che la fase di (2.48) non varia molto quando deviamo un poco dal cammino classico anche quando \hbar diventa piccolo. Di conseguenza fintanto che stiamo vicini al cammino classico, è possibile avere una interferenza costruttiva da parte dei cammini vicini.

Nel limite di $\hbar \rightarrow 0$, quindi, la stragrande maggioranza dei contributi deve provenire dai cammini che si avvicinano il più possibile a quello classico; di conseguenza abbiamo visto come grazie alla formulazione di Feynman il limite classico emerga fortemente nelle nostre equazioni.

È, però, importante sottolineare che in questo limite non è solo il cammino classico che incide in misura maggiore, ma sono tutti i cammini che si avvicinano a questo.

2.6 Teoria perturbativa

Se un sistema quantistico è soggetto a un termine potenziale che introduce solo dei termini quadratici all'interno dell'azione, allora come riconosciamo dalla (2.43) la forma del propagatore può essere determinata sfruttando l'utilizzo degli integrali gaussiani. Purtroppo, però, la maggior parte dei potenziali di notevole interesse in meccanica quantistica non sono di questo tipo e quindi non possono essere trattati in maniera "facile". Sappiamo però che nel formalismo operatoriale della meccanica quantistica spesso si ricorre, quando è possibile, alla teoria perturbativa, accontentandosi di trovare una forma approssimata della soluzione. In questo paragrafo dimostreremo che questo approccio si può seguire anche con il formalismo di Feynman e si costruisce una teoria perturbativa che si presta ad un'efficace interpretazione fisica.

A tal fine consideriamo una particella descritta inizialmente da una lagrangiana \mathcal{L}_0 per la quale si sa calcolare esattamente il propagatore. Supponiamo che al tempo t_i venga "accesa" una perturbazione descritta dal potenziale $V(q, t)$, con la lagrangiana del sistema che diventa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V$. Siamo interessati al calcolo del propagatore mediante la (2.43) del sistema costituito da una particella dal punto (t_i, q_i) al punto (t_f, q_f)

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathcal{L}_0 - V) \right] \quad (2.50)$$

dove per semplicità abbiamo considerato un sistema unidimensionale. Se l'integrale di $V(q, t)$ che compare nella (2.50) sul generico cammino $q(t)$ è piccolo rispetto a \hbar , possiamo sviluppare in serie l'esponenziale

$$\begin{aligned} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V(q(t), t) \right] &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V(q(t), t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \left[\int_{t_i}^{t_f} dt V(q(t), t) \right]^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \left[\int_{t_i}^{t_f} dt V(q(t), t) \right]^n \end{aligned} \quad (2.51)$$

Introducendo l'espansione (2.51) nella (2.50) si ottiene

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \sum_{n=0}^{\infty} K_n[q_f, t_f; q_i, t_i] \quad (2.52)$$

con

$$\begin{aligned}
K_0[q_f, t_f; q_i, t_i] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_0 \right] \\
K_1[q_f, t_f; q_i, t_i] &= -\mathcal{N} \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_0 \right] \int_{t_i}^{t_f} dt_1 V(q(t_1), t_1) \\
K_2[q_f, t_f; q_i, t_i] &= \mathcal{N} \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_0 \right] \left[\int_{t_i}^{t_f} dt' V(q(t'), t') \right]^2
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Il propagatore al ordine zero è semplicemente quello che si ottiene in assenza della perturbazione, mentre per studiare la correzione al primo ordine dobbiamo scambiare i due simboli di integrazione

$$K_1[q_f, t_f; q_i, t_i] = -\mathcal{N} \int_{t_i}^{t_f} \int \mathcal{D}q(t) \frac{i}{\hbar} V(q(t_1), t_1) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_0 \right] \tag{2.54}$$

Osserviamo che per ogni cammino il potenziale dipende solo dall'istante t_1 e dalla posizione $q(t_1)$ che occupa la particella in quell'istante. Prima e dopo t_1 la funzione d'onda evolve secondo K_0 . Questo ci suggerisce di interpretare $-\frac{i}{\hbar} V(q(t_1), t_1)$ come l'ampiezza di probabilità, per unità di tempo e unità di volume, che la particella interagisca con il potenziale. Quindi, per le regole di composizione, l'ampiezza della probabilità che la particella vada (q_i, t_i) a $(q(t_1), t_1)$, che qui venga diffusa dal potenziale, e poi arrivi in (q_f, t_f) è data da

$$K_0[q_f, t_f; q(t_1), t_1] - \frac{i}{\hbar} V(q(t_1), t_1) K_0[q(t_1), t_1; q_0, t_0] \tag{2.55}$$

Poiché è necessario sommare su tutti i cammini la (2.55) deve essere integrata in $q(t_1)$ e in t_1 , e quindi si ottiene il primo ordine della (2.53).

La correzione al secondo ordine si costruisce allo stesso modo: la particella evolve da (q_i, t_i) a $(q(t_1), t_1)$, subisce un'interazione con il potenziale, evolve da $(q(t_1), t_1)$ a $(q(t_2), t_2)$, con $t_i < t_1 < t_2 < t_f$, interagisce nuovamente, ed infine arriva in (q_f, t_f) . L'ampiezza di transizione in questo caso diventa

$$\begin{aligned}
&K_0[q_f, t_f; q(t_2), t_2] \left(-\frac{i}{\hbar} \right) V(q(t_2), t_2) K_0[q(t_2), t_2; q(t_1), t_1] \times \\
&\times \left(-\frac{i}{\hbar} \right) V(q(t_1), t_1) K_0[q(t_1), t_1; q_0, t_0]
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Infine integriamo in $q(t_2)$ e in $q(t_1)$ per sommare i contributi di tutti i cammini ottenendo così

$$K_2[q_f, t_f; q_i, t_i] = \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_1}^{t_f} dt_2 \int \mathcal{D}q(t) V(q(t_2), t_2) V(q(t_1), t_1) e^{\frac{i}{\hbar} S_0[q]} \tag{2.57}$$

Poiché l'integrando $V(q(t_2), t_2)V(q(t_1), t_1)$ è completamente simmetrico per lo scambio delle variabili t_1 e t_2 risulta

$$\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_1}^{t_f} dt_2 \equiv \frac{1}{2!} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_i}^{t_f} dt_2 \quad (2.58)$$

Quest'ultima relazione ci permette di ottenere la correzione al secondo ordine nella (2.53) dimostrando l'esattezza dell'interpretazione.

Poiché dalla (2.52) l'ampiezza totale è data dalla somma di tutti i contributi, se quest'ultima converge, l'approssimazione con cui calcoliamo K è tanto migliore quanti più termini si sommano tra di loro. Risulta evidente che lo sviluppo perturbativo in serie ottenuto a partire dall'integrale di Feynman con cui abbiamo espresso il propagatore K è perfettamente equivalente alla serie di Dyson per l'operatore di evoluzione temporale ottenuta con il formalismo operatoriale della meccanica quantistica. Osserviamo che però in quest'ultima compaiono esplicitamente prodotti temporalmente ordinati di operatori mentre il formalismo di Feynman fornisce automaticamente l'ordinamento temporale. Ciò conferma ancora una volta come sia possibile formulare una teoria quantistica alternativa e altrettanto valida, fondata sul formalismo di Feynman, senza far ricorso a vettori e operatori su spazi di Hilbert.

2.7 Cammini euclidei

L'ultimo argomento che affrontiamo in questo capitolo consiste nella possibilità di scrivere la funzione di ripartizione Z di un ensemble canonico usando il formalismo dell'integrale di Feynman.

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H(\hat{q}, \hat{p})}] = e^{-\beta F} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (2.59)$$

dove k è la costante di Boltzman e F è l'energia libera del sistema. Per ricavarla dobbiamo innanzitutto effettuare una continuazione analitica dell'integrale di Feynman al tempo immaginario attraverso la cosiddetta rotazione di Wick

$$t \rightarrow t' = -i\tau \quad (2.60)$$

Un primo vantaggio di questa tecnica consiste nella regolarizzazione di integrali mal definiti, per via delle oscillazioni di fase, del tipo

$$\int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (2.61)$$

In particolare, per l'azione utilizzando la (2.60) si ottiene

$$S[q] = i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right) = iS_E[q] \quad (2.62)$$

dove abbiamo introdotto l'azione euclidea, reale e definita positiva. Adesso possiamo fare la sostituzione

$$\int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \rightarrow \int \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q]} \quad (2.63)$$

con cui il secondo membro è ben definito. Questo ci permette di scrivere la funzione di ripartizione come integrale su tutti i cammini chiusi

$$Z = \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}(t_E)} \mathcal{D}q(t_E) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} S_E[q(t_E)] \right] \quad (2.64)$$

dove i cammini devono essere chiusi poiché la funzione di ripartizione è definita come una traccia. Inoltre nella (2.64) abbiamo introdotto il tempo euclideo definito come

$$t_E = \beta \hbar \rightarrow t_E \hbar = k_B T \quad (2.65)$$

Notiamo che nel caso di funzionali definiti nello spazio-tempo di Minkowski, la rotazione definita in (2.60) ci permette di passare da questo spazio a quello euclideo. Infatti se consideriamo la norma definita nello spazio di Minkowski come $q_\mu q^\mu = t^2 - \mathbf{q}^2$, allora se effettuiamo la rotazione di Wick otteniamo $(t, \mathbf{q}) \rightarrow (-i\tau, \mathbf{q})$ e $t^2 - \mathbf{q}^2 \rightarrow -(t^2 + \mathbf{q}^2)$ che è, a parte il segno, la distanza in uno spazio euclideo ordinario.

Capitolo 3

Applicazioni dell'integrale di cammino

In questo capitolo vedremo alcune applicazioni del formalismo dell'integrale dei cammini di Feynman discusso nei capitoli precedenti. Prima di fare questo, però, abbiamo bisogno di definire il metodo dell'approssimazione semiclassica, uno dei metodi più utili per la risoluzione di un vasto numero di problemi e applicazioni fisiche che incontreremo.

3.1 Approssimazione semiclassica

Prima di presentare questo metodo ampliamo il concetto di derivata per quanto riguarda il caso dei funzionali. Questa definizione sarà utile poichè dobbiamo operare su spazi di funzioni.

Sappiamo che un funzionale è un'applicazione definita su uno spazio di funzioni a valore nel campo reale o complesso e in generale può essere scritto nella forma

$$F[f(x)] = \int dx J(f(x)) \quad (3.1)$$

cioè nel calcolo variazionale, i funzionali sono frequentemente espressi mediante l'integrale di funzioni. L'esempio più semplice di funzionale che abbiamo incontrato risulta essere l'azione del sistema $S[q(t)]$.

A questo punto possiamo definire la derivata funzionale in questo modo

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \int dx \frac{\delta J(f(x))}{\delta f(y)} \quad (3.2)$$

con, utilizzando la teoria delle distribuzioni

$$\frac{\delta J(f(x))}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(J(f(x) + \epsilon \delta(x - y)) - J(f(x)))}{\epsilon} \quad (3.3)$$

Da questa definizione è possibile dedurre le usuali proprietà delle derivate: linearità, omogeneità, regola della catena per funzionali composti e così via.

Inoltre possiamo definire lo sviluppo di Taylor di un funzionale, per esempio intorno a $f = 0$, in questo modo

$$F[f(x)] = F[0] + \int dx' \frac{\delta F[f]}{\delta f(x')} f(x') + \frac{1}{2!} \int dx' dx'' f(x') \frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x') \delta f(x'')} f(x'') + \dots \quad (3.4)$$

Con queste definizioni possiamo calcolare la derivata funzionale dell'azione classica che ci sarà utile nei prossimi paragrafi

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt' \mathcal{L}_{class}(q(t'), \dot{q}(t')) \quad (3.5)$$

dove la lagrangiana \mathcal{L} risulta essere quella definita in (2.46). Prima di tutto determiniamo la derivata funzionale del termine cinetico utilizzando la definizione (3.3) ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(\dot{q}(t))}{\delta q(t')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(\frac{d}{dt}(q(t) + \epsilon \delta(t' - t))) - T(\dot{q}(t))}{\epsilon} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta(t' - t) = m \dot{q}(t') \frac{d}{dt'} \delta(t' - t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

e quella del potenziale V

$$\frac{\delta V(q(t'))}{\delta q(t)} = \frac{\partial V(q(t'))}{\partial q(t')} \delta(t' - t) \quad (3.7)$$

per ottenere il risultato finale

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q(t)} = m \dot{q}(t') \frac{d}{dt'} \delta(t' - t) - V'(q(t')) \delta(t' - t) \quad (3.8)$$

e quindi per l'azione del sistema

$$\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q(t)} = \int_{t_i}^{t_f} dt' \frac{\delta \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'))}{\delta q(t)} = -m \ddot{q}(t) - V''(q(t)) \quad (3.9)$$

A questo punto possiamo definire il metodo dell'approssimazione semiclassica. In particolare questo metodo si applica a situazioni in cui l'azione che compare

nell'espressione dell'integrale dei cammini risulta essere molto più grande di \hbar , in maniera tale che l'espressione del propagatore possa essere espansa attorno ai suoi punti di sella. Questi punti di sella sono il nostro punto di partenza per giustificare l'utilizzo del nostro metodo.

Consideriamo, quindi, l'integrale dei cammini nella forma lagrangiana per un sistema dotato di un' unico grado di libertà, $q(t)$, descritto dall'azione $S[q(t)]$

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \mathcal{N} \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} \quad (3.10)$$

Successivamente consideriamo la traiettoria q_{class} che minimizza l'azione S , ossia la traiettoria classica nello spazio delle configurazioni, imponendo la condizione

$$\left. \frac{\delta S}{\delta q(t)} \right|_{q=q_{class}} = 0 \quad (3.11)$$

Ora espandiamo l'azione intorno alla soluzione classica (tenendo conto che potrebbero essercene delle altre) che obbedisce alla condizioni al contorno appropriate

$$q(t) = q_{class} + y(t) \quad (3.12)$$

dove $y(t)$ rappresenta le fluttuazioni intorno alla soluzione classica q_{class} , così da ottenere

$$S[q] = S[q_{class} + y] = S[q_{class}] + \frac{1}{2} \int \int dt' dt'' y(t') \frac{\delta^2 S[q_{class}]}{\delta q_{class}(t') \delta q_{class}(t'')} y(t'') + O(y^3) \quad (3.13)$$

A questo punto inseriamo la precedente relazione nell'integrale sui cammini

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]} \int_0^0 \mathcal{D}y \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \int \int dt' dt'' y(t') \frac{\delta^2 S[q_{class}]}{\delta q_{class}(t') \delta q_{class}(t'')} y(t'') \right] \quad (3.14)$$

Da cui risolvendo l'integrale al secondo membro si ottiene

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \frac{\mathcal{N} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[q_{class}] \right]}{\sqrt{\det \left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right\}}} \quad (3.15)$$

dove il determinante presente nella (3.15) viene chiamato determinante di Fredholm. È facile vedere che se la lagrangiana ha la forma (2.46), allora $\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}$ è l'operatore differenziale $-m \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) - V''(q_{class}(t))$. Il determinante di questo operatore è il prodotto dei suoi autovalori, dove l'operatore agisce sulle funzioni $y(t)$ che svaniscono a $t = 0$ e a $t = T$.

$$\det \left[\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right] = \prod_n \lambda_n \quad (3.16)$$

dove

$$\left[-m\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) - V''(q_{class}(t))\right]y(t) = \lambda y(t) \quad (3.17)$$

con condizioni al bordo $y(t_i) = y(t_f) = 0$.

A meno che $V(q)$ non sia quadratica in q (quindi $V(q)$ costante) allora trovare gli autovalori dell'operatore $\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}$ richiede di risolvere un'equazione differenziale simile a quella di Schrödinger per tutti gli autovalori. Inoltre notiamo che il metodo fallisce se un autovalore dell'operatore è nullo poichè in tal caso il determinante della (3.15) risulta essere uguale a zero. In questi casi il problema deve essere analizzato con più attenzione, è questo il caso di particolari soluzioni, che noi non tratteremo in questa tesi, che sono gli instantoni. Infine, notiamo che se ci sono più traiettorie che minimizzano l'azione è necessario considerare tutti i possibili contributi nella (3.15) e quindi quest'ultima si generalizza come

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \sum_n \frac{\mathcal{N} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[q_n]\right]}{\sqrt{\det\left\{-m\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) - V''(q_n(t))\right\}}} \quad (3.18)$$

3.2 Particella libera

Consideriamo ora una particella libera mono-dimensionale. La lagrangiana per questo sistema risulta essere

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} \quad (3.19)$$

Volgiamo ora calcolare il propagatore di questo sistema utilizzando il formalismo dell'integrale dei cammini. Utilizziamo le definizioni (2.39), (2.35) così da poter scrivere

$$\begin{aligned} K[q_f, t_f; q_i, t_i] &= \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt' \frac{m\dot{q}^2}{2}\right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}\right)^{N/2} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[\frac{m(q_n - q_{n-1})^2}{2\epsilon}\right]} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Notiamo che ognuno degli integrali nella produttoria risulta essere di tipo gaussiano, quindi visto che l'integrale di una gaussiana è ancora una gaussiana possiamo eseguire l'integrazione di una variabile dopo l'altra.

Con queste prescrizioni il calcolo viene effettuato come segue: notiamo prima di tutto che

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon} [(q_2 - q_1)^2 - (q_1 - q_0)^2]\right\} \\ &\left(\frac{m}{2\pi i\hbar 2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar 2\epsilon} (q_2 - q_0)^2\right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dopodiché moltiplichiamo questo risultato per

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(q_3 - q_2)^2\right\} \quad (3.22)$$

e integriamo ancora, questa volta su q_2 . Il risultato è simile a quello di (3.21), eccetto il fatto che $(q_2 - q_0)^2$ diventa $(q_3 - q_0)^2$ e il termine 2ϵ è sostituito da 3ϵ . Così facendo otteniamo

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar 3\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar 3\epsilon}(q_3 - q_0)^2\right\} \quad (3.23)$$

In questo modo si instaura una relazione ricorsiva che, dopo $n - 1$ passi, dà

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar n\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar n\epsilon}(q_n - q_0)^2\right\} \quad (3.24)$$

Visto che $n\epsilon = t_n - t_0$, è facile vedere che il risultato dopo $N - 1$ passi risulta essere

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right\} \quad (3.25)$$

Notiamo, che come ci aspettavamo, il risultato che abbiamo ottenuto per la forma del propagatore della particella libera risulta essere uguale a quello l'espressione (1.18) che avevamo trovato risolvendo direttamente l'equazione di Schrödinger. Perciò possiamo concludere che il propagatore costruito secondo la prescrizione di Feynman coincide con il propagatore nella meccanica ondulatoria di Schrödinger.

Una volta calcolato il propagatore possiamo calcolare la probabilità che, se una particella parte dall'origine $q_0 = 0$ a $t_i = 0$, venga trovata al tempo $t_f = T$ all'interno del volume dq centrato in q , questa risulta essere

$$P(q, T; 0, 0) dq = |K[q, T; 0, 0]|^2 dq = \frac{m}{2\pi\hbar T} dq \quad (3.26)$$

Questo è ragionevole, poiché avendo determinato con precisione la posizione della particella a $t = 0$, tutti gli stati con momento p sono ugualmente probabili, così da avere $P(q, T; 0, 0) dq = \frac{dp}{h}$. Ora, se la particella arriva in q al tempo T il suo momento deve essere uguale a $\frac{mq}{T}$ e quindi $dp = \left(\frac{m}{T}\right) dq$, in accordo con i nostri calcoli.

Infine notiamo come il fattore di fase che compare nella (3.25) contenga l'azione del sistema calcolata sulla traiettoria classica $\dot{q}(t) = v = \text{cost}$. Infatti si può scrivere facilmente

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]\right] \quad (3.27)$$

3.3 Particella sul cerchio

Un' altra applicazione molto interessante del nostro formalismo risulta essere il problema di una particella libera su un cerchio. Consideriamo, quindi, una particella che si muove su un cerchio di raggio unitario. Questo sistema risulta essere descritto dalla stessa lagrangiana del problema della particella libera, $\mathcal{L} = \frac{m\dot{\theta}^2}{2}$, eccetto per il fatto che ora la coordinata spaziale, θ , in questo problema vive su un cerchio, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Con questa prescrizione il nostro integrale sui cammini risulta essere lo stesso della particella libera ma con traiettorie che adesso vivono su un cerchio. Perciò quando sommiamo su tutti i possibili cammini che vanno da θ_i a θ_f dobbiamo includere anche i cammini che girano attorno al cerchio un qualsiasi numero di volte.

Equivalentemente dobbiamo sommare su tutti i cammini che vanno da θ_i a $\theta_f + 2\pi n$ per tutti i possibili n , visto che tutti questi punti sono identici. Di conseguenza il nostro integrale dei cammini può essere diviso in una serie di avvolgimenti intorno al cerchio

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f \pmod{2\pi}} \mathcal{D}\theta(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m\dot{\theta}^2}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\theta_i}^{\theta_f + 2\pi n} \mathcal{D}\theta(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m\dot{\theta}^2}{2}} \quad (3.28)$$

che differisce da quante volte il cammino scelto si avvolge attorno al cerchio. Per ricavare la forma del propagatore per questo problema possiamo utilizzare, in ciascun avvolgimento, il metodo dell'approssimazione semiclassica che abbiamo introdotto precedentemente. Innanzitutto esprimiamo un qualsiasi cammino $\theta(t)$ come deviazione da il cammino classico tra 0 e T

$$\theta(t) = \theta_i + (\theta_f + 2\pi n - \theta_i) \frac{t}{T} + q(t) \quad (3.29)$$

A questo punto possiamo scrivere l'integrale dei cammini come

$$K[\theta_f, T; \theta_i, 0] = \mathcal{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{im(\theta_f - \theta_i + 2\pi n)^2}{2\hbar T}} \int_0^0 \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt' \frac{m\dot{q}(t')^2}{2}} \quad (3.30)$$

Ora possiamo eseguire l'integrale nella (3.30), che risulta essere lo stesso in ciascun avvolgimento, semplicemente utilizzando lo stesso procedimento per particella libera.

Una volta fatto questo otteniamo

$$K[\theta_f, T; \theta_i, 0] = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar iT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{im(\theta_f - \theta_i + 2\pi n)^2}{2\hbar T}} \quad (3.31)$$

Dall'espressione (3.31) si possono facilmente ricavare gli autovalori per l'hamiltoniana della particella sul cerchio, $H = \frac{p_\theta^2}{2m}$. In particolare, gli elementi di matrice

dell'operatore di evoluzione temporale nello spazio dei momenti, p , sono diagonali, visto che $K[\theta_f, T; \theta_i, 0]$ dipende solamente dalla differenza $\theta_f - \theta_i = \theta$, così che si ottiene

$$\begin{aligned} \langle p' | e^{\frac{i}{\hbar}HT} | p \rangle &= \delta(p' - p) \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar}p\theta} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar iT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{im(\theta+2\pi n)^2}{2\hbar T}} = \\ \delta(p' - p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-2\pi in p}{\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} T} &= \delta(p' - p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{p}{\hbar} - k\right) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} T} \end{aligned} \quad (3.32)$$

da cui ricaviamo che gli autovalori dell'energia risultano essere $\frac{p^2}{2m}$, con $\frac{p}{\hbar} = k =$ intero.

Questo calcolo ci ha permesso di mettere in luce un'esempio di situazione dove lo spazio delle configurazioni in cui le coordinate del sistema vivono (qui un cerchio) non è semplicemente connesso e possiede degli avvolgimenti ("loop") non deformabili a piacere. In questo caso, infine, il formalismo dell'integrale sui cammini si scompone in sezioni topologicamente distinte, visto che i cammini con diverso numero di avvolgimento, n , non possono essere deformati con continuità l'uno sull'altro.

3.4 Oscillatore armonico

Consideriamo ora un oscillatore armonico unidimensionale descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (3.33)$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange, che descrive la traiettoria classica, risulta essere

$$m\ddot{q}_{class} + m\omega^2 q_{class} = 0 \quad (3.34)$$

Per calcolare la forma del propagatore $K[q_f, t_f; q_i, t_i]$ utilizziamo il metodo della approssimazione semiclassica, ma in questo caso, poiché l'azione è quadratica nella variabile $q(t)$, il risultato è esatto. Quindi, come da metodo, espandiamo l'azione attorno alla traiettoria classica effettuando la sostituzione

$$q(t) = q_{class} + y(t) \quad (3.35)$$

e consideriamo lo sviluppo in serie dell'azione utilizzando la (3.4)

$$S[q] = S[q_{class}] + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 y(t_1) \frac{\delta^2 S[q_{class}]}{\delta q_{class}(t_1) \delta q_{class}(t_2)} y(t_2) \quad (3.36)$$

Per la lagrangiana (3.33), utilizzando le definizioni (3.3),(3.6),(3.7) e (3.9), si ottiene per l'azione

$$S[q] = S[q_{class}] + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2) \quad (3.37)$$

che una volta sostituita nell'espressione del propagatore del oscillatore armonico si ottiene

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]} \int_0^1 \mathcal{D}y(t) \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2) \right] \quad (3.38)$$

Possiamo calcolare questo integrale discretizzando gli intervalli temporali secondo la (2.35), definendo i valori di $y(t)$ in questi intervalli

$$y(t_n) = y_n \quad (3.39)$$

con le condizioni al contorno

$$y_0 = y_N = 0 \quad (3.40)$$

Quindi si ottiene per la (3.38) l'espressione

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]} \int_0^1 \prod_{n=1}^{N-1} \mathcal{D}y_n(t) \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \left[m \frac{(y_n - y_{n-1})^2}{\epsilon} - m\omega^2 \epsilon \left(\frac{y_n + y_{n-1}}{2} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.41)$$

A questo punto per calcolare l'integrale della (3.41) possiamo utilizzare il formalismo matriciale in modo che quest'ultimo possa scriversi come

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} dy e^{\frac{im}{2\hbar} y^T \mathbf{F} y} \quad (3.42)$$

Dove abbiamo introdotto la matrice quadrata \mathbf{F} di dimensione $(N-1) \times (N-1)$, che per la (3.14) e (3.15) risulta essere uguale a

$$\mathbf{F} = \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \quad (3.43)$$

Osserviamo che per come è definita \mathbf{F} essa è simmetrica ed ha elementi reali, quindi è diagonalizzabile tramite un matrice unitaria \mathbf{D} ; indichiamo con \mathbf{F}_D la matrice diagonale e λ_n i suoi autovalori. Scriviamo quindi

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D} \quad (3.44)$$

Ora definiamo la trasformazione di coordinate $y = \mathbf{D}Y$ e riscriviamo la (3.42) con tale sostituzione ricavando

$$\begin{aligned} \int \prod_{n=1}^{N-1} dY \exp \left[\frac{im}{2\hbar} Y^T \mathbf{F}_D Y \right] &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dY \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n Y_n^2 \right] = \\ &= \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{2i\hbar\pi}{m\lambda_n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2i\pi\hbar}{m} \right)^{\frac{N-1}{2}} (\det \mathbf{F})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

nella quale il determinante di \mathbf{F} deve essere diverso da 0, cioè nessun autovalore deve essere nullo.

Sostituiamo questo risultato nell'espressione (3.41) per ottenere

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} (\det \mathbf{F})^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]} \quad (3.46)$$

nella quale ci resta solo da calcolare il $\det \mathbf{F}$ e quindi effettuare l'operazione di limite. In questo paragrafo ci limiteremo a presentare il risultato, i dettagli del calcolo sono presenti in appendice A. Quindi una volta utilizzate queste relazioni ed effettuando il limite nella (3.46) otteniamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \det \mathbf{F} = \frac{\left(1 + \frac{i\omega(t_f - t_i)}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{i\omega(t_f - t_i)}{N}\right)^N}{2i\omega} = \frac{\sin \omega(t_f - t_i)}{\omega} \quad (3.47)$$

e dalla (3.46) si ottiene l'espressione

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega(t_f - t_i)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{class}]} \quad (3.48)$$

L'ultimo passo da compiere nella (3.48) consiste nella determinazione dell'azione S calcolata sulla traiettoria classica e per questo dobbiamo risolvere l'equazione (3.34), equivalente a

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q_{class}(t) = 0 \quad (3.49)$$

Una soluzione per la (3.49) risulta essere

$$q_{class}(t) = A \sin(\omega(t_f - t_i)) + B \cos(\omega(t_f - t_i)) \quad (3.50)$$

Notiamo che $t' = t - t_i$ è ancora una soluzione per la (3.49). Con $t = t_i$, $t' = 0$ e $q(0) = q_i$ e con $t = t_f$, $t' = t_f - t_i$ e $q(T) = q_f$. Perciò

$$q(0) = q_i = B \quad (3.51)$$

Quindi

$$\begin{aligned} q_f = q(T) &= A \sin(\omega T) + q_i \cos \omega T \\ A &= \frac{q_f - q_i \cos(\omega T)}{\sin \omega T} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Da cui sostituendo il tutto nel calcolo dell'azione S si ottiene

$$S[q_{class}] = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(q_f^2 + q_i^2) \cos(\omega T) - 2q_i q_f] \quad (3.53)$$

Da cui la forma finale del propagatore diventa

$$K[q_f, t_f; q_i, t_i] = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega(t_f - t_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(q_f^2 + q_i^2) \cos(\omega T) - 2q_i q_f] \right] \quad (3.54)$$

Da cui riconosciamo l'espressione (1.19), introdotta nel primo capitolo, ricavata con la meccanica ondulatoria di Schrödinger. Pertanto abbiamo visto come sia possibile utilizzare il formalismo dell'integrale sui cammini per affrontare i problemi della meccanica quantistica ottenendo gli stessi risultati che si ricaverrebbero con l'ordinaria formulazione operatoriale. Inoltre osserviamo come questo metodo ci permetta di determinare il propagatore del sistema senza risolvere direttamente l'equazione di Schrödinger.

Ora consideriamo la lagrangiana (3.33) e aggiungiamo un termine di smorzamento lineare $f(t)$, così da scrivere

$$\mathcal{L}_{for} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} + f(t)q(t) \quad (3.55)$$

da cui l'equazione di Eulero-Lagrange per la traiettoria classica

$$m\ddot{q}_{class} + m\omega^2 q_{class} - f(t) = 0 \quad (3.56)$$

Cerchiamo di calcolare il propagatore per questo sistema utilizzando il formalismo di Feynman. Utilizzando lo stesso procedimento utilizzato per l'oscillatore armonico libero ritroviamo gli stessi risultati già discussi precedentemente, questo perché per l'azione in questione vale la relazione

$$S_{for}[q(t)] = S_{for}[q_{class}] + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2) \quad (3.57)$$

L'unica differenza rispetto al caso dell'oscillatore armonico libero sta nel calcolo dell'azione lungo la traiettoria classica. Infatti la risoluzione dell'equazione (3.56) è equivalente a sviluppare la seguente equazione

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q_{class}(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (3.58)$$

La soluzione di questa equazione si scrive come somma di due funzioni

$$q_{class}(t) = q_o(t) + q_p(t) \quad (3.59)$$

delle quali q_o è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, mentre q_p è la soluzione particolare. Per quanto riguarda la prima risulta essere semplicemente la soluzione già trovata per l'oscillatore armonico libero (3.50), la seconda, invece, si può determinare utilizzando il metodo Green, cioè introduciamo la funzione $G(t - t')$ tale da soddisfare l'equazione

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)G(t - t') = -\delta(t - t') \quad (3.60)$$

In questo modo la soluzione cercata è data da

$$q_p(t) = - \int_{t_i}^{t_f} dt' G(t - t') \frac{f(t')}{m} \quad (3.61)$$

A questo punto per determinare la funzione di Green si introduce la trasformata di Fourier $G(k)$ tale che

$$G(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-ik(t-t')} G(k) \quad (3.62)$$

e ricordando che la delta di Dirac gode della proprietà

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ik(t-t')} \quad (3.63)$$

si ottiene l'espressione di $G(k)$

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \quad (3.64)$$

Quindi la funzione di Green si determina risolvendo l'integrale

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{e^{-ik(t-t')}}{k^2 - \omega^2} \quad (3.65)$$

L'argomento dell'integrando ha due poli per $k = \pm\omega$ e per questo motivo dobbiamo scegliere un cammino opportuno lungo in cui integrare evitando così le divergenze. In particolare come percorso di integrazione scegliamone uno che va sotto il polo sinistro e sopra il polo destro. La scelta di questo contorno corrisponde allo spostare i due poli in questa maniera

$$\begin{aligned} k = -\omega &\rightarrow k = -\omega + i\delta \\ \omega &\rightarrow k = \omega - i\delta \end{aligned} \quad (3.66)$$

E quindi si regolarizza la funzione di Green nel seguente modo

$$G(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + \omega - i\delta} \frac{1}{k - \omega + i\delta} \quad (3.67)$$

e si calcola la (3.65) sfruttando il lemma di Jordan e il teorema dei Resuidi. Per $t - t' < 0$ chiudiamo il percorso con una semicirconferenza all'infinito nel semipiano superiore, mentre $t - t' > 0$ si chiude il cammino nel semipiano opposto e si ottiene

$$G(t - t') = \theta(t - t') \frac{1}{2i\omega} e^{-i\omega(t-t')} + \theta(t' - t) \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega(t-t')} \quad (3.68)$$

dove $\theta(t)$ è la funzione di Heaviside

Risulta che la soluzione particolare in (3.61) assume la forma

$$q_p(t) = -\frac{1}{2im\omega} \left[\int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') + \int_t^{t_f} dt' e^{i\omega(t-t')} f(t') \right] \quad (3.69)$$

da cui possiamo calcolare l'azione $S_{for}[q_{class}]$ che risulta essere

$$\begin{aligned} S_{for}[q_{class}] &= \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(q_f^2 + q_i^2) \cos(\omega T) - 2q_i q_f] + \frac{2q_i}{m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt f(t) \sin(\omega(t_f - t)) \\ &+ \frac{2q_f}{m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt f(t) \sin(\omega(t - t_i)) - \frac{2}{m^2\omega^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \times \\ &\times f(t) \sin(\omega(t_f - t)) \sin(\omega(t' - t_i)) f(t') \end{aligned} \quad (3.70)$$

Che è il risultato cercato.

Nel prossimo paragrafo utilizzeremo lo stesso sistema per mostrare la potenza del formalismo di Feynman rispetto all'utilizzo della teoria perturbativa operatoriale.

3.5 Ampiezza tra stati fondamentali

Consideriamo sempre il sistema dell'oscillatore armonico smorzato, questa volta descritto dalla sua hamiltoniana che assume la forma

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - qf(t) \quad (3.71)$$

dove abbiamo settato la massa m pari all'unità. Vogliamo, in particolare, valutare l'ampiezza di transizione da uno stato $|q\rangle$ definito in tempo molto anteriore ($-\infty$) a uno stato $|q'\rangle$ definito, invece, in tempo molto posteriore ($+\infty$) in presenza del termine di smorzamento, $f(t)$. (qui settiamo $\hbar = 1$)

$$\lim_{t_i, t_f \rightarrow \pm\infty} \langle q' | e^{-iH(t_f - t_i)} | q \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - i\epsilon)q^2 + f(t)q]} \quad (3.72)$$

Dove abbiamo introdotto il fattore di convergenza $-\epsilon/2 \int dt q^2(t)$ per controllare il comportamento dell'integrale quando prendiamo il limite all'infinito. Questa definizione è quella che ci permette la continuazione analitica al tempo Euclideo, attraverso una rotazione di Wick, $t \rightarrow -it$, senza incontrare singolarità.

È conveniente, ora, utilizzare la trasformata di Fourier, definendo

$$\bar{q}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-iEt} q(t) = \bar{q}^*(-E) \quad (3.73)$$

e similamente la quantità

$$\bar{f}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-iEt} f(t) = \bar{f}^*(-E) \quad (3.74)$$

In termini di queste l'azione si scrive come

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dE \left[\frac{1}{2} (E^2 - \omega^2 + i\epsilon) \bar{q}(E) \bar{q}(-E) + \bar{q}(E) \bar{f}(-E) + \bar{q}(-E) \bar{f}(E) \right] \quad (3.75)$$

con la misura $\mathcal{D}q(t) = \mathcal{D}\bar{q}(E)$. Questo integrale può essere risolto abbastanza facilmente utilizzando la soluzione classica del moto in questione, $\bar{q}(E) = \bar{f}(E)/(E^2 - \omega^2 + i\epsilon)$, che rimuove la dipendenza da f all'integrale, così che l'ampiezza può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \frac{\langle q'(+\infty) | q(-\infty) \rangle |_f}{\langle q'(+\infty) | q(-\infty) \rangle |_{f=0}} &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\bar{f}(E) \bar{f}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t) D(t-t') f(t') \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

dove riconosciamo $D(t)$ come

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-itE}}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2i\omega} [\theta(t) e^{-i\omega t} + \theta(-t) e^{i\omega t}] \quad (3.77)$$

che riconosciamo essere la funzione di Green (Feynman) che abbiamo visto nello scorso paragrafo, cosa che ci conferma del fatto che stiamo risolvendo lo stesso problema ma da una prospettiva diversa.

Adesso vogliamo calcolare l'ampiezza di probabilità che se noi prepariamo il nostro sistema nel suo stato fondamentale, $|vac\rangle$ a $t = -\infty$, sotto l'azione di un termine di smorzamento che è localizzato nel tempo, $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, di ritrovarci sempre nello stesso stato a $t = \infty$. Inserendo un set completo di

autostati della posizione troviamo

$$\begin{aligned}
\langle vac(\infty) | vac(-\infty) \rangle_f &= \int dq dq' \langle vac(\infty) | q'(\infty) \rangle \langle q'(\infty) | q(-\infty) \rangle_f \langle q(-\infty) | vac(-\infty) \rangle \\
&= \int dq dq' \langle vac(\infty) | q'(\infty) \rangle \langle q'(\infty) | q(-\infty) \rangle_{f=0} \langle q(-\infty) | vac(-\infty) \rangle e^{-\frac{i}{2} \langle f D f \rangle} \\
&= \langle vac(\infty) | vac(-\infty) \rangle_{f=0} e^{-\frac{i}{2} \langle f D f \rangle}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Ma in assenza del termine di smorzamento lo stato fondamentale è una autostato dell'hamiltoniana del sistema libero, quindi il sistema rimane nello stato fondamentale così che $\langle vac(\infty) | vac(-\infty) \rangle_{f=0} = 1$. Perciò l'ampiezza di probabilità tra stati fondamentali in presenza del termine di smorzamento risulta essere

$$Z[f] \equiv \exp(iW[f]) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' f(t) D(t-t') f(t')\right) \tag{3.79}$$

Notiamo che $W[f]$ ha una parte immaginaria positiva visto che vale

$$\begin{aligned}
W[f] &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' f(t) D(t-t') f(t') = \frac{1}{2} \int dE \frac{|\bar{f}(E)|^2}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{P} \int dE \frac{|\bar{f}(E)|^2}{E^2 - \omega^2} + \frac{i\pi}{2\omega} |\bar{f}(\omega)|^2
\end{aligned} \tag{3.80}$$

dove abbiamo usato la relazione

$$\frac{1}{z + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{z} - i\pi \delta(z) \tag{3.81}$$

dove \mathcal{P} denota la parte principale dell'integrale. Di conseguenza la probabilità che il sistema rimanga nello stato fondamentale è

$$P(vac \rightarrow vac) = |Z|^2 = e^{-\frac{\pi}{\omega} |\bar{f}(\omega)|^2} \leq 1 \tag{3.82}$$

Questo significa che un forza dipendente dal tempo con frequenza ω ecciterà soltanto le armoniche la cui frequenza è un multiplo di ω .

Notiamo come l'analisi con il formalismo di Feynman ci abbia permesso di giungere abbastanza facilmente a questo risultato. Per confronto, se avessimo utilizzato la serie perturbativa di Dyson, derivata con il formalismo operatoriale, avremmo dovuto calcolare i coefficienti dell'espansione della serie che rappresentano l'ampiezza di probabilità di ritrovare il sistema nello stato fondamentale. Ma notiamo che già al primo ordine il coefficiente risulta essere nullo, segno per il quale il calcolo può diventare molto complicato per l'aggiunta di termini. Questo dimostra la potenza del formalismo dell'integrale di cammino laddove risulta essere applicabile.

3.6 Effetto di Aharonv-Bohm

Un'ulteriore applicazione del formalismo di Feynman riguarda, per esempio, la descrizione di fenomeni basati sull'interferenza e l'interazione tra particelle e campi classicamente non rilevanti al moto della particella. Un noto esperimento che mette in luce questi fenomeni risulta essere l'effetto di Aharonov-Bohm che noi ora analizzeremo utilizzando il metodo degli integrali di Feynman. Consideriamo, quindi, un solenoide di lunghezza molto maggiore del suo raggio, tale da poterlo considerare infinito e considerare il campo magnetico \vec{B} uniforme al suo interno e nullo al suo esterno. Fissiamo poi un sistema di riferimento xy . Nell'origine di questo sistema poniamo una sorgente di elettroni ben collimati lanciati lungo l'asse x . Per semplicità supponiamo che il fascio abbia intensità talmente tanto bassa che nella regione considerata vi sia un solo elettrone per volta, in modo da evitare interazione fra di loro. Attorno al solenoide, inoltre, disponiamo delle lenti elettrostatiche, ossia conduttori di forma opportuna tenuti a un certo potenziale e in una certa posizione, il cui scopo è quello di impedire agli elettroni di penetrare (dal punto di vista classico) all'interno del solenoide. Poniamo, infine, uno schermo dal lato opposto del solenoide rispetto al collimatore.

Pertanto, a seconda della coordinata y iniziale, gli elettroni potranno percorrere due traiettorie classiche, una che va al di sopra del solenoide e l'altra che va al di sotto, a causa del campo generato dalle lenti. Classicamente quello che ci aspettiamo e che la distribuzione dei conteggi degli elettroni sullo schermo sia piccata intorno alla coordinata $y = 0$, con una decrescita monotona all'aumentare del valore assoluto di quest'ultimo.

Quantisticamente ci aspettiamo, invece, una forma di interferenza tale da produrre dei massimi e dei minimi sullo schermo. La cosa interessante osservata è che la figura di interferenza dipende dal flusso del campo magnetico $\Phi_B = \pi R^2 B$ del campo magnetico attraverso il solenoide, cosa strana poichè sappiamo che, mediamente, gli elettroni non dovrebbero attraversare la regione del solenoide. Analizziamo meglio il calcolo quantistico: da punto di vista di quest'ultimo la distribuzione dei conteggi sullo schermo coincide con la distribuzione di probabilità, data da

$$dP = |\psi(\mathbf{q}, t)|^2 d^3q \quad (3.83)$$

Pertanto per trovare la figura di interferenza, almeno qualitativamente, dobbiamo discutere prima della funzione d'onda degli elettroni che compongono il fascio. Supponiamo semplicemente che la sorgente emetta elettroni nel medesimo stato

$$\psi_0(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q} | \psi_0 \rangle \quad (3.84)$$

Infatti, se vogliamo osservare la figura di interferenza dobbiamo ottenere un fascio bilanciato di elettroni, che sia simmetrico rispetto ad $y = 0$, in modo che in media

meta degli elettroni passi al di sopra del solenoide e l'altra meta passi al di sotto. Dal punto di vista della funzione d'onda del singolo elettrone, questo equivale a supporre che inizialmente questa si data dalla sovrapposizione di due funzioni d'onda con supporto nel semipiano superiore ed inferiore

$$\psi_0(\mathbf{q}) = \psi_1^0(\mathbf{q}) + \psi_2^0(\mathbf{q}) \quad (3.85)$$

Per trovare la dipendenza della funzione d'onda dal campo nel solenoide usiamo adesso l'integrale dei cammini di Feynman. Nel nostro caso possiamo scrivere che a un certo istante la funzione d'onda è l'evoluzione della somma delle due funzione ψ_1^0, ψ_2^0

$$\psi(\mathbf{q}', t) = \psi_1(\mathbf{q}', t) + \psi_2(\mathbf{q}', t) = \int d^3q K[\mathbf{q}', t; \mathbf{q}, t_0] \psi_1^0(\mathbf{q}) + \int d^3q K[\mathbf{q}', t; \mathbf{q}, t_0] \psi_2^0(\mathbf{q}) \quad (3.86)$$

Pertanto sullo schermo troviamo la seguente distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned} dP &= |\psi(\mathbf{q}', t)|^2 d^3q' = |\psi_1(\mathbf{q}', t) + \psi_2(\mathbf{q}', t)|^2 d^3q' = \\ &= [|\psi_1(\mathbf{q}', t)|^2 + |\psi_2(\mathbf{q}', t)|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\psi_1(\mathbf{q}', t)\psi_2^*(\mathbf{q}', t)\}] d^3q' \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ci serve dunque esplicitare il propagatore del sistema tramite l'integrale dei cammini. Dobbiamo tenere conto però che stiamo considerando un sistema in cui particelle cariche interagiscono con un campo elettromagnetico nello spazio, di conseguenza dobbiamo determinare come si modifica l'integrale dei cammini con la presenza del campo elettromagnetico. In questo paragrafo presenteremo direttamente il risultato di questo calcolo.

Quindi l'integrale dei cammini in presenza di un campo elettromagnetico diventa (dove abbiamo utilizzato, per semplicità, le unità di Gauss)

$$K[\mathbf{q}', t'; \mathbf{q}, t] = \int_{\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}}^{\mathbf{q}(t')=\mathbf{q}'} \mathcal{D}[\mathbf{q}(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - qV(\mathbf{q}) \right] \quad (3.88)$$

dove $\vec{\mathbf{A}}$ è il potenziale vettore del campo magnetico generato dal solenoide. Per calcolare questo ci poniamo per semplicità nella gauge che ha simmetria cilindrica $\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = f(r)\hat{e}_\phi$. Grazie a questa gauge possiamo trovare f usando il teorema di Stokes lungo una circonferenza C di raggio r con stesso asse del solenoide percorsa in modo tale che il cerchio corrispondente \sum abbia normale parallela al campo magnetico. Per $r \geq R$ raggio del solenoide troviamo

$$2\pi r f(r) = B\pi R^2 = \Phi(\vec{\mathbf{B}}) \quad (3.89)$$

da cui troviamo la forma di $f(r)$

$$f(r) = \frac{\Phi(\vec{\mathbf{B}})}{2\pi r} \hat{e}_\phi \quad (3.90)$$

e quindi per il potenziale vettore

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\Phi(\vec{\mathbf{B}})}{2\pi r} \hat{e}_\phi \quad (3.91)$$

Verifichiamo che la forma di questo potenzial vettore rispetta la condizione che il campo magnetico deve essere nullo al di fuori del solenoide

$$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{e}_\phi = 0 \quad (3.92)$$

Mentre all'interno del solenoide vale

$$\int_{\Sigma(r)} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Sigma = \pi r^2 B \quad (3.93)$$

da cui si ricava il campo magnetico

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{B}{2} \right) \hat{e}_z = B \hat{e}_z \quad (3.94)$$

come deve essere.

Ora per ricavare la forma del propagatore dovremmo risolvere la (3.38) calcolando l'azione lungo ogni possibile percorso che da $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}$ ad $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}'$. In realtà il problema si semplifica notevolmente se notiamo che l'estensione spaziale di $\psi_0(\mathbf{q})$, e dunque di $\psi(\mathbf{q}, t)$ è molto piccola rispetto alle dimensioni dell'apparato. Questo significa che l'azione di una traiettoria tipica sarà grande rispetto ad \hbar e quindi è ragionevole supporre che nell'integrale funzionale contribuiscano maggiormente i moti vicini a quelli classici, che vanno sopra o sotto al solenoide. Pertanto i cammini principali saranno i due cammini classici con estremi \mathbf{q} e \mathbf{q}' , uno sopra e l'altro sotto il solenoide, che indicheremo rispettivamente con γ_{cl}^1 e γ_{cl}^2 .

Quest' ipotesi ci permette dunque di scrivere l'evoluzione temporale dei due pacchetti nel seguente modo

$$\psi_k(\mathbf{q}', t) = \int_{I_k} \mathcal{D}[\mathbf{q}(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}(t)] \right] \psi_k^0(\mathbf{q}(t)) \quad k = 1, 2 \quad (3.95)$$

dove I_k è l'insieme dei cammini vicini alle traiettorie classiche γ_{cl}^k . In particolare I_1 include tutti i cammini interamente sopra il solenoide, I_2 quelli interamente sotto.

Per un cammino generico $\mathbf{q}(t)$ l'azione sarà data da

$$\begin{aligned} S[\mathbf{q}(t)] &= \int_{t_0}^{t'} dt \left(\frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - eV(\mathbf{q}) \right) = \int_{t_0}^{t'} dt \left(\frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2} - eV(\mathbf{q}) \right) + \\ &+ \frac{e}{c} \int_{t_0}^{t'} dt \vec{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = S_0[\mathbf{q}(t)] + \frac{e}{c} \int_\gamma \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.96)$$

dove γ è la curva tracciata da $\mathbf{q}(t)$ e orientata da quest'ultimo ad $\mathbf{q}(t')$. Se $\mathbf{q}(t) \in I_k$ allora γ è vicina a γ_{cl}^k . Pertanto entrambe le curve sono sopra e sotto il solenoide, ossia il campo tra la curva $\gamma \cup (-\gamma_{cl}^k)$ (che è una curva chiusa) è nullo. Possiamo dunque scrivere

$$\oint_{\gamma \cup (-\gamma_{cl}^k)} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} = \int_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = 0 \quad (3.97)$$

che ci permette di scrivere

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} = \int_{\gamma_{cl}^k} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} \quad (3.98)$$

Ma questo significa che il contributo al propagatore (e funzione d'onda) è una fase costante che dipende unicamente da k , ossia dal pacchetto "parziale" ψ_k . Questo ci permette di scrivere l'evoluzione dei pacchetti ψ_k^0 nel seguente modo

$$\begin{aligned} \psi_k(\mathbf{q}', t) &= \exp\left(\frac{i e}{\hbar c} \int_{\gamma_{cl}^k} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q}\right) \int_{I_k} \mathcal{D}\mathbf{q}(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_0[\mathbf{q}(t)]\right] \psi_k^0(\mathbf{q}) = \\ &= \exp\left(\frac{i e}{\hbar c} \int_{\gamma_{cl}^k} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q}\right) \psi_k^0(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (3.99)$$

dove il $\psi_k^0(\mathbf{q}, t)$ indica il pacchetto ψ_k^0 evoluto nel tempo usando solo la parte libera dell'azione e il potenziale dovuto alle lenti elettrostatiche. Nell'approssimazione fatta di "grande azione" pertanto il campo magnetico risulta solo in una fase costante nella funzione d'onda.

Siamo ora in grado di scrivere la dipendenza della distribuzione di probabilità, ossia lo spettro di interferenza misurato nello schermo, dal campo magnetico. Troviamo quindi

$$\frac{dP}{d^3\mathbf{q}'} = |\psi_1(\mathbf{q}', t)|^2 + |\psi_2(\mathbf{q}', t)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \exp\left(\frac{i e}{\hbar c} \oint_{\gamma_{cl}^1 \cup (-\gamma_{cl}^2)} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q}\right) \psi_1(\mathbf{q}', t) \psi_2^*(\mathbf{q}', t) \right\} \quad (3.100)$$

da cui utilizzando il teorema di Stokes ricaviamo

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \exp\left(\frac{i e}{\hbar c} \Phi(\vec{\mathbf{B}})\right) \psi_1(\mathbf{q}', t) \psi_2^*(\mathbf{q}', t) \right\} \quad (3.101)$$

Confrontiamo dunque questa in presenza e in assenza del campo magnetico. Notiamo che i valori assoluti di ψ_1^0 , ψ_2^0 non sono influenzati da questo, in quanto è una fase costante.

In assenza di campo magnetico i massimi si hanno quando le due funzioni d'onda

fanno interferenza costruttiva, ossia hanno le stesse fasi. In presenza di campo magnetico, invece, questo contributo cambia, risultando in una modulazione dei massimi (e dunque dell'intero spettro)

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(\frac{i e}{\hbar c} \Phi(\vec{\mathbf{B}}) \right) \psi_1(\mathbf{q}', t) \psi_2^*(\mathbf{q}', t) \right\} = 2 |\psi_1^0 \psi_2^0| \cos \left[\frac{e}{\hbar c} \phi(\vec{\mathbf{B}}) \right] \quad (3.102)$$

pertanto troviamo che $\Phi(\vec{\mathbf{B}})$ modula i massimi con periodo

$$\frac{e \Phi(\vec{\mathbf{B}})}{\hbar c} = 2n\pi \Rightarrow \Phi_B \approx \Phi_B + \frac{2\pi n \hbar c}{q} \quad (3.103)$$

Questo significa che quando cambiamo l'intensità del campo magnetico, c'è una componente sinusoidale nella probabilità di osservare la particella nella regione di interferenza, con un periodo dato dall'unità fondamentale di flusso magnetico, cioè

$$\frac{2\pi \hbar c}{e} = 4.135 \times 10^{-7} \text{ gauss-cm}^2 \quad (3.104)$$

Vogliamo sottolineare che l'effetto di interferenza, qui discusso, è puramente quantistico. Classicamente, il moto di una particella carica è determinato completamente dalla seconda legge di Newton, dove la forza è quella di Lorentz. Qui, infatti, la particella non può mai avere accesso alla regione in cui $\vec{\mathbf{B}}$ è non nullo; la forza di Lorentz è identicamente zero in tutte le regioni in cui la funzione d'onda della particella è non nulla. Tuttavia si vede una sorprendente figura d'interferenza che dipende dalla presenza o dall'assenza di campo magnetico all'interno del solenoide.

Dunque, per evitare interazioni non locali tra le particelle e il campo elettromagnetico, possiamo interpretare tale effetto assumendo che l'interazione avvenga tra il potenziale vettore $\vec{\mathbf{A}}$ e le particelle. Sembrerebbe quindi naturale che il potenziale vettore in meccanica quantistica rappresenti la grandezza fondamentale per descrivere l'elettromagnetismo. C'è però un problema: il potenziale vettore non è invariante per trasformazioni di gauge, inoltre in meccanica quantistica riteniamo ragionevole richiedere che i valori medi si comportino in maniera simile alle corrispondenti quantità classiche sotto trasformazione di gauge, pertanto valori come $\langle \mathbf{q} \rangle$ non devono cambiare sotto queste trasformazioni. In particolare, dalla teoria della trasformazione di gauge applicata in meccanica quantistica, sappiamo che per descrivere correttamente il comportamento della funzione d'onda soggetta a un campo elettromagnetico è necessario servirsi della seguente quantità

$$\exp \left\{ \frac{i e}{c \hbar} \oint \vec{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} \right\} \quad (3.105)$$

che rappresenta il fattore di fase che la funzione d'onda della particella carica acquisisce percorrendo per intero il circuito, ed essa prende il nome di fase di

Berry. Ma questa quantità è la stessa che abbiamo trovato nell'analisi dell'effetto Aharonov-Bohm grazie all'utilizzo dell'integrale sui cammini di Feynman. Pertanto abbiamo visto, ancora una volta, come il formalismo dell'integrale di Feynman risulti essere una valida formulazione alternativa della meccanica quantistica.

Concludiamo questo paragrafo con la constatazione che l'effetto Aharonov-Bohm è strettamente collegato alla dimostrazione che l'esistenza dei monopoli magnetici implica la quantizzazione della carica elettrica e magnetica.

Supponiamo, infatti, che esista un monopolo magnetico puntiforme, situato nell'origine di un sistema, con una sua intensità e_m analogo a una carica elettrica puntiforme. Il campo magnetico generato da questa carica è allora

$$\vec{\mathbf{B}} = \left(\frac{e_m}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (3.106)$$

e la seconda equazione di Maxwell diventa

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 4\pi \rho_m \quad (3.107)$$

A prima vista sembrerebbe che il campo magnetico (3.106) potesse essere ottenuto da

$$\vec{\mathbf{A}} = \left[\frac{e_m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (3.108)$$

Ma il questo potenziale vettore presenta una difficoltà-è singolare sull'asse z negativo ($\theta = \pi$). In realtà si trova che è impossibile per questo problema costruire un potenziale privo di singolarità valido dappertutto. Per sincerarsi di questo si consideri la (3.107) e si applichi la legge di Gauss.

$$\int_{\text{superficie chiusa}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\sigma = 4\pi e_m \quad (3.109)$$

per ogni superficie che racchiude l'origine in cui è localizzato il monopolo magnetico. D'altra parte, se $\vec{\mathbf{A}}$ non fosse singolare, avremmo dappertutto.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) = 0 \quad (3.110)$$

per cui

$$\int_{\text{superficie chiusa}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\sigma = \int_{\text{volume intero}} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) d^3q = 0 \quad (3.111)$$

che contraddice (3.109).

Si potrebbe tuttavia obiettare che, essendo il potenziale vettore solo uno strumento

per ottenere \vec{B} , non c'è motivo di insistere che vi sia un'unica espressione di \vec{A} valida dappertutto. Supponiamo di costruire una coppia di potenziali

$$\vec{A}^I = \left[\frac{e_m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (3.112)$$

per $(\theta < \pi - \epsilon)$, mentre invece

$$\vec{A}^{II} = - \left[\frac{e_m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (3.113)$$

per $\theta > \epsilon$. In questo modo possiamo utilizzare la \vec{A}^I dappertutto eccetto che all'interno del cono definito da $\theta = \pi - \epsilon$ attorno all'asse z negativo; allo stesso modo il potenziale \vec{A}^{II} può essere dappertutto eccetto che all'interno del cono $\theta = \epsilon$ attorno all'asse z positivo. Assieme, quindi, essi portano alla corretta espressione per \vec{B} dappertutto.

Consideriamo ora cosa accade nella regione di sovrapposizione $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$, dove possiamo usare tanto \vec{A}^I che \vec{A}^{II} . Poiché i due potenziali portano allo stesso campo magnetico, devono essere legati fra di loro da una trasformazione di gauge. Per trovare la Λ appropriata per questo problema, incominciamo a notare che

$$\vec{A}^{II} - \vec{A}^I = - \left(\frac{e_m}{r \sin \theta} \hat{\phi} \right) \quad (3.114)$$

ricordando l'espressione del gradiente in coordinate sferiche deduciamo che

$$\Lambda = -2e_m\phi \quad (3.115)$$

che è l'espressione cercata.

Consideriamo ora la funzione d'onda di una particella carica elettricamente, con carica q , soggetta al campo magnetico (3.106). Come abbiamo visto con l'effetto Aranhov-Bohm, la forma particolare della funzione d'onda dipende dalla particolare scelta di gauge. Nella regione di sovrapposizione, dove possiamo far uso o di \vec{A}^I o di \vec{A}^{II} , le corrispondenti funzioni d'onda sono legate fra loro, in accordo con la (3.105), dalla relazione (non su un percorso chiuso però)

$$\psi^{II} = \exp \left[- \frac{2iee_m\phi}{\hbar c} \right] \psi^I \quad (3.116)$$

In particolare, le funzioni d'onda ψ^I e ψ^{II} devono essere separatamente a un solo valore poichè una volta che sia stata fatta la scelta di una particolare gauge, lo sviluppo del ket di stato su un autoket della posizione deve essere unico. Dopo tutto, come sappiamo dalla meccanica quantistica, la funzione d'onda non è altro

che che il coefficiente dello sviluppo del ket di stato su un autoket della posizione. Esaminiamo ora il comportamento della funzione d'onda ψ^{II} all'equazione $\theta = \pi/2$ per un certo raggio r costante. Se aumentiamo l'angolo azimutale ϕ e completiamo un giro lungo l'equatore, da $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, allora ψ^{II} , come pure ψ^I , devono ritornare al loro valore iniziale, poiché ognuna di esse è monodroma. Secondo la (3.116) questo è possibile solo se

$$\frac{2ee_m}{\hbar c} = \pm N \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.117)$$

Così raggiungiamo una conclusione estremamente importante. Le cariche magnetiche quantizzate in unità di

$$\frac{\hbar c}{2e} \approx \left(\frac{137}{2}\right)e \quad (3.118)$$

La più piccola carica magnetica possibile è $\hbar c/2e$, dove e è la carica dell'elettrone. È interessante notare che, una volta che sia ipotizzata l'esistenza di un monopolo magnetico, possiamo usare (3.117) a rovescio per spiegare perché le cariche elettriche sono quantizzate. Dobbiamo però precisare che la meccanica quantistica non necessariamente implica l'esistenza di monopoli magnetici. Tuttavia, essa predice senza ambiguità che se mai sarà trovata una carica magnetica in natura, essa dovrà essere quantizzata in unità di $\hbar c/2e$.

C'è un'altra conseguenza importante dovuta alla relazione (3.118). Infatti, completare un giro lungo l'equatore, da $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$, è equivalente a considerare la circuitazione, lungo un percorso chiuso, della trasformazione di gauge tra i potenziali \vec{A}^I e \vec{A}^{II} , in formule

$$\oint \nabla \Lambda \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\phi (-2e_m) \quad (3.119)$$

ma questo corrisponde a considerare il termine di fase, acquisito dalla funzione d'onda nella regione di sovrapposizione, dovuto alla presenza di un flusso di campo magnetico concatenato al percorso chiuso scelto. In particolare, dallo studio dell'effetto Aharonov-Bohm, eseguito con l'integrale sui cammini, sappiamo che quando un piccolo solenoide ha un flusso magnetico netto, vi sono delle frange di interferenza per le particelle cariche che circolano lungo o intorno al solenoide, che rivela così la sua presenza.

Ma se tutte le particelle cariche sono multipli interi del quanto fondamentale di carica e , solenoidi con un flusso netto pari a $\frac{2\pi}{e}$ non hanno frange di interferenza perché il fattore di fase per ciascuna particella diventa $e^{2i\pi n} = 1$ (condizione 3.118). Quindi questo tipo di solenoidi sono quanto-meccanicamente invisibili. Se un tale solenoide fosse in grado di trasportare un flusso pari a $\frac{2\pi}{e}$, quando il flusso si disgiunge da una delle due estremità, sarebbe indistinguibile dal campo

prodotto da un monopolo come il (3.106). Il campo in questione, infatti, può essere generato da un solenoide estremamente sottile, in cui una delle due estremità è posta all'infinito. All'interno del solenoide il potenziale vettore \vec{A} è singolare, in modo tale che da poter generare un campo magnetico radiale. A livello puramente classico, il solenoide infinitesimo e la singolarità del potenziale vettore artificialmente introdotti sarebbero inosservabili. Tuttavia, a livello quantistico, per l'effetto Aharonov-Bohm, le frange di interferenza delle particelle cariche permetterebbero di individuare questo solenoide a meno che il campo magnetico non soddisfi opportune condizioni di quantizzazione, imposte le quali si deriva la quantizzazione della carica elettrica, appunto la condizione (3.118).

Infatti, la soluzione proposta da Dirac, per il problema dei monopoli, descrive un solenoide fatto come una linea infinitesima che finisce in un punto, il potenziale vettore è dunque singolare su una semiretta (nella nostra trattazione il semiasse z negativo) con una posizione che dipende dalla scelta di una direzione e che ha l'origine nella posizione del monopolo e_m . Tale semiretta singolare è appunto la stringa di Dirac.

Le linee di forza si irradiano all'esterno dalle estremità del solenoide, assumendo una distribuzione isotropa a grandi distanze. In tal modo le due estremità appaiono come una coppia di monopoli magnetici di polarità opposta. Nel caso limite di un semi-solenoide ben definito di diametro nullo, ottenuto allontanando un'estremità (per esempio antimonopolo) all'infinito, l'estremità che rimane accessibile apparirebbe come un monopolo isolato, e il semi-solenoide come la stringa di Dirac ad esso associata. Affinché il flusso magnetico non svanisca quando il diametro si annulla, il campo all'interno del semi-solenoide deve diventare infinito. Il flusso $\Phi(\vec{B})$ trasportato attraverso la stringa di Dirac si mantiene quindi finito, uguale a $4\pi e_m$, e fornisce l'intero flusso irradiato dal monopolo.

Il flusso magnetico, quindi, all'interno di un solenoide reale resta "nascosto" al mondo esterno fino a quando non riappare e viene irradiato alle estremità; ma sappiamo che all'interno il flusso esiste realmente, sicché il bilancio complessivo, interno-esterno, rimane in parità, e continua a valere l'equazione $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Il monopolo si manifesta quindi come una sorgente di carica magnetica e_m , che irradia nello spazio il flusso trasportato attraverso la stringa di Dirac in un canale "nascosto".

Questo "canale segreto" è il meccanismo che fa apparire completa la simmetria tra elettricità e magnetismo senza richiedere modifiche delle leggi fondamentali. Ma sfortunatamente introduce nella teoria elettromagnetica una singolarità, ancora più strana poiché inosservabile e inaccessibile. In virtù di questa simmetria l'elettricità e il magnetismo ci appaiono ulteriormente come due facce della stessa medaglia, ma solo se li osserviamo da una rispettosa distanza.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo introdotto ed analizzato il formalismo dell'integrale sui cammini, anche detto formalismo di Feynman. In particolare, nel primo capitolo abbiamo dato la definizione, seguendo il formalismo canonico della meccanica quantistica, del propagatore dell'equazione di Schrödinger, analizzando in particolar modo il legame tra quest'ultimo e il concetto di ampiezza di transizione tra stati, e si è mostrato come, attraverso questo, sia possibile prevedere in maniera generale l'evoluzione di un qualsiasi sistema quantistico.

Nel prima parte del secondo capitolo, invece, abbiamo costruito in maniera generale il formalismo dell'integrale sui cammini definendolo sia nello spazio delle fasi, formalismo hamiltoniano, e sia nello spazio delle configurazioni, formalismo Lagrangiano. Nella seconda parte, invece, abbiamo mostrato come, tra tutti i cammini possibili, valutati egualmente a livello quantistico, solo quello di minima azione ha peso a livello macroscopico. Nello stesso capitolo abbiamo anche mostrato come dall'integrale di Feynman sia possibile estrarre informazioni sia sulla teoria perturbativa, definendo un formalismo equivalente alla serie di Dyson, che su quella di sistemi a molti gradi di libertà, come un ensemble canonico.

Successivamente nel terzo capitolo abbiamo utilizzato questo formalismo per risolvere alcuni problemi in meccanica quantistica ottenendo, in particolare, gli stessi risultati dell'approccio operatoriale canonico, mostrando quindi la potenza della teoria appena descritta. Inoltre, nella parte finale del capitolo, abbiamo analizzato il fenomeno noto come "Effetto Aharonov-Bohm" utilizzando l'integrale sui cammini, il quale ci ha permesso, in maniera molto naturale, di spostare la nostra attenzione sul termine di fase acquisito dalla funzione d'onda del sistema. Infine dall'analisi di quest'ultima, in particolare del potenziale vettore del sistema, seguendo l'ipotesi Dirac siamo giunti alla condizione di quantizzazione della carica magnetica e elettrica, la quale ci permetterebbe, in maniera totalmente teorica, di avere uno sguardo più vasto e simmetrico sulle nostre teorie che descrivono l'elettromagnetismo.

Appendice A

Calcolo oscillatore armonico

Poniamo per la matrice \mathbf{F}

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots \\ y & x & y & 0 & \dots \\ 0 & y & x & y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con

$$x = 2\left(1 - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{4}\right) \quad \text{e} \quad y = -\left(1 + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{4}\right) \quad (\text{A.2})$$

Vogliamo ora calcolare il determinante di \mathbf{F} : un'analisi più approfondita della struttura di quest'ultima permette di ricavare la relazione di ricorrenza

$$F_{n+1} = xF_n - y^2 F_{n-1} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad F_0 = 1 \quad \text{e} \quad F_{-1} = 0 \quad (\text{A.3})$$

dove F_n è il determinante di una matrice quadrata del tipo \mathbf{F} con n righe. In forma matriciale l'equazione si scrive

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Partendo dal vettore $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ e applicando la relazione precedente $N - 2$ volte, si ottiene l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} F_{N-1} \\ F_{N-2} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{N-2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

che rappresenta un sistema di due equazioni delle quali vogliamo ricavare F_{N-1} che è il determinante che compare nella (3.46).

Si verifica banalmente che la matrice \mathbf{A} è diagonalizzabile e che gli autovalori

sono $\lambda_{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y^2}}{2}$ e quindi, se indichiamo con \mathbf{M} la matrice che diagonalizza \mathbf{A} , si ottiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{A}_D\mathbf{M}^{-1} \rightarrow \mathbf{A}^{N-2} = \mathbf{M}\mathbf{A}_D^{N-2}\mathbf{M}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

ed infine

$$\begin{pmatrix} F_{N-1} \\ F_{N-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_+^{N-2} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-2} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A questo punto è necessario esplicitare \mathbf{M} (formata dagli autovettori di \mathbf{A} disposti in colonna) e la sua inversa nella forma seguente

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e dopo aver svolto il prodotto matriciale si giunge al risultato

$$F_{N-1} = \frac{\lambda_+^N - \lambda_-^N}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (\text{A.9})$$

Possiamo esplicitare il secondo membro della precedente uguaglianza tenendo conto (A.2) e delle seguenti relazioni

$$\lambda_+ - \lambda_- = 2i\omega\epsilon \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_+^N = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4y^2}}{2} \right)^N = \left(1 - \frac{\epsilon^2\omega^2}{4} + i\epsilon\omega \right)^N \approx (1 + i\epsilon\omega)^N \quad (\text{A.11})$$

e per λ_-^N

$$\lambda_-^N \approx (1 - i\epsilon\omega)^N \quad (\text{A.12})$$

dove abbiamo trascurato i termini in ϵ^2 picchéé dovremo considerare il limite per $\epsilon \rightarrow 0$.

Utilizzando queste relazioni ed effettuando il limite otteniamo la (3.47).

Bibliografia

- [1] Fiorenzo Bastianelli. "Path integrals in quantum mechanics". In: *Appunti per i corsi di fisica teorica I* 2012.
- [2] Jun John Sakurai e Jim Napolitano. *Meccanica quantistica moderna*. A cura di Stefano Forte. Seconda edizione. Bologna, 2014.
- [3] Richard Feynman. "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics" In: *Reviews of Modern Physics* 1948.
- [4] Richard Feynman e Albert Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. A cura di Dover publications. emended edition. Mineola, New York, 2010.
- [5] Nali, Pier Franco. "Dirac e il Monopolo Magnetico". In: *La Biblioteca dei 500*, eISSN: 1722-4306 12.004 (2004): 1-23. Print.
- [6] Gross D. *Lectures on Quantum Field Theory* (362)