

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Distanze cosmologiche in modelli di universo con
disomogeneità su piccola scala e loro uso nella
cosmologia osservativa**

Relatore:

Nome relatore

Prof. Ester Piedipalumbo

Candidato:

Nome candidato

Davide Sofia

Matr. N85001187

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Le equazioni di Friedmann	6
1.1	La metrica di Friedmann-Lemaitre-Robinson-Walker	6
1.1.1	La legge di Hubble	8
1.2	Il redshift	9
1.3	Osservabili cosmologici	10
1.3.1	La distanza di luminosità	11
1.4	Dalle equazioni di campo di Einstein a quelle di Friedmann	12
1.4.1	Le equazioni di Friedmann	13
2	L'evoluzione dell'universo e l'energia oscura	17
2.1	L'equazione di stato	18
2.1.1	L'equazione di stato per la materia	18
2.1.2	L'equazione di stato per la radiazione	20
2.1.3	L'equazione di stato per una generica componente e le equazioni generali di Friedmann	22
2.2	Andamenti qualitativi	22
2.3	La costante cosmologica	23
2.4	L'energia oscura	24
2.4.1	L'equazione di stato per l'energia oscura	25
3	La distanza di Dyer-Roeder ed il parametro di clumpiness	28
3.1	Soluzioni esatte dell'equazione di Dyer-Roeder	35
4	Stima dei parametri cosmologici tramite l'utilizzo dei GRB	37
4.1	Gamma Ray Burst	37
4.2	Utilizzo dei GRB come indicatori di distanza	39
4.3	Analisi statistica	42
4.3.1	Criterio Di Gelman Rubin	44

5	Appendice	52
5.1	Equazioni della classe di Fuchs	52
5.2	Calibrazione tramite supernove	54

Introduzione

Negli anni *pre-relativistici*, lo spazio di tutte le teorie fisiche era quello piano della geometria euclidea, la quale si basa sui cinque postulati di Euclide. Il quinto postulato é stato oggetto di una disputa millenaria¹, in quanto si credeva che fosse una conseguenza degli altri quattro. Il problema fu risolto nell'Ottocento quando Gauss(1824),Bolyai(1832) e Lobachevski(1826)-ognuno indipendentemente dall'altro- formularono una geometria che soddisfacesse tutti i postulati eccetto l'ultimo, cosí dimostrandone l'indipendenza.Modificando questo postulato sono state introdotte geometrie diverse, dette non euclidee.

In particolare nel 1827, Gauss, nel **Disquisitiones generales circa superficies curvas**, constató che la proprietá interna fondamentale di una superficie é la distanza tra due punti,definita come la lunghezza del percorso piú breve tra loro sulla superficie.Gauss selezionó gli spazi metrici bidimensionali per cui, considerata una regione di spazio sufficientemente piccola, fosse possibile la scelta di un sistema di coordinate (ξ^1, ξ^2) , dette localmente euclidee, tali che la distanza tra due punti infinitamente vicini- $\mathbf{P} = (\xi^1, \xi^2)$ e $\mathbf{P}' = (\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$,soddisfacesse il teorema di Pitagora $ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$. L'ultima relazione, verificata localmente, a seguito del passaggio dal sistema di coordinate localmente euclidee ad uno generico, diventa $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$,dove $g_{\mu\nu}$ é un tensore metrico, le cui componenti sono definite come $d\xi^i/dx^j$ per $i,j=1,2$. L'importanza del suddetto tensore risiede nel permettere di calcolare la distanza di due punti infinitamente vicini in qualsiasi sistema di coordinate e di determinare le proprietá intrinseche dello spazio.

I risultati possono essere estesi a spazi di dimensione arbitraria; in particolare lo spazio della Relativitá Generale é uno spazio di dimensione quattro, chiamato spaziotempo tale che in prossimitá di un qualsiasi punto sia possibile disporre di un sistema di coordinate $\{\xi^\mu\}_{\mu=0,\dots,3}$, note come coordinate locali di Minkowski, per cui la distanza tra due punti infinitamente vicini sia

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 \quad (1)$$

¹Ricordiamo che il quinto postulato di Euclide recita che *se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.*

Queste considerazioni furono fondamentali per la formulazione matematica della Relatività Generale, che è di fatto una teoria della gravitazione, ed è basata su due principi fondamentali: il principio di Equivalenza ed il principio di covarianza generale.

Il **principio di Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale** fa in modo che la forza gravitazionale si distingua da tutti gli altri tipi di forze perché in un campo gravitazionale, tutti i corpi, con stessa velocità iniziale, seguono la stessa traiettoria, indipendentemente dalla loro composizione interna: infatti l'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale fa sì che in un riferimento locale la forza gravitazionale si annulli. Si può riesprimere il Principio di Equivalenza tra i due tipi di masse tramite il **Principio di equivalenza**, che nella forma forte, enuncia *In un campo gravitazionale arbitrario, in un qualsiasi punto dello spazio-tempo si può scegliere un sistema di riferimento localmente inerziale tale che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto, tutte le leggi della fisica assumano la stessa forma che hanno in assenza di gravità, cioè la forma prevista dalla Relatività speciale.*

Detto principio richiama l'assioma per cui Gauss selezionava basi non-euclidee, da cui si intuisce l'importanza del tensore metrico in Relatività Generale. Se, invero, lo spazio-tempo è solo localmente Minkowskiano, è chiaro che la metrica non è più assegnata, ma deve essere fornita dalle equazioni dinamiche della nuova teoria. Quindi è giusto chiedersi quale sia la relazione che lo lega al campo gravitazionale. Si consideri una particella in un sistema di riferimento localmente inerziale, l'equazione del moto è data da

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2)$$

dove τ/c è il tempo proprio della particella. Se passassimo ad un sistema di riferimento arbitrario, tenendo conto della forza di gravità e delle forze inerziali, l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \left[\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] \quad (3)$$

In cui, in assenza di forze inerziali, solo il secondo termine sopravvive che rappresenta il contributo del campo gravitazionale, che a sua volta è la derivata del

potenziale gravitazionale. Dunque, dato che il secondo termine è composto dalle derivate seconde delle coordinate localmente euclidee rispetto a quelle arbitrarie e ricordando come sono definite le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ se ne deduce che quest'ultimo generalizza il potenziale newtoniano, assumendo, quindi, un duplice significato: permette di descrivere la geometria dello spazio, e acquisisce significato fisico grazie alla sua relazione con il potenziale gravitazionale. Le equazioni di campo della Relatività Generale, cioè le equazioni di Einstein sono equazioni la cui soluzione è appunto il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Uno dei campi di applicazione più rilevanti della Teoria della Relatività Generale di Einstein, ed insieme uno dei suoi maggiori successi, è costituito dalla Cosmologia.

In questo elaborato presenteremo il cosiddetto modello cosmologico di Friedmann-Lemaitre-Robinson-Walker, che si basa sulla visione dell'universo come ambiente omogeneo, isotropo e dinamico. Introdurremo inizialmente le principali grandezze fisiche osservabili fondamentali per lo studio dell'evoluzione dell'universo, con particolare attenzione alla definizione delle distanze cosmologiche, ed alla costruzione del cosiddetto diagramma di Hubble. Mostriamo quindi come derivare le equazioni di Friedmann, cioè a dire le equazioni di Einstein per una metrica omogenea ed isotropa, detta appunto metrica di Friedmann-Lemaitre-Robinson-Walker (FLRW). Illustreremo alcune soluzioni delle equazioni di Friedmann, mettendone in risalto le caratteristiche dinamiche essenziali. Affronteremo quindi uno dei maggiori problemi della cosmologia moderna: negli ultimi decenni, invece, una variegata messe di dati osservativi hanno delineato un nuovo ed inatteso volto dell'universo, che si trova in una fase accelerata della sua espansione, contrariamente a quanto previsto dal modello puramente Friedmanniano. Questa straordinaria scoperta ha segnato la nascita di un nuovo modello cosmologico standard, il cosiddetto modello Λ -CDM, caratterizzato da quello che forse è il componente più misterioso del fluido cosmologico: l'energia oscura. Nell'ambito della cosmologia teorica moderna sono stati elaborati molti modelli di energia oscura; tuttavia noi discuteremo soltanto pochi casi semplici. Infine metteremo in discussione, almeno parzialmente, una delle ipotesi fondamentali dei modelli Friedmanniani, cioè l'omogeneità nella distribuzione della materia. È infatti noto che l'universo è realmente omogeneo (ed isotropo) solo su scale molto grandi, delle centinaia di Mpc, corrispondenti alla scala dei superammassi. Su scale più piccole è, invece, fortemente disomogeneo. Tenteremo di descrivere, nell'ambito di un modello molto semplice, detto di Dyer-Roeder, l'effetto di queste disomogeneità locali sulla misura delle distanze, confrontando previsioni teoriche e dati osservativi derivanti dal diagramma di Hubble costruito per una particolare classe di *indicatori di distanza*: i Gamma Ray Bursts (GRBs).

Capitolo 1

Le equazioni di Friedmann

La cosmologia, nel fare uso della modellizzazione dell'universo e degli strumenti derivanti dalla Teoria della Relatività Generale, si basa su un'importante assunzione, ovvero che l'universo sia omogeneo ed isotropo. In generale ciò non é vero per piccole scale, ma su una scala opportunamente grande, dell'ordine delle centinaia di Mpc, ossia sulla scala dei superammassi. Secondo questa assunzione, l'aspetto generale dell'universo non dipende dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione di osservazione. Tale enunciato é noto come *principio cosmologico* e può essere considerato come un'estensione del *principio copernicano*, secondo cui l'uomo non occupa una posizione privilegiata nel cosmo cosicché le leggi fisiche rimangano invariate nello spostarsi da un punto ad un altro qualsiasi nell'universo.

1.1 La metrica di Friedmann-Lemaitre-Robinson-Walker

L'espressione piú generale per una metrica 4-dim ([1]) é del tipo:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dx^i dt - \sigma_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.1)$$

dove $i, j = 1 \dots 3$. Si può dimostrare che la metrica che descrive uno spazio-tempo quadrimensionale omogeneo e isotropo é:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \\
&= dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + kr^2/4} [dx^2 + dy^2 + dz^2].
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Osserviamo che la metrica (1.2) risulta determinata a meno di un fattore di scala $a(t)$. Essa é detta **metrica di Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker** o, in maniera compatta, **metrica FLRW**. Bisogna notare che la costante k , detta parametro di curvatura (spaziale), puó assumere un qualsiasi valore reale, ciononostante, potendo assorbire $|k|$ in una ridefinizione di r , si considereranno solo i casi $k = 0, \pm 1$. Si noti che dato che k compare solo nella parte spaziale della metrica FLRW, agisce solo sulla geometria dello spazio tridimensionale: infatti, per $k = 0$ l'universo sará spazialmente piatto. Invece per $k = \pm 1$ la sezione spaziale non é piú piatto e risulta utile effettuare la trasformazione

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = d\chi^2 \tag{1.3}$$

da cui segue $r = \text{sen}\chi$ per $k = 1$ e $r = \text{sinh}\chi$ per $k = -1$. Nel primo caso la parte spaziale della metrica assume la forma

$$d\sigma^2 = a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{1.4}$$

e si puó dimostrare che un tale spazio é finito: l'universo é detto chiuso o sferico. Se $k = -1$, invece, la metrica spaziale diventa

$$d\sigma^2 = a(t)^2 [d\chi^2 + \text{sinh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{1.5}$$

Inoltre in questo caso come per $k=0$ lo spazio é infinito e l'universo per questi due valori di k , é detto aperto, in particolare per $k = -1$, iperbolico.

Tramite l'Eq. 1.3, r puó essere riscritta, al variare di k , come una funzione di χ : introducendo la notazione $r = r_k(\chi)$ si ha che

$$r_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \text{se } k = 1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \sinh \chi, & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.6)$$

in forma piú compatta si avrá

$$r_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) \quad (1.7)$$

in cui il caso dell'universo piatto é ottenibile passando al limite di suddetta espressione per k che tende a 0^-

1.1.1 La legge di Hubble

Risulta evidente che, dalla forma della metrica FLRW in coordinate polari r, θ, ϕ , ad un dato tempo t_0 , la funzione $a(t)$ agisce come un fattore globale dell'espansione o della contrazione dell'universo. La distanza fisica misurata lungo una geodetica $ds=0$ é, per piccole distanze e per $d\theta = d\phi = 0$, semplicemente $D = cdt \approx a(t)dr$. Derivando la precedente relazione rispetto al tempo si ottiene la cosiddetta **legge di Hubble**

$$\dot{D} = \dot{a}(t)dr = HD \quad (1.8)$$

dove abbiamo definito la costante di Hubble

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.9)$$

la quale corrisponde al tasso di espansione dello spazio al tempo di osservazione.

La legge di Hubble si applica a qualsiasi sistema che si espande (o contrae) in modo omogeneo e isotropo.

Le distanze

$$r = \int \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (1.10)$$

sono fissate nello spazio e nel tempo e si muovono con loro. Sono altresí note come distanze comoventi. Le distanze fisiche $D = a(t)r$, invece, variano con l'espansione. Per convenienza, spesso si definiscono le distanze presenti tale che $D = r$, quindi $a(t = t_0) = 1$.

1.2 Il redshift

Generalmente, in Cosmologia, non é semplice misurare le distanze in maniera diretta, ragione per cui nella pratica si considera un osservabile che può essere misurato facilmente: la lunghezza d'onda della luce emessa dalle sorgenti astronomiche, da cui si definisce il **redshift** z . Si consideri una sorgente luminosa a riposo. L'intervallo tra due creste d'onda é $\lambda_0 = cdt$, dove λ_0 é la lunghezza d'onda e c la loro velocità. Se, ora, nello stesso istante dt la sorgente si allontana dall'osservatore con velocità $-v$, é evidente che l'intervallo tra le due creste aumenta della distanza percorsa dalla sorgente, che é vdt , e si avrà una lunghezza d'onda $\lambda_e = cdt + vdt$. Quindi c'è uno spostamento Doppler

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \quad (1.11)$$

Se ora immaginassimo che il segnale fosse emesso da una sorgente in movimento in accordo con la legge di Hubble, avremmo una relazione tra la lunghezza d'onda e un fattore di scala:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{HD}{c} = -Hdt = \frac{-da}{a} \quad (1.12)$$

dove si é considerato un intervallo infinitesimo negativo

$$ds = t_{emissione} - t_{osservazione}$$

Perció, integrando $d\lambda/\lambda = -da/a$ e normalizzando il fattore di scala tale che all'epoca presente $a = a_0 = 1$, otteniamo che la lunghezza d'onda osservata λ di una sorgente che ha emesso un segnale all'epoca a_e é $\lambda_e = \lambda_0/a_e$. Quindi definiremo il **redshift** $z = (\lambda_e - \lambda_0)/\lambda_0$; quindi la relazione tra il redshift e il fattore di scala all'epoca di emissione é:

$$1 + z = \frac{1}{a} \quad (1.13)$$

Questa relazione é di grande importanza, in quanto lega una quantità semplice da osservare, z , con la funzione principale del fattore cosmologico di scala $a(t)$. L'interpretazione del redshift come un effetto Doppler é valida solo a brevi distanze, mentre a grandi la relazione $\partial\lambda/\lambda = v/c$ dovrebbe essere modificata a causa di effetti relativistici.

1.3 Osservabili cosmologici

Ora bisogna mostrare come mettere in relazione le definizioni cosmologiche presentate con gli osservabili astrofisici. Innanzitutto definiamo la *magnitudine* M come una funzione della *luminosità* L (energia emessa per unità di tempo) di una sorgente:

$$M = -2.5\log L + M_x \quad (1.14)$$

dove la M_x é scelta arbitrariamente e dipende dalla banda d'onda osservata. Ad esempio per il sole, $M_{sole,B}$ (dove B indica la lunghezza d'onda corrispondente al blu, circa 4400 Å) e $L_{sole} \simeq 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$. Invece, la *magnitudine apparente* m é definita come

$$m = -2.5\log f + m_{cost} \quad (1.15)$$

dove f é il flusso di energia ad una distanza comovente $d_c \equiv \chi$ dalla sorgente che, in una geometria generica, é uguale a

$$f = \frac{L_0}{4\pi r_k^2(\chi)(1+z)^2} \quad (1.16)$$

dove $r_k(\chi)$ é la funzione definita nell'Eq. 1.7. La costante m_{cost} é tale da rendere $m = 0$ per una sorgente con $f = 2.5 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, da cui segue che $m = M + 25 + 5 \log d$, dove $d = r_k(\chi)$ misurato in Mpc. Si noti che la quantità che risulta interessante é la differenza $\mu = m - M$ (anche detta modulo di distanza) proporzionale a $\log d$, che é, in pratica, una misura logaritmica di distanze.

1.3.1 La distanza di luminosità

Si definisce la **distanza di luminosità**

$$d(z) = r(z)(1+z) \quad (1.17)$$

Per definizione essa é la distanza che appare nella relazione del modulo di distanza ($m - M$) prima definito. I due fattori extra $(1+z)$ fuoriescono a causa del redshift dell'energia emessa e perché l'intervallo di tempo durante il quale é ricevuta dt_0 é a_0/a_1 volte l'intervallo di emissione dt_1 . La distanza coordinata $r(z)$ é la distanza lungo la geodetica nulla

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 dr^2 = 0 \quad (1.18)$$

Quindi in un universo piatto ($k = 0$) e usando il redshift z , si ottiene

$$r = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.19)$$

mentre in uno spazio non piatto si ha

$$r = \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} S[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}] \quad (1.20)$$

dove

$$S(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } k = 1 \\ x & \text{se } k = 0 \\ \sinh(x) & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.21)$$

Si é ottenuta una formula piuttosto generale. Infatti dato un qualsiasi modello cosmologico, si puó ottenere $r(z)$, quindi $d(z)$ ed in fine predire la magnitudine $m(z)$ che una sorgente con una data magnitudine M dovrebbe avere.

1.4 Dalle equazioni di campo di Einstein a quelle di Friedmann

Le *equazioni di campo di Einstein* sono dieci equazioni differenziali lineari del secondo ordine alle derivate parziali, aventi come incognite le componenti del tensore metrico $g_{\alpha\beta}$. Esse descrivono la geometria dello spaziotempo e la sua curvatura mettendole in relazione con la densitá di materia-energia e la pressione mediante il tensore energia-impulso, indicato con $T_{\mu\nu}$.

Le suddette equazioni, nella forma iniziale -ovvero prima dell'aggiunta della **costante cosmologica**- assumono la seguente forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.22)$$

in cui $G_{\mu\nu}$ é detto **tensore di Einstein** e G é la costante di gravitazione universale. In particolare, il tensore $G_{\mu\nu}$ é definito come segue

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.23)$$

Nella definizione 1.23 $R_{\mu\nu}$ é il **tensore di Ricci** ed R la **curvatura di Ricci**. La peculiaritá del tensore appena introdotto é che esso contiene le derivate fino al secondo ordine del tensore metrico, per cui tramite i cosiddetti *simboli di Christoffel*:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \quad (1.24)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha \equiv \partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha/\partial x^\alpha$.

Ora é possibile ricavare le equazioni di Einstein imponendo tre condizioni su $G_{\mu\nu}$:

- $G_{\mu\nu}$ deve essere un tensore e, come $T_{\mu\nu}$, deve essere simmetrico.
- Deve essere lineare nelle derivate seconde di $g_{\mu\nu}$, può contenere termini quadratici nelle derivate prime ma nessun termine lineare in $g_{\mu\nu}$.
- Dato che $T_{\mu\nu}$ soddisfa l'equazione $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, ossia deve annullarsi la sua derivata covariante¹, che per esteso corrisponde a $T_{;\nu}^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} = 0$, anche $G_{\mu\nu}$ lo deve fare.

Prima di proseguire osserviamo che la condizione $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ è detta identità di Bianchi e corrisponde ad una legge di conservazione.

1.4.1 Le equazioni di Friedmann

Nel 1922 Alexander Friedmann ricavó, a partire dalle equazioni di Einstein 1.22, e tramite la metrica FLRW, valida nell'ipotesi di omogeneità ed isotropia dell'universo, le equazioni che prendono il suo nome. Una delle caratteristiche concettuali alla base del suo modello era l'idea che l'universo non fosse statico ma piuttosto dinamico, in contrazione o in espansione in base all'andamento del fattore di scala $a(t)$. L'intuizione di Friedmann ci appare in tutta la sua portata rivoluzionaria se consideriamo che essa venne concepita in un periodo in cui era ampiamente diffusa e accettata la convinzione di un universo statico, che aveva portato persino Einstein all'introduzione di un fattore correttivo $\Lambda g_{\mu\nu}$ al primo membro delle 1.22, dove Λ é la già menzionata costante cosmologica. Le equazioni di Friedmann consistono in due equazioni differenziali ordinarie (fino al secondo ordine), dove la funzione incognita é il fattore di scala (k svolge il ruolo di parametro), che é anche l'unico grado di libertà che resta alle 1.22 una volta introdotto il principio cosmologico contenente le informazioni necessarie a conoscere la dinamica dell'universo. Una volta assunto il principio cosmologico e ricordando che nelle 1.22 $\Lambda = 0$, l'universo é rappresentabile come un fluido uniforme in cui le galassie stesse possono essere considerate come delle particelle che lo compongono.

¹La derivata covariante estende il concetto di derivata direzionale presente nell'ordinario spazio euclideo a una varietà differenziabile arbitraria.

Nel modello cosí descritto il tensore energia-impulso assume la seguente forma

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (1.25)$$

dove ρ e p corrispondono rispettivamente ad una densitá di energia e ad una pressione. Ora, data la metrica FLRW e ricordando la relazione tra il tensore metrico e i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (1.26)$$

Per $k = 0$ i simboli di Christoffel sono tutti nulli eccetto

$$\Gamma_{\mu 0}^{\alpha} = \Gamma_{0\mu}^i = H\delta_j^{\alpha} \quad (1.27)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu}^0 = a\dot{a}\delta_{\alpha\mu} \quad (1.28)$$

Ne segue che la componente temporale del tensore di Ricci risulta

$$R_{00} = -3(H^2 + \dot{H}) = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (1.29)$$

e la traccia

$$R = -\frac{6}{a^2}(a^2 + a\dot{a} + k) = -6\dot{H} - 12H^2 - 6ka^{-2} \quad (1.30)$$

A questo punto se si considera la componente (0,0) e la traccia delle equazioni di Einstein

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi\mathbf{T}_{00} \quad (1.31)$$

$$R = -8\pi\mathbf{T} \quad (1.32)$$

si ottengono le due *equazioni di Friedmann*

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.33)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (1.34)$$

a cui bisogna aggiungere l'equazione di conservazione

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (1.35)$$

In realtà le equazioni di Friedmann 1.33 e 1.34 e la legge di conservazione 1.35 sono correlate, infatti se si deriva la 1.33 rispetto al tempo e si inserisce la 1.35, si ottiene la 1.34 (ciò sembra ragionevole se si considera la discussione precedentemente trattata in merito alle equazioni di campo di Einstein, dove si chiede una legge di conservazione per $T^{\mu\nu}$). Se ne deduce che le equazioni precedentemente scritte mettono in relazione l'espansione dell'universo, la sua densità di energia totale $\rho(t)$ e la sua curvatura k , dove la ρ è una funzione del tempo perché l'universo ha visto nel tempo la formazione delle strutture e la variazione delle diverse componenti che lo costituiscono (materia barionica e materia oscura, radiazione, ed energia oscura). Si noti che nell'equazione 1.33, se si ricorda che $H = \dot{a}/a$ è riscrivibile in termini di un *parametro di densità*, $\Omega(t)$, il quale *pesa* i contributi della densità di energia totale di ogni componente presente nell'universo rispetto alla *densità critica* ρ_c , che esso avrebbe se fosse piatto (ossia $k = 0$), da cui risulta la definizione

$$\rho_c(t) = \frac{3c^2 H^2}{9\pi G} \quad (1.36)$$

e definendo, inoltre, il parametro di densità.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.37)$$

Allora l'equazione 1.33 diventa

$$1 = \Omega - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.38)$$

Ciò mostra che $k=0$ corrisponde ad un universo con una densità uguale a quella critica, cioè $\Omega = 1$. Analogamente spazi con $k=1$ corrispondono a $\Omega > 1$, mentre quelli con $k = -1$ a $\Omega < 1$. In aggiunta si può definire una componente di curvatura

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.39)$$

Quindi ad ogni epoca si ha che

$$1 = \Omega(a) + \Omega_k(a) \quad (1.40)$$

Capitolo 2

L'evoluzione dell'universo e l'energia oscura

Come affermato piú volte precedentemente, l'universo é in espansione. L'andamento nel tempo di quest'evoluzione non è stato costante ma, al contrario, é avvenuto ad un tasso variabile; infatti l'evoluzione dell'universo é correlato alla dipendenza temporale del fattore di scala $a(t)$, per cui il tasso di espansione è rappresentato dal parametro di Hubble $H(t)$. L'evoluzione dell'universo, in espansione o in contrazione, é, dunque, influenzata dalle sue componenti (materia, radiazione, energia oscura) e dal loro contributo reciproco alla composizione totale del budget energetico dell'universo. Invero, se l'universo fosse composto da sola materia ordinaria, la quale ha una pressione trascurabile e tende a raggrupparsi sotto l'azione della forza di gravità, mostrerebbe un'espansione necessariamente decelerata. Dunque, la storia dell'universo é divisibile in diverse ere di durata diversa l'una dall'altra, ognuna caratterizzata da un peculiare evento, quale -ad esempio- l'*inflazione cosmica*, o da una particolare componente energetica dominante, come nel caso delle epoche dominate dalla materia o dalla radiazione. Detto ciò, nell'analisi dell'evoluzione dell'universo, risulta fondamentale lo studio di ciascun contribuente alla massa-energia totale dell'universo accennati precedentemente; ognuno di essi è caratterizzato da diverse caratteristiche di pressione ed energia.

Vi sono due componenti costitutive dell'universo, la cui esistenza é postulabile unicamente a partire dagli effetti che esse hanno sulla sua geometria e sulla sua dinamica e non da una loro osservabilità diretta: la **materia oscura** e l'**energia oscura**. La loro esistenza é stata teorizzata recentemente per poter spiegare fenomeni che non sono interamente giustificabili mediante la sola esistenza della

materia ordinaria e della radiazione elettromagnetica.

Generalmente in cosmologia si raggruppano tutte le particelle relativistiche sotto il nome di *radiazione*, indipendentemente dalla loro massa, mentre il termine *materia* si riserva a tutte le particelle non relativistiche, comprendenti massa barionica e oscura. Una simile distinzione é attribuibile al diverso contributo dei due gruppi alla dinamica del cosmo.

2.1 L'equazione di stato

Si ricordi che le equazioni di Friedmann 1.33 1.34 e l'equazione di conservazione 1.35 formano un sistema di tre equazioni non indipendenti, perciò bisogna introdurre un'ulteriore equazione per p o ρ che sia indipendente dalle restanti equazioni e quindi sufficiente a risolvere il precedente sistema. Ora, rammentando che l'universo é idealizzabile, nelle ipotesi suddette, come un fluido perfetto, é possibile introdurre una relazione che leghi la densità di energia e la pressione di ogni componente dell'universo:

$$p = w\rho \tag{2.1}$$

La 2.1 é nota come **equazione di stato**, in cui w é una quantità costante e adimensionale che varia a seconda del tipo di massa-energia preso in considerazione. Allora é possibile scrivere la 2.1 tenendo conto del contributo di ogni singola componente:

$$p = \sum_i w_i \rho_i \tag{2.2}$$

2.1.1 L'equazione di stato per la materia

In cosmologia la *materia* indica sia la *materia ordinaria* o *luminosa*, in grado di interagire sia con il campo gravitazionale che con quello elettromagnetico, e sia un altro tipo di materia già precedentemente citato: la *materia oscura*. Quest'ultima, al contrario della prima, interagisce debolmente con il campo elettromagnetico e per cui non é osservabile direttamente; ne consegue che la sua esistenza é deducibile solo dagli effetti di carattere gravitazionale che produce sulla materia luminosa e nelle modifiche che induce nella geometria dell'universo. Il problema della

materia oscura risale agli anni '20 e '30 dello scorso secolo, ed è, insieme a quello dell' energia oscura, uno degli argomenti di più acceso dibattito della cosmologia e della fisica moderna: sono stati individuati diversi candidati compatibili con essa.

Le recenti osservazioni ed esperimentazioni suggeriscono che esistano varie categorie di materia oscura, come ad esempio quella *barionica*, detta in inglese *barionic dark matter* (da cui l'acronimo BDM), e quella fredda (o cold dark matter, CDM); a cui andrebbero aggiunti i neutrini, nel caso in cui non facessero parte della *radiazione* nel senso precedentemente specificato.

Pertanto, il parametro di densità riguardante la materia Ω_m può essere scomposto in due parametri aggiuntivi, uno associato alla materia luminosa ed un altro alla generica materia oscura:

$$\Omega_m = \Omega_{Lum} + \Omega_{DM} \quad (2.3)$$

Nell'ipotesi non relativistica , e nell'idealizzazione di fluido perfetto, la componente dell'universo in esame è approssimabile ad un fluido a pressione nulla, infatti è composta da particelle aventi una velocità media $v \ll c$, allora

$$p = nmv^2 \ll nmc^2 = \rho \quad (2.4)$$

da cui segue l'approssimazione che porta la 2.1 a trasformarsi in

$$p = 0 \quad (2.5)$$

Quindi da 1.35 segue

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a} \quad (2.6)$$

che, una volta risolta e posto $a_0 = 1$, fornisce $\rho = \rho_0 a^{-3}$, la quale se riscritta in termini di redshift, corrisponde a $\rho = \rho_0 (1 + z)^3$. Infine dalla definizione di Ω_m a partire dalla densità critica ρ_c , l'ultima equazione diventa

$$\rho = \rho_{c,0} \Omega_{m,0} (1+z)^3 \quad (2.7)$$

in cui le grandezze con pedice 0 rappresentano i valori da esse assunte all'epoca presente. Assumendo uno spazio piatto, ossia con $k = 0$. La densità presente ρ_0 è legata alla costante di Hubble dalla relazione

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_0 \quad (2.8)$$

da cui la 1.33 diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 a^{-3} = H_0^2 a^{-3} \quad (2.9)$$

la quale, una volta integrata, restituisce l'andamento temporale del fattore di scala che è pari a $a \sim t^{\frac{2}{3}}$.

2.1.2 L'equazione di stato per la radiazione

Si consideri un gas fotonico distribuito come un corpo nero, esso ha una pressione uguale a

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (2.10)$$

in particolare la relazione precedente consiste proprio nell'equazione di stato per particelle relativistiche, da cui si deduce che $w = 1/3$. Allora è possibile riscrivere la 1.35 come

$$\dot{\rho} = -4H\rho = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (2.11)$$

da cui, risolvendo e tenendo conto che $\Omega_r = \rho_r/\rho_c$ e $a^{-1} = 1+z$, si ottiene

$$\rho_\gamma = \rho_{r,0}a^{-4} = \rho_{c,0}\Omega_\gamma(1+z)^4 \quad (2.12)$$

dove il pedice γ denota la componente radiativa. La densità di radiazione si attenua come a^{-3} a causa dell'espansione volumica e come a^{-1} per il redshift dell'energia.

Per valutare la densità di radiazione presente, si ricordi che un gas fotonico in equilibrio con la materia ha una densità di energia (prendiamo $\hbar = c = 1$)

$$\rho_\gamma = \frac{g}{2\pi^2} \int \frac{E^3 dE}{e^{E/T} + 1} = \frac{g\pi^2}{30} T^4 \quad (2.13)$$

dove T é espresso in unità di energia e g sono i gradi di libertà delle particelle relativistiche ($g=2$ per i fotoni). Dato che $\rho_\lambda \sim a^{-4}$, la temperatura di radiazione scala come $T \sim 1/a$. Ad oggi si misura $T \approx 3K \approx 10^{-13} Gev = 1.38 \times 10^{-23} JK^{-1}$, da cui si ottiene

$$\rho_{\gamma,0} = g \times 2.3 \times 10^{-34} gcm^{-3} \quad (2.14)$$

che é molto piú piccolo della densità di materia presente. Dagli andamenti della materia e della radiazione:

$$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3} \quad (2.15)$$

$$\rho_\gamma = \rho_\gamma a^{-4} \quad (2.16)$$

si può ora definire l'epoca di equivalenza a_e per cui $\rho_\gamma = \rho_m$

$$a_e = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{m,0}} = \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_m} \quad (2.17)$$

dato che $\Omega_\gamma = \rho_\lambda/\rho_{crit} \simeq 4.15 \times 10^{-5} h^{-2}$ segue che l'equivalenza é verificata ad un redshift

$$1 + z_e = a_e^{-1} = (4.15 \times 10^{-5})^{-1} \Omega_m h^2 = 24,000 \Omega_m h^2 \quad (2.18)$$

Ponendo $\Omega_c = 0.3$ e $h = 0.7$, si ottiene $z_e \approx 3500$

2.1.3 L'equazione di stato per una generica componente e le equazioni generali di Friedmann

É ormai evidente che un qualsiasi fluido con un'equazione di stato del tipo

$$p = w\rho \quad (2.19)$$

scala come

$$\rho \sim a^{-3(1+w)} \quad (2.20)$$

e nel caso particolare di universo piatto ($k = 0$) e nell'ipotesi in cui il fluido sia la componente dominante nell'equazione di Friedmann, il fattore di scala evolve come

$$a \sim t^{2/3(1+w)} \quad (2.21)$$

Alla luce di quanto visto nei paragrafi precedenti si può riscrivere l'equazione di Friedmann 1.33 specificando le singole componenti:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_m a^{-3} + \rho_\gamma a^{-4} + \rho_k a^{-2}) = H_0^2(\Omega_m a^{-3} + \Omega_\gamma a^{-4} + \Omega_k a^{-2}) \quad (2.22)$$

dove, come già discusso in precedenza, Ω_i denota la densità presente di diverso tipo i , per cui vale che $\sum_i \Omega_i$. Quindi una volta nota la relazione tra il fattore di scala a e la sua densità di energia- ρ_i - é possibile aggiungere qualsiasi componente alla suddetta relazione.

2.2 Andamenti qualitativi

In tutti i casi discussi innanzi si é avuto sempre $\rho + 3p > 0$. Dunque dalla 1.34 segue che $\ddot{a} < 0$, che é un andamento decelerato ad ogni tempo. Allora possiamo affermare che:

- il fattore di scala deve essere nullo a un certo tempo t_{sing} nel passato
- la traiettoria con $\dot{a} = const, \ddot{a} = 0$ é quella con velocità minima nel passato.

Dalla considerazione per cui $\dot{a} = const$, segue la legge oraria:

$$a(t) = a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) \quad (2.23)$$

e si può derivare che il tempo $T = t_0 = a_0/\dot{a}_0 = H_0^{-1}$ necessario per l'espansione affinché vada da $a = 0$ a $a = a_0$ é il tempo massimo. Quindi H_0^{-1} é l'età massima dell'universo per tutti i modelli in cui si ha $\rho + 3p > 0$. Il modello descritto é noto come universo di Milne e può essere ottenuto dalla 2.22 per $\Omega_m = \Omega_\gamma = 0$, che comporta $\Omega_k = 1$. Inoltre é possibile ricavare una stima dell'età massima dell'universo [1]:

$$H_0^{-1} = \frac{sec \cdot Mpc}{100hkm} = 9.97Gyr/h \quad (2.24)$$

2.3 La costante cosmologica

Se si volesse ottenere un'età cosmica piú grande di H_0^{-1} , si dovrebbe violare la cosiddetta "condizione di energia forte": $\rho + 3p > 0$. L'esempio piú importante di un caso del genere é quello della *costante cosmologica*. Si consideri il tensore energia-impulso, $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$, esso risulta fissato per gli osservatori che sono comoventi con l'espansione, invece ogni altro osservatore vedrá un contenuto diverso di energia/pressione. In ogni caso esiste un caso in cui ogni osservatore vede esattamente lo stesso tensore energia-impulso: ciò accade quando $\rho = -p$, a cui corrisponde $T^{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu}$. La condizione di conservazione implica che $\rho_{,\mu} = 0$ o $\rho = costante$. In virtù di quanto detto segue il tensore:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{81\pi} g_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

dove Λ , la *costante cosmologica*, é indipendente dal moto dell'osservatore. Dunque, questa condizione caratterizza uno spazio vuoto, ossia uno spazio senza particelle reali. Il tensore poc'anzi definito $T_{\mu\nu}$ é noto come **energia del vuoto**.

Ora si ha

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi} \quad (2.26)$$

che corrisponde all'equazione di stato $w = p/\rho = -1$.

2.4 L'energia oscura

All'alba del XXI secolo si manifestarono i primi segni di una svolta sostanziale nella comprensione dell'universo grazie a due squadre indipendenti di cosmologi, guidati da Saul Perlmutter negli USA per il Supernova Cosmology Project, e da Brian Schmidt in Australia per l'High-Z Supernovae Search Team: tramite l'osservazione delle Supernovae di tipo Ia sulle distanze più remote, infatti, evidenziarono che l'espansione dell'universo stava procedendo con una velocità crescente. Dopo queste prime indicazioni della dinamica accelerata dell'universo attuale, altre indagini indipendenti hanno contribuito a confermare in maniera definitiva questo risultato, che ha valso, nel 2011, il premio Nobel per la Fisica a Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt e Adam G. Riess. Un risultato di tale portata rivoluzionaria ha costretto a rivedere anche quanto si dava per acquisito fino ad allora, dando un notevole impulso per lo sviluppo di molti nuovi modelli, tra i quali quelli di cosiddetta energia oscura, il nuovo ingrediente cosmico ipotizzato come responsabile dell'evoluzione accelerata dell'universo l'**energia oscura**. Sebbene ignoriamo la natura di questo misterioso componente del fluido cosmico, sappiamo che, per poter governare l'accelerazione, essa deve essere dotata di una pressione negativa che si contrappone alla forza gravitazionale, e che contribuisce a circa il 70% dell'energia totale dell'universo [5]. Si può inoltre ipotizzare che la densità dell'energia oscura nelle epoche passate fosse di gran lunga inferiore al valore attuale; infatti nell'epoca dominata dalla materia, la formazione di strutture su grande scala ne implica la trascurabilità rispetto al peso della componente dominante. In realtà tale ipotesi non risulterebbe necessaria se esistesse un qualsiasi accoppiamento tra l'energia e la materia oscura, in modo da conferire alla prima un ruolo attivo anche nelle ere precedenti. In particolare, tramite osservazioni di ammassi di galassie è possibile individuare delle limitazioni per l'intensità dell'accoppiamento. In aggiunta, mentre la densità di energia della materia oscura evolve come $\rho_m \sim a^{-3}$, la densità di energia oscura, nel caso in cui essa sia descritta dalla costante cosmologica Λ è approssimativamente costante nel tempo (ha un

andamento del tipo $\rho_{de} \sim a^{-n}$, con n prossimo allo zero). In fisica delle particelle, la costante cosmologica appare come un'energia del vuoto, e il valore teoricamente previsto per essa é $\rho_{vuoto} \approx 10^{74} GeV^4$, che risulta molto piú grande del valore osservato oggi, tramite le osservazioni del diagramma di Hubble per le SnIa, ossia $\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2/8\pi G \approx 10^{-47} GeV^4$. Bisogna anche notare che se nel passato l'energia del vuoto avesse assunto il valore suddetto per ρ_{vuoto} , l'universo sarebbe entrato in una fase di accelerazione cosmica eterna dagli istanti iniziali, precludendo cosí l'esistenza delle epoche della radiazione e della materia descritte dal modello cosmologico standard. Allora é necessario individuare un meccanismo dinamico, tale da ottenere un valore attuale piccolo per Λ , consistente con le osservazioni. L'equazione di stato dell'energia oscura, $w_{de} = p_{de}/\rho_{de}$, é una relazione utile per descrivere e verificare le proprietá dell'energia oscura ottenute dai vari modelli in modo da scegliere quelli validi. Ad esempio per la costante cosmologica, si ha $p_{de} = -\rho_{de}$, che implica $w_{de} = -1$, mentre in altri modelli succede che w_{de} vari nel tempo. Dunque un primo tentativo per l'analisi della dark energy é verificare l'esistenza di possibili allontanamenti di w_{de} dal valore -1 per determinare se essa sia identificabile con la costante cosmologica. Dall'analisi congiunta di diversi dati osservativi conduce a valori per w_{de} nell'intervallo

$$-1.097 < w_{de} < -0.858, \quad (2.27)$$

dove si é assunta un'equazione di stato costante per l'energia oscura.

2.4.1 L'equazione di stato per l'energia oscura

Si ricordi l'equazione di stato per l'energia oscura, la quale soddisfa l'equazione di conservazione 1.35:

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = \dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{de}(1 + w_{de}) = 0 \quad (2.28)$$

integrando la seconda uguaglianza e sfruttando la relazione $dt = -dz/[H(1+z)]$, si ottiene

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} e^{\int_0^z \frac{3(1+w_{de})}{1+z'} dz'} \quad (2.29)$$

in cui si sta considerando w_{de} come una funzione del tempo o, equivalentemente, del redshift z . Introducendo \hat{w}_{de} , valore medio di w_{de} si può riscrivere l'ultima equazione come

$$\hat{w}_{de} = \frac{1}{\ln(1+z)} \int_0^z \frac{w_{de}(z')}{1+z'} dz' \quad (2.30)$$

da cui segue che

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} a^{3(1+\hat{w}_{de})} \quad (2.31)$$

Adesso se si considera anche il contributo dell'energia oscura, é semplice verificare che la 2.22 può risciversi come

$$H^2(z) = H_0 [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0} e^{\int_0^z \frac{3(1+w_{de})}{1+z'} dz'} + \Omega_{k,0}(1+z)^2] \quad (2.32)$$

dove bisogna ricordare che gli $\Omega_{i,0}$ obbediscono alla relazione

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{de,0} + \Omega_{k,0} = 1 \quad (2.33)$$

Definendo $E(z) \equiv H(z)/H_0$ e derivando la 2.32 rispetto alla variabile z , si ottiene l'espressione per l'equazione di stato dell'energia oscura

$$w_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2}{3[E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{k,0}(1+z)^2]} \quad (2.34)$$

in cui l'apice primo (') rappresenta una derivata rispetto a z ; si può dimostrare, anche, che nel caso di un universo piatto (in cui $\Omega_{k,0} = 0$, la quantità $E(z)$ si può scrivere in termini della distanza luminosa d_L come

$$E(z) = \frac{c}{H_0} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1} \quad (2.35)$$

Quindi, una volta misurata la distanza luminosa, si può determinare l'evoluzione di $E(z)$ e da questa risolvere la 2.34 e ottenere w_{de} . Le limitazioni sulla curvatura dell'universo derivante dai dati provenienti dalle osservazioni impongono che $-0.0175 < \Omega_{k,0} < 0.0085$, suggeriscono che l'universo goda di una geometria approssimativamente piatta. Perciò, nell'approssimazione di universo piatto, il contributo della densità di energia della radiazione risulta trascurabile (ossia per $z \leq 1$, con $\Omega_{r,0} \approx 0.005$), la 2.34 diventa

$$w_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E(z)}{3[E^2(z) - \Omega_{m,0}(1+z)^3]} \quad (2.36)$$

La 2.36 è spesso usata per stabilire delle limitazioni all'equazione di stato dell'energia oscura, per cui il contributo della curvatura cosmica è trascurabile solo per $z \leq 1$, mentre per $z \geq 1$ può produrre variazioni significative in w_{de} . Come discusso precedentemente, w_{de} può assumere valori in un intervallo limitato $[-1, -0.8]$, da cui risulta possibile anche il caso

$$p_{de} + \rho_{de} < 0 \quad (2.37)$$

il quale, in virtù dell'equazione di conservazione 1.35, implica una ρ_{de} crescente nel tempo e, per un universo piatto, comporta un'evoluzione temporale per il fattore di scala del tipo

$$a \propto (t_{rip} - t)^{\frac{2}{3}(1+w_{de})^{-1}} \quad (2.38)$$

dove t è minore della costante t_{rip} . Ne segue che per t che tende al valore assunto da t_{rip} , il fattore di scala tende all'infinito: l'universo, allora, termina nel futuro in un tempo finito con una singolarità detta *singolarità di grande strappo*.

Capitolo 3

La distanza di Dyer-Roeder ed il parametro di clumpiness

Finora si é analizzato un modello di universo omogeneo ed isotropo, che risulta vero, in accordo con il *principio cosmologico*, su scale sufficientemente grandi, come quelle dei *superammassi*; mentre se si scende a scale inferiori (come ammassi o galassie), si incontra una caratteristica del cosmo di cui non si é ancora discusso: la *disomogeneità locale*. In questa sezione vogliamo analizzare l'effetto di disomogeneità lungo la linea di vista sulla propagazione della luce e, quindi, sulla misura della distanza di luminosità e del diagramma di Hubble.

Si consideri un fascio di luce emesso da una sorgente S in una geometria piatta FLRW ($c = 1$). Partendo dalle equazioni di Sachs (che non verranno riportate), si ottiene un'equazione differenziale per la radice dell' area della sezione trasversale del fascio di luce:

$$\sqrt{A}'' + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \sqrt{A} = 0 \quad (3.1)$$

in cui la derivata seconda é effettuata rispetto al parametro affine v che descrive la geodetica nulla, $R_{\mu\nu}$ é il tensore di Ricci e $k^\mu = dx^\mu/v$ é il vettore tangente alla geodetica nulla lungo la quale si propagano i raggi di luce. Poichè la distanza di diametro angolare D_A é proporzionale a \sqrt{A} ,esplicitando il parametro affine in una metrica FLRW, possiamo riscrivere l'equazione (3.1) usando D_A invece che \sqrt{A} :

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^2 D}{dz^2} + \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right) \frac{dD}{dz} + \frac{3}{2} \Omega_m (1+z)^5 = 0. \quad (3.2)$$

Al fine di tener conto di una distribuzione realistica di materia lungo la linea di vista Dyer e Roeder introdussero un parametro fenomenologico α , per cui l'equazione precedente può essere riscritta nella forma **di Dyer-Roeder** ([6]) per la distanza di diametro angolare:

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^2 D}{dz^2} + \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right) \frac{dD}{dz} + \frac{3}{2} \alpha \Omega_m (1+z)^5 = 0. \quad (3.3)$$

Il parametro α è detto *parametro di disomogeneità o di clumpiness*. Per ogni valore di z , quantifica la porzione di materia addensata (ρ_{cl}) rispetto a quella distribuita uniformemente (ρ_m):

$$\alpha(z) = 1 - \frac{\rho_{cl}}{\langle \rho_m \rangle} \quad (3.4)$$

Nella versione originale ([6]) α è una costante; tuttavia successivamente sono state elaborate estensioni dell'approccio di Dyer e Roeder, che prevedono un α dipendente dal redshift, z , come, per esempio (si consulti [4]):

$$\alpha(z) = \frac{\beta_0 (1+z)^{3\gamma}}{1 + \beta_0 (1+z)^{3\gamma}}. \quad (3.5)$$

Nell'equazione (3.11) β_0 e γ sono due costanti. Inoltre si noti che la quantità $\alpha_0 = \beta_0 / (1 + \beta_0)$ è il valore attuale di $\alpha(z)$.

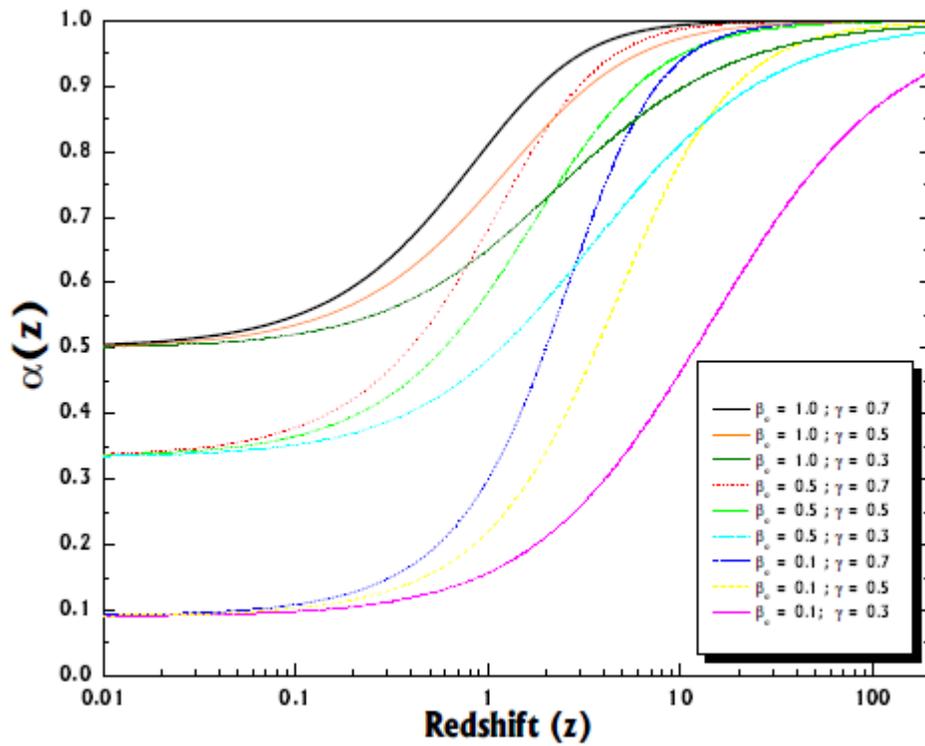


Figura 3.1: il parametro di disomogenità come funzione del redshift per certi valori di β_0 e di γ

In Figura 3.1 tutte le curve si avvicinano al fascio saturo ($\alpha = 1$) per grandi valori del redshift, indipendentemente dai valori di β_0 e γ . Bisogna evidenziare che per un dato β_0 le curve iniziano nello stesso punto ma il tasso di avvicinamento dipende dal parametro γ .

Solitamente le distanze cosmologiche si misurano in unità di c/H_0 , introducendo la **distanza di Dyer-Roeder** $r = DH_0/c$ ed usando la 3.3 si ottiene

$$\begin{aligned} & [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda] \frac{d^2 r}{dz^2} + \left(\frac{7}{2} \Omega_m(1+z)^3 + 3\Omega_k(1+z)^2 + 2\Omega_\Lambda \right) \frac{dr}{dz} \\ & + \frac{3}{2} \alpha \Omega_m (1+z)^2 r = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

con le condizioni iniziali :

$$r(z)|_{z=0} = 0, \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{dr(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1 \quad (3.8)$$

La suddetta equazione può essere riscritta anche usando $a = R(t)/R_0$, dove $R(t)$ é il fattore di scala, al posto di z

$$a^2(\Omega_m + \Omega_k a + \Omega_\Lambda a^3) \frac{d^2 r}{da^2} - a \left(\frac{3}{2} \Omega_m + \Omega_k a \right) \frac{dr}{da} + \frac{3}{2} \alpha \Omega_m r = 0 \quad (3.9)$$

oppure usando il tempo cosmico t come parametro, la 3.3 assume la forma

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - H(t) \frac{dr}{dt} - 4\pi G \alpha \rho_m(t) r = 0 \quad (3.10)$$

Se si considera come esempio il caso in cui $\Omega_\Lambda = 0$ e $\Omega_k = 0$, ovvero di un universo piatto di Einstein-de Sitter, é si può vedere che per l'equazione di Dyer-Roeder esiste una semplice soluzione analitica:

$$r(z) = \frac{(1+z)^\beta - (1+z)^{-\beta}}{2\beta(1+z)^{\frac{5}{4}}}, \quad \beta = \frac{1}{4} \sqrt{25 - 24\alpha}. \quad (3.11)$$

D'ora in poi si prenderá in esame, muovendosi verso uno studio piú generico, il **modello Chevalier-Polarski-Linder**, o ,equivalentemente, **CPL**, che utilizza per l'energia oscura una parametrizzazione della forma:

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (3.12)$$

dove w_0 e w_1 sono numeri reali che rappresentano, rispettivamente, il valore attuale di w per l'equazione di stato dell'energia oscura e la sua generica evoluzione temporale. Si noti che per grandi valori di redshift, si ha una relazione del tipo:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w_{CPL} = w_0 + w_1 \equiv w_i \quad (3.13)$$

la quale permette di descrivere diversi modelli per la dark energy e mostra come la parametrizzazione introdotta costituisca un buon compromesso per procedere ad un'analisi che sia indipendente dal modello adottato. Per un modello di universo piatto con equazione di stato dell'energia oscura CPL si ha che

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1 - \Omega_m) e^{-\frac{3w_0 z}{z+1}} (z+1)^{3(w_0+w_0+1)} + (z+1)^3 \Omega_m}, \quad (3.14)$$

e l'equazione di Dyer-Roeder per la distanza di diametro angolare diventa:

$$\begin{aligned} & (z+1)^2 r''(z) \left((1 - \Omega_m) e^{-\frac{3w_1 z}{z+1}} (z+1)^{3(w_0+w_1+1)} + (z+1)^3 \Omega_m \right) + (z+1) r'(z) \times \\ & \left[\frac{3}{2} (z+1)^2 \left((z+1) \Omega_m - (\Omega_m - 1) e^{-\frac{3w_1 z}{z+1}} (z+1)^{3(w_0+w_1)} ((w_0 + w_1 + 1) z + w_0 + 1) \right) \right. \\ & \left. + 2 \left((1 - \Omega_m) e^{-\frac{3w_1 z}{z+1}} (z+1)^{3(w_0+w_1+1)} + (z+1)^3 \Omega_m \right) \right] \\ & + \frac{3}{2} \alpha (z+1)^3 \Omega_m r(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

con le condizioni iniziali :

$$r(z)|_{z=0} = 0, \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{dr(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1. \quad (3.17)$$

Nota la distanza di diametro angolare possiamo ricavare la distanza di luminosità tramite la cosiddetta relazione di Etherington:

$$D_L = (1+z)^2 D_A, \quad (3.18)$$

e quindi il modulo di distanza $\mu = 25 + 5 \log D_L$.

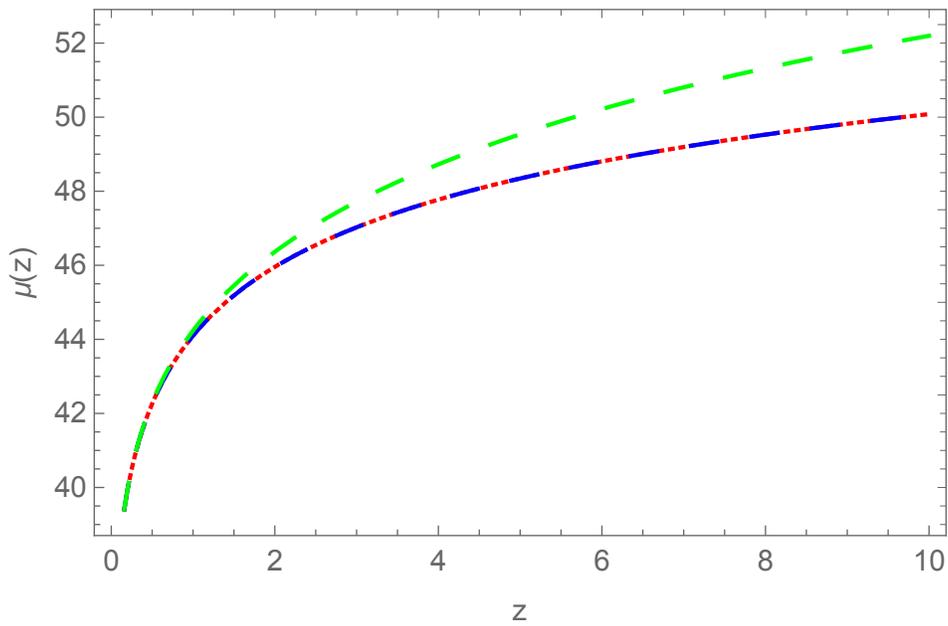


Figura 3.2: Modulo di distanza in un modello Λ CDM con $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.7$, in funzione di z per due valori del parametro di clumpiness: $\alpha = 0$ (curva verde) e $\alpha = 1$ (curva rossa e blu), che corrisponde ad un universo omogeneo ed isotropo.

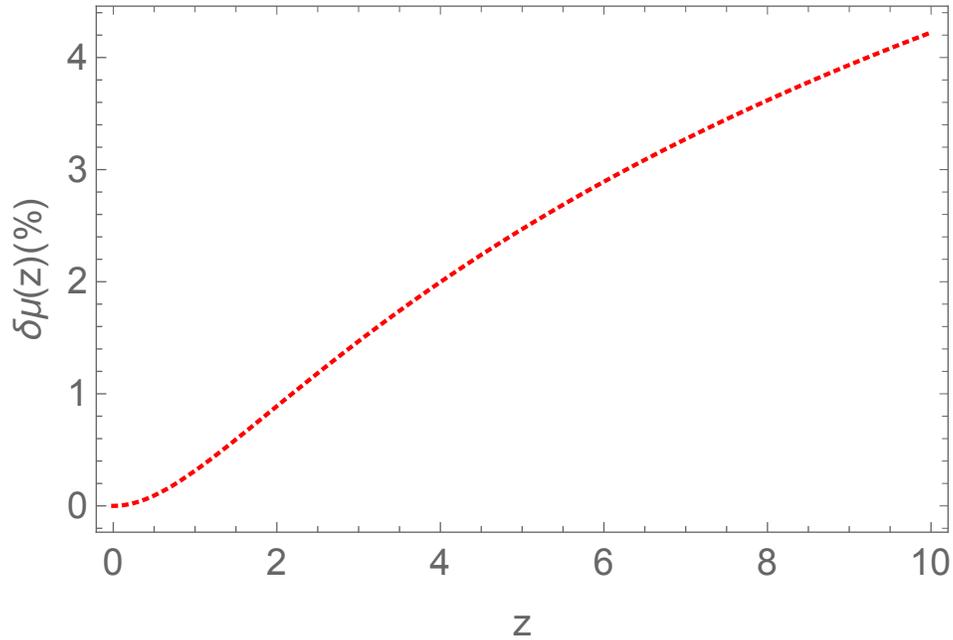


Figura 3.3: Variazione relativa del modulo di distanza di un universo in cui la materia è tutta clusterizzata ($\alpha = 0$), rispetto ad un universo omogeneo ed isotropo ($\alpha = 1$) in un modello Λ CDM con $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.7$.

Nelle Figg. (3.2)e (3.3) confrontiamo l'andamento del modulo di distanza in un modello Λ CDM con $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.7$, in funzione di z per due valori del parametro di clumpiness: $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. È interessante notare che la differenza tra un universo omogeneo ed uno localmente disomogeneo è osservabile soprattutto ad alto redshift ($z \geq 2$), per cui risulta cruciale individuare dei probes cosmologici che permettano di esplorare questa regione dell'universo.

3.1 Soluzioni esatte dell'equazione di Dyer-Roeder

Nella presente sezione con l'ausilio delle equazioni della classe di Fuchs (si consulti l'appendice), é possibile risolvere l'equazione di Dyer-Roeder in maniera esatta [6]:

$$(1+z)[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda] \frac{d^2r}{dz^2} + \left(\frac{7}{2}\Omega_m(1+z)^3 + 3\Omega_k(1+z)^2 + 2\Omega_\Lambda \right) \frac{dr}{dz} + \frac{3}{2}\alpha\Omega_m(1+z)^2 r = 0 \quad (3.19)$$

con le condizioni iniziali :

$$r(z)|_{z=0} = 0, \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{dr(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1 \quad (3.21)$$

Ora é semplice individuare i coefficienti $p(z)$ e $q(z)$, dell'equazione di Fuchs 5.2, nell'equazione di Dyer-Roeder 3.20:

$$p(z) = \left(\frac{7}{2}\Omega_m(1+z)^3 + 3\Omega_k(1+z)^2 + 2\Omega_\Lambda \right) \quad (3.22)$$

$$q(z) = \frac{3}{2}\alpha\Omega_m(1+z)^2 \quad (3.23)$$

In alcuni casi specifici è possibile mostrare che l'equazione di Dyer-Roeder ammette soluzioni esatte: in particolare in alcuni casi vengono soddisfatte le condizioni affinché l'equazione sia Fuchsiana (5.10). Si prenda in esame il modello Λ CDM paitto, in cui $\Omega_k = 0$, in tal caso Ω_m e Ω_Λ non sono piú indipendenti, ma $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ é possibile dividere la 3.11 per Ω_m e si trasforma in

$$a^2(1 + \mu a^3) \frac{d^2 r}{da^2} - \frac{3}{2} a \frac{dr}{da} + \frac{3}{2} \alpha r = 0 \quad (3.24)$$

dove $\mu = \Omega_\Lambda / \Omega_m$.

Per risolvere una siffatta equazione nel caso in cui $\mu = 0$, si cercano soluzioni della forma a^s , che inserendola nella 3.24 dá

$$2s^2 - 5s + 3\alpha = 0 \quad (3.25)$$

che ammette le soluzioni:

$$s_\pm = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{25 - 24\alpha} = \frac{5}{4} \pm \beta, \quad (3.26)$$

$$\beta = \frac{1}{4} \sqrt{25 - 24\alpha} \quad (3.27)$$

ora se si scrive la soluzione generale in termini di z al posto di a ed imponendo le ben note condizioni iniziali, si ritrova la soluzione 3.11.

Capitolo 4

Stima dei parametri cosmologici tramite l'utilizzo dei GRB

Nel capitolo 2 si é discusso dell'espansione dell'universo, e della transizione da una fase accelerata, caratteristica dell'era dominata dall'energia oscura, ad un'evoluzione decelerata, caratteristica di una fase dominata dalla materia, intorno ad un valore del redshift di $z \cong 1$. In corrispondenza di tale passaggio, i modelli teorici prevedono una variazione nell'equazione di stato dell'energia oscura. Se si vuole trovare evidenze sperimentali di questa previsione, risulta necessario spingersi a z piú alti di quelli sondati tramite le supernove: i **Gamma Ray Burst** (GRB) si presentano come ottimi candidati per studiare in dettaglio la dinamica dell'universo fino a $z \simeq 10$. Peraltro, abbiamo già osservato che è proprio in questo intervallo di redshift ($z \geq 2$) che gli effetti della disomogeneità locale nella distribuzione di materia è più evidente, e può, invero, essere rivelata (vedi fig. 3.3).

4.1 Gamma Ray Burst

I lampi Gamma o Gamma Ray Bursts (GRBs) sono esplosioni violente ma molto brevi in cui vengono rilasciate ingenti quantità di energia sotto forma di fotoni gamma seguite spesso da un'emissione prolungata di raggi X, detta **afterglow** (in realtà l'emissione che caratterizza l'afterglow è visibile fino all'ottico e, in alcuni casi, al radio). Le prime evidenze sperimentali dell'esistenza di queste straordinarie sorgenti astrofisiche risalgono al periodo della guerra fredda (grazie al satellite Vela); tuttavia le prime osservazioni non permisero misure significativamente pre-

cise, in quanto le esplosioni gamma erano troppo brevi affinché fosse possibile localizzarle con esattezza. Per avere le informazioni sul redshift a cui si trovavano fu necessario attendere il lancio del satellite *BeppoSAX* nel 1997, il quale grazie ai raggi X poteva studiare l'afterglow e ricavare indicazioni sulla distanza. Fu infine grazie al lancio del satellite Swift nel 2004, dotato di un rapido sistema di puntamento, osservare anche i GRB di durata più breve, con relativo afterglow, raccogliendo una media di un centinaio di eventi l'anno, per circa un terzo dei quali è possibile ricavare il redshift. Dai dati emersi si nota che la distribuzione dei GRB è isotropa attorno a noi. Le caratteristiche principali sono un'altissima energia rilasciata che, supponendo un'emissione isotropa, va dai 10^{48} ai 10^{54} erg, con una luminosità altamente variabile anche su scale inferiori ai 10^{-3} s. Lo spettro energetico va in genere dai KeV al centinaio di MeV ma può arrivare fino ai GeV in alcuni casi; è di tipo non termico ed è empiricamente ben descritto da una legge di potenza, chiamata *Band function*:

$$N(\epsilon) = \epsilon^{-\alpha} \quad (4.1)$$

dove $N(\epsilon)$ è la funzione di distribuzione energetica degli elettroni; che presenta uno spettro particolare in cui si ha un indice diverso all'esponente prima e dopo l'energia $\epsilon_0 \cong 1$ MeV (detta energia di *rollover*)

$$\alpha \cong \begin{cases} 1 & \text{per } \epsilon < \epsilon_0 \\ 2 & \text{per } \epsilon > \epsilon_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Le curve di luce emesse dalle singole sorgenti, invece, sono molto variabili e a seconda dell'evento, possono essere sia piatte che presentare molti picchi come mostrato nei grafici in Figura 4.1

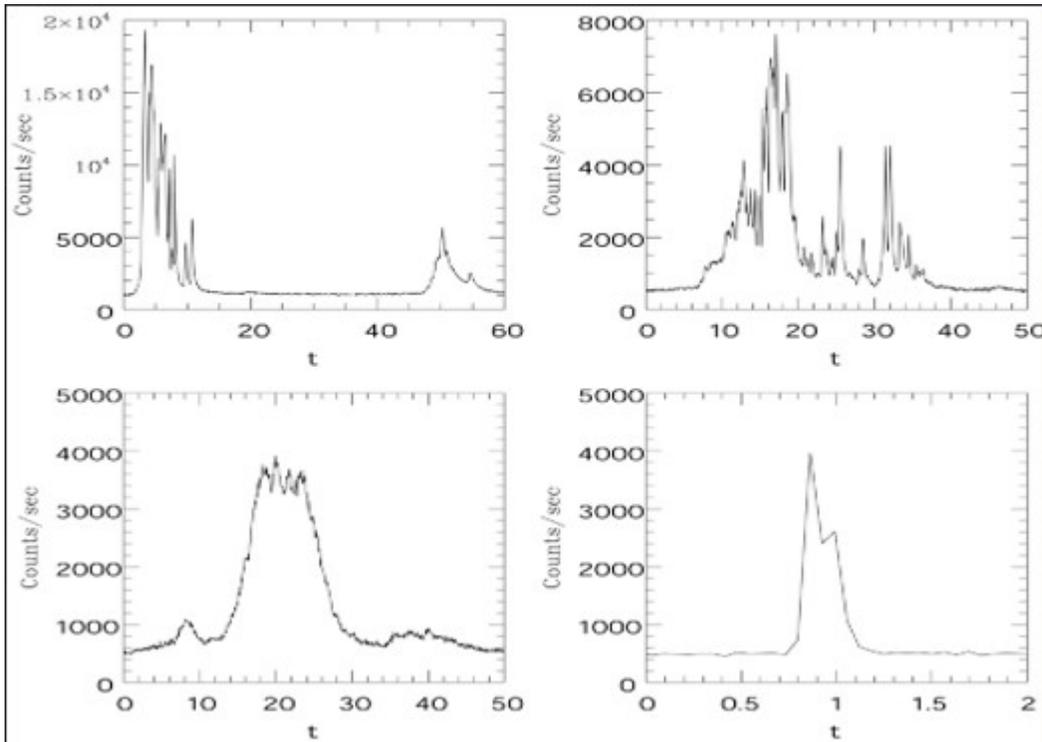


Figura 4.1: Esempi di curve di luce dei GRB registrate tramite gli strumenti BA-TSE del Compton Gamma Ray Burst Observatory

I GRBs possono essere divisi in due categorie principali, a seconda della durata dell'emissione gamma (il cosiddetto prompt):

- gli short GRBs che hanno una durata dell'ordine di qualche secondo o frazione di secondo;
- i long GRBs che hanno una durata maggiore di $2s$, fino a qualche centinaio di secondi.

4.2 Utilizzo dei GRB come indicatori di distanza

I dati sulle supernove sono perfettamente in accordo con il modello λ CDM. Però essi sono caratterizzati da redshift $z < 2$, mentre per testare la possibilità che ω_0 vari con z sono necessarie misure a redshift maggiori. Invece i GRB sono visibili

fino a $z \approx 10$, il che li rende degli ottimi candidati per lo scopo prefissato. Indichiamo con S_{bolo} la *fluenza bolometrica*, che é una quantità direttamente osservabile ¹. Quindi dall'energia totale emessa nel modello isotropo E_{iso} é possibile risalire alla distanza di luminosità tramite le relazioni:

$$E_{iso} = 4\pi \frac{D_L^2(z, c_p)}{1+z} S_{bolo} \quad (4.3)$$

dove con c_p indica l'insieme dei parametri cosmologici da cui dipende il modello usato per definire D_L . Allora dalla 4.3 é possibile ricavare

$$D_L^2(z, c_p) = \frac{1}{4\pi} \frac{(1+z)}{S_{bolo}} E_{iso} \quad (4.4)$$

Se tutte le quantità a secondo membro fossero misurabili dai dati dei GRBs sarebbe allora possibile trovare una stima sperimentale della distanza di luminosità da confrontare con quella ottenuta dai modelli teorici per determinare i parametri cosmologici c_p da cui dipendono. D'altronde, come già detto in precedenza, l'energia emessa da un GRB varia su scale anche di vari ordini di grandezza e ciò fa sí che essi non siano affatto candele standard. Dunque, nonostante S_{bolo} sia una quantità misurabile, non si può dire lo stesso per la luminosità intrinseca L_I e l'energia totale irradiata E_{iso} . Nasce, quindi, un problema circolare che impedisce di usare i GRB e di conseguenza l'energia totale irradiata come strumento per la ricerca dei parametri cosmologici, dato che essa stessa dovrebbe essere ricavata da questi. Il problema é risolto tramite delle correlazioni sperimentali di L_I e E_{iso} con quantità direttamente osservabili come, ad esempio, la luminosità di picco E_p , che é definita cosí: detto F_ν il flusso per unità di frequenza ν , se si grafica lo spettro νF_ν in funzione dell'energia, come mostrato nella Figura 4.2 si vede che, in generale, esso mostra un picco e l'energia a cui si osserva é detta E_p . Allora si definisce l'energia di picco nel sistema di riferimento a riposo dell'emettitore $E_{p,i}$

$$E_{p,i} = E_p(1+z) \quad (4.5)$$

¹si definisce la fluenza come il numero di particelle (o fotoni) incidenti sull'unità di superficie di un corpo irraggiato.

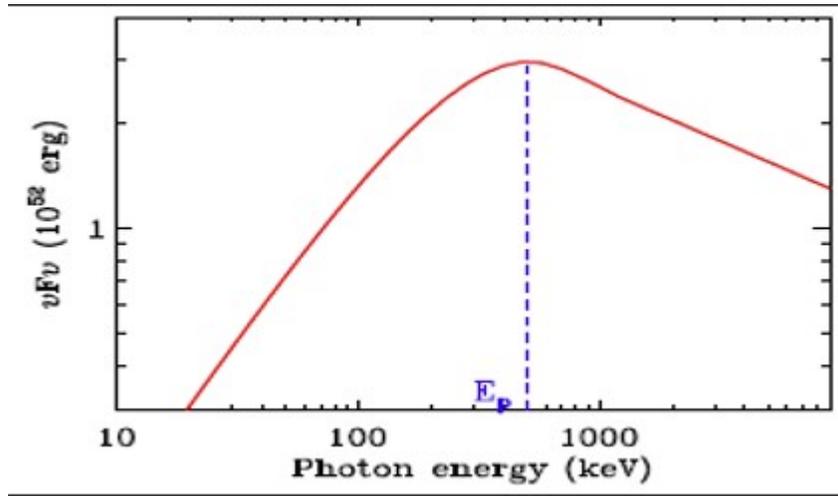


Figura 4.2: Tipico spettro νF_ν in funzione dell'energia rivelato per un GRB

Nel 2002 tramite i dati forniti dal satellite *BeppoSAX* si osservó ad una correlazione tra $E_{p,i}$ e E_{iso} , che presentava una forma del tipo

$$\log E_{p,i} = a \log E_{iso} + b \quad (4.6)$$

che prende il nome di **relazione di Amati**, dove a e b rappresentano i soli due parametri della relazione ed é possibile stimarli fittando i dati sperimentali. La suddetta correlazione, che é stata confermata con i dati forniti da rivelatori diversi, risulta valida solo per i long GRBs ma non per gli short. Si pensa che il motivo di questa peculiaritá sia dovuta al differente meccanismo di emissione a shell che differenzia i due tipi di GRB. Inoltre si é notato che le stime ottenute per a e b , eccetto per variazioni marginali, risultano indipendenti dal redshift. Dunque a partire dalla relazione (4.6) e grazie all'aumento del numero di dati, dovuto alla maggior efficacia con cui oggi vengono scoperti i GRB, hanno reso l'errore intrinseco minimo; in aggiunta questa relazione presenta il grande vantaggio di dipendere solo dai due parametri a e b e non necessita di ipotesi ulteriori sul modello di emissione. Si é visto che i gamma ray burst possono essere utilizzati come uno strumento del tutto indipendente dalle supernove per analizzare i modelli cosmologici. É possibile però sfruttare le due classi di oggetti in tandem per estendere a redshift piú elevati il diagramma di Hubble ottenuto con le supernove. Infatti si possono sfruttare i dati ottenuti con le supernove per procurarsi la

calibrazione della relazione di Amati e utilizzarla per ricavare il valore dei moduli di distanza dei GRB. così facendo si rinuncia all'indipendenza dei GRBs dalle SNIa come strumento di analisi ma si ottiene l'enorme vantaggio, nella ricerca dei valori di best fit, di dover massimizzare la probabilità al solo variare dei parametri cosmologici c_p senza dover aggiungere anche i parametri della relazione di Amati. In Appendice illustriamo la calibrazione della relazione di Amati tramite le supernove.

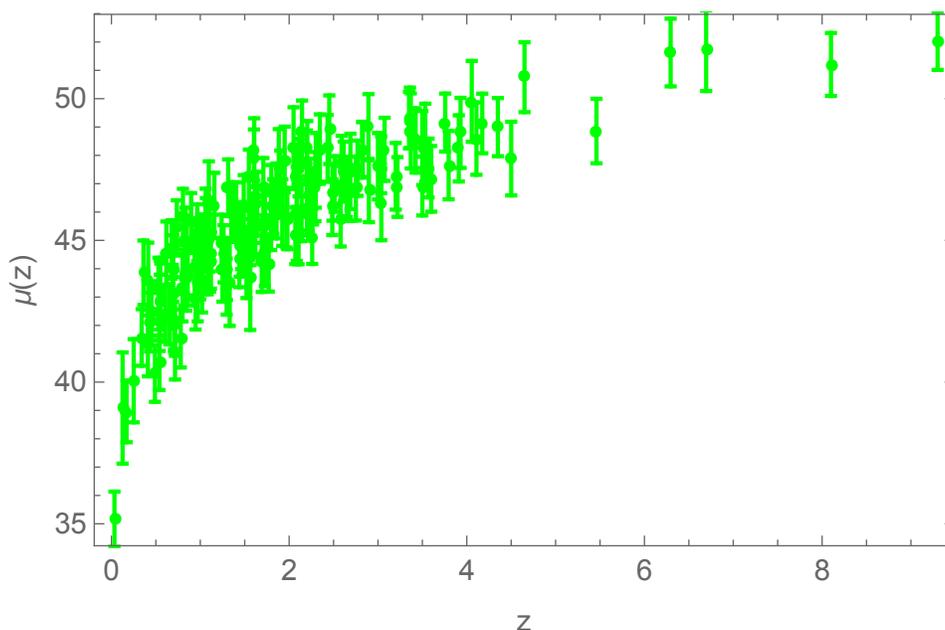


Figura 4.3: Diagramma di Hubble costruito calibrando la relazione di Amati su 212 oggetti.

In fig. (4.3) vediamo il diagramma di Hubble costruito calibrando la relazione di Amati su 212 oggetti, che useremo per la nostra indagine cosmologica.

4.3 Analisi statistica

Lo scopo di questa sezione é quello di quantificare l'effetto della disomogeneità locale descritta tramite l'approccio di Dyer-Roeder sul diagramma di Hubble dei GRBs, costruito usando la calibrazione tramite le supernove. Considereremo un modello di universo spazialmente piatto in cui l'equazione di stato dell'energia

oscura è rappresentata dalla parametrizzazione CPL. In questo caso, quindi, il set di parametri da fittare è $c_p = (\Omega_m, w_0, w_1, \alpha, h)$. Per stimare i parametri c_p si usa il principio di massima verosimiglianza e si considera che la loro migliore stima sia quella per cui si massimizza la funzione di likelihood $L(c_p) \propto e^{-\chi^2(c_p)/2}$, dove

$$\chi^2(c_p) = \sum_{i=1}^{N_{GRB}} \left[\frac{\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i, c_p)}{\sigma_i} \right]^2 + \left(\frac{h - h_{SHOES}}{\sigma_{SHOES}} \right)^2. \quad (4.7)$$

N_{GRB} rappresenta il numero dei GRBs del nostro campione di dati e σ_i è l'errore sull' i -esimo modulo di distanza μ_{obs} ; h rappresenta semplicemente il valore numerico del parametro di Hubble calcolato al tempo odierno e diviso per un fattore cento, mentre h_{SHOES} e σ_{SHOES} sono le stime di h con relativo errore ottenute dall'esperimento SHOES[8]:

$$h_{SHOES} = 0.742 \pm 0.036 \quad (4.8)$$

Nel nostro caso

$$\mu_{th}^{D-R} = 25 + 5 \log D_L, \quad (4.9)$$

dove

$$D_L = (1 + z)^2 D_A \quad (4.10)$$

$$D_A = \frac{c}{H_0} r(z, c_p), \quad (4.11)$$

dove $r(z, c_p)$ è la soluzione dell'equazione di Dyer-Roeder (3.15) con le condizioni iniziali date in (3.16, ed 3.17) Si ha quindi necessità di scrivere un algoritmo che sondi in maniera efficace il nostro spazio dei parametri alla ricerca dei valori di best fit. Abbiamo scelto di utilizzare a tale scopo un metodo Montecarlo basato sulle catene di Markov (MCMC). L'idea che sta alla base dell'algoritmo è che partendo da un punto qualsiasi nello spazio delle fasi, la catena procede ciclo dopo ciclo, spostandosi verso un punto limitrofo al precedente, verificando se in tale direzione vi è o meno una riduzione del valore del χ^2 . Se questo si verifica, la catena prosegue in tale direzione e converge quindi man mano verso il punto di minimo. Per selezionare un punto di partenza delle catene che sia vicino a uno appartenente alla distribuzione ergodica il programma esegue un'analisi preliminare sondando

un gran numero di punti scelti in maniera casuale all'interno di tutto lo spazio delle fasi in cui si è scelto di far variare i parametri. Tali limiti vengono scelti di volta in volta a seconda del modello e del parametro specifico. In ogni punto viene calcolato il χ^2 . La formula 4.7 è la stessa che viene utilizzata anche all'interno delle catene per valutare il χ^2 ad ogni iterazione. Come si vede al suo interno abbiamo incluso un vincolo sulla nostra stima di h (prior gaussiano) che sarà limitata attorno al valore ottenuto dall'esperimento SHOES. Alla fine di ogni ciclo risulta utile sondare in maniera casuale lo spazio delle fasi: viene selezionato il punto corrispondente al χ^2 più basso trovato, che denominiamo x_S . Ogni catena partirà da un valore casualmente scelto nell'intervallo di estremi $[x_S - 0.1x_S, x_S + 0.1x_S]$ e deve continuare le sue iterazioni fino a che la stima raggiunta per i parametri sia accettabile. Abbiamo quindi necessità di stabilire un criterio utile a chiarire cosa si intenda per accettabile e quando sia possibile arrestare le catene.

4.3.1 Criterio Di Gelman Rubin

Si indichi con Ψ la variabile aleatoria che si vuole stimare, che è caratterizzata da un valor medio μ e una varianza σ^2 . Si vuol trovare uno stimatore $\hat{\mu}$ per μ e $\hat{\sigma}^2$ per σ^2 .

La stima che si ottiene dalla catena è affidabile solo se questa non dipende dal punto di partenza scelto, cioè si deve avere che gli elementi della catena stiano tendendo effettivamente a quelli della distribuzione ergodica. Questo suggerisce di non utilizzare una singola catena ma di confrontare i risultati ottenuti da più catene che procedono in parallelo partendo ognuna da un differente punto iniziale, in particolare si utilizzerà come test di convergenza il criterio dovuto a Gelman e Rubin.

Allora supponendo di avere m catene, che procedono in parallelo e indicando con l'indice j quella generica e con Ψ_{jt} il t -esimo elemento della j -esima catena. Come operazione preliminare si eliminano per ogni catena gli elementi iniziali, che si suppone siano ancora lontani dal punto di convergenza, considerandone generalmente solo la seconda metà. Indichiamo con n il numero degli elementi delle catene dopo il dimezzamento.

Utilizzando una singola catena possiamo usare come stimatore del valor medio μ la media dei suoi n elementi

$$\bar{\Psi}_j = \sum_{t=1}^n \Psi_{jt} \quad (4.12)$$

e andando a considerare tutte le m catene possiamo utilizzare come stimatore $\hat{\mu}$ la media dei $\bar{\Psi}_j$

$$\hat{\mu} = \bar{\Psi} = \sum_{j=1}^m \bar{\Psi}_j \quad (4.13)$$

Analogamente per stimare σ^2 si può partire dalla singola catena considerando la varianza W_j degli elementi Ψ_{jt}

$$W_j = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (\Psi_{jt} - \bar{\Psi}_j)^2 \quad (4.14)$$

per poi passare alla media W delle m varianze

$$W = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m W_j \quad (4.15)$$

Un modo alternativo di stimare σ^2 é quello di considerare la varianza del valor medio della j -esima catena rispetto alla media totale $\bar{\Psi}$ invece della varianza degli elementi della catena. Si indichi con B questa quantità

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{\Psi}_j - \bar{\Psi})^2 \quad (4.16)$$

Quindi unendo W e B si può usare $\hat{\sigma}^2$ come stimatore della loro media pesata

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} W + \frac{B}{n} \quad (4.17)$$

Tale valore rappresenta una buona stima della varianza della variabile aleatoria Ψ nel caso che il punto iniziale di ogni catena sia scelto appartenente alla distribuzione ergodica. Si può però dimostrare che nel caso in cui tale punto sia scelto in maniera casuale, come accade nel nostro algoritmo, la varianza all'interno delle catene sarà piú larga ed é possibile stimarla tramite la quantità V

$$V = \frac{n-1}{n}W + \frac{m+1}{m} \frac{B}{n} \quad (4.18)$$

Dopo aver stimato la varianza ottenuta per le nostre catene, per stabilire un criterio di convergenza la si può confrontare con il suo valore effettivo. Si definisce la quantità R , nota come fattore di riduzione di scala, come

$$R = \frac{V}{\sigma^2} \quad (4.19)$$

Se R è prossima all'unità, significa che si è ottenuta una buona stima della varianza e che, quindi, le catene sono molto prossime al punto di convergenza.

Ovviamente vi è la necessità di stimare la quantità R dato che non si conosce direttamente σ^2 . Dato che la varianza delle catene è tanto maggiore di quella reale quanto più le catene sono lontane dal punto di convergenza, si può usare come denominatore la quantità W e calcolare il fattore di riduzione di scala potenziale \hat{R} che rappresenterà di certo una sovrastima di R

$$\hat{R} = \frac{V}{W} \quad (4.20)$$

Perciò se si valuta R dai dati, dalla sua vicinanza all'unità si può concludere se le catene sono vicine o meno alla convergenza. La condizione generale che abbiamo usato per valutare la convergenza è quella di far proseguire le catene fino a giungere ad un fattore di riduzione tale che $R - 1 < 0.1$. Per la nostra analisi si è scelto di utilizzare tre catene di Markov che procedono in parallelo. Una volta valutata la convergenza delle tre catene tramite il criterio di Gelman Rubin, si può procedere alla stima dei parametri c_p . Per fare questo le catene vengono ulteriormente assottigliate eliminando un ulteriore 30% dei dati iniziali, dopodiché si seleziona un elemento ogni step di 10. Le catene ridotte in questo modo vengono infine unite tra loro e dal set di dati risultante viene dedotto il valor medio, che si utilizzerà come miglior stima dei nostri parametri; ed infine vengono stimati i livelli di confidenza. I risultati della nostra analisi sono indicati nella Tabella (4.1).

In Fig. (4.4) confrontiamo i dati sperimentali con la curva di best fit.

CPL Dark Energy in a locally inhomogeneous universe

<i>Id</i>	$\langle x \rangle$	\tilde{x}	68% CL	95% CL
Ω_m	0.49	0.49	(0.15, 0.73)	(0.05, 0.9)
w_0	-1.33	-1.28	(- 1.9, - 0.72)	(-2.4, -0.53)
w_1	0.09	0.15	(-1.65, 1.75)	(-2.38, 2.39)
α	0.66	0.63	(0.6, 0.76)	(0.58, 0.83)
h	0.71	0.7	(0.59, 0.85)	(0.57, 0.91)

Tabella 4.1: Stima dei parametri cosmologici e del parametro di clumpiness α attraverso il diagramma di hubble dei GRBs calibrati per il tramite della correlazione di Amati.

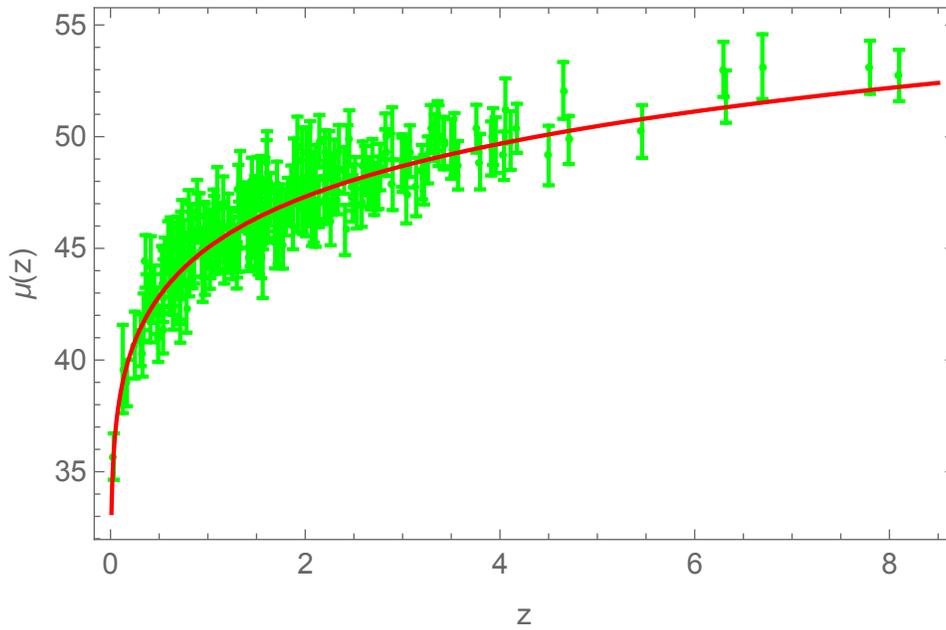


Figura 4.4: Confronto dei dati sperimentali con la curva di best fit $\mu(z)$ vs z

È interessante notare che il valore di $\alpha = 0.66_{-0.06}^{+0.12}$ emerge l'evidenza che localmente l'universo non è omogeneo.

Conclusioni

Negli ultimi decenni una variegata ed abbondante messe di dati osservativi hanno delineato un nuovo ed inatteso volto dell'universo, che si trova in una fase accelerata della sua espansione, contrariamente a quanto previsto dal modello puramente Friedmanniano. Questa straordinaria scoperta ha segnato la nascita di un nuovo modello cosmologico standard, il cosiddetto modello Λ -CDM, caratterizzato da quello che forse è il componente più misterioso del fluido cosmologico: l'energia oscura. Nell'ambito della cosmologia teorica moderna sono stati elaborati molti modelli di energia oscura diversi dalla costante cosmologica. Sebbene ignoriamo la natura di questo misterioso componente del fluido cosmico, sappiamo che, per poter governare l'accelerazione, essa deve essere dotata di una pressione negativa che si contrappone alla forza gravitazionale, e che contribuisce a circa il 70% dell'energia totale dell'universo. Gli studi volti a determinare le proprietà dell'energia oscura, al fine di scoprirne la natura, si muovono nell'ambito dei modelli Friedmanniani, che assumono l'omogeneità e l'isotropia nella distribuzione della materia. Tuttavia l'universo è realmente omogeneo (ed isotropo) solo su scale molto grandi, delle centinaia di Mpc, corrispondenti alla scala dei superammassi. Su scale più piccole è, invece, fortemente disomogeneo. Abbiamo tentato di descrivere, nell'ambito di un modello molto semplice, detto di Dyer-Roeder, l'effetto di queste disomogeneità locali sulla misura delle distanze, confrontando previsioni teoriche e dati osservativi derivanti dal diagramma di Hubble costruito per una particolare classe di *indicatori di distanza*: i Gamma Ray Bursts. Nell'approccio di Dyer-Roeder, si parte dall'equazione per la distanza di diametro angolare - che è la radice quadrata della sezione di un fascio di luce - che viene modificata tramite l'introduzione del cosiddetto parametro di clumpiness, α che rappresenta la frazione di materia non omogenea: $\alpha = 1 - \frac{\rho_{cl}}{\langle \rho_m \rangle}$. Risulta evidente dalla definizione che $0 \leq \alpha \leq 1$. L'equazione così ottenuta è detta equazione di Dyer-Roeder, e governa l'evoluzione in redshift della distanza di diametro angolare, D_A in un universo localmente disomogeneo. La distanza di diametro angolare, dunque, dipende non solo dai parametri del modello cosmologico di riferimento, ma anche dal parametro di clumpiness. La relazione di Etherington ci ha permesso di studiare l'effetto di α anche sulla distanza di luminosità, $D_L = (1+z)^2 D_A$ e sul modulo di distanza $\mu = 25 + 5 \log D_L$. Dopo aver studiato le proprietà analitiche dell'equazione di Dyer-Roeder, che in alcuni casi si rivela essere un'equazione di tipo Fuchsiano, abbiamo quantificato l'effetto della disomogeneità locale sul diagramma di Hubble dei GRBs, costruito calibrando, tramite le supernove, la cosiddetta relazione di Amati. Abbiamo assunto un modello di universo

spazialmente piatto in cui l'equazione di stato dell'energia oscura è rappresentata dalla parametrizzazione CPL. In questo caso, quindi, il set di parametri da fittare è $c_p = (\Omega_m, w_0, w_1, \alpha, h)$. Per stimare i parametri c_p abbiamo usato il principio di massima verosimiglianza e considerato che la loro migliore stima sia quella per cui si massimizza la funzione di likelihood $L(c_p) \propto e^{-\chi^2(c_p)/2}$. Per sondare in maniera efficace il nostro spazio dei parametri alla ricerca dei valori di best fit, abbiamo scelto di utilizzare a tale scopo un metodo Montecarlo basato sulle catene di Markov (MCMC). Dai risultati della nostra analisi emerge l'evidenza che localmente l'universo non è omogeneo: infatti $\alpha = 0.66_{-0.06}^{+0.12}$. Questo risultato, che deve naturalmente essere consolidato da ulteriori e più complesse indagini, che prevedano, per esempio, che il parametro di clumpiness dipenda dal redshift, dimostra come la strada verso la comprensione dell'espansione accelerata dell'universo sia ancora lunga e, probabilmente, ricca di sorprese.

Bibliografia

- [1] L.Amendola, *Introduction to cosmology*, Lecture notes.
- [2] V.Ferrari , L.Gualtieri,P.Pani *General Relativity and its Applications*.
- [3] V.Smirnov *Corso di matematica superiore*, vol.3.
- [4] R.C.Santos, J.A.S.Lima, *ZKDR Distance, Angular Size and Phantom cosmology*, Universidade de São Paulo, pp. 6-10.
- [5] L.Amendola, S.Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations*, Cambridge University Press.
- [6] Demianski M., Piedipalumbo E., Sawant D., Amati L., 2021, MNRAS, 506, 903. doi:10.1093/mnras/stab1669
Demianski M., de Ritis R., Marino A. A., Piedipalumbo E., 2003, A&A, 411, 33. doi:10.1051/0004-6361:20031234.
- [7] R.Kantowski, B.Chen, X.Dai, *Gravitational Lensing Corrections in Flat λ CDM Cosmology*, 2010.
- [8] Riess A. G., Macri L., Casertano S., Sosey M., Lampeitl H., Ferguson H. C., Filippenko A. V., et al., 2009, ApJ, 699, 539. doi:10.1088/0004-637X/699/1/539

Capitolo 5

Appendice

5.1 Equazioni della classe di Fuchs

In questa breve parentesi matematica, si vuole introdurre una classe speciale di equazioni (si consulti [3]), studiate dal matematico tedesco Fuchs verso la metà del 1800. In particolare, esse sono equazioni composte da punti singolari tutti regolari. Prima di proseguire nell'analisi, si definisce un punto singolare regolare:

affinché il punto z_0 sia un punto singolare regolare è necessario che il coefficiente $p(z)$ abbia in z_0 un polo di ordine non superiore al primo e il coefficiente $q(z)$ abbia in z_0 un polo di ordine non superiore al secondo, ovvero che l'equazione abbia la forma

$$w'' + \frac{p_1(z)}{z - z_0} + \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} = 0 \quad (5.1)$$

dove $p(z)$ e $q(z)$ sono delle funzioni olomorfe nel punto z_0 . Si procede ora ad enunciare le proprietà che caratterizzano una generica equazione della classe di Fuchs. Innanzitutto una siffatta equazione si presenta nella forma:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (5.2)$$

Ora, affinché i punti singolari dell'equazione differenziale siano regolari, é necessario che $p(z)$ abbia nell'intorno di $z = \infty$ il seguente sviluppo

$$p(z) = d_1 \frac{1}{z} + d_2 \frac{1}{z^2} \quad (5.3)$$

Analogamente, tenendo conto $q(z)$ può avere un polo di ordine non superiore al secondo, si ottiene

$$q(z) = d'_2 \frac{1}{z^2} + d'_3 \frac{1}{z^3} \quad (5.4)$$

Dunque, affinché il punto all'infinito $z = \infty$ sia un punto singolare regolare dell'equazione 5.2, é necessario e sufficiente che $p(z)$ abbia nel suddetto punto una radice e $q(z)$ una radice di ordine non inferiore al secondo.

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i punti singolari dell'equazione considerata, posti a distanza finita. La funzione $p(z)$ può avere in tali punti dei poli del primo ordine e, in virtù della 5.3, si deve annullare all'infinito, quindi $p(z)$ é una funzione razionale

$$p(z) = \frac{p_1(z)}{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)} \quad (5.5)$$

in cui il grado del numeratore é inferiore almeno di un'unitá a quello del denominatore. Allo stesso modo, tenendo conto della 5.4, si individua la forma di $q(z)$

$$q(z) = \frac{q_1(z)}{(z - \alpha_1)^2 \dots (z - \alpha_n)^2} \quad (5.6)$$

in cui il grado del numeratore é inferiore almeno di due unitá a quello del denominatore.

Ora se si decompongono le funzioni razionali in elementi semplici, é possibile ottenere le espressioni generali per i coefficienti della classe di Fuchs

$$\begin{cases} p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-\alpha_k}, \\ q(z) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z-\alpha_k} \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

Alla luce della 5.4, si ha

$$zq(z) \rightarrow 0 \text{ per } z \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

e la seconda espressione della 5.7 implica che le costanti C_k devono soddisfare la condizione

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0 \quad (5.9)$$

La 5.7 assieme alla 5.9 danno le condizioni necessarie e sufficienti perché l'equazione 5.2 sia un'equazione della classe di Fuchs.

Adesso si può procedere ad individuare le rappresentazioni -in serie di Laurent- di due soluzioni generali delle equazioni di Fuchs, soddisfacenti le condizioni al contorno, nell'intorno del punto singolare

$$\begin{cases} w_1 = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k (z - z_0)^k \\ w_2 = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c''_k (z - z_0)^k \end{cases} \quad (5.10)$$

Tramite le rappresentazioni suddette, é possibile costruire analiticamente le soluzioni di una generica equazione di Fuchs nell'intorno della singolarità, particolarizzandole tramite le condizioni al contorno.

5.2 Calibrazione tramite supernove

Si dividano i dati relativi ai GRB in due sottoinsiemi: il sottoinsieme A relativo ai GRB con redshift $z < 2$, ossia la regione coperta anche dalle supernove, e il sottoinsieme B relativo a quelli con $z > 2$. Si supponga di voler stimare il modulo di distanza $\mu(z)$ relativo ad un GRB $\in A$. Chiamando $\mu(z_i)$, il dato relativo alla supernova piú vicina a z , a partire da quest'ultimo si ordinano la

restante parte del set di dati delle SNIa, $\mu(z_j)$, al crescere delle quantità $|z_j - z_i|$; poi si selezionano gli n punti piú vicini, dove n é scelto arbitrariamente. Si definisce $\Delta = |z_n - z_i|$ come la massima distanza di un punto del sottoinsieme dal punto iniziale z_i . Successivamente sui dati selezionati in questo modo viene eseguito un fit pesato con una polinomiale di ordine uno. Quanto piú vicino sará il punto, maggiore sará il suo peso e per farlo si puó usare, ad esempio, la funzione $W(|z - z_i|)$:

$$W(|z - z_i|) = \left[1 - \left(\frac{|z - z_i|}{\Delta} \right)^2 \right]^2 \quad (5.11)$$

Si sceglie come migliore stima del modulo di distanza $\mu(z)$ l'ordine zero della polinomiale ottenuta.

Sia la scelta del numero n di dati del sottoinsieme, sia della funzione peso, sia della polinomiale utilizzata per il fit é arbitraria. Per n si segue l'indicazione generale che il numero scelto sia tale da restituire un campione statisticamente significativo, ma non sia troppo elevato in modo da permettere un fit con una polinomiale di ordine basso. Utilizzando tale metodo si puó ricostruire il modulo di distanza e quindi della distanza di luminosità dei $\text{GRB} \in A$ e con tali dati é possibile, dalla relazione 4.3, ricavare i rispettivi valori di E_{iso} . Conoscendo quindi sia E_{iso} che $E_{p,i}$ per tutti i $\text{GRB} \in A$ é allora possibile calibrare la relazione di Amati nella regione $z < 2$. D'altra parte si é visto-dai dati attuali- come i parametri a e b risultino indipendenti dal redshift, per cui essi assumeranno lo stesso valore anche nella regione $z > 2$, cosicché la calibrazione effettuata é estendibile in tale regione.

Dai valori misurati di $E_{p,i}$ per i $\text{GRB} \in B$ é allora possibile ricavare i valori di E_{iso} grazie alla relazione di Amati cosí calibrata e, tramite la 4.4, risalire ai valori delle distanze di luminosità e dei moduli di distanza. Questa tecnica permette quindi di ricostruire l'intero diagramma di Hubble per tutti i GRB di cui é conosciuto il redshift.